

# 数学百科全书

---

第五卷

Sto — Z

索引

科学出版社



# 数 学 百 科 全 书

第 五 卷

Sto — Z

索 引

科 学 出 版 社

2 0 0 0



## 内 容 简 介

本书由三类条目组成。首先是介绍数学的各个主要方向的综述性条目(采用了一种很好的分科办法),对这类条目的基本要求是尽可能通俗全面地阐明有关领域发展的现状;这些条目一般可供大学数学系学生和数学邻近领域的研究生阅读,根据专业需要,还可供在工作中用到数学方法的其他科学领域的专家、工程师和数学教师阅读。其次,是一些中等篇幅的条目,专门介绍某些具体的数学问题和方法,这类条目内容较深,是为水平较高的读者而写的。最后,还有一类简短的条目,可供查阅定义时参考。本书附有主题索引,其中不仅包括所有条目的标题,还包括在前两类条目中给出定义的许多概念,以及在条目中提到的一些最重要的结果。多数条目附有参考文献。这部大型数学工具书的功能是很齐全的,读者范围是十分广泛的。

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И. М. ВИНОГРАДОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ»

© 1977—1986, Vol. 1—5

The Great Encyclopedia of Russia Publishing House

责任编辑 杜小杨 夏墨英 张鸿林

特邀编辑 葛显良 戴中器 沈海玉

## 数 学 百 科 全 书

### 第 五 卷

《数学百科全书》编译委员会 编译

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2000年12月第一版 开本:787×1092 1/16

2000年12月第一次印刷 印张:61 1/4

印数:0 001—3 000 字数:2 093 000

ISBN 7-03-006427-5/O·985

定价:148.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

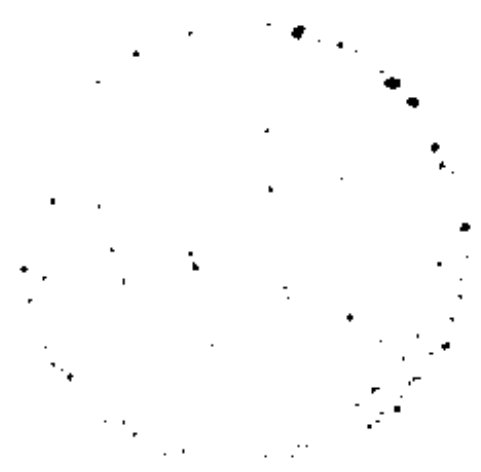


數學百科全書

蘇步青題







# 《数学百科全书》

(第五卷)

编译委员会

顾    问	苏步青	陈省身	吴文俊	程民德
	王  元	杨  乐		
主任委员 委    员	张恭庆	严士健*	石钟慈*	谈德颜
	丁伟岳	马志明	文志英	王仁宏
	王建磐	冯克勤	刘应明	任南衡
	李大潜	李文林	李炳仁	邬华谟
	张文修	陈天权	陈木法	陈翰馥
	林  群	侯自新	黄玉民	彭立中
	潘承洞	潘承彪*	张鸿林*	杜小杨*
	葛显良			

(加\*号者为常务委员)



## 序

在人类的思想史上，数学有一个基本和独特的地位。几千年来，从巴比伦的代数、希腊的几何、中国、印度、阿拉伯的数学，直到近代数学的伟大发展，虽然历史有时中断，但对象和方法则是一致的。数学的对象不外“数”与“形”，虽然近代的观念，已与原始的意义，相差甚远。数学的主要方法，是逻辑的推理。因之建立了一个坚固的思想结构。这些结果会对其他学科有用，是可以预料的。但应用远超过了想象。数学固然成了基本教育的一部分。其他科学也需要数学作理想的模型，从而发现相应科学的基本规律。

在这样蓬勃的发展中，数学的任务是艰巨的：它既需充实已有的基础，还需应付外来的冲击。一部完整的数学百科全书，便有迫切的需要。但兹事体大，许多合格的数学家，都望而却步。

我们有幸有这一套苏联的《数学百科全书》。它对数学的贡献，将无法估计。我们要了解，数学是一种“活”的学问：它的内容，不断在变化，在进展。我们现在大学研究院数学活动的内容，大部分在五十年前是不存在的，其他一部分则是昔贤伟大思想的精华，将历久而弥新。我建议《百科全书》每两年出一附录，包括新项目和旧项目的重写。如有佳构，不必拘泥编辑的方针。《百科全书》每隔若干年宜有新版。

面对着这座巨大的建筑，令人惶惑。百科全书原不为有涯之身所能控制的。数学工作者的使命在对某些选定的项目，增加了解和探索。本书将便利他们思考范围的推广。

我相信数学将有一个黄金时代，其中将有多数的中国数学家参加。希望本书能起相当的作用。

陳省身



## 出版说明

数学的重要性是尽人皆知的。一个人从进小学开始到大学毕业为止，不论哪个专业，学习数学的时间至少都有 12 年至 14 年之久。一些自然科学领域，如天文学、力学、物理学、化学等，以及各工程技术学科，历来都是以数学为基础的。随着电子计算机的迅速发展和普及，生命科学、地学、军事科学和管理科学等方面也愈来愈多地用到数学，使这些学科从定性研究向定量研究发展。

由于数学所用的方法是逻辑推导，它有严格的定义和特定的符号，它的研究对象是抽象的数量关系和空间形式，没有相当的训练和基础知识的人是难于入门的，所以数学又使人望而生畏。另一方面，数学发展很快，文献数量呈指数增加，浩如烟海。一个人很难了解数学的许多方面，这就加重了数学发展和应用的困难。

苏联大百科全书出版社从 1977 年到 1986 年，历时 10 年，出版了苏联科学院院士、世界著名数学家 ИМ 维诺格拉多夫 (Виноградов) 主编、几百位数学家共同撰写的一部《数学百科全书》(Математическая энциклопедия)，约 900 万字。它的重要性是极为显著的。不久，荷兰的莱德出版公司出版了由 180 位西方数学家参加翻译的英文版 (Encyclopaedia of mathematics)。英文版增补了大量最新成果、重要的西方文献和编者注，因而其内容更加充实和完善。

苏联《数学百科全书》出版后，我国很多著名数学家和数学教师纷纷要求将这部书译成中文出版，使我国广大科学工作者（特别是数学工作者）、工程技术人员、教师和学生有一部内容极其丰富的工具书，可以从中查阅所需要的数学知识及作进一步了解的线索。这无疑是一件十分重要的事情。

中国数学会常务理事会经过认真讨论，完全支持我国广大数学家和科技人员的要求，决定领导这部《数学百科全书》的编译工作，并将它列为



中国数学会最重要的工作之一；随后，立即成立了编译委员会，负责具体的组织工作。由于我国广大数学家的热情支持和参加，所以编译工作进展比较顺利。必须指出，科学出版社始终将这项工作作为该社的一项重点任务来抓，编辑人员为此付出了长期的艰苦劳动。

本书中文版分五卷，包括了俄文版的全部内容和英文版增补的内容。为尽快出版，条目按英文字母顺序排列。在第五卷中，附有详尽的中文和外文索引。

本书除中文简体字版本以外，还有繁体字版，繁体字版由台湾九章出版社出版发行。这也是海峡两岸数学家和出版界人士的一次良好合作。

老一辈数学家苏步青教授为本书题写书名，陈省身教授作序，苏步青、陈省身、吴文俊、程民德教授应邀担任编译委员会顾问。对于他们的支持，谨致以衷心的感谢！

最后，对于书中欠妥和错误之处，还望读者不吝指教。

**《数学百科全书》编译委员会**

本书由河北省雄县电脑服务部排版。谨此致谢！



## 编 译 人 员 名 单

丁德成	卫念祖	马传渔	王 杰	王 驹	王仁宏	王公恕	王世强	王克仁
王志玺	王声望	王伯英	王斯雷	仇庆久	牛凤文	方嘉琳	邓邦明	石生明
叶其孝	叶彦谦	叶家琛	卢景波	史应光	史树中	白苏华	冯绪宁	冯德兴
成 斌	吕义忠	朱治强	朱学贤	朱建平	朱胜林	刘木兰	刘永平	刘先仿
刘秀芳	刘和平	刘振宏	刘椿年	刘德辅	齐民友	庄峰青	许以超	许永华
许依群	孙以丰	孙永生	孙和生	孙智伟	杜 宏	杜小杨	杜瑞芝	杨 路
杨东屏	杨吟林	杨劲根	杨恩辉	杨维奇	苏开乐	苏维宜	李 乔	李 廉
李国英	李贵松	李荫藩	李炳仁	李家楷	李维新	李慧陵	肖 杰	别荣芳
吴启光	吴绍平	吴炯圻	何 青	何育赞	佟文庭	余庆余	余建明	沈 青
沈一兵	沈世鎰	沈永欢	沈纯理	沈信耀	沈复兴	沈祖和	沈海玉	宋方敏
张 平	张印火	张再跃	张英伯	张明尧	张宝琳	张爱和	张景中	张鸿林
张锦文	陆柱家	陆珊年	陈一元	陈公宁	陈世华	陈式刚	陈志华	陈志杰
陈希孺	陈怀惠	陈迪荣	陈培德	陈维桓	陈翰馥	林亚南	林向岩	林金坤
罗里波	罗嵩龄	周芝英	周民强	周伯坝	周荫清	周概容	孟道骥	金保侠
郑应平	郑忠国	郑恒武	郑洪琛	郑维行	郑锡忠	胡师度	胡宣达	郝炳新
赵希顺	赵春来	钟 集	钟同德	钟萃豪	侯纪欣	侯晓荣	段海豹	姜国英
骆 源	袁国兴	莫绍揆	夏小华	晏名文	钱宝峰	钱敏平	徐广善	徐定宥
徐森林	徐锡申	郭元春	郭聿琦	郭思旭	郭祥东	高为炳	高红铸	高琪仁
唐 云	唐梓洲	唐福林	唐锦荣	容尔谦	诸德超	陶 波	陶仁骥	陶懋颀
黄 琳	黄正中	黄且圆	黄华乐	曹成铉	龚明鹏	戚余录	戚鸣皋	睦跃飞
符方伟	章 璞	韩继业	韩耀新	彭联刚	葛显良	蒋正新	蒋志根	蒋滋梅
程 虎	程民德	鲁世杰	曾振柄	谢晖春	蓝以中	虞言林	鲍 丰	蔡大用
蔡传仁	蔡贤德	蔡金星	裴定一	潘一民	潘文杰	潘建中	潘承彪	潘养廉
薛春华	戴中器	戴执中	檀结庆					



随机逼近 [stochastic approximation; стохастическая аппроксимация]

一类统计估计 (statistical estimation) 问题的求解方法. 用这种方法求解, 估计量的新值是基于新观测值对已有估计值的修正. 第一个随机逼近的方法是 H. Robbins 和 S. Monro 于 1951 年提出的.

设函数  $R(x) (x \in \mathbb{R}^1)$  在点  $X_n$  的每一观测值  $Y_n(X_n)$ , 都含均值为 0 的随机误差. Robbins-Monro 随机逼近方法 (Robbins-Monro procedure of stochastic approximation) 以

$$X_{n+1} = X_n + a_n [Y_n(X_n) - \alpha] \quad (1)$$

的形式求方程  $R(x) = \alpha$  的根. 假如  $\sum a_n = \infty$ ,  $\sum a_n^2 < \infty$ ,  $R(x)$  (例如) 是增函数,  $|R(x)|$  不比线性函数增长得快, 随机误差相互独立, 则  $X_n$  以概率 1 和在均方意义下收敛于方程  $R(x) = \alpha$  的根  $x_0$  (见 [1], [2]). 由 (1) 可见, 随机逼近法是递归的, 它不必记忆旧的测量结果  $Y_n$  即可得到新的估计值. 在事先不知何时需要提取估计值的情形下, 随机逼近法便于根据当时的观测不间断地形成估计值. 这些特点, 使随机逼近法接近递归滤波, 并且决定随机逼近法在理论工作和实际工作中应用的广泛性. 方法 (1) 可以直接推广到多维情形.

另一种随机逼近法属于 J. Kiefer 和 J. Wolfowitz, 用于求回归函数  $R(x)$  的极大值点. 设  $Y_n(x)$  是在点  $x$  处的观测值, 则 Kiefer-Wolfowitz 随机逼近方法 (Kiefer-Wolfowitz procedure of stochastic approximation) 取形式

$$X_{n+1} - X_n = \frac{Y_n(X_n + C_n) - Y_n(X_n - C_n)}{2C_n} \quad (2)$$

可以证明,  $X_n$  收敛于函数  $R(x)$  的极大值点  $x_{\max}$ , 假如满足如下条件: 当  $x \neq x_{\max}$  时  $R'(x)(x - x_{\max}) < 0$ ; 当  $|x| \rightarrow \infty$  时, 回归函数和随机误差的方差增长的不是太快; 并且

$$a_n > 0, \sum C_n = \infty, C_n \rightarrow 0, \sum a_n C_n < \infty, \sum \frac{a_n^2}{C_n^2} < \infty, C_n \rightarrow 0.$$

Kiefer-Wolfowitz 随机逼近法也容许多维推广, 这时式 (2) 右侧应为函数  $Y_n(x)$  的梯度的近似值.

随机逼近法可以自然地推广到连续观测过程. 例如, 假如观测过程受 Gauss 白噪声的干扰, 则与方法

(1) 的类似取形式

$$dX(t) = a(t) dY(t),$$

其中

$$dY(t) = R(X(t))dt + \sigma(X(t), t)dw(t)$$

是被观测过程的微分,  $w(t)$  是 Wiener 过程 (Wiener process). 连续方法的收敛条件, 与上面对离散时间引进的条件类似 (见 [2]). 证明随机逼近法收敛性的基本工具, 是关于非负上鞅的收敛定理 (见鞅 (martingale)).

研究了当  $n \rightarrow \infty$  时, 在差  $X_n - x_0$  的相应范数下的极限性质. 在式 (1) 中设

$$a_n = an^{-1}, Y_n(X_n) = R(X_n) + G(n, X_n, \omega),$$

且当  $n \rightarrow \infty$  时几乎必然  $X_n \rightarrow x_0$ . 在某些条件下, 其中主要是: 当  $n \rightarrow \infty, x \rightarrow x_0$  时, 有

$$R'(x_0) < 0, aR'(x_0) + \frac{1}{2} < 0,$$

$$EG^2(n, x, \omega) \rightarrow S_0,$$

可以证明, 随机变量  $Z_n = \sqrt{n} (X_n - x_0)$  有渐近正态分布, 参数为 0 和  $a^2 S / [-2aR'(x_0) - 1]$ . 当  $a_0 = -[R'(x_0)]^{-1}$  时极限分布的方差最小. 这样选择  $a$  是不可能的, 因为函数  $R(x)$  及其导数对于观测者是未知的. 不过, 在一些工作中建立了适应性方法, 使  $a = a(n)$  依赖于观测且当  $n \rightarrow \infty$  时趋向  $a_0$ . 这些方法的相对渐近方差具有渐近最优性.

在多维情形下也有渐近正态性的结果. 设矩阵

$$A = a \frac{\partial R}{\partial x}(x_0) + \frac{1}{2} I$$

的全部根都有非负的实部 ( $I$  是单位矩阵), 当  $n \rightarrow \infty, x \rightarrow x_0, X_n \rightarrow x_0$  时, 几乎必然有

$$EG(n, x, \omega)G^*(n, x, \omega) = S(n, x) \rightarrow S_0;$$

此外, 假设满足其他一些不十分强的条件. 那么, 随机向量  $Z_n = \sqrt{n} (X_n - x_0)$  有渐近正态分布, 均值为 0, 协方差矩阵为

$$S = a^2 \int_0^\infty \exp(At) S_0 \exp(A^*t) dt.$$

前面引进的 Robbins-Monro 渐近最优方法的有关结果亦可推广到多维情形. 已经证明, 在对数尺度下, 随机过程  $Z_n$  收敛于 Gauss Марков 过程. 在某些条件下证明了, 随机变量  $X_n$  的矩收敛于极限分布



## 2 STOCHASTIC BASIS

的矩。在非参数情形下，随机逼近法是很方便的，因为在缺乏关于回归函数的先验信息时它仍然能应用。不过，这种方法也用于根据密度为  $f(x; \theta)$  的独立观测值  $X_1, \dots, X_n$  来估计参数  $\theta$ 。在某些条件下，由递推公式

$$\theta_{n+1} - \theta_n = \frac{1}{n} I^{-1}(\theta_n) \text{grad}_{\theta} \ln f(X_{n+1}, \theta_n)$$

得到的估计量，是参数  $\theta$  的相合及渐近有效递归估计量，其中  $I(\theta)$  是密度  $f$  的 Fisher 信息矩阵 (information matrix)。在连续时间的情形下，有类似的方法。

对回归函数有若干个零点 (若干个极值点) 的情形，以及对随机逼近法的各种变形和推广，研究了随机逼近法的性质。

### 参考文献

- [1] Wasan, M. T., Stochastic approximation, Cambridge Univ. Press, 1969.
- [2] Невельсон, М. Б., Хасьминский, Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, М., 1972 (英译本: Nevel'son, M. B. and Khas'minskii, R. Z., Stochastic approximation and recursive estimation, Amer. Math. Soc., 1976).
- [3] Цыпкин, Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах, М., 1968 (英译本: Tsypkin, Ya. Z., Adaption and learning in automatic systems, Acad. Press, 1973).
- [4] Цыпкин, Я. З., Основы теории обучающих систем, М., 1968 (英译本: Tsypkin, Ya. Z., Foundations of the theory of learning systems, Acad. Press, 1973).

Р. З. Хасьминский 撰

【补注】随机逼近的收敛性以及其它递推算法已成为许多研究的对象。方法之一是“常微分方程法”([A1], [A2])，基于将 (1) 和 (2) 的适当度量的变式，视为常微分方程或随机微分方程的解的 Euler 逼近。算法的渐近性质，与相应的常微分方程或随机微分方程解的稳定性有关。还引进了基于紧性和弱收敛性的一些方法。

### 参考文献

- [A1] Kushner, H. J. and Clark, D. S., Stochastic approximation methods for constrained and unconstrained systems, Springer, 1978.
  - [A2] Ljung, L., Analysis of recursive stochastic algorithms, IEEE Trans Autom. Control, AC-22 (1977), 551 - 575.
- 周概容 王健 译

### 随机基 [stochastic basis; стохастический базис]

一个完全概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ，具有子  $\sigma$  代数  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$  的上升族  $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ，这个族满足 (所谓通常) 条件：

1) 它必须是右连续的： $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} (= \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s)$ ， $t \geq 0$ ；

2) 它必须是完全的，即  $\mathcal{F}_t$  包含一切来自  $\mathcal{F}$  的  $P$  测度为零的子集。

对随机基也常使用记号  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  或  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ 。

А. Н. Ширяев 撰

【补注】通常称  $\sigma$  代数的上升族为  $\sigma$  域流 (filtration)。

刘秀芳 译 陈培德 校

随机有界性 [stochastic boundedness; стохастическая ограниченность]，依概率有界性 (boundedness in probability)

由如下条件表达的随机过程 (stochastic process)  $X(t)$  ( $t \in T$ ) 的性质：对任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $C > 0$ ，使对所有  $t \in T$ ，

$$P\{|X(t)| > C\} < \varepsilon.$$

А. В. Прохоров 撰 潘一民 译

随机连续性 [stochastic continuity; стохастическая непрерывность]

随机过程 (stochastic process) 的一种性质。在集合  $T \subseteq \mathbb{R}^1$  上定义的随机过程  $X(t)$  称为在  $T$  上随机连续的 (stochastically continuous)，如果对任意  $\varepsilon > 0$  和一切  $t_0 \in T$ ，

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P\{\rho[X(t), X(t_0)] > \varepsilon\} = 0,$$

其中  $\rho$  是  $X(t)$  的值在相应空间中两点之间的距离。

### 参考文献

- [1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本: Prokhorov, Yu. V. and Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1979).

А. В. Прохоров 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

随机收敛 [stochastic convergence; стохастическая сходимость]

同依概率收敛 (convergence in probability)。

随机相依性 [stochastic dependence; стохастическая зависимость]，概率相依性 (probabilistic dependence)，统计相依性 (statistical dependence)

随机变量之间的一种相依性，它用任意一个变量当其他变量变化时其条件分布的改变来表示。随机相依性有许多形式：如果随机变量不相互独立，则必定具有或大或小的随机相依性。最普通的随机相依性类型之一称为相关 (见相关 (统计中的)) (correlation (in statistics))；回归 (regression)。随机相依性的具体形式，研究最多的是 Марков 相依性 (见 Марков 链 (Markov chain)；Марков 过程 (Markov process))；

Марков 性质 (Markov property)).

亦见随机过程 (stochastic process); 平稳随机过程 (stationary stochastic process).

А. В. Прохоров 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

随机微分 [stochastic differential; стохастический дифференциал]

一种关于随机基  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  的半鞅类  $S$  中的每个过程  $X = (X_t, \mathcal{F}_t, P)$  用公式

$$(dX)f = X_t - X_s, I = (s, t],$$

定义的随机区间函数  $dX$ . 在随机微分族  $dS = \{dX: X \in S\}$  中用下面公式引入过程的加法 (A), 过程的乘法 (M) 及乘积算子 (P):

$$(A) dX + dY = d(X + Y);$$

(M)  $(\Phi dX)(s, t] = \int_s^t \Phi dX$  (随机积分 (stochastic integral),  $\Phi$  是局部有界可料过程且适应于  $\sigma$  域流  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ );

(P)  $dX \cdot dY = d(XY) - X_- dY - Y_- dX$ , 其中  $X_-$  和  $Y_-$  是  $X$  和  $Y$  的左连续等价形.

由它得出

$$\begin{aligned} (dX \cdot dY)(s, t] &= \\ &= \text{l.i.p} \sum_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}), \end{aligned}$$

其中  $\Delta = (s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t)$  是区间  $(s, t]$  的任意分割, l.i.p 是依概率极限, 而  $|\Delta| = \max_i |t_i - t_{i-1}|$ .

在随机分析中, 随机函数的微分原理或伊藤公式 (Itô formula) 是重要的. 如果  $X^1, \cdots, X^n \in S$  且函数  $f(x_1, \cdots, x_n) \in C^2$ , 则

$$Y = f(X^1, \cdots, X^n) \in S$$

且

$$\begin{aligned} df(X^1, \cdots, X^n) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i f \cdot dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f \cdot dX^i dX^j, \quad (1) \end{aligned}$$

其中  $\partial_i$  是对第  $i$  个坐标的偏导数. 特别是, 如果  $X \in S$ , 则由 (1) 可得

$$\begin{aligned} f(X_t) &= \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_{s-}) d\langle X \rangle^c + \\ &+ \sum_{0 < s \leq t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s], \quad (2) \end{aligned}$$

其中  $X^c$  是  $X$  的连续鞅部分,  $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$ .

公式 (2) 可用下述形式给出:

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-}) dX_s + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_{s-}) d[X, X]_s + \sum_{0 < s \leq t} [f(X_s) - \\ &- f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s - \frac{1}{2} f''(X_{s-}) (\Delta X_s)^2], \end{aligned}$$

其中  $[X, X]$  是  $X$  的二次变差.

参考文献

- [1] Itô, K. and Watanabe, S., Introduction to stochastic differential equations, in K. Itô (ed.): Proc. Int. Symp. Stochastic Differential Equations, Kyoto, 1976, Wiley, 1978, I - XXX.
- [2] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982.

【补注】乘积  $dX \cdot dY$  更常写作  $d[X, Y]$ , 其中“方括号”  $[X, Y]$  是一个具有有限变差的过程, 使得  $[X, Y]_t = X_0 Y_0 + dX \cdot dY(0, t]$ . 当  $X = Y$  时, 得到二次变差  $[X, X]$ , 它被用在本条末. 实际上, 它是概率二次变差: 当  $X$  是标准 Brown 运动时,  $d[X, X]$  是 Lebesgue 测度, 而轨道真实的二次变差几乎必然是无穷的. 亦见半鞅 (semi-martingale); 随机积分 (stochastic integral); 随机微分方程 (stochastic differential equation).

对非平坦流形连续轨道随机过程的研究, 伊藤随机微分是不方便的, 因为伊藤公式 (2) 与联系着不同坐标系的通常微分规则不相容. 使用 Стратонович 微分 (Stratonovich differential), 可以得到一个与坐标无关的描述方法. 见 [A1], [A2], 第 5 章, [A3], 以及 Стратонович 积分 (Stratonovich integral).

参考文献

- [A1] Elworthy, K. D., Stochastic differential equations on manifolds, Cambridge Univ. Press, 1982.
- [A2] Ikeda, N. and Watanabe, S., Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland, 1989, p. 97 ff.
- [A3] Meyer, P. A., Geometric stochastiques sans larmes, in J. Azéma and M. Yor (eds.): Sem. Probab. Strassbourg XV, Lecture Notes in Math., Vol. 850, Springer, 1981, 44 - 102.
- [A4] Karatzas, I. and Shreve, S. E., Brownian motion and stochastic calculus, Springer, 1988.
- [A5] Rogers, L. C. G. and Williams, D., Diffusion, Markov processes, and martingales, 2, Itô calculus, Wiley, 1987.
- [A6] Alberverio, S., Fenstad, J. E., Høegh-Krohn, R. and Lindstrøm, T., Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics, Acad. Press, 1986.

刘秀芳 译 陈培德 校



#### 4 STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

随机微分方程 [stochastic differential equation; стохастическое дифференциальное уравнение], 对一个过程  $X = X(t)_{t \geq 0}$  关于 Wiener 过程  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  的形如

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)dW_t, X_0 = \xi \quad (1)$$

的一个方程, 其中  $a(t, X)$  和  $b(t, X)$  是非预料的泛函, 而随机变量  $\xi$  起着初始值的作用. 对随机微分方程的解有两种不同的概念——强的和弱的.

设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是具有上升  $\sigma$  代数族  $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  的概率空间,  $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  是一个 Wiener 过程. 称连续随机过程  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  是随机微分方程 (1) 的具有漂移系数  $a(t, X)$ , 扩散系数  $b(t, X)$  和初始值  $\xi$  的强解 (strong solution), 如果对一切  $t > 0$ , 以概率 1 有

$$X_t = \xi + \int_0^t a(s, X)ds + \int_0^t b(s, X)dW_s, \quad (2)$$

其中假定 (2) 中的积分有定义.

关于形如

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (3)$$

的随机微分方程的强解的存在和唯一性的第一个一般结果由伊藤得到. 他证明了如果对一切  $t > 0$ , 函数  $a(t, x)$  和  $b(t, x)$  关于  $x$  满足 Lipschitz 条件且增长不比线性更快, 则方程 (3) 的连续解  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  存在且在下述意义上是唯一的: 如果  $Y = (Y_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  是另一个连续解, 则

$$P \left\{ \sup_{s \leq t} |X_s - Y_s| > 0 \right\} = 0, t \geq 0.$$

如果  $b(t, x) = \text{常数}$ , 漂移系数 (向量)  $a(t, x)$  的可测性和有界性保证了 (3) 的强解的存在和唯一性. 方程  $dX_t = a(t, X)dt + dW_t$ , 一般地说, 对任意有界的非预料泛函  $a(t, X)$  都没有强解.

当研究随机微分方程 (1) 的弱解概念时, 概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  及其  $\sigma$  代数族  $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , Wiener 过程  $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  以及随机变量  $\xi$  都不必预先固定, 而对连续函数  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  定义的非预料泛函  $a(t, X)$ ,  $b(t, X)$  以及分布函数  $F(x)$  (可谓初始值) 是给定的. 那么对给定的  $a(t, X)$ ,  $b(t, X)$  及  $F(x)$ , 方程 (1) 的弱解 (weak solution) 理解为下述对象的集合:

$$\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, \tilde{W} = (\tilde{W}_t)_{t \geq 0},$$

$$\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \geq 0}, \tilde{P}),$$

其中  $\tilde{W} = (\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$  是关于  $((\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, \tilde{P})$  的 Wiener 过程, 而  $\tilde{W}$  和  $\tilde{X}$  用

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_0 + \int_0^t a(s, \tilde{X})ds + \int_0^t b(s, \tilde{X})d\tilde{W}_s$$

相联系, 且  $\tilde{P}(\tilde{X}_0 \leq x) = F(x)$ . 有时“弱解”这一术语只应用于出现在集合  $\tilde{\mathcal{F}}$  中的过程  $\tilde{X}$ . 方程 (3) 的弱解在较弱的条件下存在. 例如, 只要  $b^2(t, x) \geq c > 0$ ,  $b^2(t, x)$  是关于  $(t, x)$  连续的,  $a(t, x)$  关于  $(t, x)$  可测以及  $|a| + |b| \leq \text{常数}$ , 就足够了.

半鞅 (semi-martingale) 和随机测度的随机积分 (stochastic integral) 理论的发展导致对更一般的随机微分方程的研究. 其中半鞅和随机测度用作生成元 (与 Wiener 过程一起). 下述结果是典型的: 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是一概率空间,  $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  是一上升  $\sigma$  代数族,  $Z = (Z_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  是  $m$  维半鞅, 并设  $G(t, X) = \|g^{ij}(t, X)\|_{ij}$  是由非预料泛函  $g^{ij}(t, X)$  组成的矩阵, 使得

$$|g^{ij}(t, X) - g^{ij}(t, Y)| \leq L_t^{ij} \sup_{s \leq t} |X_s - Y_s|,$$

其中  $L_t^{ij}$  关于  $t$  增长得不太快, 则随机微分方程  $dX_t = G(t, X)dZ_t$ ,  $X_0 = 0$  有唯一的强解.

如果函数  $a(t, x)$  和  $b(t, x)$  ( $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ ) 满足 Lipschitz 条件 (关于  $x$ ) 且增加得不比线性快, 则方程 (3) 的解 (在随机等价 (stochastic equivalence) 的意义上唯一)  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  是一个 Марков 过程. 并且, 如果  $a(t, x)$  和  $b(t, x)$  对所有变量是连续的, 则这一解是扩散过程. 使用随机微分方程, 仅从 Wiener 过程出发即可构造 Марков 过程和扩散过程.

给定关于函数  $a(t, x)$  和  $b(t, x)$  的某些额外的光滑性条件, 方程 (3) 具有初始条件  $X_0^x = x$  的解  $(X_t^x)_{t \geq 0}$ , 是使得函数  $u(s, x) = E f(X_s^x)$  (给定充分光滑的函数  $f(x)$ ) 满足以下向后 Колмогоров 方程的过程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(s, x)}{\partial s} + a(s, x) \frac{\partial u(s, x)}{\partial x} + \\ + \frac{b^2(s, x)}{2} \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} = 0, \end{aligned}$$

在区域  $s \in (0, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , 具有边界条件

$$\lim_{s \downarrow 0} u(s, x) = f(x).$$

#### 参考文献

- [1] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982 (英译本: Gikhman, I. I. and Skorohod, A. V., Stochastic differential equations and their applications, Springer, 1972).
- [2] Липсер, Р. Ш., Ширяев, А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974 (英译本: Liptser, R. Sh. and Shiryaev, A. N., Statistic of random processes,

1 - 2, Springer, 1977 - 1978). A. H. Ширяев 撰

# 【补注】

- [A1] Arnold, L., Stochastic differential equations, Wiley, 1974 (译自俄文).
- [A2] Bunke, H., Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufällige Parametern, Akademie Verlag, 1972.
- [A3] Freedman, A., Stochastic differential equations and applications, 1, Acad. Press, 1975 (中译本: A. 弗里德曼, 随机微分方程及其应用, 科学出版社, 1983 - 1986).
- [A4] Hasminski, R. Z., Stochastic stability of differential equations, Sijthoff & Noordhoff, 1980 (译自俄文).
- [A5] Ikeda, N. and Watanabe, S., Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland, 1981.
- [A6] Soong, T. T., Random differential equations in science and engineering, Acad. Press, 1973.
- [A7] Srinivasan, S. K. and Vasudevan, R., Introduction to random differential equations and their applications, Amer. Elsevier, 1971.
- [A8] Stratonovich, R. L., Topics in the theory of random noise, 1 - 2 Gordon & Breach, 1963 - 1967.
- [A9] Stroock, D. W. and Varadhan, S. R. S., Multi-dimensional diffusion processes, Springer, 1979.
- [A10] Gard, Th., Introduction to stochastic differential equations, M. Dekker, 1988.
- [A11] Øksendahl, B., Stochastic differential equations, Springer, 1987.
- [A12] Protter, P., Stochastic integration and differential equations, Springer, 1990.
- [A13] Albeverio, S. and Röckner, M., Stochastic differential equations in infinite dimensions: solutions via Dirichlet forms, *Probab. Th. Rel. Fields*, 89 (1991), 347 - 386.
- [A14] Elworthy, K. D., Stochastic differential equations on manifolds, Cambridge Univ. Press, 1982.
- [A15] Emery, M., Stochastic calculus in manifolds, Springer, 1989 (P. A. Meyer: 附录).
- [A16] Sobczyk, K., Stochastic differential equations. With applications to physics and engineering, Kluwer, 1991.

刘秀芳 译 陈培德 校

## 随机等价 [stochastic equivalence; стохастическая эквивалентность]

随机变量之间的等价关系, 它们仅在零概率集上有差别. 更严格地说, 定义在同一概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的两个随机变量  $X_1$  和  $X_2$  称为随机等价的 (stochastically equivalent), 如果  $P\{X_1 = X_2\} = 1$ . 在绝大多数概率论问题中处理的都是等价的随机变量类而不是随机变量本身.

定义在同一概率空间上的两个随机过程  $X_1(t)$  和

$X_2(t)$  ( $t \in T$ ) 称为是随机等价的 (stochastically equivalent), 如果对任意  $t \in T$ , 相应地随机变量之间的随机等价性成立:  $P\{X_1(t) = X_2(t)\} = 1$ . 关于随机过程, “随机等价”有时也用在具有相同有限维分布的随机过程  $X_1(t)$  和  $X_2(t)$  这种广泛的意义上.

A. B. Прохоров 撰

【补注】 随机变量或随机过程的随机等价类的成员有时被看作等价类中成员的一个等价型 (version). 随机变量或随机过程的一个等价型也称为一个修正 (modification).

## 参考文献

- [A1] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984, p. 390.
- [A2] Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., The theory of stochastic processes, 1, Springer, 1974, p. 43 ff (译自俄文).
- [A3] Dellacherie, C., Capacités et processus stochastiques, Springer, 1972, p. 46.
- [A4] Skorohod, A. V., Random processes with independent increments, Kluwer, 1991, p. 9 (译自俄文).
- [A5] Liptser, R. Sh. and Shiryaev, A. N., Theory of martingales, Kluwer, 1989, p. 4 (译自俄文).

刘秀芳 译 陈培德 校

## 随机对策 [stochastic game; стохастическая игра]

一种动态对策 (dynamic games), 这时转移分布函数不依赖于对策的历史, 即

$$F(x_k | x_1, s^{(x_1)}, \dots, x_{k-1}, s^{(x_{k-1})}) = F(x_k | x_{k-1}, s^{(x_{k-1})}).$$

随机对策首先是由 L. S. Shapley ([1]) 定义的, 他研究了带实性能指标的双人零和随机对策 (Shapley 对策 (Shapley games)). 在 Shapley 对策中, 对策状态集  $X$  和局中人纯策略集都是有限的, 并且在任何一步对于由局中人所作出的任何一种两择一选择, 都存在一中断该对策的非零概率. 由于这一条件, 对策在有限多步后中断的概率为 1, 并且每个局中人的性能指标的数学期望均为有限. 任何这样的对策都有一个值, 并且两个局中人都有平稳最优策略 (stationary optimal strategies), 即按这些策略, 局中人在对策过程的每一阶段选择的初等策略, 仅取决于目前的状态. Shapley 还发现了一种办法, 据此有可能既找到对策的值, 又找到最优策略.

对另一种随机对策也已进行了研究, 与 Shapley 对策的区别在于可以是无穷的; 这样的对策称为具有极限均值性能指标的随机对策 (stochastic games with limiting mean pay off), 即具有

$$h_1(P) = -h_2(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k=1}^n \frac{1}{n} h_i(x_k, s^{(x_k)})$$



## 6 STOCHASTIC GEOMETRY

的双人零和随机对策。假定当任何平稳策略代入转移函数  $F(x_k | x_{k-1}, s^{(k-1)})$  中时 Марков 链的遍历性成立，则已经证明了这样的对策和平稳最优策略的值存在。这些结果已经被推广到对状态和初等策略数目无限制的情形和别的性能指标形式的情形。

### 参考文献

- [1] Shapley, L. S., Stochastic games, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **39** (1953), 1095 – 1100.
- [2] Gillette, D., Stochastic games with zero stop probabilities, in *Contributions to the Theory of Games*, Vol. 3, Princeton Univ. Press, 1957, 179 – 187.
- [3] Parthasarathy, T. and Stern, M., Markov games: A survey, in E. Roxin, P. Liers and R. Sternberg (eds.): *Differential Games and Control Theory*, M. Dekker, 1977, 1 – 46.
- [4] Vrieze, K., Zero-sum stochastic games, in *Surveys in Game Theory and Related Topics*, Tracts, Vol. 39, CWI, 1987, 103 – 132.
- [5] Domanskii, V. K., *Kibernetik*, **1** (1988), 26 – 49.

В. К. Доманский 撰

【补注】 在 1981 年, J. F. Mertens 和 A. Neyman 证明了具有极限均值性能指标的任意随机对策的值的存在性 [A2].

关于使用折扣性能指标的随机对策的渐近理论, 已经有大量的研究, 见 [A1] – [A3].

### 参考文献

- [A1] Bewley, T. and Kohlberg, E., The asymptotic theory of stochastic games, *Math. Oper. Res.*, **1** (1976), 197 – 208.
- [A2] Mertens, J. F. and Neyman, A., Stochastic games have a value, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **79** (1982), 2145 – 2146.
- [A3] Raghavan, T. E. S., Ferguson, T. S., Parthasarathy, T. and Vrieze, O. J. (eds.): *Stochastic games and related topics* (in honor of L. S. Shapley), Kluwer, 1991.

冯德兴 译

## 随机几何学 [stochastic geometry; стохастическая геометрия]

研究几何学与概率论之间的关系的数学学科。随机几何学发展自古典的积分几何学 (integral geometry) 以及几何概率 (geometric probability) 问题, 而从随机过程理论, 尤其是点过程理论引出思想与方法。

随机几何学的基本概念之一是“基本”空间  $X$  中的几何元素过程 (几何过程) 的概念; 几何过程定义为表示 (基本) 事件空间的流形上的点过程。例如, 平面上的直线过程就定义为 Möbius 带 (表示  $\mathbf{R}^2$  上直线的空间) 上的点过程。其他研究过的过程还有,  $\mathbf{R}^n$  中的  $d$  维平面过程,  $\mathbf{R}^n$  中的凸图形过程,  $\mathbf{R}^n$  中

的随机镶嵌 (可看成是以概率 1 其内部不相交, 而  $\mathbf{R}^n$  等于其闭包之并的凸多面体过程) 等等。

流形上的过程构成一个更一般的概念; 这里随机几何学与随机集合论联系起来了 (见 [1])。

随机几何学另一个不同于随机集合论的特点是, 随机几何学所关心的在于其分布对于作用在基本空间  $X$  上的群是不变的几何过程。下面就是这个方向上的一个典型的结果 (见 [2]), 目的是研究  $\mathbf{R}^2$  上的那些直线过程, 它们具有有限强度, 且对于平面上的 Euclid 运动群是不变的。一个过程称为非奇异的 (non-singular), 如果它的 Palm 分布相对于此过程的 (无条件) 分布是绝对连续的。所有非奇异的直线过程都是重随机 Poisson 过程 (即受一随机测度控制的 Poisson 过程)。对于  $\mathbf{R}^n$  中的点过程, 这一事实并不成立。

对于群不变的其他几何过程的若干相当出人意料性质, 已经用组合积分几何的工具得以发现 (见 [3])。其中如下的结果就是在过程的实现空间上用平均组合分解的方法得到的 (见 [3])。在  $\mathbf{R}^2$  上研究一个随机集  $U$ , 它是某个对于 Euclid 群不变的凸区域过程的区域之并。设  $U$  为黑色集而它的补集为白色。由集  $U$  在线  $0x$  上所导出的黑白区间交替的过程称为黑色更新过程, 如果:

a) 白色区间  $a_i$  组成一独立的更新过程;

b) 三元组  $(b_i, \alpha_i, \beta_i)$  对于不同的  $i$  是独立的, 其中  $b_i$  是第  $i$  个黑色区间的长度, 而  $\alpha_i, \beta_i$  是  $0x$  与  $\partial U$  在  $b_i$  端点的交角。

在遍历性和某些矩的存在性这样的一般假定下, 以及当  $\partial U$  上没有直线截口时, 可以得出, 如果过程是黑色更新的, 那么白色区间的长度必是指数分布的。

一个给定的几何过程的“典型”元的概念在随机几何学中是很重要的 ([7])。对描述几何过程中“典型” $k$  子集满足不同条件的分布问题已经进行了研究 (这类问题的一个例子, 是寻找顶点在一点过程的实现上的“典型”三角形 Euclid 不变特征的分布, 要求该三角形的内部包含实现的  $l$  个点)。这类问题的解答对于 Poisson 过程已经得到。类似的问题, 例如在天体物理学中, 也提出来了。

所谓立体学的问题, 如果它们被应用于几何图形过程, 也就与随机几何发生了关系 ([7])。(在立体学中, 一个多维象必须通过它与较小维数的直线或平面的交来描述。) 关于第一与第二阶矩测度的立体学已获得若干结果。

上面仅仅陈述了最典型的问题, 因为随机几何学的界限是难以精确定义的。下面这些领域都与随机几何学毗连: 几何统计 ([4]), 分数维 (随机) 集合论 ([5]), 数学形态学与成象分析 ([6]), 随机形状理论 ([7])。

## 参考文献

- [1] Matheron, J., Random sets and integral geometry, Wiley, 1975.  
 [2] Harding, E. F., Kendall, D. G., Stochastic geometry, Wiley, 1974.  
 [3] Ambartzumian, R. V., Combinatorial integral geometry, Wiley, 1982.  
 [4] Ripley, B. D., Spatial statistics, Wiley, 1981.  
 [5] Mandelbrot, B. B., Fractals: form, Chance and dimension, Freeman, 1977.  
 [6] Serra, J., Image analysis and mathematical morphology, Acad. Press, 1988.  
 [7] Ambartzumian, R. V., Factorization calculus and geometric probability, Cambridge Univ. Press, 1989 (译自俄文).

Р. В. Амбарцумян 撰

【补注】随机几何学的近期发展及其各种应用, 在[A3]中作了介绍. 积分几何学的影响及其对于随机几何学某些部分的应用可见[A4]与[A2]. 对几何概率某些问题的不同观点是[7]的主题.

## 参考文献

- [A1] Ambartzumian, R. V. (ed.), Stochastic and integral geometry, Reidel, 1987.  
 [A2] Mecke, J., Schneider, R., Stoyan, D., Weil, W., Stochastische Geometrie, DMV Sem., 16, Birkhäuser, 1990.  
 [A3] Stoyan, D., Kendall, W. S., Mecke, J., Stochastic geometry and its applications, Wiley, 1987.  
 [A4] Santaló, L., Integral geometry and geometric probability, Addison-Wesley, 1976. 潘一民 译

## 随机不可辨别性 [stochastic indistinguishability; стохастическая неразличимость]

两个随机过程  $X = (X_t(\omega))_{t \geq 0}$  和  $Y = (Y_t(\omega))_{t \geq 0}$  的一种性质, 它规定随机集

$$\{X \neq Y\} = \{(\omega, t): X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$$

可以被忽略, 即集合  $\{\omega: \exists t \geq 0: (\omega, t) \in \{X \neq Y\}\}$  的概率等于零. 如果  $X$  和  $Y$  是随机不可辨别的, 则对一切  $t \geq 0$ ,  $X_t = Y_t$ , 即  $X$  和  $Y$  是随机等价的 (见随机等价 (stochastic equivalence)). 一般地说, 反之不真, 但对右 (左) 连续随机过程, 随机不可辨别性可由随机等价性导出.

## 参考文献

- [1] Dellacherie, C., Capacités et processus stochastiques, Springer, 1972.  
 А. Н. Ширяев 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

## 随机积分 [stochastic integral; стохастический интеграл]

在某一随机基  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, P)$  上对每个局部有

界可料过程  $H = (H_t, \mathcal{F}_t)$  定义的关于半鞅 (semi-martingale)  $X$  的积分 “ $\int H dX$ ”. 下面是随机积分的一种可能的构造法: 首先对形如

$$H_t = h(\omega) I_{(a,b]}(t), \quad a < b$$

的简单可料过程定义随机积分, 其中  $h$  是  $\mathcal{F}_a$  可测的. 在这种情形, 随机积分  $\int_0^t H_s dX_s$  (或  $(H \cdot X)_t$ , 或  $\int_{(0,t]} H_s dX_s$ ) 理解为变量

$$h(\omega) (X_{b \wedge t} - X_{a \wedge t}).$$

映射  $H \mapsto H \cdot X$ , 此处

$$H \cdot X = (H \cdot X)_t, \quad t \geq 0,$$

可扩张 (仍记作  $H \cdot X$ ) 到一切有界可料函数的集合上, 它具有下列性质:

a) 过程  $(H \cdot X)_t, t \geq 0$ , 是右连续的并具有左极限;

b)  $H \mapsto (H \cdot X)$  是线性的, 即

$$(cH_1 + H_2) \cdot X = c(H_1 \cdot X) + (H_2 \cdot X);$$

c) 如果  $\{H^n\}$  是一致有界的可料函数序列,  $H$  是可料函数且

$$\sup_{s \leq t} |H_s^n - H_s| \xrightarrow{P} 0, \quad t > 0,$$

则

$$(H^n \cdot X)_t \xrightarrow{P} (H \cdot X)_t, \quad t > 0.$$

因此扩张  $H \cdot X$  在下述意义上是唯一的: 如果  $H \mapsto \alpha(H)$  是另一个具有性质 a) - c) 的映射, 则  $H \cdot X$  和  $\alpha(H)$  是随机不可辨别的 (见随机不可辨别性 (stochastic indistinguishability)).

对函数  $H_t = h(\omega) I_{(a,b]}(t)$  给出的定义

$$(H \cdot X)_t = h(\omega) (X_{b \wedge t} - X_{a \wedge t})$$

对任意过程  $X$  成立, 不仅对半鞅. 而具有性质 a) - c) 在有界可料过程类上的扩张  $H \cdot X$  只有对  $X$  是半鞅的情形才有可能. 在这种意义上, 半鞅类是具有自然的性质 a) - c) 的定义随机积分的最大类.

如果  $X$  是半鞅且  $T = T(\omega)$  是 Марков 时 (停时), 则 “停止” 过程  $X^T = (X_{t \wedge T}, \mathcal{F}_t)$  也是半鞅, 且对每一有界可料过程  $H$ ,

$$(H \cdot X)^T = H \cdot X^T = (H I_{[0,T]}) \cdot X.$$

这一性质把随机积分的定义扩展到局部有界可料函数  $H$  的情形. 如果  $T_n$  对  $H$  是 Марков 时的一个局部化序列, 则  $H^{T_n}$  是有界的. 因此  $H I_{[0,T_n]}$  是有界的, 且

$$[H I_{[0,T_{n+1}]} \cdot X]^{T_n}$$



与  $HI_{[0, T_n]} \cdot X$  是随机不可辨别的. 因而满足

$$(H \cdot X)^{T_n} = HI_{[0, T_n]} \cdot X, n \geq 0,$$

的过程  $H \cdot X$  存在, 仍称为随机积分.

所构造的随机积分  $H \cdot X$  具有以下性质:  $H \cdot X$  是半鞅; 映射  $H \mapsto H \cdot X$  是线性的; 如果  $X$  是局部有界变差的, 则积分  $H \cdot X$  也是, 并且  $H \cdot X$  与  $H$  关于  $dX$  的 Stieltjes 积分相同;  $\Delta(H \cdot X) = H \cdot \Delta X$ ;  $K \cdot (H \cdot X) = (KH) \cdot X$ .

依赖于对  $X$  的额外的假定, 随机积分  $H \cdot X$  还可以对更广的一类函数  $H$  定义. 例如, 如果  $X$  是局部平方可积鞅, 则具有性质 a) - c) 的随机积分  $H \cdot X$  可以对任意具有下述性质的可料过程  $H$  定义: 过程

$$\left[ \int_0^t H_s^2 d\langle X \rangle_s \right]_{t \geq 0}$$

是局部可积的 (此处  $\langle X \rangle$  是  $X$  的二次变差, 即使得  $X^2 - \langle X \rangle$  是局部鞅的可料增过程).

#### 参考文献

- [1] Jacod, J., Calcul stochastique et problèmes de martingales, Lecture notes in math., 714, Springer, 1979.
- [2] Dellacherie, C. and Meyer, P., Probabilities and potential, A-C, North-Holland, 1978 - 1988 (译自法文).
- [3] Liptser, R. Sh. and Shiryaev, A. N., Theory of martingales, Kluwer, 1989 (译自俄文).

А. Н. Ширяев 撰

【补注】上面所提到的半鞅构成最宽的可行的随机积分分类的结果是 Bichteler-Dellacherie 定理 (Bichteler-Dellacherie theorem) ([A1] - [A3]), 并可按如下所述形式化 ([A4], 定理 III. 22): 称一个过程是初等可料的, 如果它具有形式

$$H_t = H_0 I_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^n H_i I_{(T_i, T_{i+1}]}(t),$$

其中  $0 = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_{n+1} < \infty$  是停时且  $H_i$  是  $\mathcal{F}_{T_i}$  可测的, 具有  $|H_i| < \infty$  (a. s.),  $0 \leq i \leq n$ . 设  $E$  为初等可料过程的集合, 关于  $(t, \omega)$  具有一致收敛的拓扑. 设  $L^0$  是有限值随机变量的集合, 具有依概率收敛的拓扑. 固定随机过程  $X$ , 对每个停时  $T$ , 定义映射  $I_X^T: E \rightarrow L^0$ :

$$I_X^T(H) = H_0 X_0^T + \sum_{i=1}^n H_i (X_{T_{i+1}}^T - X_{T_i}^T),$$

其中  $X^T$  表示过程  $X_t^T = X_{t \wedge T}$ . 如果  $I_X^T$  对所有停时是连续的, 则称“ $X$  具有性质 (C)”.

Bichteler-Dellacherie 定理:  $X$  具有性质 (C), 当且仅当  $X$  是半鞅.

因为  $E$  上拓扑非常强而  $L^0$  上非常弱, 若将  $I_X^T$

的定义扩展到  $E$  以外, 则性质 (C) 是最低要求.

可以用性质 (C) 作为半鞅的定义并用这种观点发展随机积分的理论 ([A4]). 有许多优秀的教材从传统的观点阐述随机积分. 例如, 见 [A5] - [A8].

#### 参考文献

- [A1] Bichteler, K., Stochastic integrators, Bull. Amer. Math. Soc., 1 (1979), 761 - 765.
- [A2] Bichteler, K., Stochastic integrators and the  $L$  theory of semimartingales, Ann. Probab., 9 (1981), 49 - 89.
- [A3] Dellacherie, C., Un survol de la théorie de l'intégrale stochastique, Stoch. Proc. & Appl., 10 (1980), 115 - 144.
- [A4] Protter, P., Stochastic integration and differential equations, Springer, 1990.
- [A5] Chung, K. L. (钟开莱) and Williams, R. J., Introduction to stochastic integration, Birkhäuser, 1990.
- [A6] Elliott, R. J., Stochastic calculus and applications, Springer, 1982.
- [A7] Karatzas, I. and Shreve, S. E., Brownian motion and stochastic calculus, Springer, 1988.
- [A8] Rogers, L. C. G. and Williams, D., Diffusions, Markov processes and martingales, II, Ito calculus, Wiley, 1987.
- [A9] McKean, H. P., jr., Stochastic integrals, Acad. Press, 1969.
- [A10] Metivier, M. and Pellaumail, J., Stochastic integration, Acad. Press, 1980.
- [A11] McShane, E. J., Stochastic calculus and stochastic models, Acad. Press, 1974.
- [A12] Rao, M. M., Stochastic processes and integration, Sijthoff & Noordhoff, 1979.
- [A13] Stroock, D. W. and Varadhan, S. R. S., Multidimensional diffusion processes, Springer, 1979.
- [A14] Kopp, P. E., Martingales and stochastic integrals, Cambridge Univ. Press, 1984.
- [A15] Fukushima, M., Dirichlet forms and Markov processes, North-Holland, 1980.
- [A16] Albeverio, S., Fenstad, J. E., Høegh-Krohn, R. and Lindstrøm, T., Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics, Acad. Press, 1986.

#### 【译注】

#### 参考文献

- [B1] 何声武, 汪嘉冈, 严加安, 半鞅与随机分析, 科学出版社, 1995.

刘秀芳 译 陈培德 校

随机区间 [stochastic interval; стохастический интервал]

下述区间之一:

$$[\sigma, \tau] = \{(\omega, t): t \geq 0, \sigma(\omega) \leq t \leq \tau(\omega)\},$$

$$[\sigma, \tau[ = \{(\omega, t): t \geq 0, \sigma(\omega) \leq t < \tau(\omega)\},$$

$$]\sigma, \tau] = \{(\omega, t): t \geq 0, \sigma(\omega) < t \leq \tau(\omega)\},$$

$$]\sigma, \tau[ = \{(\omega, t): t \geq 0, \sigma(\omega) < t < \tau(\omega)\},$$

其中  $\sigma = \sigma(\omega)$  和  $\tau = \tau(\omega)$  是定义在具有子  $\sigma$  代数  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$  的上升族  $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  的可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的两个停时.

#### 参考文献

- [1] Dellacherie, C., Capacités et processus stochastiques, Springer, 1972.

А. Н. Ширяев 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

**随机矩阵** [stochastic matrix; стохастическая матрица]

一个具有非负元素的方阵 (可能是无限的)  $P = \|p_{ij}\|$ , 其中

$$\sum_j p_{ij} = 1, \text{ 对一切 } i.$$

一切  $n$  阶随机矩阵的集合是由  $n^n$  个由零和 1 所构成的随机矩阵的集合的凸包. 任意一个随机矩阵  $P$  可以看成是一个离散 **Марков链** (Markov chain)  $\xi^P(t)$  的转移概率的矩阵 (matrix of transition probabilities).

随机矩阵的本征值的绝对值不超过 1; 1 是任意随机矩阵的一个本征值. 如果一个随机矩阵  $P$  是不可分解的 (Марков链  $\xi^P(t)$  有一类正状态), 则 1 是  $P$  的一个单本征值 (即它的重数是 1); 一般地说, 本征值 1 的重数与 Марков链  $\xi^P(t)$  的正状态类的个数一致. 如果一个随机矩阵  $P$  不可分解, 且 Марков链的正状态类有周期  $d$ , 则  $P$  的一切本征值的集合, 作为复平面的一个点集, 通过旋转角度为  $2\pi/d$  的旋转映到自身上. 当  $d=1$  时, 随机矩阵  $P$  和 Марков链  $\xi^P(t)$  叫做非周期的 (aperiodic).

有限阶的  $P$  的对应于本征值 1 的左本征向量  $\pi = \{\pi_j\}$ :

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}, \text{ 对一切 } j, \quad (1)$$

并且满足条件  $\pi_j \geq 0$ ,  $\sum_j \pi_j = 1$ , 定义 Марков链  $\xi^P(t)$  的平稳分布; 在不可分解矩阵  $P$  的情形, 平稳分布是唯一的.

如果  $P$  是一个有限阶不可分解非周期随机矩阵, 则以下极限存在:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \Pi, \quad (2)$$

$\Pi$  是这样一个矩阵, 它的所有行都与向量  $\pi$  相同 (亦见遍历 **Марков链** (Markov chain, ergodic)); 对于无限随机矩阵  $P$  来说, 方程组 (1) 可能没有满足条件

$\sum_j \pi_j < \infty$  的非零非负解; 在这一情形  $\Pi$  是零矩阵). (2) 中的收敛速度可以用一个其绝对值大于  $P$  的所有异于 1 的本征值的绝对值的任意指数  $\rho$  的几何级数来估计.

如果  $P = \|p_{ij}\|$  是一个  $n$  阶随机矩阵, 那么它的任意一个本征值  $\lambda$  都满足不等式 (见 [3]):

$$|\lambda - \omega| \leq 1 - \omega, \text{ 这里 } \omega = \min_{1 \leq i \leq n} p_{ii}.$$

一切  $n$  阶随机矩阵的本征值的集合的并集  $M_n$  已被描述 (见 [4]).

一个满足附加条件

$$\sum_i p_{ij} = 1, \text{ 对一切 } j$$

的随机矩阵  $P = \|p_{ij}\|$  称为二重随机矩阵 (doubly-stochastic matrix).  $n$  阶二重随机矩阵的集合是  $n!$  个  $n$  阶置换矩阵 (即由 0 和 1 组成的双随机矩阵) 集合的凸包. 具有一个二重随机矩阵  $P$  的有限 Марков链  $\xi^P(t)$  有一致平稳分布.

#### 参考文献

- [1] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967 (中译本: Ф. Р. 甘特马赫尔, 矩阵论, 高等教育出版社, 1955).  
[2] Bellman, R., Introduction to matrix analysis, McGraw-Hill, 1960.  
[3] Marcus, M. and Minc, H., A survey of matrix theory and matrix inequalities, Allyn & Bacon, 1964.  
[4] Карпелевич, Ф. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 15 (1951), 361 - 383.

А. М. Зубков 撰

【补注】 给定一个具有非负元素的实  $n \times n$  矩阵  $A$ , 提出这样的问题, 什么时候有可逆正对角矩阵  $D_1$  和  $D_2$  使得  $D_1 A D_2$  是一个二重随机矩阵, 并且  $D_1$  和  $D_2$  唯一确定到什么程度. 这样的定理称为  $DAD$  定理 ( $DAD$ -theorems). 在电信和统计中对此感兴趣 ([A3] - [A5]).

一个矩阵  $A$  是全不可分解的 (fully indecomposable), 如果不存在置换矩阵  $P, Q$ , 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}.$$

一个  $1 \times 1$  矩阵是全不可分解的, 如果它不是零矩阵.

于是对于一个非负方阵  $A$  来说, 存在正对角矩阵  $D_1$  和  $D_2$  使得  $D_1 A D_2$  是二重随机矩阵, 当且仅当存在置换矩阵  $P$  和  $Q$  使得  $PAQ$  是全不可分解矩阵的直和 ([A1], [A2]).

#### 参考文献

- [A1] Sinkhorn, R. and Knopp, P., Concerning nonnegative matrices and doubly stochastic matrices, Paci-



fic *J. Math.*, 21 (1967), 343 – 348.

- [A2] Brualdi, R. A., Parter, S. V. and Schneider, H., The diagonal equivalence of a nonnegative matrix to a stochastic matrix, *J. Math. Anal. Appl.*, 16 (1966), 31 – 50.
- [A3] Fienberg, S., An iterative procedure for estimation in contingency tables, *Ann. Math. Stat.*, 41 (1970), 907 – 917.
- [A4] Krupp, R. S., Properties of Kruithof's projection method, *Bell Systems Techn. J.*, 58 (1979), 517 – 538.
- [A5] Csiszár, I.,  $l_1$  – divergence geometry of probability distributions and minimization problems, *Ann. Probab.*, 3 (1975), 146 – 158.
- [A6] Nussbaum, R. D., Iterated nonlinear maps and Hilbert's projective method II, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 401 (1989).
- [A7] Neuts, M. F., Structured stochastic matrices of  $M/G/1$  type and their applications, M. Dekker, 1989.
- [A8] Seneta, E., Non-negative matrices and Markov chains, Springer, 1981. 郝钢新 译

### 随机数值算法 [stochastic numerical algorithm; стохастический вычислительный алгоритм]

含有用随机数运算的一种数值算法, 因此计算结果也是随机的. 随机算法包括对随机过程和随机现象数值研究中所用的统计模拟 (statistical modelling) 算法, 和求解确定性问题 (积分计算, 求解积分方程和边值问题等) 的蒙特卡罗方法 (Monte-Carlo method) 中的算法.

随机结点的插值公式和求积公式的随机化数值过程形成一类特殊的随机数值算法. 这种随机化通常是用这样一种方法实现的, 即计算结果的数学期望等于要求的值. 最终的估计是将随机数值算法的各种计算结果平均而得到的 (这些估计的误差和计算量见蒙特卡罗方法). 对大维数问题, 随机化可以使计算机存贮时间有相当大的节省 (见 [1] – [4]). 具体地说, 这点可以用求解第二类积分方程有限和的随机化方法的计算量的估计而得到证明 (见 [4]). 特别有效的是那些随机数值算法, 即当计算系统是多处理机时, 可以同时有多处理机上计算的算法.

为了实现随机搜索多变量函数的总体极值, 已经构造了特殊的随机数值算法 (见 [5]). 如果函数值的确定带有随机误差, 则这些算法是比较有效的.

#### 参考文献

- [1] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

- [2] Ермаков, С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975.
- [3] Соболев, И. М., Численные методы Монте-Карло, М., 1973.
- [4] Михайлов, Г. А., Некоторые Вопросы теории методов Монте-Карло, Новосиб., 1974.
- [5] Расстригин, Л. А., Статистические методы поиска, М., 1968. Г. А. Михайлов 撰

【补注】 人们可以将问题分成天然随机问题和非天然随机问题. 关于第一类问题的数值算法, 例如可见 [A1]、[A2] 和随机逼近 (stochastic approximation). 随机搜索一个函数的总体极值已经引起许多注意; 第二类问题可见 [A3] – [A5].

随机方法对经典的数学物理方程非常有效, 部分的原因是因为位势论和随机过程之间有联系, 见 [A6]、[A7].

#### 参考文献

- [A1] Ljung, L. and Söderström, T., Theory and practice of recursive identification, MIT, 1983.
- [A2] Robbins, H. and Monro, S., A stochastic approximation method, *Ann. Math. Studies*, 22 (1951), 400 – 407.
- [A3] Laarhoven, P. J. M. van, Theoretical and computational aspects of simulated annealing, CWI, Tract, 51, CWI, Amsterdam, 1988.
- [A4] Zhigljavsky, A. A. [A. A. Zhiglyavskii], Theory of global random search, Kluwer, 1991 (译自俄文).
- [A5] Laarhoven, P. J. M. van and Aarts, E. H., Simulated annealing: theory and practice, Reidel, 1987.
- [A6] Blumenthal, R. M. and Gettoor, R. K., Markov processes and potential theory, Acad. Press, 1968.
- [A7] Ermakov, S. M., Nekrutin, V. V. and Sipin, A. S., Random processes for the classical equations of mathematical physics, Kluwer, 1989 (译自俄文).

袁国兴 张宝琳 译

### 随机点过程 [stochastic point process; случайный точечный процесс], 点过程 (point process)

对应于实轴  $\mathbf{R}^1$  上一列随机变量  $\{t_i\}$ ,  $\dots < t_{i-1} < t_i \leq 0 < t_1 < t_2 < \dots$  的随机过程 (stochastic process) 每个值  $t_i$  对应于一个随机变量  $\Phi\{t_i\} = 1, 2, \dots$ , 称为它的重数. 在排队论 (queueing theory) 中, 随机点过程是由接受服务的到达时刻生成的, 而在生物学中则是由神经纤维中的脉冲时刻生成的, 等等.

所有点  $t_i \in [0, t]$  的数目  $C(t)$  称为计数过程,  $C(t) = M(t) + A(t)$ , 其中  $M(t)$  为一鞅 (martingale), 而  $A(t)$  是对于由随机点  $t_i \in [0, t]$  所生成的  $\sigma$  域  $\mathcal{F}_t$  的补偿元. 许多重要问题都可以依据补偿元  $A(t)$  的性质来解决.

令  $X$  为一完全可分的度量空间,  $\mathfrak{B}_0$  是有界 Borel

集  $B \subset X$  的族,  $N = \{\varphi\}$  是所有取整值测度的集,  $\varphi(B) = l < \infty$ , 而  $\mathfrak{N}$  是由测度的子集  $\{\varphi: \varphi(B) = l\}$  ( $B \in \mathfrak{B}_0, l = 0, 1, 2, \dots$ ) 所生成的最小  $\sigma$  域. 在可测空间  $(N, \mathfrak{N})$  上规定一个概率测度  $P$ , 就确定了一个状态空间为  $X$  的随机点过程  $\Phi$ , 它的实现是  $N$  中的整值测度. 使  $\Phi\{x\} > 0$  的  $x \in X$  称为  $\Phi$  的点 (points). 量  $\Phi(B)$  等于位于  $B$  中的  $\Phi$  的点的重数之和. 若对于所有  $x \in X$  有  $\Phi\{x\} \leq 1$ , 则  $\Phi$  称为简单的 (simple); 若对于所有  $B \in \mathfrak{B}_0$  和  $\varepsilon > 0$ , 存在  $B$  的划分  $\zeta = (Z_1, \dots, Z_n)$  使

$$\sum_{k=1}^n P\{\Phi(Z_k) > 1\} < \varepsilon,$$

则  $\Phi$  称为普通的 (ordinary). 普通随机点过程必是简单的. 阶乘矩测度

$$\Lambda_k(B) = E_p \Phi(B) [\Phi(B) - 1] \cdots [\Phi(B) - k + 1]$$

及其扩张, 扮演着重要的角色 ( $E_p$  表数学期望,  $\Lambda_1(B)$  称为强度测度). 如果  $\Lambda_{2n}(B) < \infty$ , 那么

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \Lambda_k(B) \leq P\{\Phi(B) = 0\} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} \Lambda_k(B),$$

$$\Lambda_0(B) = 1.$$

在随机点过程理论中, Poisson 随机点过程  $\Phi$  起着特殊的作用, 它满足: a)  $\Phi$  在不交的  $B_i \in \mathfrak{B}_0$  上的值是相互独立的随机变量 (无后效性); b)

$$P\{\Phi(B_i) = l\} = \frac{[\Lambda_1(B)]^l}{l!} \exp\{-\Lambda_1(B)\}.$$

对于简单随机点过程,

$$\Lambda_1(B) = \inf \sum_{k=1}^n P\{\Phi(Z_k) > 0\}, \quad (*)$$

其中下确界是对  $B$  的所有划分  $\zeta = (Z_1, \dots, Z_n)$  来取的. 利用关系式 (\*), 对于由随机过程或随机场生成的许多随机点过程类, 能找到其强度测度的明显表达式.

随机点过程的一个推广, 是所谓的标值随机点过程 (marked stochastic point processes), 其中从某个可测空间  $(K, \mathfrak{N})$  所取的标值  $k(x)$ , 是对每个使  $\Phi(x) > 0$  的点  $x$  派定的. 一个排队系统中的服务时间就可以作为标值.

在随机点过程理论中, 以一种特殊方式联系不同事件的条件概率 (Palm 概率) 的关系起着重要的作用. 已经获得了随机点过程序列的叠加 (求和)、稀疏及其他运算的极限定理. Poisson 随机点过程的各种推广有着广泛的应用.

#### 参考文献

[1] Хинчин, А. Я., Работы по математической те-

ории массового обслуживания, М., 1963.

[2] Cox, D. R., Isham, V., Point processes, Chapman & Hall, 1980.

[3] Kerstan, J., Matthes, K., Mecke, J., Infinitely divisible point processes, Wiley, 1978 (译自德文).

[4] Беляев, Ю. К., Элементы общей теории случайных процессов, в кн.: Крамер, Г., Лидбеттер, М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969.

[5] Liptser, R. S., Shiryaev, A. N., Statistics of random processes II, Applications, Springer, 1978 (译自俄文).

[6] Jacobson, M., Statistical analysis of counting processes, Lecture notes in statistics, 12, Springer, 1982.

Ю. К. Беляев 撰

【补注】 令  $X, \mathfrak{B}_0$  如前设, 令  $\mathfrak{X} \supset \mathfrak{B}_0$  为  $X$  的 Borel 域. 令  $M$  为  $(X, \mathfrak{X})$  上所有 Borel 测度的集合. 对于每个  $B \in \mathfrak{B}_0$ ,  $\mu \mapsto \mu(B)$  定义一映射  $M \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ , 而  $\mathfrak{M}$  为由这些映射生成的  $\sigma$  域, 即使所有这些映射为可测的最小  $\sigma$  域.  $M$  的整值元形成子空间  $N$ , 而  $\mathfrak{N}$  则是  $N \subset M$  上的导出  $\sigma$  域.

$X$  上的一个随机测度就是  $(M, \mathfrak{M})$  上的一个概率测度, 或者等价地说, 是某个抽象概率空间  $(\Omega, \mathscr{A}, P)$  到  $(M, \mathfrak{M})$  的可测映射  $\zeta$ . 而点过程则是  $\zeta$  在  $N$  中取值这种特殊情形.

一个元素  $v \in N$  称为简单的, 如果对所有  $x \in X$ ,  $v(x) = 0$  或  $1$ . 一个简单点过程则是在由简单测度组成的  $N$  的子空间中取值的点过程.

每个  $B \in \mathfrak{B}_0$  定义一个函数  $M \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ ,  $\mu \mapsto \mu(B)$ , 因而给出随机测度  $\xi$ , 就定义一个随机变量, 将用  $\xi B$  记之. 可以用两种方式来考虑一个随机测度: 一是用概率空间  $(\Omega, \mathscr{A}, P)$  来参数化的  $(X$  上) 测度  $\xi(\omega)$  的集合, 一是用  $\mathfrak{B}_0$  作指标集的  $(\Omega$  上或  $M$  上) 随机变量  $\xi B$  的集合, 这依赖于所注视的是映射  $(\omega, B) \mapsto \xi(\omega)(B)$  的哪一部分.

更一般地, 对  $X$  上的每个有界连续函数  $f$ , 由

$$\xi f(\mu) = \int_X f(x) \mu(dx)$$

可定义随机变量  $\xi f$ . 对每个随机测度  $\xi$ , 可定义  $\xi$  的 Palm 分布 (Palm distribution). 对简单点过程  $\xi$ , Palm 分布  $\dot{Q}_x$  可以理解为给定  $\xi$  在  $x \in X$  有一个原子时,  $\xi$  的条件分布. Palm 分布在随机测度论中具有很大的重要性, 同时对于排队论、分支过程、再生集、随机几何、统计力学, 以及保险数学等, 都有应用 (最后一个要用到重随机 Poisson 过程, 又称 Cox 过程, 它们是强度随机变化的 Poisson 过程).

一个随机测度的 Palm 分布是由分解它在  $X \times M$



上的 Campbell 测度 (Campbell measure) 而获得的, 后者由下式给出:

$$C(B \times \mathcal{M}) = E[(\xi B) 1_{\mathcal{M}}],$$

$B \in \mathfrak{B}_0$ ,  $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ , 其中  $1_{\mathcal{M}}$  是  $\mathcal{M} \subset M$  的指示函数, 函数  $(\xi B) 1_{\mathcal{M}}$  是两个函数  $\xi B$  与  $1_{\mathcal{M}}: M \rightarrow \mathbf{R}$  的 (逐点) 乘积, 而  $E$  表示期望.

一个测度的分解是与条件分布 (conditional distribution) 密切关联的. 给定两个可测空间  $(X, \mathfrak{X})$  与  $(T, \mathcal{T})$ , 一个从  $X$  到  $T$  的核 (kernel) (又称为 Марков 核 (Markov kernel)) 是一个映射  $\rho: X \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ , 使得对所有  $A \in \mathcal{T}$ ,  $\rho(\cdot, A): x \mapsto \rho(x, A)$  是在  $X$  上可测的, 且对所  $x \in X$ ,  $\rho_x = \rho(x, \cdot): A \mapsto \rho(x, A)$  是  $(T, \mathcal{T})$  上的  $\sigma$  有限测度.

给定一个乘积空间  $X \times T$  上的  $\sigma$  有限测度  $\mu$ , 则  $\mu$  的一个分解 (disintegration) 由  $X$  上的  $\sigma$  有限测度  $\nu$  与从  $X$  到  $T$  的核  $\rho$  组成, 使得  $\nu$  几乎处处有  $\rho_x(T) \neq 0$ , 且对所有  $(B, A) \in \mathfrak{X} \times \mathcal{T}$  有

$$\mu(B \times A) = \int_B \rho_x(A) \nu(dx). \quad (*)$$

由此推出对每一可测函数  $f: X \times T \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ ,

$$\begin{aligned} \int \int f(x, t) \mu(dx dt) &= \\ &= \int \nu(dx) \int f(x, t) \rho_x(dt). \end{aligned} \quad (**)$$

其逆运算称为混合 (mixing). 给定  $\nu$  与  $\rho$ , 测度  $(*)$  称为  $\rho_x$  对于  $\nu$  的混合 (mixture) ( $(**)$  可称为关于混合测度的 Fubini 公式).

如果  $(T, \mathcal{T})$  是 Polish Borel 空间, 对  $\sigma$  有限的  $\mu$ , 上述分解一定存在. 这归结为条件分布的一个结果. 测度  $\nu$  在等价的意义上是唯一的, 而  $\rho$  则在相差一可测重正规化因子的意义上是  $\nu$  几乎处处唯一的. 更一般地, 可以研究空间  $Y$  上的测度  $\mu$  关于任一映射  $\pi: Y \rightarrow X$  (替代投影映射  $Y = X \times T \rightarrow X$ ) 的分解 (或片分解 (decomposition into slices), 见 [A11], [A12]).

对每个有界连续函数  $f$ , 令  $E(\xi f)$  为随机变量  $\xi f$  的期望, 而令  $E\xi$  为  $X$  上的测度  $E\xi(B) = E(\xi B)$ . 那么, 利用  $(**)$ ,  $X \times M$  上的 Campbell 测度  $C$  的分解将产生  $X$  上的测度  $E\xi$ , 而如果  $E\xi$  是  $\sigma$  有限的, 则  $\rho_x$  可以  $E\xi$  几乎处处正规化为  $M$  上的概率测度  $Q_x$ , 从而有

$$E(\xi f 1_{\mathcal{M}}) = \int Q_x(\mathcal{M}) f(x) E\xi(dx).$$

$Q_x$  就是  $\xi$  的 Palm 分布 (Palm 概率 (Palm probabilities)). 等价地, 作为  $x$  的函数, 对于  $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ ,

$Q_x(\mathcal{M})$  是  $X$  上的测度  $E(1_{\mathcal{M}}(\xi)\xi)$  对  $E\xi$  的 Radon-Nikodým 导数 (Radon-Nikodým derivative) (见 Radon-Nikodým 定理 (Radon-Nikodým theorem)). 这里,  $1_{\mathcal{M}}(\xi)\xi$  是随机测度  $\Omega \rightarrow M$ ,

$$(1_{\mathcal{M}}(\xi)\xi)(\omega) = \begin{cases} 0, & \xi(\omega) \notin \mathcal{M}, \\ 1, & \xi(\omega) \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

即  $\xi$  在  $\mathcal{M}$  上的迹.

#### 参考文献

- [A1] Borovkov, A. A., Stochastic processes in queueing theory, Springer, 1976 (译自俄文).
- [A2] Lewis, P. A. W. (ed.), Stochastic point processes: statistical analysis theory and applications, Wiley-Interscience, 1972.
- [A3] Murthy, V. K., The general point process, Addison-Wesley, 1974.
- [A4] Snyder, D. C., Random point processes, Wiley, 1975 (中译本: D. C. 斯奈德, 随机点过程, 人民教育出版社, 1981).
- [A5] Daley, D. J., Vere-Jones, D., An introduction to the theory of point processes, Springer, 1978.
- [A6] Baccelli, F., Brémaud, P., Palm-probabilities and stationary queues, Lecture notes in statistics, 41, Springer, 1987.
- [A7] Brémaud, P., Point processes and queues, Springer, 1981.
- [A8] Neveu, J., Processus ponctuels, in J. Hoffmann-Jørgensen, T. M. Liggett, J. Neveu (eds.): Ecole d'été de St. Flour VI, 1976, Lecture notes in math., vol. 598, Springer, 1977, 250 - 448.
- [A9] Kallenberg, O., Random measures, Akademie Verlag & Acad. Press, 1986.
- [A10] Grandell, J., Doubly stochastic Poisson processes, Springer, 1976.
- [A11] Bauer, H., Probability theory and elements of measure theory, Holt, Rinehart & Winston, 1972 (译自德文).
- [A12] Bourbaki, N., Intégration, Eléments de mathématique, Hermann, 1967, Chapt. 5: Intégration des mesures, § 6.6.
- [A13] Bourbaki, N., Intégration, Eléments de mathématique, Hermann, 1959, Chapt. 6: Intégration vectorielle, § 3. 潘一民 译

有限记忆随机点过程 [stochastic point process with limited memory; случайный точечный процесс с ограниченным последствием]

一个由一系列随机变量  $\{t_j\}$ ,

$$\cdots < t_{-1} \leq t_0 \leq 0 < t_1 < t_2 < \cdots$$

定义的随机点过程 (stochastic point process), 其中

区间  $s_i = t_{i+1} - t_i$  是相互独立的随机变量. 这种过程与更新过程 (见更新理论 (renewal theory)) 有密切关系, 后者的  $s_i (i \neq 0)$  是独立同分布的随机变量.

Ю. К. Беляев 撰 潘一民 译

随机过程 [stochastic process 或 random process; случайный процесс], 概率过程 (probability process), 时间的随机函数 (random function of time)

一个过程 (即某个系统的状态随时间而变化), 它的进程具偶然性且对某些进程的概率是给定的. 典型例子是 **Brown 运动** (Brownian motion). 实践中另外一些重要的例子是: 在存在热噪声的电路中电流的波动, 在由气象或其他扰动引起的无线电信号的随机减弱 (即衰减) 情况下所接收的无线电信号强度的随机变化, 以及液体或气体的湍流. 某些伴随有随机扰动的工业过程, 还有在地球物理 (例如地磁场的变化, 不规则海浪和微震, 即地球表面水平的高频不规则振动)、生物物理 (例如, 在脑电仪上记录的大脑的生物电位的变化) 以及经济学中遇到的一些过程也可以加入这个行列.

随机过程的数学理论把所讨论的系统的瞬时状态看作某一相空间  $R$  (状态空间) 中的一个点, 使得随机过程是时间  $t$  的函数  $X(t)$ , 取值在  $R$  中. 通常假定  $R$  是向量空间, 研究最多 (对应用来说也是最重要) 的较窄的情形是其中  $R$  中点用一个或多个数值参数给定 (广义坐标系). 在狭义情形随机过程可以简单地看作随机取值的时间的数值函数  $X(t)$  (即容许有各种各样的实现  $X(t)$ , 一维随机过程 (one-dimensional stochastic process)) 或类似地看作向量函数  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_k(t))$  (多维或向量随机过程 (multi-dimensional or vector stochastic process)). 多维随机过程的研究可通过由  $\mathbf{X}(t)$  到辅助过程

$$X_a(t) = (\mathbf{X}(t), \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^k a_j X_j(t)$$

归结为一维随机过程的情形, 其中  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$  是任意  $k$  维向量. 因此一维过程的研究在随机过程理论中占据着中心的位置. 参数  $t$  通常取任意实数值或实直线  $\mathbf{R}^1$  上一个区间中的值 (当要强调这一点时, 称过程为连续时间随机过程 (stochastic process in continuous time)). 但也可以只取整数值, 在这种情形称  $X(t)$  为离散时间随机过程 (stochastic process in discrete time) (或随机序列 (random sequence), 或时间序列 (time series)).

$X(t)$  的进程中所有变量的无穷维空间 (即, 实现  $X(t)$  的空间) 的概率分布的表示不在概率论古典方法的范围之内, 它要求构造特殊的数学工具. 仅有的例外是一类特殊随机过程, 它的概率特性完全由某一有

限维随机向量  $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$  及关系  $X(t) = X(t; \mathbf{Y})$  所决定, 因为在这种情形,  $X(t)$  的进程的概率只依赖于  $\mathbf{Y}$  的概率分布. 在实际中重要的这种类型的随机过程的例子是形如

$$X(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$$

的随机谐波振荡, 其中  $\omega$  是固定数,  $A$  和  $\Phi$  是独立随机变量. 这种过程常常用在无线电技术中的振幅-相位调制的工作中.

随机过程的很广的一类概率分布是由相应于  $t$  的值的所有有限子集  $(t_1, \dots, t_n)$  的随机向量  $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$  的相容的有限维概率分布的无限族来表征的 (见随机函数 (random function)). 可是所有这些分布的知识不足以决定依赖于  $t$  的不可数多个值的集合的  $X(t)$  的值的事件的概率, 即它不能唯一决定随机过程.

例. 设  $X(t) = \cos(\omega t + \Phi)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 是具有随机相位  $\Phi$  的谐波振荡. 设随机变量  $Z$  均匀分布在区间  $[0, 1]$  上, 设  $X_1(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 是由方程  $X_1(t) = X(t)$ , 当  $t \neq Z$  时;  $X_1(t) = X(t) + 3$ , 当  $t = Z$  时, 给定的随机过程. 因为对任意固定的有限集  $(t_1, \dots, t_n)$ ,  $P(Z = t_1 \text{ 或 } Z = t_2 \text{ 或 } \dots \text{ 或 } Z = t_n) = 0$ , 因此  $X_1(t)$  和  $X(t)$  的一切有限维分布是相同的. 有时  $X_1(t)$  和  $X(t)$  是有区别的: 特别,  $X(t)$  的一切实现是连续的而  $X_1(t)$  的所有实现都有一不连续点, 并且  $X(t)$  的所有实现不超过 1 而  $X_1(t)$  的实现不具有这种性质. 这就得出给定的有限维概率分布系统可对应于不同的随机过程的修正, 并且不能纯粹从这一系统的知识计算随机过程的实现是连续的概率或它被某一固定常数所界的概率.

可是, 从一切有限维概率分布的知识, 常可断言是否存在一个随机过程  $X(t)$  具有这些有限维分布并且使得它的实现是连续的 (或可微的, 或无处超过给定的常数  $B$ ) (以概率 1). 保证给定的有限维分布存在以概率 1 连续的实现的随机过程  $X(t)$  的一般条件的典型例子是 Колмогоров 条件 (Kolmogorov condition): 如果定义在区间  $[a, b]$  上的随机过程  $X(t)$  的有限维概率分布, 使得对某些  $\alpha > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $C < \infty$  和一切充分小的  $h$  下述不等式成立:

$$E |X(t+h) - X(t)|^\alpha < C |h|^{1+\delta} \quad (1)$$

(显然这一限制仅仅加在  $X(t)$  的二维分布上), 则  $X(t)$  具有以概率 1 连续的实现的修正 (例如, 见 [1]—[6]). 在 Gauss 过程  $X(t)$  的特殊情形, 条件 (1) 可用下述较弱的条件来代替:

$$E |X(t+h) - X(t)|^{\alpha_1} < C_1 |h|^{\delta_1}, \quad (2)$$



对某些  $\alpha_1 > 0$ ,  $\delta_1 > 0$ ,  $C_1 > 0$  成立. 对 **Wiener** 过程 (Wiener process) 和 **Ornstein-Uhlenbeck** 过程 (Ornstein-Uhlenbeck process), 上式对  $\alpha_1 = 2$ ,  $\delta_1 = 1$  成立. 在给定有限维概率分布存在  $X(t)$  的修正以概率 1 其实现是连续的 (或可微的, 或被某一常数所界的) 情况下, 通过要求  $X(t)$  满足某些非常一般的正则性条件, 同一过程的其他修正通常都能被排除, 这些正则性条件在几乎所有的应用中都成立 (见可分过程 (separable process)).

代替给出随机过程  $X(t)$  的有限维概率分布的无限系统,  $X(t)$  的分布也可以通过相应的特征泛函 (characteristic functional)

$$\psi[l] = E \exp \{il[X]\} \quad (3)$$

的值来定义, 其中  $l$  在很宽的一类依赖于  $X$  的线性泛函类上变化. 如果  $X$  在  $a \leq t \leq b$  上是依概率连续的 (即对任意  $\varepsilon > 0$ , 当  $h \rightarrow 0$  时有  $P\{|X(t+h) - X(t)| > \varepsilon\} \rightarrow 0$ ), 并且  $g$  是  $[a, b]$  上有界变差函数, 则

$$\int_a^b X(t) dg(t) = l^{(g)}[X]$$

是随机变量. 在 (3) 中可以取  $l[X] = l^{(g)}[X]$ , 为方便起见用  $\psi[g]$  表示  $\psi[l^{(g)}]$ . 在许多情形下只需考虑形如

$$\int_a^b X(t) \varphi(t) dt = l_\varphi(X)$$

的线性泛函, 其中  $\varphi$  是关于  $t$  的具有紧支撑的无限次可微函数 ( $[a, b]$  可取有限区间). 在相当一般的正则性条件下,  $\psi[l_\varphi] = \psi(\varphi)$  的值唯一决定了  $X(t)$  的一切有限维概率分布. 因为当

$$\varphi(t) \rightarrow \theta_1 \delta(t - t_1) + \cdots + \theta_n \delta(t - t_n)$$

时 (此处  $\delta(t)$  是 Dirac  $\delta$  函数, 收敛理解为广义函数收敛),

$$\psi[\varphi] \rightarrow \psi_{t_1, \dots, t_n}(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

其中  $\psi_{t_1, \dots, t_n}(\theta_1, \dots, \theta_n)$  是随机向量  $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$  的特征函数. 如果  $\psi[\varphi]$  不趋向于有限的极限, 则  $X$  在任意点没有有限值. 而仅仅光滑值  $l_\varphi[X]$  有意义, 即特征泛函  $\psi[\varphi]$  并不给出通常的 (“古典的”) 随机过程  $X(t)$ , 而是广义随机过程 (stochastic process, generalized)  $X = X(\varphi)$ .

当一切有限维分布被少数低维分布唯一决定时, 描述  $X(t)$  的一切有限维分布的问题就被简化了. 所有多维分布被  $X(t)$  的一维分布决定的最重要的随机过程类是独立随机变量序列 (它是特殊的离散时间随机

过程). 这类过程可以在古典概率论的框架中研究, 并且某些重要的随机过程类可有效地确定为独立随机变量序列  $Y(t)$ ,  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 的函数, 这是很重要的. 例如, 下述随机过程是有重要意义的:

$$X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j Y(t-j)$$

或

$$X(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j Y(t-j), \quad t = 0, \pm 1, \dots$$

(见滑动平均过程 (moving-average process)), 以及

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Y(j) h_j(t), \quad a \leq t \leq b,$$

其中  $h_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , 是在区间  $[a, b]$  上指定的函数系统 (见随机函数的谱分解 (spectral decomposition of a random function)).

以下描述三个重要的随机过程类, 其所有的有限维分布由  $X(t)$  的一维分布以及  $\{X(t_1), X(t_2)\}$  的二维分布决定.

1) 具有独立增量的随机过程类 (见独立增量随机过程 (stochastic process with independent increments))  $X(t)$ . 对它来说  $X(t_2) - X(t_1)$  与  $X(t_4) - X(t_3)$  是独立随机变量 ( $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ ). 为表示区间  $[a, b]$  上过程  $X(t)$  的分布, 使用分布函数  $F_a(X)$  和  $\Phi_{t_1, t_2}(z)$  是方便的. 此处  $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ ,  $F_a$  为  $X(a)$  的分布函数,  $\Phi_{t_1, t_2}$  为  $X(t_2) - X(t_1)$  的分布函数, 在这种情形,  $\Phi_{t_1, t_2}(z)$  必定满足函数方程

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{t_1, t_2}(z-u) d\Phi_{t_2, t_3}(u) = \Phi_{t_1, t_3}(z), \quad (4)$$

$$a \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq b.$$

使用 (4) 可以证明: 如果  $X(t)$  是依概率连续的, 则其特征泛函  $\psi[g]$  可写成如下形式:

$$\begin{aligned} \psi[g] = & \exp \left\{ i \int_a^b \gamma(t) dg(t) + \right. \\ & - \frac{1}{2} \int_a^b \beta(t) [g(b) - g(t)] dg(t) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b \left[ e^{iy[g(b)-g(t)]} - 1 - \frac{iy[g(b)-g(t)]}{1+y^2} \right] \times \\ & \left. \times \frac{1+y^2}{y^2} d_t \Pi_t(dy) \right\}, \end{aligned}$$

其中  $\gamma(t)$  是连续函数,  $\beta(t)$  是使得  $\beta(a) = 0$  的非降连续函数而  $\Pi_t(dy)$  是  $\mathbb{R}$  上关于  $t$  的上升连续测度.

2) **Марков** 过程类  $X(t)$ , 即当  $t_1 < t_2$ , 给定所有  $X(t)$ ,  $t \leq t_1$ , 的值时,  $X(t_2)$  的条件概率分布仅依赖于  $X(t_1)$ . 为表示 **Марков** 过程 (Markov pro-

cess)  $X(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , 使用  $X(a)$  的分布函数  $F_a(x)$  和转移函数  $\Phi_{t_1, t_2}(x, z)$  是方便的, 它对  $t_1 < t_2$  定义为给定  $X(t_1) = x$ ,  $X(t_2) < z$  的条件概率. 函数  $\Phi_{t_1, t_2}(x, z)$  必定满足 **Колмогоров-Чарпан** 方程 (Kolmogorov-Chapman equation), 类似于 (4), 并且在某些条件下可以得到对这一函数的比较简单的向前和向后 **Колмогоров** 方程 (Kolmogorov equation) (亦即 Fokker-Planck 方程).

3) Gauss 过程类  $X(t)$ , 这种过程所有  $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$  的多维概率分布都是 Gauss (正态) 分布. 因为正态分布由它的一阶和二阶矩唯一决定, Gauss 过程 (Gaussian process)  $X(t)$  由函数

$$E X(t) = m(t)$$

和

$$E X(t) X(s) = B(t, s)$$

的值决定, 其中  $B(t, s)$  是一非负定核, 使得

$$b(t, s) = B(t, s) - m(t)m(s)$$

是非负定核. Gauss 过程  $X(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) 的特征泛函为

$$\psi[g] = \exp \left\{ i \int_a^b m(t) dg(t) + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b b(t, s) dg(t) dg(s) \right\}.$$

4) 另一类重要的随机过程类是平稳随机过程  $X(t)$ , 它的统计特性不随时间的进程而改变, 即对任意固定的  $a$ , 在变换  $X(t) \rightarrow X(t+a)$  之下是不变的. 一般平稳随机过程 (stationary stochastic process)  $X(t)$  的有限维概率分布不能用简单的方式来描述, 但对许多涉及这一过程的问题只要知道开始两个矩  $E X(t) = m$  和  $E X(t) X(t+s) = B(s)$  就够了 (于是此处只需假定广义平稳性, 即矩  $E X(t)$  和  $E X(t) X(t+s)$  与  $t$  无关). 任一平稳过程 (至少广义上) 容许形如

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ(\lambda) \quad (5)$$

的谱分解, 其中  $Z(\lambda)$  是具不相关增量的随机过程. 这一点是本质的. 特别, 由它得出

$$B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda), \quad (6)$$

其中  $F(\lambda)$  是  $X(t)$  的单调非减谱函数 (见平稳随机过程的谱函数 (spectral function of a stationary stochastic process)). 谱分解 (5) 和 (6) 在平稳随机过程的最佳 (在最小均方误差意义下) 线性外推、内插和

滤波问题的解中处于核心的位置.

随机过程的数学理论也包含大量的与上述随机过程类有关的一系列子类或扩展类的结果 (见 **Марков** 链 (Markov chain); 扩散过程 (diffusion process); 分支过程 (branching process); 鞅 (martingale); 平稳增量随机过程 (stochastic process with stationary increments) 等等).

A. M. Яглом 撰

#### 参考文献

- [1] Слуцкий, Е. Е., 《Избр. труды》, М., 1960, 269 - 280.
- [2] Doob, J., Stochastic processes, Wiley, 1953.
- [3] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977 (英译本: Gikhman, I. I. and Skorohod, A. V., Introduction to the theory of stochastic processes, Saunders, 1967).
- [4] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория Случайных процессов, 1 - 3, М., 1971 - 1975 (中译本: И. И. 基赫曼等, 随机过程论, 科学出版社, 1986).
- [5] Cramér, H. and Leadbetter, M. R., Stationary and related stochastic processes, Wiley, 1967.
- [6] Вентцель, А. Д., Курс теории случайных процессов, М., 1975 (英译本: Wentzell, A. D., A course in the theory of stochastic processes, McGraw-Hill, 1981).
- [7] Розанов, Ю. А., Случайные процессы, 2 изд., М., 1979.
- [8] Ито, К., Вероятностные процессы, 1 - 2, М., 1960 - 1963 (译自日文).
- [9] Скороход, А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964 (英译本: Skorohod, A. V., Random processes with independent increments, Kluwer, 1991).
- [10] Дынкин, Е. Б., Марковские процессы, М., 1963 (英译本: Dynkin, E. B., Markov processes, 1 - 2, Springer, 1965).
- [11] Ибрагимов, И. А., Розанов, Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970 (英译本: Ibragimov, I. A. and Rozanov, Yu. A., Gaussian stochastic processes, Springer, 1978).
- [12] Розанов, Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963 (英译本: Rozanov, Yu. A., Stationary stochastic processes, Holden-Day, 1967).

A. M. Яглом 撰

【补注】 随机过程  $X$  的状态空间  $E$  可以是一个没有代数结构的 (好的) 拓扑空间, 如在 **Марков** 过程论的情形; 在这种情形常考虑形如  $f \circ X$  的实过程, 其中  $f$  是  $E$  上的实函数; 也可以是微分流形, 像在现代扩散过程论中, 等等. 关于轨道的正则性, 常常不可能证明所考虑的正则轨道的集合具有概率 1, 因为



这个集合是不可测的, 但通常可以通过证明它的外概率为 1 来避开这一困难.

## 参考文献

- [A1] Bailey, N. T. J., The elements of stochastic processes, Wiley, 1964.
- [A2] Chung, K. L., Lectures from Markov processes to Brownian motion, Springer, 1982.
- [A3] Cox, D. R. and Miller, H. D., The theory of stochastic processes, Methuen, 1965.
- [A4] Iranpour, R. and Chacon, P., Basic stochastic processes, The Mark Kac lectures, MacMillan, 1988.
- [A5] Kampen, N. G. van, Stochastic processes in physics and chemistry, North-Holland, 1981.
- [A6] Lévy, P., Processus stochastiques et mouvement Brownien, Gauthier-Villars, 1965.
- [A7] Parzen, E., Stochastic processes, Holden-Day, 1967 (中译本: 伊·帕尔逊著, 随机过程, 高等教育出版社, 1987).
- [A8] Rosenblatt, M., Random processes, Springer, 1974.
- [A9] Wax, N. (ed.), Selected papers on noise and Stochastic processes, Dover, reprint, 1954.
- [A10] Wong, E., Stochastic processes in information and dynamical systems, McGraw-Hill, 1971.
- [A11] Ethier, K., Markov processes, Wiley, 1986.
- [A12] Durrett, R., Brownian motion and martingales in analysis, Wadsworth, 1984.

## 【译注】

## 参考文献

- [B1] 王梓坤, 随机过程通论, 上、下卷, 北京师范大学出版社, 1996. 刘秀芳 译 陈培德 校

**相容随机过程** [stochastic process, compatible; случайный процесс согласованный], 适应随机过程 (adapted stochastic process)

一族定义在具有递增子  $\sigma$  域 ( $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ ) 族  $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  的可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的随机变量  $X = (X_t(\omega))_{t \geq 0}$ , 使得对每一  $t \geq 0$ ,  $X_t$  是  $\mathcal{F}_t$  可测的. 为强调这类过程的这一性质常使用记号

$$X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$$

或

$$X = (X_t, \mathcal{F}_t),$$

并且说  $X$  是  $F$  适应的 ( $F$ -adapted), 或者适应于族  $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , 或  $X$  是一适应过程. 相应的定义也可用在离散时间的情形, 这时“适应过程”有时也称为“适应序列”.

## 参考文献

- [1] Dellacherie, C., Capacités et processus stochastiques, Springer, 1972. A. H. Ширяев 撰

【补注】 其他参考文献见随机过程 (stochastic process).

刘秀芳 译 陈培德 校

**可微随机过程** [stochastic process, differentiable; случайный процесс дифференцируемый]

使极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} = X'(t)$$

存在的随机过程 (stochastic process)  $X(t)$ ;  $X'(t)$  称为随机过程  $X(t)$  的导数 (derivative of the stochastic process). 按照极限解释的不同, 可区分为以概率 1 微分 (differentiation with probability one) 与均方微分 (mean-square differentiation). 均方可微性的条件可以自然地用相关函数

$$B(t_1, t_2) = E X(t_1) X(t_2)$$

来表示, 即  $X'(t)$  存在, 当且仅当极限

$$B''(t_1, t_2) =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta t_1 \rightarrow 0 \\ \Delta t_2 \rightarrow 0}} \{ [B(t_1 + \Delta t_1, t_2 + \Delta t_2) - B(t_1 + \Delta t_1, t_2) - B(t_1, t_2 + \Delta t_2) + B(t_1, t_2)] / \Delta t_1 \Delta t_2 \}$$

存在. 一个有均方导数的随机过程是绝对连续的. 更精确地说, 对每个  $t$ , 下式以概率 1 成立:

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t X'(s) ds, t \geq t_0.$$

一个过程等价于一有连续可微轨道过程的充分条件是其均方导数  $X'(t)$  为连续的且以  $B''(t_1, t_2)$  为其相关函数. 对于 Gauss 过程, 这个条件也是必要的.

## 参考文献

- [1] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977 (英译本: Gikhman, I. I., Skorokhod, A. V., Introduction to the theory of stochastic processes, Saunders, 1967). Ю. А. Розанов 撰

【补注】 其他参考文献见随机过程 (stochastic process). 潘一民 译

**广义随机过程** [stochastic process, generalized; случайный процесс обобщенный]

一种连续 (时间) 参数  $t$  的随机过程 (stochastic process)  $X$ , 一般地说, 在固定时刻它的值不存在, 而过程只具有“光滑值”, 它是用一切可能的具有充分光滑的权函数 (或脉冲转移函数)  $\varphi(t)$  的线性测量装置测量的结果值  $X(\varphi)$  来描述的. 一个广义随机过程  $X(\varphi)$  是由具紧支撑的无穷次可微的函数  $\varphi$  的空

间  $D$  (或在广义函数论中使用的任一其他检验函数空间) 到定义在某一概率空间上的随机变量空间  $L_0$  的映射. 它的实现  $x(\varphi)$  是通常的自变量为  $t$  的广义函数. 通常的随机过程  $X(t)$  也可以看作广义随机过程, 对于它

$$X(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) X(t) dt.$$

与下述事实相结合, 这一点特别有用: 广义随机过程总具有用

$$X^{(n)}(\varphi) = (-1)^n X(\varphi^{(n)})$$

定义的任意  $n$  阶导数 (例如, 见平稳增量随机过程 (stochastic process with stationary increments)). 非古典类型的广义随机过程的最重要的例子是白噪声 (white noise). 广义随机过程概念的推广是广义随机场.

参考文献见广义随机场 (random field, generalized). A. M. Яглом 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Gel'fand, I. M. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, Applications of harmonic analysis, 4, Acad. Press, 1964 (中译本: И. М. 盖勒范德, 广义函数, 科学出版社, 1964). 刘秀芳 译 陈培德 校

可更新随机过程 [stochastic process, renewable; случайный процесс обновляющийся], 新息随机过程 (innovation stochastic process)

由一个输入过程所构造且包含该过程全部必要信息的、结构相当简单的随机过程 (stochastic process). 新息随机过程已用于平稳时间序列的线性预测问题, 随机过程统计的非线性问题, 以及其他问题 (见 [1]—[3]).

在线性和非线性随机过程理论中可以以不同方式引入新息随机过程的概念. 在线性理论中 (见 [4]), 一个向量随机过程  $x_t$  称为满足  $E|\xi_t|^2 < \infty$  的随机过程  $\xi_t$  的新息过程 (innovation process), 如果  $x_t$  有不相关增量的不相关分量, 且对所有  $t$ ,

$$H_t(\xi) = H_t(x),$$

其中  $H_t(\xi)$  和  $H_t(x)$  分别是所有值  $\xi_s (s \leq t)$  和  $x_s (s \leq t)$  的均方闭线性包 (在概率空间  $\Omega$  上的适当函数空间内).  $x_t$  的分量的数目  $N (N \leq \infty)$  称为新息过程的重数 (multiplicity of the innovation process), 它是由  $\xi_t$  唯一确定的. 在一维  $\xi_t$  的情形下, 对于离散时间,  $N = 1$ , 而对于连续时间, 则只是在关于  $\xi_t$  的相关函数的某些特殊假定下才有  $N < \infty$  (见 [4], [5]). 应用中, 能从  $\xi_t$  可表示为值  $x_s (s \leq t)$  的线性泛函这个事实获得便利.

在非线性的理论中 (见 [5], [6]), 新息随机过程

(innovation stochastic process) 这一术语通常用来称呼使得

$$\mathcal{F}_t^\xi = \mathcal{F}_t^x$$

成立的 Wiener 过程 (Wiener process)  $x_t$ , 其中  $\mathcal{F}_t^\xi$ ,  $\mathcal{F}_t^x$  分别为由  $\xi_s$ ,  $x_s$ ,  $s \leq t$ , 生成的事件  $\sigma$  域. 例如, 在  $\xi_t (0 \leq t \leq T)$  为有随机微分

$$d\xi_t = a(t)dt + dw_t$$

的伊藤过程 (Itô process) 的情形, 如果

$$E \int_0^T a^2(s) ds < \infty$$

且过程  $a$  与  $w$  构成一 Gauss 系统, 则由

$$\bar{w}_t = \xi_t - \int_0^t E\{a(s) | \mathcal{F}_s^\xi\} ds$$

定义的 Wiener 过程  $\bar{w}_t$  就是  $\xi_t$  的新息过程 (见 [6]).

参考文献

- [1] Колмогоров, А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 5 (1941), 1, 3—14.  
[2] Ширяев, А. Н., «Пробл. передачи информации», 2 (1966), 3, 3—22.  
[3] Kailath, T., A view of three decades of linear filtering theory, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 20 (1974), 2, 146—181.  
[4] Розанов, Ю. А., Теория обновляющихся процессов, М., 1974 (英译本: Rozanov, Yu. A., Innovation processes, Wiley, 1977).  
[5] Ширяев, А. Н., в кн.: Тр. Школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974), ч. 2, Вильнюс, 1975, 235—267.  
[6] Липцер, Р. Ш., Ширяев, А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974 (中译本: Р. Ш. 里普切尔, А. Н. 史里亚耶夫, 随机过程统计, 宇航出版社, 1987). А. А. Новиков 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Rozanov, Yu. A., Innovation processes, Winston, 1977 (译自俄文).

【译注】

参考文献

- [B1] 潘一民, 随机过程线性统计的理论与方法, 上海科学技术出版社, 1993. 潘一民 译

独立增量随机过程 [stochastic process with independent increments; случайный процесс с независимыми приращениями]

一种随机过程 (stochastic process)  $X(t)$ , 对任意自然数  $n$  和所有实数  $0 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_n < \beta_n$ , 增量



$$X(\beta_1) - X(\alpha_1), \dots, X(\beta_n) - X(\alpha_n)$$

是相互独立随机变量. 独立增量随机过程称为齐次的 (homogeneous), 如果  $X(\alpha + h) - X(\alpha)$ ,  $0 \leq \alpha$ ,  $0 < h$ , 的概率分布只依赖于  $h$  不依赖于  $\alpha$ . 因为加任一非随机函数  $A(t)$  到  $X(t)$  上仍然是独立增量随机过程, 所以这种过程的实现可以是很不规则的. 可是, 通过把过程适当地“中心化”(例如从  $X(t)$  减去由关系式  $E \arctan(X(t) - f(t)) = 0$  定义的函数  $f(t)$ ) 能够对这个“中心化”的过程做出更确切的判断. 存在至多可数多个(非随机)点  $t_j$ , 使得  $X(t)$  在这些点上具有随机的跳跃

$$X_j = X(t_j + 0) - X(t_j - 0),$$

而差

$$Y(t) = X(t) - \sum_{t_j < t} X_j$$

是一随机连续的独立增量随机过程: 对任意  $\varepsilon > 0$ , 当  $t' \rightarrow t$  时

$$P\{|Y(t') - Y(t)| > \varepsilon\} \rightarrow 0.$$

**Wiener 过程** (Wiener process) 和 **Poisson 过程** (Poisson process) 是随机连续的独立增量随机过程的例子(前者的实现以概率 1 连续, 后者的实现是跳跃值等于 1 的阶梯函数). 独立增量随机过程的一个重要例子是稳定过程(见稳定分布 (stable distribution)). 随机连续的独立增量随机过程(以概率 1)只有第一类间断点. 这种过程的值的分布对任意  $t$  是无穷可分的(见无穷可分分布 (infinitely-divisible distribution)) 可以用特征函数 (characteristic function) 方法研究独立增量随机过程. 关于过程穿越边界的概率以及第一次穿越时间的概率分布等问题, 可用所谓因子分解恒等式 (factorization identities) 来解决.

#### 参考文献

- [1] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, 2, М., 1973 (中译本: И. И. 基赫曼等, 随机过程论, 科学出版社, 1986).
- [2] Скороход, А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964 (英译本: Random processes with independent increments, Kluwer, 1991).

Ю. В. Прохоров 撰

补注】其他参考文献见随机过程 (stochastic process).

刘秀芳 译 陈培德 校

**平稳增量随机过程** [stochastic process with stationary increments; случайный процесс со стационарными приращениями]

其某固定阶增量的统计特性不随时间而变化(即

对时间推移  $t \mapsto t + a$  不变)的离散或连续时间  $t$  的随机过程 (stochastic process)  $X(t)$ . 如同平稳随机过程 (stationary stochastic process) 的情形, 将这种过程区分为两种类型, 即严格意义下的平稳增量随机过程 (stochastic processes with stationary increments in the strict sense), 其某一给定阶数的  $X(t)$  的增量的所有有限维概率分布, 在点  $t_1, \dots, t_n$  与  $t_1 + a, \dots, t_n + a$  处, 对于任意  $a$  都彼此相同; 广泛意义下的平稳增量随机过程 (stochastic processes with stationary increments in the wide sense), 其在  $t$  处增量的均值及在  $t$  与  $t + s$  处增量的二阶矩都不依赖于  $t$ .

在离散时间  $t = 0, \pm 1, \dots$  的随机过程  $X(t)$  的情形, 总可以不去考虑  $X(t)$  而考虑新的随机过程

$$\Delta^{(n)} X(t) =$$

$$= X(t) - \binom{n}{1} X(t-1) + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} X(t-n),$$

其中  $\binom{n}{k}$  为二项系数. 如果  $X(t)$  是一  $n$  阶平稳增量随机过程, 那么过程  $\Delta^{(n)} X(t)$  就是在通常意义下平稳的. 因此, 在离散时间情形下, 平稳增量随机过程的理论容易归结为较特殊的平稳随机过程的理论. 但是从应用的观点看, 采用离散时间平稳增量随机过程的概念往往是很方便的, 因为对于很多实际中碰到的明显非平稳的时间序列  $x(t)$  ( $t = 1, 2, \dots$ ), 它的某  $n$  阶增量序列  $\Delta^{(n)} x(t)$  却可以当成一个平稳随机过程  $\Delta^{(n)} X(t)$  的实现. 特别地, G. Box 与 G. Jenkins 在 [1] 中指出, 在解决许多实际问题的时候, 现实的时间序列常可以当成一个所谓整和自回归滑动平均过程 (auto-regressive integrated moving-average process) 的实现, 这表示一类特殊的离散时间平稳增量随机过程 (又见 [2] ~ [4]).

连续时间的一阶(严格意义下的)平稳增量随机过程的例子有 **Wiener 过程** (Wiener process) 与 **Poisson 过程** (Poisson process). 这两者又都属于更狭窄些的一阶独立增量过程类. 在连续  $t$  的情形下, 平稳增量随机过程的理论不能直接归结为较简单的平稳过程理论. 一阶平稳增量随机过程的相关理论(即相应的宽过程理论)由 А. Н. Колмогоров ([5]) 作了研究(亦见 [6]). 类似的  $n$  阶平稳增量随机过程理论, 其中  $n$  为任一正整数, 在 [7] ~ [9] 中作了考虑. 平稳增量随机过程相关理论的核心问题是导出这类过程及其二阶矩的谱分解. 广义随机过程 (stochastic process, generalized) 的概念可用来简化平稳增量随机过程的理论. 因为在广义随机过程理论中任何随机过程  $X(t)$  都有任意阶导数(也是广义随机过程), 所以一个  $n$  阶平稳增量随机过程可以定义为一随

机过程  $X(t)$ , 其  $n$  阶导数  $X^{(n)}$  为一平稳随机过程 (一般而言, 是广义的) (见 [9]).

#### 参考文献

- [1] Box, G., Jenkins, G., Time series analysis, forecasting and control, Holden-Day, 1970.
- [2] Nelson, C. R., Applied time series analysis for managerial forecasting, Holden-Day, 1973.
- [3] Anderson, O. D., Time series analysis and forecasting. The Box-Jenkins approach, Butterworths, 1976.
- [4] Robinson, E. A., Silva, M. T., Digital foundations of time series analysis: The Box-Jenkins approach, Holden-Day, 1979.
- [5] Колмогоров, А. Н., «Докл. АН СССР», 26 (1940), 1, 6-9.
- [6] Doob, J. L., Stochastic processes, Wiley, 1953.
- [7] Яглом, А. М., «Матем. сб.», 37 (1955), 1, 141-196.
- [8] Пинскер, М. С., «Изв. АН СССР Сер. матем.», 19 (1955), 319-345.
- [9] Itô, K., Stationary random distributions, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto (A), 28 (1954), 209-223.

А. М. Яглом 撰

【补注】 其他参考文献, 见随机过程 (stochastic process). 潘一民 译

#### 随机过程的滤波 [stochastic processes, filtering of 或 filtration of stochastic processes; случайных процессов фильтрация]

给定与一随机过程 (stochastic process)  $Z(t)$  有关的另一随机过程的过去值, 估计  $Z(t)$  在当前  $t$  时的值的问题. 例如, 给定与一平稳过程  $Z(t)$  平稳关联的平稳过程的值  $X(s)$  ( $s \leq t$ ) 来估计  $Z(t)$  (例如, 见 [1]). 通常考虑极小化均方误差  $E|\hat{Z}(t) - Z(t)|^2$  的估计量  $\hat{Z}(t)$ . “滤波”一词的采用, 源于从一个信号与随机噪声的“混合体”中分离出信号的问题. 它的一个重要情形是如下的最优滤波问题: 这时  $Z(t)$  与  $X(t)$  之间的联系由随机微分方程 (stochastic differential equation)

$$dX(t) = Z(t)dt + dY(t), t > t_0$$

所描述, 其中假定噪声与  $Z(t)$  独立, 且由标准 Wiener 过程 (Wiener process)  $Y(t)$  给出.

一个广泛使用的滤波方法是 Kalman-Bucy 法 (Kalman-Bucy method), 它适用于由线性随机微分方程所描述的过程  $Z(t)$ . 例如, 如果在上述情形中,

$$dZ(t) = a(t)Z(t)dt + dY_1(t),$$

其中标准 Wiener 过程  $Y_1(t)$  与  $Y(t)$  是独立的, 且有零初始条件, 则有

$$\hat{Z}(t) = \int_{t_0}^t c(t, s) dX(s),$$

其中权函数  $c(t, s)$  从如下方程组获得:

$$\frac{d}{dt} c(t, s) = [a(t) - b(t)]c(t, s), t > s$$

$$c(s, s) = b(s),$$

$$\frac{d}{dt} b(t) = 2a(t)b(t) - [b(t)]^2 + 1,$$

$$t > t_0, b(t_0) = 0.$$

此方法对非线性方程的推广称为一般随机滤波问题或非线性滤波问题 (见 [2]).

在

$$Z(t) = \sum_{k=1}^n c_k Z_k(t)$$

依赖于未知参数  $c_1, \dots, c_n$  的情形下, 可以由给定  $X(s)$  ( $s \leq t$ ) 来估计这些参数而求得其内插估计  $\hat{Z}(t)$ , 最小二乘估计及其推广可用于此 (例如, 见 [3]).

#### 参考文献

- [1] Розанов, Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963 (英译本: Rozanov, Yu. A., Stationary random process, Holden-Day, 1967).
- [2] Липцер, Р. Ш., Ширяев, А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974 (英译本: Liptser, R. S. and Shiryaev, A. N., Statistics of stochastic processes, 1-2, Springer, 1977-1978).
- [3] Ибрагимов, И. А., Розанов, Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970 (英译本: Ibragimov, I. A., Rozanov, Yu. A., Gaussian stochastic processes, Springer, 1978).

Ю. А. Розанов 撰

【补注】 在随机过程的滤波中要区分两类问题. 线性滤波问题 (linear filtering problem) 是给出一个实平稳过程的过去值的线性函数来估计另一平稳随机过程, 使其均方误差极小化. 随机滤波问题 (stochastic filtering problem) 或非线性滤波问题 (non-linear filtering problem) 则是确定一过程在给定另一关联过程的过去值之下的条件概率分布.

线性滤波问题首先由 N. Wiener ([A18]) 及 A. Н. Колмогоров ([A20]) 加以严格表述与解决. R. E. Kalman 又对状态空间形式下的随机系统重新表述了线性滤波问题. 该问题的解答, 对于离散时间过程, 称为 Kalman 滤波器 (Kalman filter) ([A7]), 而对于连续时间过程, 则称为 Kalman-Bucy 滤波器 (Kalman-Bucy filter) ([A8]). 其问题表述中的新内容在于强调递推滤波器与状态空间的有限维性.

在 Wiener-Колмогоров 滤波 (Wiener-Kolmogorov filtering) 中 (见 [A12], [A20]), 是给定一对联合平稳零均值正态分布随机过程  $\{y(t), z(t): t \in \mathbb{R}\}$ , 想要



从观测  $y$  的过去:  $\{y(t'): t' < t\}$ , 求得  $z(t)$  的最优最小二乘估计. 最优估计量  $\hat{z}(t)$  将由下述卷积式给出:

$$\hat{z}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') y(t') dt'.$$

卷积核由如下积分方程确定:

$$\int_0^\infty G(t') R_{yy}(t-t') dt' = R_{zy}(t), t > 0,$$

其中  $R_{yy}(t) = E\{y(t)y^T(0)\}$ ,  $R_{zy}(t) = E\{z(t) \cdot y^T(0)\}$ .

这个积分方程就是所谓的 **Wiener-Hopf 方程** (Wiener-Hopf equation),  $G$  是由  $R_{yy}$  与  $R_{zy}$  确定的函数. 解它的最有效的方法是随机函数的谱分解 (spectral decomposition of a random function) 方法.

在 Kalman-Bucy 滤波 (Kalman-Bucy filtering) 中 (见 [A7], [A8]), 模型由如下的线性随机微分方程给出:

$$\begin{aligned} dx &= A(t)x dt + B(t)dw(t), \\ dy &= C(t)x dt + D(t)dw(t), \end{aligned}$$

其中  $w$  是一个 **Wiener 过程** (Wiener process), 它通过状态向量过程  $x$  生成被观测向量过程  $y$ . 假定矩阵  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$  是已知的且有适当维数,  $D(t)D^T(t)$  是严格正定的. 初始状态  $x(t_0)$  具有已知均值  $m_0$  与协方差  $\Pi_0$  的正态分布, 并假定与  $w$  独立. 此外,  $y(t_0)$  取为 0.

问题是要从观测值  $Y(t')$  ( $t_0 \leq t' < t$ ) 来估计  $x(t)$ . 产生这一估计量的 Kalman 滤波器由下式给出:

$$d\hat{x} = A(t)\hat{x} dt + L(t)(dy - C(t)\hat{x} dt), t \geq t_0.$$

初始条件为  $\hat{x}(t_0) = m_0$  而 Kalman 增益 (Kalman gain)  $L$  由下式定义:

$$\begin{aligned} L(t) &= (\Sigma(t)C^T(t) + \\ &+ B(t)D^T(t))(D(t)D^T(t))^{-1}, \end{aligned}$$

其中  $\Sigma$  是 **Riccati 方程** (Riccati equation) 的解:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma} &= A(t)\Sigma + \Sigma A^T(t) + \\ &- (\Sigma C^T(t) + B(t)D^T(t))(D(t)D^T(t))^{-1} \times \\ &\times (C(t)\Sigma + D(t)B^T(t)) + B(t)B^T(t), \end{aligned}$$

而  $\Sigma(t_0) = \Pi_0$ . 这个  $n \times n$  对称阵  $\Sigma$  的微分方程可以证明有唯一的对称非负定解. 它的解实际上等于估计误差:

$$\Sigma(t) = E\{(x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T\}.$$

在时不变 Kalman 滤波器中, 可以假定观测的初始时刻是趋于负无穷的:  $t_0 \rightarrow -\infty$ . 如果假设  $A, B, C, D$  是不随  $t$  变化的, 且满足一定的可观测性与可控制性条件, 那么无穷 Kalman 滤波器 (infinite Kalman filter) 就变成

$$d\hat{x} = A\hat{x} dt + L(dy - C\hat{x} dt),$$

其中  $L$  由下式定义:

$$L = (\Sigma^+ C^T + B D^T) (D D^T)^{-1},$$

而  $\Sigma^+$  是如下代数 Riccati 方程的 (唯一) 对称非负定解:

$$\begin{aligned} 0 &= A\Sigma + \Sigma A^T + \\ &- (\Sigma C^T + B D^T) (D D^T)^{-1} (C\Sigma + D B^T) + B B^T. \end{aligned}$$

Kalman 滤波器, 尤其是它的时不变型, 是控制理论与信号处理的最基本结果之一, 而且在过程控制、航天工程、经济学等诸方面有着广泛的应用. 很多这类应用涉及非线性系统, 这时 Kalman 滤波器以逐步线性化的办法这种不严格的方式加以应用. 这种算法称为推广的 Kalman 滤波器 (extended Kalman filter), 而且已被证明是有重大实际效果的 ([A11]). 关于线性滤波理论的概论, 见 [A21], [A22].

随机滤波问题或非线性滤波的研究, 始于 P. Л. Стратонович ([A16]) 与 H. J. Kushner ([A9]). 它的推广及采用鞅论的证明, 则应归于藤崎、G. Kallianpur 与国田 ([A4]). 亦见 [A26] 与 [2]. 一项导致对非正规化条件密度的动力学方程的研究, 由 Kallianpur, C. Striebel ([A6]), R. E. Mortensen ([A12]), M. Zakai ([A19]) 及 E. Pardoux ([A13]) 加以发展. 亦见 [A25]. 这些滤波公式没有一个是可以直接实现的, 因为它们全都是“无穷维的”, 即是以测度值或随机偏微分方程的形式来描述条件分布或密度函数随时间的发展. 1980年 V. E. Beneš ([A1]) 发现了一类非线性系统, 其条件密度允许有限维参数化, 由此导致对于刻画这类系统及探讨非线性滤波与某些微分算子 Lie 代数之间的联系的研究, 这类研究由 R. W. Brockett, J. M. C. Clark ([A3]) 开端; 亦见 [A25], [A18]. 其他的工作, 例如 [A23], [A24], 则致力于用 Malliavin 演算的方法, 建立光滑条件密度函数的存在性.

对计数过程观测的随机滤波问题, 首先由 D. L. Snyder 加以考虑, 见 [A15]. 其推广可在 [A2], [A14], [A17] 中找到.

#### 参考文献

[A1] Beneš, V. E., Exact finite-dimensional filters for

- certain diffusion with nonlinear drift, *Stochastics*, 5 (1981), 65 – 92.
- [A2] Brémaud, P., Point processes and queues-Martin-gale dynamics, Springer, 1981.
- [A3] Brockett, R. W., Clark, J. M. C., The geometry of the conditional density equation, in O. L. R. Jacobs, M. H. A. Davis, M. A. H. Dempster, C. J. Harris, P. C. Parks (eds.): *Analysis and Optimization of Stochastic Systems*, Acad. Press, 1980, 299 – 309.
- [A4] Fujisaki, M., Kallianpur, G., Kunita, H., Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem, *Osaka J. Math.*, 9 (1972), 19 – 40.
- [A5] Jazwinski, A. H., *Stochastic processes and filtering theory*, Acad. Press, 1970.
- [A6] Kallianpur, G., Striebel, C., Estimation of stochastic systems: Arbitrary system processes with additive white noise observation errors, *Ann. Math. Statist.*, 39 (1968), 785 – 801.
- [A7] Kalman, R. E., A new approach to linear filtering and prediction problems, *J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D*, 82 (1960), 1, 35 – 45.
- [A8] Kalman, R. E., Bucy, R. S., New results in linear filtering and prediction theory, *J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D*, 83 (1961), 95 – 108.
- [A9] Kushner, H. J., Dynamical equations for optimal nonlinear filtering, *J. Diff. Equations*, 3 (1967), 179 – 190.
- [A10] Marcus, S. I., Algebraic and geometric methods in nonlinear filtering, *SIAM J. Control Optim.*, 22 (1984), 814 – 844.
- [A11] Maybeck, P. S., *Stochastic models, estimation and control*, 1 – 3, Acad. Press, 1979 – 1982.
- [A12] Mortensen, R. E., Optimal control of continuous time stochastic systems, Doctoral Diss. Dept. Elect. Engin. Univ. California, 1966.
- [A13] Pardoux, E., Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes, *Stochastics*, 3 (1979), 127 – 167.
- [A14] Segall, A., Davis, M. H. A., Kailath, T., Non-linear filtering with counting observations, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 21 (1975), 143 – 149.
- [A15] Snyder, D. L., *Random point processes*, Wiley, 1975.
- [A16] Stratonovitch, R. L., Conditional Markov processes, *Theor. Probab. Appl.*, 5 (1960), 156 – 178.
- [A17] Schuppen, J. H. van, Filtering prediction and smoothing for counting process observations, a martingale approach, *SIAM J. Appl. Math.*, 32 (1977), 552 – 570.
- [A18] Wiener, N., *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series: with engineering applications*, M. I. T., 1949.
- [A19] Zakai, M., On the optimal filtering of diffusion processes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 11 (1969), 230 – 243.
- [A20] Kolmogorov, A. N., Interpolation and extrapolation of stationary random sequences, *Byull. Akad. Nauk, SSSR Ser. Mat.*, 5 (1941), 3 – 14 (俄文).
- [A21] Kailath, T., *Lectures on Wiener and Kalman filtering*, Springer, 1981.
- [A22] Willems, J. C., Recursive filtering, *Statistica Neerlandica*, 32 (1978), 1, 1 – 39.
- [A23] Bismut, J. M., Michel, D., Diffusions conditionnelles I, *Funct. Anal.*, 44 (1981), 174 – 211.
- [A24] Bismut, J. M., Michel, D., Diffusions conditionnelles II, *Funct. Anal.*, 45 (1982), 274 – 292.
- [A25] Hazewinkel, M., Willems, J. C., *Stochastic systems: the mathematical theory of filtering and identification and applications*, Reidel, 1981.
- [A26] Kallianpur, G., *Stochastic filtering theory*, Springer, 1978.

## 【译注】

## 参考文献

- [B1] 中国科学院数学研究所概率组, 离散时间系统滤波的数学方法, 国防工业出版社, 1975.
- [B2] 潘一民, 随机过程的线性统计理论与方法, 上海科学技术出版社, 1993. 潘一民 译

### 随机过程的内插 [stochastic processes, interpolation of; случайных процессов интерполяция]

用一个随机过程 (stochastic process)  $X(t)$  在某区间  $a < t < b$  外的观察值估计它在此区间内的值的问题. 通常认为内插估计  $\hat{X}(t)$  是使内插的均方误差比较所有其他估计量达到最小:

$$E|\hat{X}(t) - X(t)|^2 = \min;$$

如果限于考虑线性估计量, 则内插称为线性的 (linear). 最初提出和解决的问题是平稳序列的值  $\dot{X}(0)$  的线性内插. 此问题相当于如下的问题: 在区间  $-\pi < \lambda \leq \pi$  上的平方可积函数空间  $L_2$  中寻求  $\varphi(\lambda) \in L_2$  在由函数  $e^{ik\lambda}$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 生成的子空间上的投影. 这个问题在平稳随机过程理论中已有了很大的推广 (见平稳随机过程 (stationary stochastic process); [1], [2]). 一个应用是从系统

$$LX(t) = Y(t), \quad t > t_0$$

产生的随机过程的内插问题, 其中  $L$  是  $l$  阶线性微分算子, 而  $Y(t)$  ( $t > t_0$ ) 是白噪声 (white noise) 过程. 对于独立于此白噪声的给定初值  $X^{(k)}(t_0)$  ( $k = 0, \dots, l-1$ ), 最优内插估计量  $\hat{X}(t)$  ( $a < t < b$ ) 是对应的边值问题



$$L^* L \hat{X}(t) = 0, a < t < b$$

的解, 其中  $L^*$  表示形式伴随算子, 且在边界点  $s = a, b$  处满足边界条件

$$\hat{X}^{(k)}(s) = X^{(k)}(s), k = 0, \dots, l.$$

对于随机微分方程系统, 某些分量在给定其他被观测分量的值时的内插问题也归结为类似的内插方程 (见 [3]).

#### 参考文献

- [1] Колмогоров, А. Н., «Бюлл. МГУ», 2 (1941), 6, 1 - 40.
- [2] Розанов, Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963 (英译本: Rozanov, Yu. A., Stationary stochastic processes, Holden-Day, 1967).
- [3] Липсер, Р. Ш., Ширяев, А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974 (英译本: Liptser, R. S. and Shiryaev, A. N., Statistics of stochastic processes, 1 - 2, Springer, 1977 - 1978).

Ю. А. Розанов 撰

【补注】内插问题通常定义为一个在某时间区间上未被观测的随机过程当给定一在此时间区间外被观测的关联过程时的估计. 要区别两种特殊情形: 1) 线性最小二乘内插, 此时估计量限定是线性的, 且极小化一最小二乘判据, 见 [A1], [A3]; 2) 内插由给定观测时估计量的条件分布来确定, 见 [A2].

关于内插问题的西方文献, 见 [A5], § 5.3 及 [A1], § 4.13. 已经翻译了的其他俄文文献还有 [A6]; [A7], § 37. 应用随机实现理论的近代发展, 见 [A3], [A4]. 内插问题的结果也可从光滑问题的结果推出 ([A2]).

#### 参考文献

- [A1] Dym, H., McKean, H. P., Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem, Acad. Press, 1976.
- [A2] Pardoux, E., Equations du filtrage nonlinéaire, de la prédiction et du lissage, *Stochastics*, 6 (1982), 193 - 231.
- [A3] Pavon, M., New results on the interpolation problem for continuous-time stationary increment processes, *SIAM J. Control Optim.*, 22 (1984), 133 - 142.
- [A4] Pavon, M., Optimal interpolation for linear stochastic systems, *SIAM J. Control Optim.*, 22 (1984), 618 - 629.
- [A5] Wiener, N., Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series: with engineering applications, M. I. T., 1949.
- [A6] Yaglom, A. M., Extrapolation, interpolation and filtration of stationary random processes with rational spectral density, *Amer. Math. Soc. Sel. Transl. Math. Statist.*, 4 (1963), 345 - 387 (Tr. Moskov.

*Mat. obshch.*, 4 (1955), 333 - 374).

- [A7] Yaglom, A. M., An introduction to the theory of stationary random functions, Prentice-Hall, 1962 (译自俄文).

潘一民 译

随机过程的预测 [stochastic processes, prediction of; случайных процессов прогнозирование], 随机过程的外推 (extrapolation of stochastic processes)

由随机过程 (stochastic process)  $X(t)$  直到现在时刻  $s$  的观察值对将来  $t > s$  的值进行估计的问题. 通常想要的外推估计  $\hat{X}(t)$  ( $t > s$ ) 是使得均方误差  $E|\hat{X}(t) - X(t)|^2$  在基于过程直到时刻  $s$  的过去值的所有估计中最小的那个 (如果限于考虑线性估计, 所得到的预测称为是线性的).

已经提出并得到解决的问题之一是关于平稳序列的线性预测. 这一问题类似于下述问题: 在区间  $-\pi \leq \lambda \leq \pi$  上平方可积的函数空间  $L_2$  中, 必须在由函数  $e^{i\lambda k}$ ,  $k = 0, -1, -2, \dots$ , 生成的子空间上找到函数  $\varphi(\lambda) \in L_2$  的投影. 在平稳随机过程 (stationary stochastic process) 的理论中这个问题已经被大大地推广了. 一个应用是由下述系统

$$LX(t) = Y(t), t > t_0,$$

引起的随机过程的预测问题, 其中  $L$  是  $l$  阶线性微分算子, 而  $Y(t)$ ,  $t > t_0$ , 是一白噪声 (white noise) 过程. 给定  $X(t)$  在时间间隔  $t_0 \leq t \leq s$  的值和初始值  $X^{(k)}(t_0)$ ,  $k = 0, \dots, l-1$ , 与白噪声独立, 最佳预测  $\hat{X}(t)$ ,  $t > s$ , 由解相应的方程

$$L\hat{X}(t) = 0, t > s,$$

带初始条件

$$\hat{X}^{(k)}(s) = X^{(k)}(s), k = 0, \dots, l-1,$$

得到. 对随机微分方程系统, 给定其他已观测到的分量值预测某些分量的问题, 归结为相应的随机方程的外推.

参考文献见随机过程的内插 (stochastic processes, interpolation of).

Ю. А. Розанов 撰

【补注】线性预测问题的研究, 在俄国始于 А. Н. Колмогоров ([A7], [A8]), 在西方始于 N. Wiener ([A6]), 他还同 P. Masani 处理了多变量情形 ([A11], [A12]). 他们考虑的预测是基于整个的过去; 基于过去的有限时段的预测更困难, 见 [A9], [A10]. 对非平稳过程的线性预测在 [A13] 中讨论. 线性理论也可在 [A2] 中找到. R. E. Kalman 的方法 ([A3], [A4]) 基于 Kalman 滤波和过程在状态空间上的实现, 引入了在实践中很有用的预测算法. 在 [A5] 中介绍了将预测问题推广到扩散过程的情形. 在应用科

学中对预测算法的应用见 [A1].

#### 参考文献

- [A1] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M., Time series analysis, forecasting and control, Holden-Day, 1976.
- [A2] Hannan, E. J., Multiple time series, Wiley, 1970.
- [A3] Kalman, R. E., A new approach to linear filtering and prediction problems, *J. Basic Eng. Trans. ASME, Series D*, **82** (March 1960), 1, 35 - 45.
- [A4] Kalman, R. E. and Bucy, R. S., New results in linear filtering and prediction theory, *J. Basic Eng. Trans. ASME, Series D*, **83** (1961), 95 - 108.
- [A5] Pardoux, E., Equations du filtrage nonlinéaire, de la prédiction et du lissage, *Stochastics*, **6** (1982), 193 - 231.
- [A6] Wiener, N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series: with engineering applications, M. I. T., 1949.
- [A7] Kolmogorov, A. N., Stationary sequences in Hilbert space, *Byull Moskov. Gos. Univ., Sect. A*, **2** (1941), 6, 1 - 40 (俄文).
- [A8] Kolmogorov, A. N., Interpolation und Extrapolation von Stationären zufälligen Folgen, *Izv. Akad. Nauk. SSSR*, **5** (1941), 3 - 14.
- [A9] Krein, M. G., On a fundamental approximation problem in the theory of extrapolation and filtration of stationary random processes, *Amer. Math. Soc. Sel. Transl. Math. Statist.*, **4** (1964), 127 - 131 (*Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **94** (1954), 13 - 16).
- [A10] Dym, H. and McKean, H. P., Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem, Acad. Press, 1976.
- [A11] Wiener, N. and Masani, P., The prediction theory of multivariate stochastic processes, I, *Acta math.*, **98** (1957), 111 - 150.
- [A12] Wiener, N. and Masani, P., The prediction theory of multivariate stochastic processes II, *Acta Math.*, **99** (1958), 93 - 137.
- [A13] Rissanen, J. and Barbosa, L., A factorization problem and the problem of predicting non-stationary vector-valued random processes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, **12** (1969), 255 - 266.

刘秀芳 译 陈培德 校

#### 随机规划 [stochastic programming; стохастическое программирование]

数学规划 (mathematical programming) 的一个分支, 它研究对问题的目标和限制给出不完全信息的条件极值问题的求解理论和方法. 随机规划框架中包括控制、计划和设计的许多实际问题. 随机规划方法也能用于其运作介质的状态中有随机变化的适应系统和算法. 随机最优化模型通常对于解的选择比极值问题的确定性陈述更符合现实条件.

为了构造控制系统的合理随机模型, 不仅必须对条件的随机参数的统计特征有处理, 并且也对在信息入口储存和运用的次序上, 所容许的解的顺序上以及对于解的质量要求上有处理. 随机问题分为单阶段、二阶段和多阶段问题.

在随机规划的单阶段问题 (single-stage problem) 中, 初始信息进入的动态特性不起作用, 解被一次性接受, 不被校正. 单阶段问题根据目标泛函的类型、限制的特征和解的形式来分类. 最经常运用的目标泛函是落入一定的、一般是随机的区域的概率 ( $P$  模型 ( $P$ -model)) 和解的某个函数的数学期望或方差 (分别是  $M$  模型 ( $M$ -model) 和  $V$  模型 ( $V$ -model)). 随机规划问题的单阶段问题的可行解区域由刚性的、概率的或统计的限制来确定. 对于所有 (或几乎所有) 实现都必须满足的问题的限制称为刚性的 (rigid). 随机问题的限制称为概率的 (probabilistic), 如果在问题的条件中容许以不高于给定值的概率来接受的离差. 限制称为统计的 (statistical), 如果根据问题的适当内容只要求它们平均满足.

单阶段问题也根据解在初始数据的实现的观察前还是后来接受而有所区别. 在第一种情形下, 解以确定性向量的形式来定义, 而在第二种情形下, 则以“决策原理”的形式来定义, 后者是问题条件的随机参数的函数.

关于随机规划的单阶段问题的解法 (solution method for single-stage problems) 的研究分为直接法和间接法. 直接法是迭代过程, 使得人们由观察条件的逐次实现来逼近问题的解. 直接法在内容丰富的术语中被解释为适应方法. 这些方法是所谓随机逼近 (stochastic approximation) 模式的推广. 间接法归结为构造随机问题的确定性等价物, 且利用确定性数学规划的已知方法. 无论是直接法还是间接法, 在其确定性等价物是凸规划 (convex programming) 问题的情形下, 都是有效的.

随机规划的二阶段问题 (two-stage problem) 是在不完全信息条件下的控制过程的最为流行的模型. 二阶段模型被推广为包括不同信息结构的随机问题, 其中信息结构反映收集信息以及解的选择和校正的可能动态面貌. 多阶段随机模型的理论特别是被包括在 Марков 规划 (见, 例如, [6]) 以及随机离散最优控制中.

随机规划的理论和方法已经被推广到一系列随机最优控制类中 (见 [5]).

#### 参考文献

- [1] Юдин, Д. Б., Математические методы управления в условиях неполной информации, М., 1974.
- [2] Дынкин, Е. Б., Юшкевич, А. А., Управляемые



марковские процессы и их приложения, М., 1975 (英译本: Dynkin, E. B. and Yushkevich, A. A., Controlled Markov processes, Springer, 1979).

[3] Ермольев, Ю. М., Методы стохастического программирования, М., 1976.

[4] Аркин, В. И., Евстигнеев, И. В., Вероятностные модели управления и экономической динамики, М., 1979 (英译本: Arkin, V. I. and Evstigneev, I. V., Stochastic models of control and economic dynamics, Acad. Press, 1987).

[5] Юдин, Д. Б., Задачи и методы стохастического программирования, М., 1979.

[6] Юдин, Д. Б., Юдин, А. Д., Экстремальные модели в экономике, М., 1979. Д. Б. Юдин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wets, R. J. -B., Stochastic programming: solution techniques and approximation schemes, in A. Bachem and B. Korte (eds.), Mathematical Programming - The State of the Art, Springer, 1983, 566 - 603.

[A2] Vajda, S., Probabilistic programming, Acad. Press, 1972. 史树中 译

随机序列 [stochastic sequence; стохастическая последовательность]

定义在一可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的随机变量的序列  $X = (X_n)_{n \geq 1}$ , 具有使其为适应的递增  $\sigma$  域族  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ ,  $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ : 即对每一  $n \geq 1$ ,  $X_n$  是  $\mathcal{F}_n$  可测的. 在表示这种序列时, 为了强调  $X_n$  关于  $\mathcal{F}_n$  的可测性, 常用记号  $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ . 定义在概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的随机序列的典型例子有 Марков 序列, 鞅, 半鞅及其他 (见 Марков 链 (Markov-chain); 鞅 (martingale); 半鞅 (semi-martingale)). 在连续时间情形 (其中用  $t \geq 0$  替代离散时间  $n \geq 1$ ), 相应的对象集  $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  称为随机过程 (stochastic process).

А. Н. Ширяев 撰

【补注】“随机序列”这一术语在西方很少使用; 如果必要的话, 通常是说“随机过程”再加上“离散时间”. 严格说来, 它无非就是随机变量的序列. 但如果给定了  $\sigma$  域流  $F = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ , 则如正文所说常假定过程是适应的. 又见相容随机过程 (stochastic process, compatible).

潘一民 译

Stokes 公式 [Stokes formula; Стокса формула]

1) 表达向量场通过某二维定向流形的流量与沿该流形的相应定向边界的环流之间关系的一个公式. 设  $S$  为定向的逐片光滑曲面,  $v = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  为  $S$  的单位法向量 (当然指在它存在的点上), 它确定了  $S$  的定向, 又设  $S$  的边界由有限个段逐段光滑曲线所

组成.  $S$  的边界记为  $\partial S$ , 其定向由单位切向量  $\tau$  来确定, 使得后者的定向与  $S$  的定向  $v$  相容.

假设  $a = (P, Q, R)$  是在  $S$  的一邻域内的连续可微向量场 (vector field), 则有

$$\iint_S (\operatorname{rot} a, v) dS = \int_{\partial S} (a, \tau) ds, \quad (*)$$

( $dS$  为  $S$  的面积元,  $ds$  为  $S$  的边界  $\partial S$  的弧长的微分), 或用坐标形式表达, 则为

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz.$$

此公式为 G. Stokes (1854) 建立.

2) Stokes 公式也指公式 (\*) 的一个推广, 它表示在定向紧流形  $M$  上的微分形式 (differential form)  $\omega$  的外微分的积分, 等于形式  $\omega$  自身沿  $M$  边界  $\partial M$  的积分 (取  $\partial M$  的定向与  $M$  的定向相容):

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

此公式的另一些特殊情形是 Newton-Leibniz 公式 (Newton-Leibniz formula), Green 公式 (Green formula) 以及 Остроградский 公式 (Ostrogradski formula).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arnold, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (译自俄文) (中译本: В. И. 阿诺尔德, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992).

[A2] Spivak, M., Calculus on manifolds, Benjamin, 1965 (中译本: M. 斯皮瓦克, 流形上的微积分, 科学出版社, 1985).

[A3] Choquet-Bruhat, Y., de Witt-Morette, C. and Dillard-Bleick, M., Analysis, manifolds, physics, North-Holland, 1977, p. 205 (译自法文).

[A4] Triebel, H., Analysis and mathematical physics, Reidel, 1986, p. 375. 王斯雷 译

Stokes 现象 [Stokes phenomenon; Стокса явление]

函数  $f(z)$  当  $|z| \rightarrow \infty$  时在复  $z$  平面的不同区域中有不同渐近表示的现象. G. Stokes 证明了 ([1]), 所谓 Airy 方程 (Airy equation)

$$w'' - zw = 0$$

的、当实的  $z = x \rightarrow +\infty$  时下降的解  $w_0(z)$ , 在  $|z| \rightarrow \infty$  时有以下的渐近展开式:

$$w_0(z) \sim C z^{-1/4} \exp \left[ -\frac{2}{3} z^{3/2} \right],$$

$$|\arg z| \leq \pi - \varepsilon < \pi;$$

$$w_0(z) \sim C e^{i\pi/4} z^{-1/4} \cos \left[ \frac{2}{3} z^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right],$$

$$|\arg z - \pi| \leq \varepsilon < \pi,$$

这里常数  $C \neq 0$ . 函数  $w_0(z)$  是一个整函数, 但其渐近展开式则是不连续函数.

在 Laplace 积分, 常微分方程的解等等中, 也出现 Stokes 现象 (见 [2], [3]).

#### 参考文献

- [1] Stokes, G. G., *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 10 (1864), 106 – 128.
- [2] Heading, J., *An introduction to phase-integral methods*, Methuen, 1962.
- [3] Bruijn, N. G. de, *Asymptotic methods in analysis*, Dover, reprint, 1981. М. В. Федорюк 撰

【补注】对渐近分析中的 Stokes 现象现在又有了兴趣, 这是由 M. V. Berry 在 [A1] 中开始的. 他在对此现象新的解释中, 引入了一个误差函数来描述渐近展开式余项在越过 Stokes 线时性态的急速变化. [A2] 中对 Berry 的看法给出了一个严格的处理.

#### 参考文献

- [A1] Berry, M. V., *Uniform asymptotic smoothing of Stokes discontinuities*, *Proc. R. Soc. London A*, 422 (1989), 7 – 21.
- [A2] Wong, R. (ed.), *On Stokes's phenomenon and converging factors*, in *Proc. Int. Symp. Asymptotic and Computational Anal. (Winnipeg, Manitoba)*, M. Dekker, 1990. 齐民友 译

#### Stokes 定理 [Stokes theorem; Стокса теорема]

建立向量场通过某定向曲面的流量与沿曲面边界环流之间关系的一个定理 (见 Stokes 公式 (Stokes formula)). Л. Д. Кудрявцев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Apostol, T., *Calculus*, 1 – 2, Blaisdell, 1964 (中译本: T. M. 阿波斯托, 微积分学, 高等教育出版社, 1987). 王斯雷 译

#### Stone-Čech 紧化 [Stone-Čech compactification; Стоуна-Чеха бикомпактное расширение]

完全正则空间 (completely-regular space)  $X$  的最大紧化 (compactification)  $\beta X$ . 由 E. Čech ([1]) 和 M. H. Stone ([2]) 作出.

设  $\{f_\alpha: X \rightarrow [0, 1]\}_{\alpha \in A}$  是  $X \rightarrow [0, 1]$  的所有连续函数的集合. 映射  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^A$ ,  $\varphi(X)_\alpha = f_\alpha(X)$ , 同胚于它自身的象. 据定义, 则有  $\beta X = [\varphi(X)]$  (这里  $[\cdot]$  是闭包运算). 对任一紧化  $bX$ , 存在一

个在  $X$  上为恒等的连续映射  $\beta X \rightarrow bX$ , 用“最大”来表示此事实.

拟正规空间 (quasi-normal space) 的 Stone-Čech 紧化与它的 Wallman 紧化 (Wallman compactification) 一致.

#### 参考文献

- [1] Čech, E., *On bicomact spaces*, *Ann. of Math.*, 38 (1937), 823 – 844.
- [2] Stone, M. H., *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41 (1937), 375 – 481.
- [3] Engelking, R., *Outline of general topology*, North-Holland, 1968 (译自波兰文).
- [4] Александров, П. С., *«Успехи матем. наук»*, 15 (1960), 2, 25 – 95. И. Г. Кошечникова 撰

【补注】在文献中可以发现, 和 Stone-Čech 紧化同样频繁地又称 Čech-Stone 紧化 (Čech-Stone compactification).

#### 参考文献

- [A1] Engelking, R., *General topology*, Heldermann, 1989.
- [A2] Gillman, L. and Jerison, M., *Ring of continuous functions*, Springer, 1976.
- [A3] Porter, J. and Woods, R. G., *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces*, Springer, 1988.
- [A4] Walker, R. C., *The Stone-Čech compactification*, Springer, 1974. 白苏华, 胡师度 译

#### Stone 格 [Stone lattice; Стоуна решетка]

满足下列条件的伪补分配格 (distributive lattice)  $L$  (见有补格 (lattice with complements)): 对所有  $a \in L$ ,  $a^* + a^{**} = 1$ . 伪补分配格  $L$  是 Stone 格, 当且仅当它的任意两个极小素理想的并是整个  $L$  (Grätzer-Schmidt 定理 (Grätzer-Schmidt theorem)) ([3]).

Stone 格看作一个具有基本运算  $\langle \vee, \wedge, *, 0, 1 \rangle$  的泛代数 (universal algebra), 称为 Stone 代数 (Stone algebra). 每一个 Stone 代数是两个元素和三个元素的链的次直积 (subdirect product). 在伪补格中, 一个元素  $x$  称为稠密的 (dense), 如果  $x^* = 0$ . Stone 格  $L$  的中心  $C(L)$  (见偏序集的中心 (centre of a partially ordered set)) 是一个 Boole 代数 (Boolean algebra), 而它的所有稠密元的集合  $D(L)$  是一个具有单位元的分配格, 而且存在  $C(L)$  到  $(D(L))$  的滤子的格  $F(D(L))$  中的同态  $\varphi^L$ :

$$a\varphi^L = \{x: x \in D(L), x \geq a^*\},$$

此同态保持 0 和 1 不变.

三元组 (triplet)  $\langle C(L), D(L), \varphi^L \rangle$  称作是与 Stone 代数  $L$  相伴的. 三元组的同态和同构用自然的方式定义. 任一三元组  $\langle C, D, \varphi \rangle$  (其中  $C$  是 Boole



代数,  $D$  是具有 1 的分配格,  $\varphi: C \rightarrow F(D)$  是保持 0 和 1 的同态) 同构于与某一个 Stone 代数相伴的三元组. 两个 Stone 代数同构, 当且仅当与它们相伴的三元组同构 (Chen-Grätzer 定理 (Chen-Grätzer theorem), [2]).

## 参考文献

- [1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.
- [2] Chen, C. C. and Grätzer, G., Stone lattice I – II, *Canad. J. Math.*, 21 (1969), 4, 884 – 903.
- [3] Grätzer, G. and Schmidt, E. T., On a problem of M. H. Stone, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 8 (1957), 3 – 4, 455 – 460.
- [4] Фофанова, Т. С., в кн.: Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1975, 22 – 40.

Т. С. Фофанова 撰

【补注】 特别值得一提的是, Stone 格作为极不连通空间 (extremally-disconnected space) 的开集格出现, 因纪念 M. H. Stone 关于这种空间的研究 ([A1]) 而命名. 如果  $L$  是紧极不连通空间  $X$  的所有开集的格, 那么  $C(L)$  是一个完全 Boole 代数, 并且  $X$  是它的 Stone 空间 (Stone space). 于是, 在这种情况下,  $L$  完全由  $C(L)$  决定.

## 参考文献

- [A1] Stone, M. H., Algebraic characterization of special Boolean rings, *Fund. Math.*, 29 (1937), 223 – 303.
- [A2] Grätzer, G., General lattice theory, Birkhäuser, 1978. 卢景波 译 王世强 校

Stone 空间 [Stone space; Стоуна пространство], Boole 代数  $\mathcal{B}$  的

其全体开-闭子集组成的集域同构于  $\mathcal{B}$  的全不连通紧空间  $(X, \tau)$ . 这个空间可以由  $\mathcal{B}$  用下述方法典型地定义:  $X$  是  $\mathcal{B}$  的全体超滤子 (ultrafilter) 组成的集合, 而其拓扑  $\tau$  是由形如  $\{\xi \in X: A \in \xi\}$  的子集族生成的, 其中  $A$  是  $\mathcal{B}$  的一个任意元素. 也可用  $\mathcal{B}$  的极大理想集或二值同态集或  $\mathcal{B}$  上二值测度集 (各赋以适当的拓扑) 来代替超滤子集. 同构的 Boole 代数有同胚的 Stone 空间. 每一个全不连通的紧空间都是它的开-闭集 Boole 代数的 Stone 空间.

Stone 空间概念和它的基本性质由 M. H. Stone (1934 – 1937, 见 [1]) 发现并研究.

一个 Boole 代数的 Stone 空间是可度量化的, 当且仅当此 Boole 代数是可数的. 一个 Boole 代数是完全的, 当且仅当它的 Stone 空间是极不连通的 (即空间中任意一个开集的闭包是开集). 完满 Cantor 集 (Cantor set) 是可数无原子 Boole 代数的 Stone 空间 (它们都同构). 广义 Cantor 间断集  $D^m$  是具有  $m$  个生成元的自由 Boole 代数的 Stone 空间.

## 参考文献

- [1] Sikorski, R., Boolean algebras, Springer, 1969.

В. И. Мальхин 撰

【补注】 一个 Boole 代数上的超滤子 (ultrafilter on a Boolean algebra) 是基础序集上的一个极大滤子 (filter).

Boole 代数一种较新的好参考书是 [A2].

术语“Stone 空间”时常作为“全不连通紧空间”的同义语, 虽然对这个概念也有人使用“Boole 空间 (Boolean space)”一词. Boole 代数和它们的 Stone 空间之间的对应关系是一个范畴对偶 (见对偶范畴 (dual category)); 于是, 如果  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{B}_1$  分别是具有 Stone 空间  $X$  和  $X_1$  的 Boole 代数, 则 Boole 同态  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_1$  一一对应于连续函数  $X_1 \rightarrow X$ . 用这个对应, 可以把关于 Boole 代数的代数定理转化为关于 Stone 空间的拓扑定理, 或者反之. 例如, 完全 Boole 代数在全体 Boole 代数组成的范畴中是内射的这一 Sikorski 定理 (Sikorski theorem) (见内射对象 (injective object)), 对应于极不连通空间在 Stone 空间的范畴中是射影的这一 Gleason 定理 (Gleason theorem). 详见 [A1].

## 参考文献

- [A1] Johnstone, P. T., Stone spaces, Cambridge Univ. Press, 1982.
- [A2] Koppelberg, S., General theory of Boolean algebras, in J. D. Monk and R. Bonnet (eds): Handbook of Boolean Algebras, Vol. 3, North-Holland, 1989.
- [A3] Monk, J. D. and Bonnet, R. (eds), Handbook of Boolean algebras, 1 – 3, North-Holland, 1989.

卢景波 译 王世强 校

Stone-Weierstrass 定理 [Stone-Weierstrass theorem; Вейерштрасса-Стоуна теорема]

M. H. Stone 于 1937 年对函数逼近论中经典的 Weierstrass 定理 (Weierstrass theorem) 所作的一个深层次推广. 设  $C(X)$  为紧统  $X$  上的连续函数的环, 具有一致收敛拓扑, 即由范数

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|, f \in C(X)$$

产生的拓扑, 令  $C_0 \subseteq C(X)$  是包含所有常数且分离  $X$  中的点的子环, 即对任意两个不同的点  $x_1, x_2 \in X$ , 存在一个函数  $f \in C_0$  使得  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . 于是,  $[C_0] = C(X)$  亦即,  $X$  上的每一个连续函数都是  $C_0$  中某个一致收敛的函数序列的极限.

В. И. Пономарев 撰

【补注】 解释性的文章 [A4], 值得特别推荐.

## 参考文献

- [A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theo-

ry, Chelsea, reprint, 1982.

[A2] Schönhage, A., Approximations theorie, De Gruyter, 1971.

[A3] Stone, M. H., The generalized Weierstrass approximation theorem, *Math. Mag.*, 21 (1948), 167 - 183; 237 - 254.

[A4] Stone, M. H., A generalized Weierstrass approximation theorem, in R. C. Buck (ed.): *Studies in Modern Analysis*, Vol. 1, Math. Assoc. Amer., 1962, 30 - 87.

[A5] Stone, M. H., Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41 (1937), 375 - 481.

王仁宏、檀结庆 译

停时 [stopping time; остановки время]

【补注】 设  $\mathcal{F}_t$ ,  $t \in T$ , 是可测空间 (measurable space)  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的非减子  $\sigma$  代数族, 此处  $T$  是  $[0, \infty]$  中的一区间或  $\{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$  的一子集, 则停时 (与这一子代数族相关的) 是一个映射 (随机变量 (random variable))  $\tau: \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$ , 使得

$$\{\tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

对一切  $t \in T$  成立. 这一随机变量也称为可选随机变量 (optional random variable). 这一条件解释为时间值随机变量  $\tau$  不具有未来的知识, 因为  $\sigma$  代数  $\mathcal{F}_t$  概括了“直到时刻  $t$  的随机事件”. 许多停时由“在该时刻给定的事件被首次观察到”产生. 例如, 随机过程  $X(t)$  首次进入 (first time of entry) 集合  $A$  (击中时 (hitting time)). 在俄文文献中术语 Марков 时 (Markov moment, Markov time) 常用来表示停时. 有时也见到术语非预料时 (non-anticipating time). 停时在最优化停止问题 (optimal stopping problem) 中自然会出现. 例如, 见 [A4].

参考文献

[A1] Baver, H., Probability theory and elements of measure theory, Holt, Rinehart & Winston, 1972, p. 332.

[A2] Lamperti, J., Stochastic processes, Springer, 1977, 210 - 213.

[A3] Chung, K. L., Elementary probability theory with stochastic processes, Springer, 1974, p. 269.

[A4] Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., Controlled stochastic processes, Springer, 1979 (译自俄文).

[A5] Rao, M. M., Stochastic processes and integration, Sijthoff & Noordhoff, 1979.

刘秀芳 译 陈培德 校

Störmer 法 [Störmer method; Штрёмера метод 或 метод Стёрмера]

一个求解不含未知函数一阶导数的二阶常微分方程

组 Cauchy 问题 (Cauchy problem)

$$y'' = f(x, y), y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$$

的有限差分方法. 在等步长网格  $x_n = x_0 + nh$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 上积分给出下面的计算公式:

a) 外插

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{\lambda=0}^k u_{-\lambda} f_{n-\lambda}, f_n = f(x_n, y_n),$$

$$n = 0, 1, \dots,$$

或者 (差分形式)

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{p=0}^k \beta_p \nabla^p f_n,$$

其中

$$\nabla^p f_n = \nabla(\nabla^{p-1} f_n) = \nabla^{p-1} f_n - \nabla^{p-1} f_{n-1},$$

$$\beta_p = \frac{1}{p!} \left[ \int_0^1 (1-t)t(t+1)\cdots(t+(p-1))dt + \int_0^{-1} (-1-t)t\cdots(t+(p-1))dt \right], p = 0, \dots, k,$$

$$u_{-\lambda} = \sum_{p=\lambda}^k \left[ \begin{matrix} p \\ \lambda \end{matrix} \right] \beta_p, \lambda = 0, \dots, k;$$

b) 内插

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{\lambda=-1}^k v_{-\lambda} f_{n-\lambda},$$

或者 (差分形式)

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{p=0}^k \gamma_p \nabla^p f_{n+1},$$

其中

$$\gamma_p = \frac{1}{p!} \left[ \int_0^1 (1-t)(t-1)t\cdots(t+(p-2))dt + \int_0^{-1} (-1-t)(t-1)t\cdots(t+(p-2))dt \right],$$

$$v_{-\lambda} = \sum_{p=\lambda}^{k+1} \left[ \begin{matrix} p \\ \lambda \end{matrix} \right] \gamma_p, \lambda = -1, 0, \dots, k.$$

系数  $\beta_p$  和  $\gamma_p$  的前面几个值为:

$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{12}, \beta_4 = \frac{19}{240},$$

$$\beta_5 = \frac{3}{40}, \beta_6 = \frac{863}{12096};$$

$$\gamma_0 = -\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \frac{1}{12}, \gamma_3 = 0, \gamma_4 = \gamma_5 =$$

$$= -\frac{1}{240}, \gamma_6 = -\frac{221}{60480}.$$

对同一个  $k$ , 公式 b) 更精确, 可是为了得到值  $y_{n+1}$ , 要求解一个非线性方程组. 实际应用时, 开始时可用公式 a) 得到解  $y_{n+1}$  的一个近似, 然后运用公式



$$y_{n+1}^{(i+1)} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \left[ v_1 f_{n+1}^{(i)} + \sum_{\lambda=0}^k v_{-\lambda} f_{n-\lambda} \right],$$

$$i = 0, 1, 2,$$

$$f_{n+1}^{(i)} = f[x_{n+1}, y_{n+1}^{(i)}], y_{n+1} = y_{n+1}^{(3)},$$

将  $y_{n+1}$  算得更精确.

应用 Störmer 法是基于这样的假定, 即在前  $k$  个网格点上解的近似值  $y_0, \dots, y_k$  (支撑值) 已经知道. 这些值或是用 Runge-Kutta 法 (Runge-Kutta method) 计算或是应用解的 Taylor 展开式计算. 由于必须用特别的公式来计算这个过程开始时的那些值, 也由于需要改变在网格上进行积分时的网格步长, 这都会导致计算机程序更加复杂.

右端有  $k$  项的 Störmer 公式的误差的阶是  $O(h^{k+1})$ . 其误差估计与 Adams 法 (Adams method) 相应的估计类似. 可以证明, 对任意的  $k$  存在其误差阶为  $O(h^{k+1})$  的稳定的公式.

实际上, 人们通常应用  $k = 4, 5, 6$  时的公式. 一个称为 Numerov 法 (Numerov method) 的 Störmer 插值法得到了广泛的应用:

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \frac{h^2}{12} (f_{n+2} + 10f_{n+1} + f_n).$$

这个方法是由 C. Störmer 在 1920 年提出的.

#### 参考文献

- [1] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).
- [2] Lambert, J. D., Computational methods in ordinary differential equations, Wiley, 1973.
- [3] Михлин, С. Г., Смолицкий, Х. Л., приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965 (英译本: Mikhlin, S. G. and Smolitskii, Kh. L., Approximate methods for solution of differential and integral equations, Amer. Elsevier, 1967).

С. С. Гайсарян 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, Dover, reprint, 1987, P. 275 ff.
- [A2] Störmer, C., méthode d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires, in C. R. Congress internat. Strassbourg 1920, 1921, 243 - 257.

袁国兴 张宝琳 译

#### 直线 [straight line; прямая]

基本几何概念之一. 直线通常由几何学公理系统隐含地定义; 例如, Euclid 直线由关联公理、顺序公理、全等公理和连续性公理定义. 基于一直线所嵌入

的平面为射影平面、仿射平面、双曲平面等等, 此直线相应地称为射影的、仿射的、双曲的等等. 直线可通过它的由所在平面的直射变换所诱导的变换来研究. 例如, 实射影直线的代数自同构群同构于 Лобачевский 平面的位移群. 拓扑地看, 一平面上的所有直线都等价. 这样, 椭圆直线和实射影直线拓扑地等价于 Euclid 平面上的圆周, 而复射影直线拓扑地等价于 Euclid 空间中的 2 维球面. 一条直线称为连续的、离散的或有限的, 如果它分别关联于具有连续统基数的点集、可数集或有限集.

在任意代数域上的平面中, 直线是一阶代数曲线. 在 Euclid 平面  $\mathbf{R}^2$  的直角坐标系  $(x, y)$  中, 直线由方程

$$Ax + By + C = 0$$

给定. 系数  $A, B$  确定该直线的法向量的坐标.

域  $k$  上仿射空间中的直线  $(A, B)$  是 (按 Weil 的定义) 满足  $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$  (其中  $t \in k$ ) 的点  $M$  的集合.

В. В. Афанасьев, Л. А. Сидоров 撰

【补注】亦见 Hilbert 公理系统 (Hilbert system of axioms).

#### 参考文献

- [A1] Jacobs, H. R., Geometry, Freeman, 1974.

沈永欢 译

奇怪吸引子 [strange attractor; странный аттрактор], 亦称奇异吸引子

具有复杂构造的吸引子 (即一动力系统 (dynamical system) 之吸引集). 吸引子 (attractor) 即是相空间中渐近稳定的紧不变子集, 即它是 Ляпунов 稳定的 (见 Ляпунов 稳定性 (Lyapunov stability)), 而发自它的一个邻域的所有轨道当  $t \rightarrow \infty$  时都趋向它. (吸引子定义中并未含有 Ляпунов 稳定性的概念, 然而许多重要的吸引子都有此性质.) “复杂构造”一语也很不确定, 其实“奇怪吸引子”一语也如此. 对于光滑动力系统, 在理论上研究过两种在小扰动下保持不变的奇怪吸引子——即同时为双曲集 (hyperbolic set) 的吸引子和 Lorenz 吸引子 (Lorenz attractor), “奇怪吸引子”一词原来就讲的是它. 后来在一个与 Lorenz 本人研究过的系统不同的系统中也找到一个 Lorenz 类型的吸引子 ([9], [10]); 这些论文中都用了来自 [8] 的严格的充分条件. 在这两个例子中, 奇怪吸引子都有拓扑传递性 (topological transitivity); 这个性质, 或相关的性质都可以包含在吸引子的概念中. 以数值试验为基础, 可以假设有许多其他类型的奇怪吸引子存在, 而且看来都能“承受”小扰动, 虽然与此相关的情况都没有充分地解释过. 在第一批试验中就有一个, 出现了一个 Hénon 吸引子 (Hénon attractor) (见 [2]), 但

是在它附近就有不稳定的周期轨道存在, 而且不能排除大部分轨道趋向它, 而且有时确实如此 ([4]–[6]). 对此例子稍作修正就给出了一个 Lozi 吸引子 (Lozi attractor) (见 [3]), 其存在性可以严格证明, 但在此例中动力系统的光滑性在一点被破坏. 关于更多的信息可见 [7].

#### 参考文献

- [1] Marsden, J. and McCracken, M., The Hopf bifurcation and its applications, Springer, 1976.
- [2] Hénon, M., A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Comm. Math. Phys.*, **50** (1976), 69 – 77.
- [3] Lozi, R., Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon, *J. de physique Ser. C*, **39** (1978), 5, 9 – 10.
- [4] Benedicks, M. and Carleson, Z., On iterations of  $1 - ax^2$  on  $(-1, 1)$ , *Ann. of Math.*, **122** (1985), 1 – 25.
- [5] Benedicks, M. and Carleson, Z., The dynamics of the Hénon map, *Preprint* (1989).
- [6] Mora, L. and Viana, M., Abundance of strange attractors, *Preprints IMPA Rio de Janeiro* (1990).
- [7] Arnol'd, V. I. et al., Theory of bifurcations, *Encycl. Math. Sc.*, 5. Dynamical systems, Springer, 1992 (译自俄文).
- [8] Шильников, З. П., «Успехи матем. наук», **36** (1981), 4, 240 – 241.
- [9] Shilnikov, A. Z., Bifurcation and chaos in the Marioka-Shimizu system, in *Methods of the qualitative Theory of Differential Eqs. Gorkii State Univ.*, 1986, 180 – 193. (俄文).
- [10] Shilnikov, A. Z., Bifurcation and chaos in the Marioka-Shimizu system, II, in *Methods of the Qualitative Theory and Theory of Bifurcations, Gorkii State Univ.*, 1989, 130 – 138 (俄文).

Д. В. Аносов 撰

【补注】吸引子的直观概念有好几个其他定义 (精确化) (与上述的相空间的渐近稳定的紧子集不同). 最吸引人的一个如下 ([A1]).

令  $f$  是一光滑流形  $M$  (可能有边) 到其自身的可微映射 (differentiable mapping). 对每一点  $x \in M$ , 令  $w(x)$  是轨道  $x, f(x), f(f(x)), \dots$  的  $\omega$  极限集 ( $\omega$ -limit set of the orbit), 即这样的  $y$  点的集合, 使  $y$  的每个开邻域  $U$  都含有此轨道的无穷多个点 (亦见轨道的极限集 (limit set of a trajectory)).

令  $\mu$  是  $M$  上一个测度而在坐标小块中等价于通常的 Lebesgue 测度. 对  $M$  的每个闭子集  $A$ , 定义其吸引区域 (domain of attraction) 为  $\alpha(A) = \{x \in M: w(x) \subset A\}$ . 于是闭子集  $A$  称为吸引子 (attractor), 如果: i) 它的吸引区域  $\alpha(A)$  有严格正测度; ii) 再没有一个闭集  $A' \subset A$ ,  $A' \neq A$  使得除相差一个零测度集以外,  $\alpha(A') = \alpha(A)$ . 这样一个吸引子不一定有

(渐近) 稳定性质.

关于奇怪吸引子的出现, 亦见混沌 (chaos) 和通向混沌的道路 (routes to chaos). 例如, 奇怪吸引子可以产生于  $k$  维环面 ( $k \geq 3$ ) 上的拟周期流的任意小扰动, 而被扰动的流可以既是混沌的又是结构稳定的, 见 [A2]–[A4].

#### 参考文献

- [A1] Milnor, J. W., On the concept of attractor, *Comm. Math. Phys.*, **99** (1985), 177 – 195.
- [A2] Ruelle, D. and Takens, F., On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.*, **20** (1971), 169 – 192.
- [A3] Newhouse, S., Ruelle, D. and Takens, F., Occurrence of strange axiom A attractors near quasiperiodic flows on  $T^m$ ,  $m \geq 3$ , *Comm. Math. Phys.*, **64** (1978), 35 – 40.
- [A4] Ruelle, D., Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory, Acad. Press, 1989.
- [A5] Ruelle, D., Strange attractors, *Math. Intelligencer*, **2** (1980), 126 – 140.

齐民友 译

策略 (对策论中的) [strategy (in game theory); стратегия в теории игр]

在一个策略对策 (见对策论 (games, theory of)) 的规则下局中人或联盟的可能的行动方法. 在正规形式 (normal form) 对策 (见非合作对策 (non-cooperative game)) 中, 策略集的直接描述是对策“规则”的一部分. 在位置对策 (positional game) (也见动态对策 (dynamic game)) 中, 策略不是直接由对策规则来定义的, 而是在它的基础上间接定义的. 如果在一个非合作对策中, 策略的选择是固定的 (例如, 运用最优性原理 (optimality principle)), 那么对策就变成非策略的 (见合作对策 (cooperative game)).

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Szép, J. and Forgo, F., Introduction to the theory of games, Reidel, 1985.
- [A2] Neumann, J. von and Morgenstern, O., Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1947 (中译本: 约翰·冯·诺依曼, 奥斯卡·摩根斯特恩, 竞赛论与经济行为, 科学出版社, 1963).

史树中 译

分层 [stratification; стратификация], 亦称层化

一个 (可能无限维) 流形到严格缩减维数的连通子流形的分解.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】通常, 一个空间的“分层”仅只意味着到具有缩减维数的连通片中的某个分解.

设  $(P, <)$  是一个偏序集. 拓扑空间  $X$  的一个  $P$  分解 ( $P$ -decomposition) 是以  $P$  的元素为标号的  $X$  的子空间  $S_i$  的局部有限集, 使得



- 1) 当  $i \neq j$  时,  $S_i \cap S_j = \emptyset$ ;
- 2) 对所有的  $i \in P$ ,  $S_i$  是局部闭的;
- 3)  $X = \bigcup_{i \in P} S_i$ ;
- 4) 如果  $S_i \cap \bar{S}_j \neq \emptyset$ , 则  $S_i \subset \bar{S}_j$  (且在  $P$  中, 这等价于  $i \leq j$ ).

作为一个例子, 考虑  $\mathbf{R}^2$  中由不等式  $x^3 - y^2 \geq 0$  给出的子集分成四片  $\{(x, y): x^3 - y^2 > 0\}$ ,  $\{(x, y): x^3 = y^2, y > 0\}$ ,  $\{(x, y): x^3 = y^2, y < 0\}$ ,  $\{0, 0\}$ .

现在, 设  $X$  是一个光滑流形  $M$  的子集,  $X$  的分层是某个偏序集  $P$  的  $P$  分解  $(S_i)_{i \in P}$ , 使得每片是  $M$  的一个光滑子流形.

分层  $(S_i)$  称为 Whitney 分层 (Whitney stratification) 如果对每对具有  $S_i \subset \bar{S}_j$  的层  $S_i, S_j$ , 下面的 Whitney 的条件 A 和 B (Whitney's conditions A and B) 成立. 假设点列  $y_k \in S_i$  收敛于  $y \in S_i$ , 点列  $x_k \in S_j$  也收敛于  $y \in S_j$ . 进一步, 假设切平面  $T_{x_k} S_j$  收敛于某个极限平面  $T$  和割线  $\overline{x_k y_k}$  收敛于某条线  $l$  (关于环绕流形  $M$  中  $y$  的某个局部坐标系), 则

A)  $T_y S_i \subset T$ ;

B)  $l \subset T$ .

条件 B) 事实上蕴涵着条件 A).

涉及 Whitney 分层的几个事实和定理如下. 一个解析流形的任何闭次解析子集允许一个 Whitney 分层 ([A5]). 特别地,  $\mathbf{R}^n$  中的代数集, 即由有限多个多项式为零给出的集合 (也见半代数集 (semi-algebraic set)) 可以 Whitney 分层, Whitney 分层空间可被三角剖分 ([A4]).

#### 参考文献

- [A1] Mather, J., Notes on topological stability, Harvard Univ. Press, 1970. Mimeographed notes.
- [A2] Gibson, C. G., Wirthmüller, K., Plessis, A. A. du and Looijenga, E. J. N., Topological stability of smooth mappings, Springer, 1976.
- [A3] Goresky, M. and MacPherson, R., Stratified Morse theory, Springer, 1988.
- [A4] Johnson, F., On the triangulation of stratified sets and singular varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **275** (1983), 333 - 343.
- [A5] Hironaka, H., Subanalytic sets, in *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Kinokuniya, 1973, 453 - 493.
- [A6] Whitney, H., Tangents to an analytic variety, *Ann. of Math.*, **81** (1965), 496 - 549.
- [A7] Whitney, H., Local properties of analytic varieties, in S. Cairns (ed.): *Differentiable and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, 1965, 205 - 244.
- [A8] Thom, R., Propriétés différentielles locales des ensembles analytiques, *Sem. Bourbaki*, Exp. 281, 1964/5.

徐森林 译

#### 分层样本 [stratified sample; расслоенная выборка]

根据某种特别标志 (特征), 划分成若干较小容量样本的样本 (sample). 假设某容量为  $N$  ( $N \geq 2$ ) 的样本中每一个元素, 具有且仅有  $k$  ( $k \geq 2$ ) 个可能标志之一. 那么, 原样本可以分解为容量分别为  $n_1, \dots, n_k$  ( $n_1 + \dots + n_k = N$ ) 的  $k$  个样本:

$$X_{11}, \dots, X_{1n_1},$$

$$X_{21}, \dots, X_{2n_2},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$X_{k1}, \dots, X_{kn_k},$$

其中第  $i$  个样本  $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$  仅由原样本中具有标志  $i$  的那些样本元素组成. 由于这样的分解, 使原样本好像被分为  $k$  层  $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$  ( $i = 1, \dots, k$ ), 其第  $i$  层 (stratum) 含关于第  $i$  个标志的信息. 例如, 对于二维随机变量  $(X, Y)$ , 若第二个分量  $Y$  有离散型分布, 则对分量  $X$  实现的观测导致分层样本的概念.

#### 参考文献

- [1] Wilks, S. S., *Mathematical statistics*, Wiley, 1962.

М. С. Никулин 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Cochran, W. G., *Sampling techniques*, Wiley, 1977 (中译本: W. G. 科克伦, 抽样技术, 中国统计出版社, 1985).

周概容, 王健 译

#### Стратонович 积分 [Stratonovich integral; Стратоновича интеграл]

【补注】 设  $(X, Y) = (X(t), Y(t))_{t \geq 0}$  是定义在具有  $\sigma$  域流的概率空间 (probability space)  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$  上的连续半鞅 (semi-martingale).  $Y$  对  $X$  在区间  $[0, t]$  上的 Стратонович 积分定义为

$$\begin{aligned} \int_0^t Y(s) \circ dX(s) &= \\ &= \int_0^t Y(s) dX(s) + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t, \quad (A1) \end{aligned}$$

其中右边的积分是伊藤随机积分而  $\langle X, Y \rangle_t$  表示  $X$  和  $Y$  的二次互变差过程. 对这种积分没有一个普遍一致的记号, 但上述记号是最常用的 (例如, 见 [A1], [A2]). 这种积分也称为 Fisk 积分 (Fisk integral), Fisk-Стратонович 积分 (Fisk-Stratonovich integral) 或对称化随机积分 (symmetrized stochastic integral). 后者是从下列性质考虑的:

$$\int_0^t Y(s) \circ dX(s) =$$

$$= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{Y(t_i) + Y(t_{i-1})}{2} (X(t_i) - X(t_{i-1})), \quad (\text{A2})$$

其中  $\Delta$  表示一个划分  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ ,  $|\Delta| = \max_i (t_i - t_{i-1})$ ,  $\lim$  是依概率极限. 事实上, 这个性质是通常的积分定义 ([A3], [A4]). 作为 (A2) 的一个直接应用, 注意  $\int_{[0,t]} X \circ dX = 1/2 X^2(t)$ , 它指出了 Стратонович 积分的主要特点, 即用 Стратонович 积分表达的伊藤公式与“通常的”(即 Newton-Leibniz 的)公式相合. 设  $X^1(t), \dots, X^d(t)$  是连续半鞅, 定义  $X(t) = (X^1(t), \dots, X^d(t))$ , 令  $f$  是  $\mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$  的  $C^2$  函数, 伊藤公式是

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(X(0)) &= \\ &= \sum_{i=1}^d \int_0^t D_i f(X(s)) dX^i(s) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t D_i D_j f(X(s)) d\langle X^i, X^j \rangle_s, \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

其中  $D_i = \partial/\partial X^i$ , 如果写  $Y(t) = D_i f(X(t))$ , 则对  $f \in C^3$ , 容易验证

$$\langle Y, X^i \rangle_t = \sum_{j=1}^d \int_0^t D_i D_j f(X(s)) d\langle X^j, X^i \rangle_s, \quad (\text{A4})$$

因此 (A3) 简化成为下述的“通常微积分”公式:

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(X(0)) &= \\ &= \sum_{i=1}^d \int_0^t D_i f(X(s)) \circ dX^i(s). \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

乍一看, Стратонович 积分的出现是为了得到 (A5) 的简单的记号上的技巧. 可是, 在随机分析的各个方面它起着重要的作用, 包括:

a) 随机微分方程的逼近 ([A1], § V1.7). 设  $W^1(t), \dots, W^p(t)$  是独立 Brown 运动 (Brownian motion), 考虑随机微分方程 (stochastic differential equation)

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), \quad (\text{A6})$$

其中  $b: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ ,  $\sigma: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^{d \times p}$  是使得  $b_i \in C^1(\mathbf{R}^d)$ ,  $\sigma_{ij} \in C^2(\mathbf{R}^d)$  的有界函数. 用 Стратонович 积分就成为

$$dX(t) = \tilde{b}(X(t))dt + \sigma(X(t)) \circ dW(t), \quad (\text{A7})$$

其中  $\tilde{b}(x) = b(x) - \hat{b}(x)$ , 而

$$\hat{b}_i(x) = \frac{1}{2} \sum_{k,j} \sigma_{jk}(x) D_k \sigma_{ij}(x).$$

现在, 设  $W^{(n)}(s)$  是对 Brown 轨道的逐段线性逼近, 即

$$W^{(n)}(s) = \frac{(t_i - s)W(t_{i-1}) + (s - t_{i-1})W(t_i)}{t_i - t_{i-1}},$$

$s \in [t_{i-1}, t_i]$ , 对  $[0, t]$  如上的划分  $\{t_i\}$ , 考虑随机常微分方程的逼近序列

$$\dot{X}^{(n)}(s) = \tilde{b}(X^{(n)}(s)) + \sigma(X^{(n)}(s))\dot{W}^{(n)}(s), \quad (\text{A8})$$

其中点表示  $d/ds$ , 则

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |X(s) - X^{(n)}(s)|^2 \right] = 0.$$

于是逼近模式 (A8) 很自然地由 Стратонович 积分 (A7) 导出而不是从伊藤方程 (A6) 导出. 一般, 所得到的极限依赖于对 Brown 轨道所选择的特殊逼近, 除非作为向量场 (vector field) 考虑的  $\sigma$  的  $p$  列是可换的, 即  $\sum_{m,k} (\sigma_{ml} D_m \sigma_{kj} - \sigma_{mj} D_m \sigma_{kl}) = 0$ ,  $l, j = 1, \dots, p$ , 在这种情形极限 (A6) 或 (A7) 可以由任意对 Brown 轨道的“合理的”逼近得到; 特别当  $p=1$  时这是真的. 这种问题首先由 E. Wong 和 M. Zakai 在 [A5] 中研究, 而  $\hat{b}(x)$  有时称为 Wong-Zakai 相关项 (Wong-Zakai correction term).

b) 扩散过程的支集 ([A1], § V1.8, [A6]). 考虑 (A6) 或 (A7) 从固定点  $x \in \mathbf{R}^d$  开始的解. 它定义了样本空间  $\mathcal{W}^d = C([0, \infty]; \mathbf{R}^d)$  上的测度  $\mathcal{P}$ . 设  $\mathcal{S}$  是这个测度的支集, 即在  $\mathcal{W}^d$  中具有  $\mathcal{P}$  测度 1 的最小闭集. 设  $\Phi$  是在  $\mathcal{W}^d$  中的  $C^\infty$  函数集, 且对  $\varphi \in \Phi$ , 令  $\zeta^\varphi \in \mathcal{W}^d$  是常微分方程

$$\frac{d}{dt} \zeta^\varphi(t) = \tilde{b}(\zeta^\varphi(t)) + \sigma(\zeta^\varphi(t))\varphi(t), \quad \zeta^\varphi(0) = x$$

的解, 则  $\mathcal{S} = \text{cl} \{ \zeta^\varphi : \varphi \in \Phi \}$ . 于是  $\mathcal{S}$  恰是方程 (A7) 当“输入”  $W$  用光滑函数  $\varphi$  代替时“输出”  $X(\cdot)$  的集合的闭包. 如同在 a) 中一样, Стратонович 公式用来保持“光滑”和“Brown”输入系统之间的相容性.

c) 流形上的扩散过程. 设  $M$  是一  $C^\infty$  流形 (见流形 (manifold)), 设  $A_0, \dots, A_p$  是  $M$  上的光滑向量场 (见流形上的向量场 (vector field on a manifold)), 固定  $x_0 \in M$ , 则存在唯一的  $M$  值过程  $X(t)$  使得  $X(0) = x_0$  且对  $f \in C^\infty(M)$ ,

$$\begin{aligned} df(X(t)) &= \\ &= A_0 f(X(t))dt + \sum_{j=1}^p A_j f(X(t)) \circ dW^j(t). \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

在这里使用 Стратонович 积分是本质的, 用伊藤积分写的同样的方程不能提供不依赖于坐标选择的表达式, 因为伊藤微积分的规则与关于不同的坐标系统中微积分的通常规则有矛盾. 由 (A9) 即得  $d\langle A_j f(X(\cdot)), W^j \rangle_t = A_j^2 f(X(t))$ , 因此 (A9) 的伊藤形式是



$$df(X(t)) = \left[ A_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p A_j^2 \right] f(X(t)) dt + \sum_{j=1}^p A_j f(X(t)) dW^j(t).$$

容易得出  $X(t)$  是具有微分生成元

$$\mathcal{L} = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p A_j^2$$

的扩散过程 (diffusion process). 关于 Стратонович积分及其性质的详细讨论包含在 [A2] 第 V.5 节中, 还包括对可能不连续的半鞅的积分定义的推广.

#### 参考文献

- [A1] Ikeda, N. and Watanabe, S., Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland, 1989.
- [A2] Protter, P., Stochastic integrals and differential equations, Springer, 1990.
- [A3] Stratonovich, R. L., A new representation for stochastic integrals and equations, *SIAM J. Control*, 4 (1966), 362 – 371.
- [A4] Fisk, D. L., Quasi-martingales and stochastic integrals, Techn. Report Dept. Math. Michigan State Univ., 1, 1963.
- [A5] Wong, E. and Zakai, M., On the relation between ordinary and stochastic differential equations, *Int. J. Engin. Sci.*, 3 (1965), 213 – 229.
- [A6] Stroock, D. W. and Varadhan, S. R. S., On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle, in Proc. VI Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., Vol. III, Univ. California Press, 1972, 333 – 359.

M. H. A. Davis 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

#### 应力张量 [stress tensor; напряжений тензор]

定义一变形物体的内应力分布的一个张量. 应力张量是对称的二阶张量  $\sigma_{ij}$ . 其分量  $\sigma_{ik}$  为作用在垂直于  $x_k$  轴的单位面积上的力的  $i$  方向的分量. 这样, 作用在垂直于  $x$  轴的单位面积上有正应力 (normal stress)  $\sigma_{xx}$  (即沿  $x$  轴方向的力), 和剪应力 (shearing stresses)  $\sigma_{yx}$  和  $\sigma_{zx}$ , (即分别沿  $y$  轴和  $z$  轴方向的力). 由应力张量的分量定义的应力状态可以分解为两个应力状态. 第一个应力状态由各向同性应力张量 (isotropic stress tensor)

$$\sigma'_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ii} = p \delta_{ij}$$

所表征, 其中  $p$  为静水压力.

第二个是应力状态由偏应力张量 (deviatoric stress tensor) 的分量

$$\sigma''_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ii} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$$

所表征.

#### 参考文献

- [1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Теория упругости, 3 изд., М., 1965. (英译本: Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., Elasticity theory, Pergamon, 1959).

А. Б. Иванов 撰

【补注】在一般的连续统理论中, 应力张量不一定是对称的. 如有对偶应力存在的话 (对于有极材料), 应力张量就失去对称性.

#### 参考文献

- [A1] Truesdell, C. and Noll, W., The non-linear field theories of mechanics, in S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik, Vol. III / 3, Springer, 1965, 1 – 602.
- [A2] Truesdell, C. and Toupin, R., The classical field theories, in S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik, Vol. III / 1, Springer, 1960, 226 – 793.
- [A3] Sokolnikoff, I. S., Mathematical theory of elasticity, McGraw-Hill, 1956.

王克仁 译 诸德超 校

#### 严格蕴涵演算 [strict implication calculus; строгой импликации исчисление]

基于严格蕴涵 (strict implication) 的一种逻辑演算 (logical calculus), 即与“如果……那么……”相联系的逻辑运算上的一种演算. 对于严格蕴涵来说, 所谓的“(实质)蕴涵悖论”可完全地或部分地避免: 一个假命题蕴涵任一命题, 而任一命题蕴涵一个真命题.

严格蕴涵演算的目的是为了反映条件命题的前提与结论之间意义上的联系. 存在一个完整的严格蕴涵演算系列 (Lewis 演算, Ackermann 演算, 及其他演算), 它们彼此之间的区分是由一些公式在某些演算中可以推出, 而在另一些演算中不能推出的事实来确定 (例如, 在 Lewis 演算中“蕴涵悖论”仅仅部分地可避免, 然而在 Ackermann 演算中却可完全避免). 严格蕴涵演算同模态语句 (“它是可能的”, “它是不可能的”, “它是必要的”等等) 的形式体系化有密切联系; 在某些演算中, 严格蕴涵通过模态 (modality) 来表示, 而在另一些演算中, 模态是通过严格蕴涵来表示.

#### 参考文献

- [1] Feys, R., Modal logics, Gauthier-Villars, 1965.
- [2] Lewis, C. I. and Langford, C. H., Symbolic logic, Dover, reprint, 1959.
- [3] Ackermann, W., Begründung einer strengen Implikation, *J. Symbolic Logic*, 21 (1956), 2, 113 – 128.

В. В. Донченко 撰

【补注】其他试图避免“蕴涵悖论”的方法 (例如选言三段论 (disjunctive syllogism)  $A \wedge (\neg A \vee B) \Rightarrow$

B), 有以相关逻辑 (relevant logic) 的名称出现的 ([A1]). [1] 中的 Lewis 演算的 S1-S5 也被视为 Lewis 调查系统 (Lewis survey system) ([A3]).

#### 参考文献

- [A1] Norman, J. and Sylvan, R. (eds), Directions in relevant logic, Kluwer, 1989.  
 [A2] Hughes, G. E. and Cresswell, M. J., An invitation to modal logic, Methuen, 1972.  
 [A3] Wójcicki, R., Theory of logical calculi, Kluwer, 1988, 154 ff. 卢景波 译 罗里波 校

#### 带 [strip; полоса]

平面内位于该平面的两条平行直线之间的那些点所组成的集合. 带中点的坐标  $x, y$  满足不等式  $C_1 < Ax + By < C_2$ , 其中  $A, B, C_1, C_2$  是某些常数且  $A$  与  $B$  不同时为 0. 函数  $w = e^z$  把复平面 ( $z = x + iy$ ) 中的带  $0 < y < \pi$  共形映射为复数  $w$  平面的上半平面. BCЭ-3

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Churchill, R. V., Brown, J. W. and Verhey, R. F., Complex variables and applications, McGraw-Hill, 1974. 杨维奇 译

#### 带 (广义的) [strip (generalized); полоса]

在狭义上是指曲面带 (surface strip), 即曲面的单参数切平面族, 在一般意义下, 带 (strip) 是指一条曲线  $l$  以及与曲线的切向量处处正交的向量场  $m$  的总体. 假定在  $R^3$  中  $l$  由方程  $r = r(s)$  给出, 其中  $s$  是曲线的自然参数,  $r(s)$  是曲线上点的位置向量. 沿  $l$  有向量函数  $m = m(s)$ , 其中  $m(s)$  是与曲线在对应点的切向量  $t = dr/ds$  正交的单位向量. 把法向量为  $m(s)$  的曲面带  $\Phi = \{l, m\}$  说成是沿曲线  $l$  定义的. 向量  $\tau = [m, t]$  称为  $\Phi$  的测地法向量 (geodesic normal vector); 向量  $\tau$  和  $t, m$  一起组成带的 Frénet 标架. 给定带的活动 Frénet 标架, 有 Frénet 求导公式:

$$\frac{dt}{ds} = k_g \tau + k_n m; \quad \frac{d\tau}{ds} = -k_g t + \kappa_g m;$$

$$\frac{dm}{ds} = -k_n t - \kappa_g \tau,$$

其中  $k_g$  是带的测地曲率,  $k_n(s)$  是其法曲率,  $\kappa_g(s)$  是其测地挠率, 它们是  $s$  的数量函数.

若  $m$  与  $l$  在每一点处的主法线 (principal normal) 共线, 则  $k_g = 0$ , 称该带形为测地带 (geodesic strip). 若  $m$  与曲面在每一点处的副法向量 (binormal) 共线, 则  $k_n = 0$ , 称该带为渐近带 (asymptotic strip).

#### 参考文献

- [1] Blaschke, W., Einführung in die Differentialgeometrie, Springer, 1950. Л. А. Сидоров 撰 陈维桓 译

#### 带形法 (解析函数) [strip method (analytic functions); полос метод]

复变函数论中的一种方法, 其基础是联系某个特殊曲线族曲线的长度与由该族曲线填充而成的区域的面积的一些不等式. 该方法基于 Grötzsch 的一些引理 ([1]). 其中之一叙述如下.

考虑边长为  $A$  和  $B$  的一个矩形, 它包含有限个不相重叠的单连通区域  $S_k, k = 1, \dots, n$ , 每个区域都具有 Jordan 边界与长度为  $A$  的两条边均交成线段而不退缩为点 (区域  $S_k$  形成从长度为  $A$  的一边到另一边的带状域). 若  $S_k$  被共形映射成边长为  $a_k$  与  $b_k$  的矩形使上述的线段变成长度为  $a_k$  的边, 则

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{A}{B},$$

等号仅当  $S_k, k = 1, \dots, n$ , 是边长为  $a_k$  和  $B$  的矩形且满足  $\sum_{k=1}^n a_k = A$  时才成立.

另一个引理是 Grötzsch 原理 (Grötzsch principle). 这两个 Grötzsch 引理对无限多个子区域的情形也成立.

带形法首先被 H. Grötzsch ([1]) 用作单叶共形映射与拟共形映射理论中的一种方法, 他应用该方法系统研究并解决了定义在有限连通与无限连通区域中的单叶函数的大量极值问题 (见 [3]; 关于别的应用可见 [2]).

这一方法也成为极值度量法的基础 (见极值度量法 (extremal metric, method of the)).

#### 参考文献

- [1A] Grötzsch, H., Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung I, Ber. Verh. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl., 80 (1928), 6, 367-376.  
 [1B] Grötzsch, H., Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes, Ber. Verh. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phys., Kl., 80 (1929), 7, 503-507.  
 [1C] Grötzsch, H., Über die Verzerrung bei schlichten konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche, Ber. Verh. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl., 81 (1929), 1, 38-48.  
 [1D] Grötzsch, H., Über konforme Abbildung unendlichvielfach zusammenhängender schlichter Bereiche mit endlichvielen Häufungsrandkomponenten, Ber. Verh.



Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math. - Phys.,  
Kl., 81 (1929), 2, 51 - 87.

[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций  
комплексного переменного, 2 изд., М., 1966  
(英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of func-  
tions of a complex variable, Amer. Math. Soc.,  
1969).

[3] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal  
mapping, Springer, 1958.

Е. Г. Голузина 撰 杨维奇 译

带形法 (积分方程) [strip method (integral equations);  
полос метод]

一种近似求解第二类一维 Fredholm 积分方程的  
方法 (也见 Fredholm 方程 (Fredholm equation); Fred-  
holm 方程, 数值方法 (Fredholm equation, numerical  
methods)), 它是用一个退化核去代替特殊形式的核,  
计算退化方程的预解式, 然后通过应用快速收敛迭代  
算法改进近似解.

假定原积分方程为

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x), \quad (1)$$

为了构造退化核, 把正方形

$$\{a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$$

分成  $N$  条带

$$\left\{ \frac{b-a}{N} i \leq x \leq \frac{b-a}{N} (i+1), a \leq s \leq b \right\},$$

$$i = 0, \dots, N-1,$$

在每条带, 譬如第  $i$  条带, 用函数

$$K_i(x, s) = c_i(x) + P_i(x) Q_i(s)$$

均方逼近或一致逼近函数  $K(x, s)$ . 在最简单的情  
况,

$$K_i(x, s) = K(\xi_i, s),$$

$$\xi_i \in \left[ \frac{b-a}{N} i, \frac{b-a}{N} (i+1) \right].$$

现在可以用函数  $K_i(x, s)$  来构造一个退化核 (degene-  
rate kernel):

$$K_N(x, s) = \sum_{i=0}^{N-1} [\hat{c}_i(x) + \hat{P}_i(x) Q_i(s)], \quad (2)$$

$$\hat{P}_i(x) = \begin{cases} P_i(x), & x \in \left[ \frac{b-a}{N} i, \frac{b-a}{N} (i+1) \right], \\ 0, & x \notin \left[ \frac{b-a}{N} i, \frac{b-a}{N} (i+1) \right], \end{cases}$$

$$\hat{C}_i(x) = \begin{cases} C_i(x), & x \in \left[ \frac{b-a}{N} i, \frac{b-a}{N} (i+1) \right], \\ 0, & x \notin \left[ \frac{b-a}{N} i, \frac{b-a}{N} (i+1) \right]. \end{cases}$$

带有退化核的方程 (2) 的解逼近方程 (1) 的解, 一  
般地, 带数  $N$  越大, 而且在每条带中对  $K(x, s)$  的  
逼近越好, 则解越好. 可以用迭代算法

$$\varphi_k(x) - \lambda \int_a^b K_N(x, s) \varphi_k(s) ds = \quad (3)$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b [K(x, s) - K_N(x, s)] \varphi_{k-1}(s) ds$$

进一步改进近似解  $\varphi_0(x)$ . 当核  $K_N(x, s)$  逼近  $K(x, s)$  时, 迭代 (3) 均方收敛, 或一致收敛于方程 (1) 的解.

参考文献

[1] Положий, Г. Н., Чаленко, П. И., «Доповіді АН  
УРСР», 4 (1962), 427 - 431 (乌克兰文).

А. Б. Бакушинский 撰

【补注】可以在 [A1] 和 [A2] 里找到对第二类 Fred-  
holm 方程数值解的很好的评论; 那里没有叙述带形  
法, 但是讨论了其他退化核方法, 亦见退化核法 (degen-  
erate kernels, method of).

参考文献

[A1] Atkinson, K., A survey of numerical methods for the  
solution of Fredholm integral equations of the second  
kind, SIAM, 1976.

[A2] Baker, C. T. H., The numerical treatment of integ-  
ral equations, Clarendon Press, 1977.

袁国兴 张宝琳 译

强导数 [strong derivative; сильная производная]

同 Fréchet 导数 (Fréchet derivative).

不定积分的强微分法 [strong differentiation of an indefi-  
nite integral; сильное дифференцирование]

求不定积分

$$F(I) = \int_I f(x) dx$$

的强导数 (strong derivative), 其中  $f$  是  $n$  维 Euclid  
空间的开集  $G$  上的实值可和函数, 而  $F(I)$  看作是区  
间  $I \subset G$  的函数. 如果

$$|f|(\ln(1 + |f|))^{\alpha-1}$$

在  $G$  上可和 (特别是, 如果  $f \in L_p(G)$ ,  $p > 1$ ), 那  
么  $f$  的积分  $F$  在  $G$  上几乎处处强可微. 对任一正值  
非减的  $\varphi(u)$ ,  $u \geq 0$ , 且

$$\varphi(u) = o(u \ln^{n-1} u), u \rightarrow \infty,$$

存在一个  $G$  上可和函数  $f \geq 0$ , 使得  $\varphi \circ f$  是可和的, 且比值  $F(I)/|I|$  在每个  $x \in G$  上当  $I$  趋于  $x$  时是无界的. 这就是说,  $F$  不是强可微的.

#### 参考文献

- [1] Jessen, B., Marcinkiewicz, J. and Zygmund, A., Note on the differentiability of multiple integrals, *Fund. Math.*, **25** (1935), 217 - 234.
- [2] Saks, S., On the strong derivatives of functions of intervals, *Fund. Math.*, **25** (1935), 235 - 252.
- [3] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).
- [4] Zygmund, A., Trigonometric series, 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

Т. П. Лукашенко 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Zygmund, A., On the differentiability of multiple integrals, *Fund. Math.*, **23** (1934), 143 - 149.

周民强 译

**强遍历性** [strong ergodicity; строгая эргодичность], 狭义拓扑动力系统 (流或瀑布) 的

遍历理论 (ergodic theory) 中考察的一个性质. 它包含下述各点: 1) 此系统有唯一的, 不变的, 正规化的, 正则的 Borel 测度  $\mu$ ; 2) 对任一非空开集  $U$ ,  $\mu(U) > 0$ ; 3) 任一有界连续函数  $f$ , 沿任一轨道的时间平均都趋于  $\int f d\mu$ .

虽然这个定义中对相空间  $W$  没有任何限制, 但实际上是用于当  $W$  为完全的可分度量空间 (通常甚至是度量紧集) 时. 这时, 强遍历性意味着  $W$  为一遍历集 (ergodic set). 强遍历性蕴涵着  $W$  为一极小集 (minimal set) (但反之不然). Lebesgue 空间 (Lebesgue space) 上的任一遍历流或遍历瀑布均度量同构于一具有强遍历性的拓扑流或瀑布.

强遍历性有时只意味着性质 1); 在这个意义下也使用**唯一遍历性** (unique ergodicity) 这个词.

Д. В. Аносов 撰

**【补注】** 在西方文献中常用的名词是**严格遍历性** (strict ergodicity). 当相空间为紧时, 上述条件 1) 与 3) 等价, 于是这时 3) 就刻画了唯一遍历性. 如果这些条件被满足, 则唯一不变正规测度的支集就是  $W$  的唯一极小子集. 于是具有紧的相空间的拓扑动力系统为严格遍历的, 当且仅当它是唯一遍历与极小的.

上述 Lebesgue 空间的任意遍历流与瀑布可以表为严格遍历流或瀑布这个结果, 应这样理解, 即不要求原系统是拓扑的 (只要求变换是可测的). 对于具有有限熵的遍历瀑布, 表示它的系统可以取为一个

平移系统 (或拓扑 Bernoulli 自同构, 见符号动力学 (symbolic dynamics)) 的闭, 不变, 严格遍历子集. 这个结果称为 Jewett-Krieger 定理 (Jewett-Krieger theorem).

#### 参考文献

- [A1] Petersen, K., Ergodic theory, Cambridge Univ. Press, 1983.

**【译注】** 俄文 строгая эргодичность 就应译为**严格遍历性**而不应译为强遍历性 (strong ergodicity).

齐民友 译

**强极值** [strong extremum; сильный экстремум]

被一个泛函  $J(y)$  在曲线  $\tilde{y}(x)$  ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ) 所取的一个极小或极大值  $J(\tilde{y})$ , 对此不等式

$$J(\tilde{y}) \leq J(y) \text{ 或 } J(\tilde{y}) \geq J(y)$$

之一对  $\tilde{y}(x)$  的  $\varepsilon$  邻域中的所有比较曲线  $y(x)$  成立. 曲线  $\tilde{y}(x)$  和  $y(x)$  必须满足给定的边界条件.

由于  $J(y)$  的极大化等价于  $-J(y)$  的极小化, 代替强极大常常可以只讨论强极小. 术语“强”着重指出加在比较曲线  $y(x)$  上  $\varepsilon$  近于  $\tilde{y}(x)$  的条件只是在区间  $[x_1, x_2]$  上,

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \varepsilon,$$

而曲线  $y(x)$  和  $\tilde{y}(x)$  的导数可以在任意“强”的程度上不同.

然而强极值定义本身是相对意义下而不是绝对意义下的, 它不是在使得  $J(y)$  有意义的容许比较曲线的整个类上, 而是只相对于属于  $\tilde{y}(x)$  的  $\varepsilon$  邻域的所有容许比较曲线的子集给出极值. 然而为简单起见, “相对的”这个词常常省略, 而说到强极值就是指强相对极值 (亦见强相对极小值 (strong relative minimum)).

#### 参考文献

- [1] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).
- [2] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷第一、二分册, 人民教育出版社, 1958).

И. В. Вапнярский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.

葛显良 译 吴绍平 校

**强同调** [strong homology; сильная гомология]



见弱同调 (weak homology).

### 强积分 [strong integral; сильный интеграл]

取值在线性拓扑空间的函数关于标量测度的或标量函数关于取值在向量空间的测度的 Lebesgue 型积分. 这里定义积分的极限过程是在强拓扑意义下取的. 强积分的例子是:

1) 向量值函数的 **Bochner 积分** (Bochner integral);

2) **Daniell 积分** (Daniell integral), 如果被积函数的值属于一个  $\sigma$  完全向量格;

3) 积分  $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dF_{\lambda}$ , 给出作用在 Hilbert 空间上的自伴算子的谱分解 (见 **线性算子的谱分解** (spectral decomposition of a linear operator)).

对标量函数关于向量测度的强积分, 该测度的值在很多情形下假定属于一个半序向量空间 (见 **半序空间** (semi-ordered space)).

### 参考文献

[1A] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.

[1B] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. Spectral theory, 2, Interscience, 1963.

[2] Hilderbrandt, T. H., Integration in abstract spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 59 (1953), 111 - 139.

В. И. Соболев 撰

【补注】亦见 **向量测度** (vector measure); **强拓扑** (strong topology).

### 参考文献

[A1] Diestel, J. and Uhl, J. J. jr., Vector measures, Amer. Math. Soc., 1977.

葛显良 译 鲁世杰 校

### 强大数律 [strong law of large numbers; больших чисел усиленный закон]

一种类型的大数律 (law of large numbers) (在其一般形式下), 它叙述: 在某些条件下随机变量序列的算术平均以概率 1 趋向于某些常数值. 更确切地说, 若

$$X_1, X_2, \dots \quad (1)$$

是一随机变量序列, 设  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , 如果存在常数序列  $A_n$  使得关系式

$$\frac{S_n}{n} - A_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

成立的概率是 1, 则称序列 (1) 满足强大数律. 另一种等价形式是: 如果对任意  $\varepsilon > 0$ , 所有不等式

$$\left| \frac{S_n}{n} - A_n \right| \leq \varepsilon, \left| \frac{S_{n+1}}{n+1} - A_{n+1} \right| \leq \varepsilon, \dots, \quad (3)$$

成立的概率当  $n \rightarrow \infty$  时趋于 1, 则序列 (1) 满足强

大数律. 这样, 是把和的序列作为一个整体来考虑它的性态的, 而在通常的大数律中只考虑单个的和. 如果序列 (1) 满足强大数律, 则对同一序列  $A_n$  它也满足通常的大数律, 即对任意  $\varepsilon > 0$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时

$$P \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - A_n \right| \leq \varepsilon \right\} \rightarrow 1. \quad (4)$$

反之不一定成立. 例如: 若随机变量 (1) 是独立的, 且当  $n \geq 16$  时各以概率  $1/2$  取  $\pm \sqrt{n/\ln \ln n}$  两个值, 对  $A_n = 0$  它们满足大数律 (4), 而对任意  $A_n$  强大数律 (2) 不满足. 这类例子的存在性乍一看来一点也不明显. 其理由是: 虽然一般地依概率收敛比以概率 1 收敛弱, 但对独立随机变量序列二者是等价的.

强大数律首先由 E. Borel ([1]) 用数论方法对 Bernoulli 概型给予阐述并证明: 见 **Borel 强大数律** (Borel strong law of large numbers). Bernoulli 概型的特殊情形出现在 (按均匀分布) 随机地在  $(0, 1)$  区间取实数  $\omega$  将其按任意基展开成一个无限小数中 (见 **Bernoulli 试验** (Bernoulli trials)). 于是在二进位展开式

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\omega)}{n}$$

中, 相继出现的  $X_n(\omega)$  各以  $1/2$  的概率取两个值 0 和 1, 且为独立随机变量. 其和  $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$  等于二进位展开式前  $n$  个符号中“1”的个数, 而  $S_n(\omega)/n$  是它的比例. 同时还可以把  $S_n$  看作具有成功 (出现“1”) 概率为  $1/2$  的 Bernoulli 概型中成功的次数. Borel 证明了对  $(0, 1)$  中几乎所有的  $\omega$ , “1”的比例  $S_n(\omega)/n$  趋向于  $1/2$ . 用类似的方式, 在  $\omega$  的以 10 为基的展开式中, 可以把 0, 1, ..., 9 中任一数字 (例如数字 3) 的出现视为成功, 则得到成功概率为  $1/10$  的 Bernoulli 试验, 且在十进位展开式前  $n$  个符号中所选数字出现的频率对  $(0, 1)$  中几乎所有的  $\omega$  趋向于  $1/10$ . Borel 还注意到: 对几乎所有的  $\omega$ , 任一给定的长为  $r$  的数字组出现的频率趋向于  $1/10^r$  (见 **正规数** (normal number)).

F. Cantelli ([2]) 叙述了用被加项的二阶和四阶中心矩表征的独立随机变量  $X_n$  的强大数律成立的充分条件 (Bernoulli 概型满足这些条件). 令

$$B_{n,k} = \sum_{j=1}^n E |X_j - E X_j|^k.$$

Cantelli 条件 (Cantelli condition) 可写成下述形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n,4} + B_{n,2}^2}{n^2} < \infty.$$

Cantelli 和 Borel 的证明基于下述理由: 设对某一正数序列  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  (当  $n \rightarrow \infty$  时),

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - A_n \right| > \varepsilon_n \right\} < \infty, \quad (5)$$

则根据 **Borel - Cantelli 引理** (Borel-Cantelli lemma), 以概率 1 在 (5) 中概率符号中的事件仅有有限个发生. 因此, 以概率 1, 对所有充分大的  $n$ ,

$$\left| \frac{S_n}{n} - A_n \right| \leq \varepsilon_n,$$

即 (3) 成立. Borel 用 de Moivre-Laplace 定理估计了级数 (5) 中的项, 而 Cantelli 基于他本人建立的关于四阶矩的 Чебышев 不等式作了同样的事.

A. Я. Хинчин 和 A. Н. Колмогоров 实现了对可应用强大数律条件的进一步扩展. Хинчин 引入了“强大数律”这一真正的名字并且证明了一个关于  $A_n = E(S_n/n)$  的充分条件 (也适用于相依变量). 用  $r_{i,k}$  表示  $X_i$  与  $X_k$  的相关系数并令

$$c_n = \sup_{|i-k|=n} |r_{i,k}|, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k,$$

Хинчин 条件 (Khinchin condition) 可叙述为: 对某一  $\delta > 0$ ,  $B_{n,2} C_n = O(n^{2-\delta})$ . 事实上, Хинчин 证明中的叙述更强.

在独立被加项的情形, 强大数律成立的已知的最好的条件是由 Колмогоров 建立的: 对具有有限方差的充分条件 (1930) 和对数学期望存在的同分布的变量的必要和充分条件 (1933). 对具有有限方差的随机变量列 (1) 的 Колмогоров 定理 (Kolmogorov theorem) 指出条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D X_n}{n^2} < \infty \quad (6)$$

蕴含序列 (1) 关于  $A_n = E(S_n/n)$  的强大数律成立. 借助于方差, 在下述意义上条件 (6) 是最好的: 对任何使得级数  $\sum b_n/n^2$  发散的正数序列  $b_n$ , 都可以构造一个具有方差  $D X_n = b_n$  的独立随机变量列  $X_n$ , 它不满足强大数律. 条件 (6) (还有独立变量的强大数律的其他条件) 的适用范围可以如下扩展: 设  $m_n$  是  $X_n$  的中位数, 在强大数律中级数

$$\sum P \{ |X_n - m_n| > n \}$$

的收敛性是必要的. 根据 Borel-Cantelli 引理, 由它可以得出以概率 1 从某一  $n$  开始  $|X_n - m_n| < n$ . 这样, 在研究强大数律成立的条件时, 立即可以限制随机变量列满足上述最后指出的条件.

在 Хинчин 和 Колмогоров 给出的证明中级数 (5) 的收敛性可以用级数

$$\sum_k P \left\{ \max_{n_k < n \leq n_{k+1}} \left| \frac{S_n}{n} - A_n \right| > \varepsilon_n \right\}$$

的收敛性来代替, 其中  $n_k = 2^k$ . 在这一证明中, Хинчин 实际上使用了来自于正交函数级数理论的许多

想法, 而 Колмогоров 则使用了他的对随机变量和的最大值的不等式.

可以叙述独立随机变量列强大数律成立的一个必要和充分条件: 令

$$Z_k = 2^{-k} \sum_{(k)} X_n,$$

其中和  $\sum_{(k)}$  应用于满足  $2^k < n \leq 2^{k+1}$  的  $n$  的值, 则条件是对任意  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_k P \{ |Z_k - m Z_k| > \varepsilon \} < \infty, \quad (7)$$

其中  $m Z_k$  是  $Z_k$  的中位数 ([6]). 如果加上一些附加的限制, (7) 将产生一些用 (1) 的个别项的特征表示的条件. 例如, 如果  $X_n = O(n/\ln \ln n)$  或者如果所有的  $X_n$  都是正态分布的, 则条件 (7) 等价于如下条件: 对任何  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_k e^{-\varepsilon/D Z_k} < \infty. \quad (8)$$

此处, 由于  $X_1, X_2, \dots$  是独立的, 所以

$$D Z_k = 2^{-2k} \sum_{(k)} D X_n.$$

[7] 叙述了对 Марков 链、Марков 过程和平稳过程强大数律成立的条件. 这样, 适用于具有相关函数  $R(n)$  的广义平稳序列  $X_n$  的 Хинчин 方法引出下面的定理: 如果级数  $\sum (\ln^2 n) |R(n)|/n$  是收敛的, 则以概率 1,  $(X_0 + X_1 + \dots + X_n)/(n+1) \rightarrow E X_0$ . 适用于狭义平稳序列名为“强大数律”的叙述有时用如下方式给出: 极限

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_0 + X_1 + \dots + X_n}{n+1}$$

以概率 1 存在. 随机变量  $Y$  等于  $X_0$  关于平移不变集组成的  $\sigma$  代数的条件数学期望. 仅仅对于度量可递过程变量  $Y$  以概率 1 是常数且等于  $E X_0$ . 这种形式的强大数律等同于 Birkhoff 遍历定理 (Birkhoff ergodic theorem).

在赋范线性空间上, 存在随机向量的强大数律的变种 ([9]). 按时间顺序这种变种的最早例子是关于经验分布函数收敛到理论分布的 Глиенко-Cantelli 定理.

$S_n/n$  与  $A_n$  的偏差用重对数律 (law of the iterated logarithm) 描述.

#### 参考文献

- [1] Borel, E., Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rend. Circ. Palermo* (2), 27 (1909), 247 - 271.
- [2] Cantelli, F. P., Sulla probabilità come limite della frequenza, *Atti Accad. Naz. Lincei*, 26 (1917), 1, 39 - 45.
- [3] Хинчин, А. Я., Основные законы теории вероятностей, М., 1957.



ностей, М., 1927.

- [4] Khintchine, A. Ya., Sur la loi forte des grands nombres, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. 1 Math.*, **186** (1928), 285 – 287.
- [5] Kolmogorov, A. N., Sur la loi forte des grands nombres, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math.*, **191** (1930), 910 – 912.
- [6] Прохоров, Ю. В., «Изв. АН СССР Сер. матем.», **14** (1950), 523 – 536.
- [7] Doob, J. L., *Stochastic processes*, Chapman and Hall, 1953.
- [8] Петров, В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972 (英译本: Petrov, V. V., *Sums of independent random variables*, Springer, 1975).
- [9] Grenander, U., *Probabilities on algebraic structures*, Wiley, 1963.

Ю. В. Прохоров 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

### 强相对极小值 [strong relative minimum; сильный относительный минимум]

由泛函  $J(y)$  在曲线  $\tilde{y}(x)$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$  上取到的一个极小值  $J(\tilde{y})$ , 使得对满足零阶  $\varepsilon$  近的条件, 即在整个区间  $[x_1, x_2]$  上

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \varepsilon \quad (1)$$

的所有比较曲线  $y(x)$ ,

$$J(\tilde{y}) \leq J(y). \quad (2)$$

假定  $\tilde{y}(x)$ ,  $y(x)$  满足给定的边界条件.

如果除了要求纵坐标的  $\varepsilon$  近性条件 (1) 之外, 加上在整个区间  $[x_1, x_2]$  上导数的  $\varepsilon$  近性条件:

$$|y'(x) - \tilde{y}'(x)| \leq \varepsilon, \quad (3)$$

则称为一阶  $\varepsilon$  近性.

由泛函  $J(y)$  在曲线  $\tilde{y}(x)$  取到的这样一个值, 使得对所有为一阶  $\varepsilon$  近性的比较曲线  $y(x)$  满足 (2), 则称为弱相对极小值 (weak relative minimum).

由于零阶  $\varepsilon$  近性条件比一阶  $\varepsilon$  近性条件划分出一个更广的曲线类, 每一个强极值同时是弱极值 (亦见弱相对极小值 (weak relative minimum)); 但是并不是每一个弱极值是强极值. 与此相关, 对强和弱相对极小值的最优性的必要以及充分条件有不同形式.

除强相对极小值概念外, 可以引入绝对极小值的概念. 绝对极小值是  $J(y)$  在其上有意义的曲线的全体集合上所取的极小值. 一个绝对极小值是总体的, 而强与弱相对极小值是局部的.

一个绝对极小值也是强相对极小值, 但并不是每一个强相对极小值是绝对极小值.

有多于一个强相对极小值的变分问题称为多极值

问题 (multi-extremum problem). 对于解实际的变分问题, 强相对极值可以用变分学的数值方法 (variational calculus, numerical methods of) 近似地求得.

对于强相对极小值是唯一的那些问题, 对强相对极小值的最优性必要条件同时是对绝对极小值的充分条件. 例如, 在时间最优控制的线性问题的最优控制理论中 (见时间最优控制问题 (time-optimal control problem)), 以及在变分法的某些其他类问题中, 这种情形成立.

### 参考文献

- [1] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).
- [2] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷第一、二分册, 人民教育出版社, 1958).

И. Б. Вапнярский 撰

### 【补注】

### 参考文献

- [A1] Elsgolc, L. E., *Calculus of variations*, Pergamon, 1961 (译自俄文) (中译本: Л. Е. 艾利斯哥尔兹, 变分法, 高等教育出版社, 1960).
- [A2] Cesari, L., *Optimization - theory and applications. Problems with ordinary differential equations*, Springer, 1983.

葛显良 译 吴绍平 校

### 强解 [strong solution; сильное решение]

微分方程

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f \quad (*)$$

在区域  $D$  中的强解是一局部可积函数  $u$ , 它具有所有  $\leq m$  阶的局部可积的广义导数 (generalized derivative), 且在  $D$  中几乎处处满足方程 (\*).

“强解”的概念亦可以如下引入. 函数  $u$  称作是方程 (\*) 的强解, 如果存在光滑 (例如,  $C^\infty$ ) 函数序列  $\{u_n\}$ ,  $\{f_n\}$  使得  $u_n \rightarrow u$ ,  $f_n \rightarrow f$  且  $Lu_n = f_n$  对每个  $n$ , 这里收敛性是在  $L_1(K)$  中对任一紧集  $K \subseteq D$  取的. 在这些定义中  $L_1$  可以换成  $L_p$  函数类, 即函数的  $p$  次方是局部可积的. 经常用的函数类是  $L_2$ .

在 (\*) 是椭圆型方程情形下, 强解的上述两个概念是一致的.

А. П. Солдатов 撰

### 【补注】

### 参考文献

- [A1] Chazarain, J. and Piriou, A., *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier - Villars, 1981, p. 223.

孙和生 译 陆柱家 校

强拓扑 [strong topology; сильная топология]

【补注】域  $k$  上一个向量空间的对偶对 (dual pair of vector spaces)  $(L, M)$  是一对向量空间  $L, M$  连同  $k$  上非退化双线性型,

$$\varphi: L \times M \rightarrow k.$$

即

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 l_1 + a_2 l_2, m) &= a_1 \varphi(l_1, m) + a_2 \varphi(l_2, m), \\ \varphi(l, b_1 m_1 + b_2 m_2) &= b_1 \varphi(l, m_1) + b_2 \varphi(l, m_2); \\ \text{对所有 } m \in M, \varphi(l, m) &= 0 \text{ 蕴涵 } l = 0; \text{ 对所有 } l \in L, \\ \varphi(l, m) &= 0 \text{ 蕴涵 } m = 0. \end{aligned}$$

由对偶对  $(L, M)$  ( $k$  上给定了一个拓扑) 定义的  $L$  上弱拓扑 (weak topology) 是使得所有泛函  $\psi_m: L \rightarrow k, \psi_m(l) = \varphi(l, m)$  连续的最弱拓扑. 更精确地说, 如果  $k = \mathbf{R}$  或  $\mathbf{C}$  带有通常的拓扑, 这定义了  $L$  (和  $M$ ) 上的弱拓扑. 如果  $k$  是一个带有离散拓扑的任意域, 这定义了所谓的线性弱拓扑 (linear weak topology).

设  $\mathfrak{M}$  是  $L$  的有界子集 (按弱拓扑, 即每一个  $A \in \mathfrak{M}$  是弱有界的 (weakly bounded), 意指  $0$  的每一个按  $L$  上弱拓扑的开邻域  $U$ , 存在  $\rho > 0$  使得  $\rho A \subset U$ ) 的一个集类.  $M$  上的拓扑  $\tau_{\mathfrak{M}}$  是由半范数系  $\{\rho_A\}$ ,  $A \in \mathfrak{M}$  定义的, 其中  $\rho_A(x) = \sup_{m \in A} |\varphi(m, x)|$  (见半范数 (semi-norm)). 这个拓扑是局部凸的, 当且仅当  $\bigcup \mathfrak{M}$  是一个全集 (total set), 即它生成 (在作为向量空间的  $L$  中)  $L$  的所有元素. 拓扑  $\tau_{\mathfrak{M}}$  称为  $\mathfrak{M}$  的集合上的一致收敛拓扑 (topology of uniform convergence).

$M$  上可用对偶对  $(L, M)$  定义的最细拓扑是  $L$  的弱有界子集上的一致收敛拓扑. 这是拓扑  $\tau_{\mathfrak{M}}$ , 其中  $\mathfrak{M}$  是  $L$  中所有弱有界子集的集类, 且它简称为  $M$  上的强拓扑 (strong topology).

参考文献

[A1] Köthe, G., Topological vector spaces, 1, Springer, 1969. 葛显良译 鲁世杰校

强连续半群 [strongly-continuous semi-group; сильно непрерывная полугруппа]

Banach 空间  $X$  上具有以下性质的一族有界线性算子  $T(t), t > 0$ :

- 1)  $T(t + \tau)x = T(t)T(\tau)x, t, \tau > 0, x \in X$ ;
- 2) 函数  $t \mapsto T(t)x$  对任何  $x \in X$  在  $(0, \infty)$  上连续.

当 1) 成立时, 所有函数  $t \mapsto T(t)x (x \in X)$  的可测性, 且特别地它们的单边 (右或左) 弱连续性, 蕴涵  $T(t)$  的强连续性. 对一个强连续半群, 有限数

$$\omega = \inf_{t > 0} t^{-1} \ln \|T(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|T(t)\|$$

称为该半群的型 (type of the semi-group). 这样, 函数  $t \mapsto T(t)x$  的范数在  $\infty$  的增长不快于指数  $e^{\omega t}$ . 强连续半群的分类是基于当  $t \rightarrow 0$  时它们的性态. 如果有一个有界算子  $J$  使得当  $t \rightarrow 0$  时  $\|T(t) - J\| \rightarrow 0$ , 则  $J$  是一个投影算子且  $T(t) = J e^{tA}$ , 其中  $A$  是与  $J$  交换的一个有界线性算子. 在这情形  $T(t)$  关于算子范数是连续的. 如果  $J = I$ , 则  $T(t) = e^{tA}$ ,  $-\infty < t < \infty$ , 是算子的一致连续群.

如果对每个  $x \in X, T(t)x \rightarrow Jx$ , 则  $J$  也是一个投影算子, 把  $X$  投影到子空间  $X_0$  上, 其中  $X_0$  是所有  $T(t)x, t > 0, x \in X$  的并的闭包.

为了  $J$  存在且等于  $I$ , 其必要充分条件为  $\|T(t)\|$  在  $(0, 1)$  上有界且  $X_0 = X$ . 在这情形下半群  $T(t)$  可以用等式  $T(0) = I$  扩张且对  $t \geq 0$  强连续 (它满足  $C_0$  条件 ( $C_0$ -condition)). 对更宽的半群类极限关系  $T(t) \rightarrow I$  在广义下满足:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)x d\tau = x, x \in X$$

(Cesàro 可和性,  $C_1$  条件 ( $C_1$ -condition)), 或

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda \tau} T(\tau)x d\tau = x, x \in X$$

(Abel 可和性,  $A$  条件 ( $A$ -condition)). 这里假设函数  $\|T(t)x\|, x \in X$ , 在  $[0, 1]$  可积 (且因而在任何有限区间上可积).

强连续半群当  $t \rightarrow 0$  时的性态可以完全非正则的. 例如, 函数  $t \mapsto \|T(t)x\| = 0$  可以有幂奇性.

对  $x$  在  $X_0$  中的一个稠密集函数  $t \mapsto T(t)x$  在  $[0, \infty)$  上可微. 使得函数  $t \mapsto T(t)x$  对所有  $x$  对  $t > 0$  是可微的强连续半群起着重要的作用. 在这情形下算子  $T'(t)$  对每个  $t$  有界且  $t \rightarrow 0$  时它的性态为半群分类给出了新的机会. 使得  $T(t)$  在包含半轴  $(0, \infty)$  的复平面的扇形内有一个全纯扩张的强连续半群的类已经被刻画出.

见算子的半群 (semi-group of operator); 半群的生成算子 (generating operator of a semi-group).

参考文献

[1] Hille, E. and Phillips, R., Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc., 1957 (中译本: E. 希尔, R. S. 菲列浦斯, 泛函分析与半群, 上海科学技术出版社, 1964). C. Г. Крейн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Pazy, A., Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, 1983.  
[A2] Arendt, W., Grabosch, A., Greiner, G., Groh, U., Lotz, H. P., Moustakas, U., Nagel, R., Neubrander, F. and Schlotterbeck, U., One para-



meter semigroups of positive operators, Lecture notes in math., 1184, Springer, 1986.

- [A3] Daleckiĭ, Yu. I. and Kreĭn, M. G., Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1974 (译自俄文).

葛显良 译 吴绍平 校

### 环索线 [strophoid; строфоида]

平面三次代数曲线, 用 Descartes 坐标表示其方程为

$$y^2 = x^2 \frac{d+x}{d-x},$$

用极坐标表示则为

$$\rho = -d \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}.$$

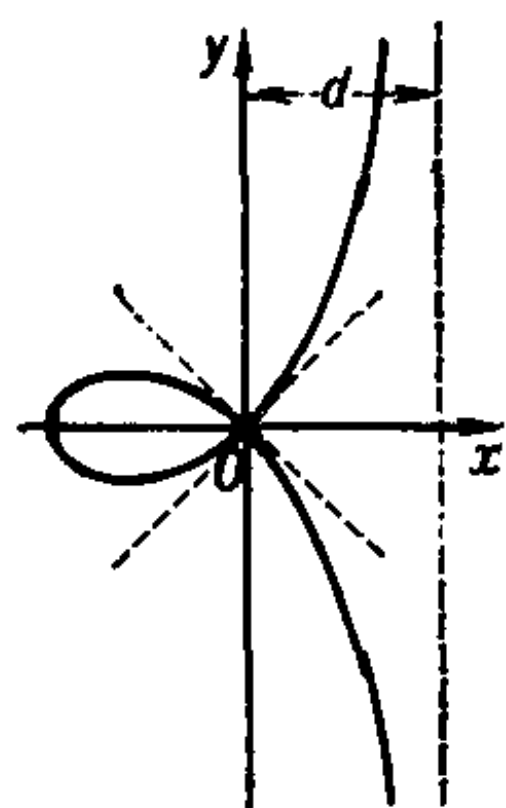
坐标原点是结点, 切线为  $y = \pm x$  (参看图示). 直线  $x = d$  是渐近线. 环圈的面积是

$$S = 2d^2 - \frac{1}{2\pi d^2}.$$

在曲线和渐近线之间的面积是

$$S_2 = 2d^2 + \frac{1}{2\pi d^2}.$$

环索线与所谓的尖点 (cusp) 有关.



### 参考文献

- [1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.  
[2] Смогоржевский, А. С., Столова, Е. С., Справочник по теории кривых третьего порядка, М., 1961.  
Д. Д. Соколов 撰

### 【补注】

### 参考文献

- [A1] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1-3, Chelsea, reprint, 1971.  
[A2] Lawrence, J. D. H., A catalog of special planar curves, Dover, reprint, 1972. 陈维桓 译

### Strouhal 数 [Strouhal number; Струхалия число]

液体或气体的非定常运动相似性的判据. Strouhal 数表征在时间进程中过程流动的同-性:

$$\text{Sh} = \frac{l}{vt} = \frac{\omega l}{v},$$

其中  $v$  是流动的特征速度,  $l$  是特征线尺度,  $t$  是非

定常运动的特征时间周期,  $\omega$  是特征频率 (有时也用  $\text{Sh}$  表示倒数  $vt/l$ ).

在力学的、热的和电磁的过程中类似的判据  $H_0 = vt/l$  称为均匀性检测标准 (homochromity test).

Strouhal 数是以 V. Strouhal 的名字命名的.

根据 БСЭ-3 中同名条目的材料

### 【补注】

### 参考文献

- [A1] Седов, Л. И., Метод подобия и размерности в механике, Изд. Наука, изд. 8, 1977 (中译本: Л. И. 谢道夫, 力学中的相似方法与量纲理论, 科学出版社, 1982). 李维新 译

### 结构同构 [structural isomorphism; структурный изоморфизм]

格同构 (lattice isomorphism) 的一个废弃不用的名称 (见子代数格 (subalgebra lattice)).

对于群来说, 什么时候两个群的同构可以由它们的格同构得出, 即由它们的子群格是同构的事实得出, 这个问题已被研究 (见 [1]).

### 参考文献

- [1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987; 下册, 1982). О. А. Иванова 撰

【补注】“结构同构”这个词是由格的结构这一废弃不用的术语而来 (见 [1]). 有些关于在什么时候格同构的群会是同构的结果在 [1] 中被列出.

郝柄新 译

### 结构语言学 [structural linguistics; структурная лингвистика]

语言学的一个分支, 主要研究语言机制的结构, 并力图精确描述这种结构. 结构语言学的发展导致了研究语言结构的数学方法的产生和数理语言学 (mathematical linguistics) 的出现. F. de Saussure 在 1916 年首先表述了结构语言学的一般原理 (见 [1]).

结构语言学将语言 (language) 与言语 (speech) 加以区别, 并以语言的研究作为结构语言学的基本任务. 语言是一个确定的符号系统 (system of signs); 每个语言符号是所指 (signifié) —— 意义 —— 和能指 (signifiant) —— 声学形态 —— 的组合. 例如, 英语词 “table” 的所指是桌子的概念, 而这个词的能指是说英语的人在听到相应的一连串声音时在脑中所出现的声学形态. 除了极少数情况外, 能指的选择不取决于所指的任何性质, 在这种意义上说语言符号是任意的. 对于语言, 一般说来, 符号的“材料”不是本质的, 而符号之间的关系才是本质的. 在这方面, 语言像数学中所研究的抽象系统, 因此, 它能用数学的方

法来研究。

因为语言是经常变化的，所以可以在两个层次上来研究：共时的（synchronic）（在某个给定的时刻的语言的研究）和历时的（diachronic）（语言的变化过程的研究）。结构语言学在共时的语言研究领域已经有了重大的进展。

研究已经深入到音位（phoneme）——可区别的最小语言单位，音位由一定的特殊符号的集合所刻画（见[2]，[3]）。例如，在英语中“m”，“a”和“na”所表示的声音是不一样的，因为对于它们每一个存在一个包含它们的有意义的语言单位（词），如果把其中一种声音换成另一种将会改变词的意思：如在词“man”中将声音“m”换成“c”，就得到“can”，如将词“ball”中的“a”换成“i”，就得到“bill”，或者将词“many”中的“ma”换成“ti”，就得到“tiny”。因此“ma”不是最小的，因为它能分成两个不同的单位“m”和“a”，而“m”和“a”不能再分，所以它们是最小的。在所有能够表征语言声音的符号中仅仅有一些是不同的单位，并且不同的符号的总数是随语言的不同而不同的。因此，例如元音的长度在俄语中没有变化，而在拉丁语和其他一些语言中却有变化（例如 pile——一滴，pile——鸭子）。虽然还没有十分完整的音位（phonemes）的形式理论，但是已经开始尝试用最简单的数学方法给出音位的形式解释（例如，见[4]，[5]）。结构语言学还从不同的符号的观点研究最小的有意义的语言单位——词素（morphemes）。例如，英语中的词“ashtrays”由词素“ash”和“tray”组成，而“s”是词的变化词素（有时“s”不叫词素，仅称为词的变化成分）。

结构语言学已经看到了所谓的语言研究描述程序（见[6]，[7]）的发展，这种程序是基于对语料供应人提出诸如“这个表达法正确吗”和“这两个表达法意思相同还是不同”这样的问题的作业上。数理语言学中的许多系统实质上是这些程序的形式化（见语言的解析模型（analytic model of a language））。描述命题结构的严格的形式，基本上是数学的方法已经有详细的研究（见语法结构（syntactic structure）），并且它可以用来研究语法理论中一系列重要问题。结构语义学（structural semantics）——关于语言的表达式的意义和它们的形式之间以及不同表达式的意义之间的关系的结构的研究——正在发展（例如，见[10]，[11]）。

结构语言学思想的发展已经导致了一种新的观念，把语言视作一种产生言语表达式或将所指（意义）转化为能指（话语）以及能指转化为所指的机制（见[8]—[10]）。这种观念已经成为形式语法理论

的基础（参见形式文法（grammar, formal））。

#### 参考文献

- [1] Saussure, F. de, Cours de linguistique générale. Payot, 1916.
- [2] Trubetzkoy, N. S., Grundzüge der Phonologie, Vandenhoeck & Ruprecht, reprint, 1958.
- [3] Якобсон, Р., Фанг, Г. М., Халле, М., в. кн.: Новое в лингвистике, М., 2 (1962), 173 — 230.
- [4] Успенский, В. А., «Вопросы языкознания», 6 (1964), 39 — 53.
- [5] Ревзин, И. И., Структура языка как моделирующей системы, М., 1978.
- [6] Bloomfield, L., Language, Holt, 1933.
- [7] Harris, Z. S., Methods in structural linguistics. Univ. Chicago Press, 1951.
- [8] Chomsky, N., Syntactic structures, Mouton, 1957.
- [9] Chomsky, N., Aspects of the theory of syntax, МИТ, 1965.
- [10] Мельчук, П. А., Опыт теорий лингвистических моделей «Смысл ↔ текст», М., 1974.
- [11] Апресян, Ю. Д., Лексическая семантика, М., 1974.
- [12] Апресян, Ю. Д., Идеи и методы современной структурной лингвистики, М., 1966.

А. В. Гладкий 撰

【补注】对于结构语言学的奠基性的贡献是由 L. Bloomfield 和他在美国的学派（参见[6]）以及欧洲的被称作“布拉格学派”的学派（参见[2]，[3]，[A2]，[A3]）作出的。

#### 参考文献

- [A1] Partee, B. H., Meulen, A. ter and Wall, R. E., Mathematical methods in linguistics, Kluwer, 1990.
- [A2] Vachek, J. (ed.), A prague school reader in linguistics, Indiana Univ. Press, 1964.
- [A3] Vachek, J., The linguistic school of Prague, Indiana Univ. Press, 1966.
- [A4] Sapir, E., Language: an introduction to the study of speech, Harcourt & Brace, 1921. 丁德成 译

#### 结构 [structure; структура]

1) 也称数学结构 (mathematical structure)，为统一一些概念而起的一般名称，这些概念的普遍特征是能应用于其元素具有不确定性质的集合。为定义一个结构，要给定一些关系，其中出现所涉及集合的元素（结构的类型特征（type characteristic of a structure）），然后设定这些关系满足的某些条件（结构公理（axioms of the structure））。

#### 参考文献

- [1] Bourbaki, N., Éléments d'histoire des mathématiques, Hermann, 1960.
- [2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Theory of

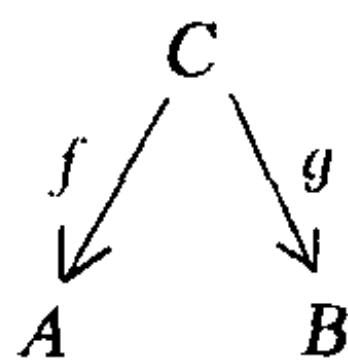


sets, Addison - Wesley, 1968 (译自法文).

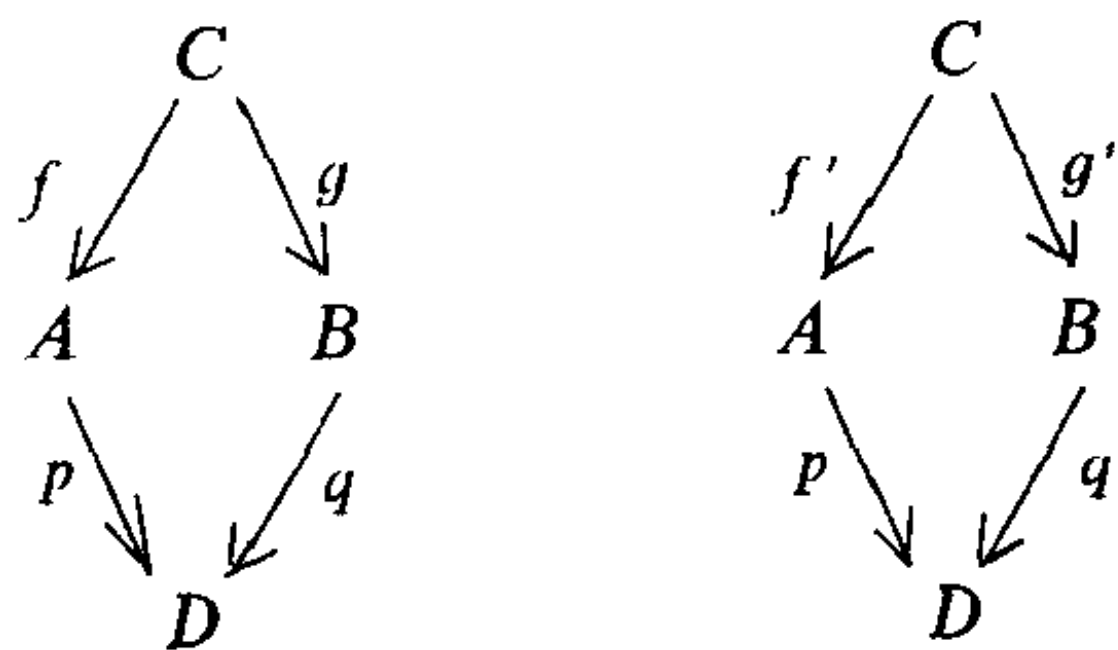
М. И. Войцеховский 撰

【补注】 赋予一个给定结构的一些集合连同这些集合之间保持此结构的一些映射构成一个范畴. 这样的范畴称为具体的 (亦见范畴 (category); 集合的范畴 (sets, category of)). 更精确地说, 一个具体范畴 (concrete category) 是由一个范畴  $\mathcal{C}$  和一个忠实函子  $U: \mathcal{C} \rightarrow$  集合构成的偶  $(\mathcal{C}, U)$ . 由于  $U$  是忠实的, 因而  $f$  可等同于  $Uf$ , 而具体范畴的对象  $C$  是具有附加结构的集合  $U(C)$ , 同时态射  $f$  是集合的保持附加结构的实在映射. 态射的复合由集合映射的通常复合来实现. 态射的集合  $\mathcal{C}(C, D)$  常由所有保持结构的集合映射组成, 但不必非如此不可.

一个范畴是具体的, 当且仅当它满足 Isbell 条件 (Freyd 具体性定理 (Freyd concreteness theorem)). 这里 Isbell 条件有如下述. 一个范畴张成 (span in a category) 是形如



的图表. 两个  $(A, B)$  生成  $(f, g)$  与  $(f', g')$  称为等价的, 如果对所有态射偶  $(p: A \rightarrow D, q: B \rightarrow D)$ , 两个图表



或者都是交换的, 或者都不是交换的. 一个范畴满足 Isbell 条件 (Isbell condition), 如果对所有对象  $(A, B)$ , 存在  $(A, B)$  生成的一个集合  $M_{A, B}$ , 使得每个  $(A, B)$  生成恰等价于  $M_{A, B}$  的一个元素.

#### 参考文献

- [A1] Adamek, J., Theory of mathematical structures, Reidel, 1983, Chapt. 6.  
[A2] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971, p. 26.

2) 结构也是格 (lattice) 这一概念曾经用过的名称.

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987, 下册, 1982).

3) 流形上的结构 (structure on a manifold), 或几何量 (geometric quantity), 或几何对象 (geometric

object), 或几何对象场 (field of geometric objects), 是伴有流形  $M$  上余标架主丛的一个丛的截面. 直观地说, 一个几何量可看作这样的量, 其值不仅依赖于流形  $M$  的点  $x$ , 而且依赖于余标架——点  $x$  处的无穷小坐标系 (见坐标卡 (chart)) 的选取.

更精确地说, 设  $GL^k(n)$  是  $k$  阶一般微分群 (空间  $\mathbb{R}^n$  的保持原点的变换在 0 处的  $k$  节的群),  $M_k$  是  $n$  维流形  $M$  的  $k$  阶余标架的流形 (即局部卡  $u: M \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$  的原点在点  $x = u^{-1}(0)$  处的  $k$  节  $j_x^k(u)$  的流形). 群  $GL^k(n)$  由

$$j_0^k(\varphi)j_0^k(u) = j_x^k(\varphi \circ u),$$

$$j_0^k(\varphi) \in GL^k(n), j_x^k(u) \in M_k$$

左作用于  $M_k$  上, 从而此作用在  $M_k$  上定义主  $GL^k(n)$  丛  $\pi_k: M_k \rightarrow M$  的结构, 称为  $k$  阶余标架丛 (bundle of coframes of order  $k$ ). 设  $W$  是任一  $GL^k(n)$  流形即带有群  $GL^k(n)$  的左作用的流形, 再设  $W(M)$  是  $GL^k(n)$  在  $M_k \times W$  上左作用的轨道空间, 而  $\pi_W$  是  $W(M)$  到  $M$  上的自然射影. 丛  $\pi_W: W(M) \rightarrow M$  (与  $M_k$  和  $W$  相伴) 称为  $W$  型的阶  $\leq k$  的几何结构丛 (bundle of geometric structures), 而其截面称为  $W$  型结构 (structure of type  $W$ ).  $W$  型结构同  $GL^k(n)$  等变映射  $s: M_k \rightarrow W$  之间有自然的一一对应. 这样,  $W$  型结构可看作  $k$  标架流形  $M_k$  上满足下述等变条件的  $W$  值函数  $S$ :

$$S(gu^k) = gS(u^k), g \in GL^k(n), u^k \in M_k.$$

几何对象丛  $\pi_W$  在下述意义下是一个自然丛:  $M$  的微分同胚群作用为  $\pi_W$  的自同构群.

如果  $W$  是带有  $GL^k(n)$  的线性 (或仿射) 作用的向量空间, 则  $W$  型结构称为线性的 (linear) (或仿射的 (affine)).

一阶线性结构的基本例子是张量结构 (tensor structure) 或张量场 (tensor field). 设  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ ,  $V_q^p = ((\otimes^p V) \otimes ((\otimes^q V^*)))$  是带有  $GL^1(n) = GL(n)$  的自然张量表示的  $(p, q)$  型张量的空间, 则  $V_q^p$  型结构称为  $(p, q)$  型张量场 (tensor field of type  $(p, q)$ ). 它可看作余标架流形  $M_1$  上的向量函数, 使得余标架  $\theta = j_x^1(u) = (du^1, \dots, du^n)$  对应到张量  $S(\theta) \in V_q^p$  关于  $V_q^p$  的标准基

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{*j_1} \otimes \dots \otimes e^{*j_q}\}$$

的坐标  $S(\theta)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  的集合. 给定余标架的线性变换  $\theta \rightarrow g\theta = (g_a^i du^a)$ , 坐标  $S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  按张量表示变换:

$$S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(g\theta) =$$

$$= g_{a_1}^{i_1} \cdots g_{a_p}^{i_p} (g^{-1})_{j_1}^{b_1} \cdots (g^{-1})_{j_q}^{b_q} S(\theta)_{b_1 \cdots b_q}^{a_1 \cdots a_p}.$$

张量结构最重要的例子是向量场 (vector field), Riemann 度量 (Riemannian metric), 微分形式 (differential form), 辛结构 (symplectic structure), 复结构 (complex structure) 以及最通用的仿射量 (affinor). 所有线性结构 (不论阶数如何) 为 Ращевский 超张量 (见 [4]) 所穷尽. 二阶仿射结构的一个例子是无挠仿射联络 (affine connection), 它可看作  $V_{(2)}^1$  型结构, 其中  $V_{(2)}^1 \approx V \otimes S^2 V^*$  是自然同态  $GL^2(n) \rightarrow GL^1(n)$  的核, 并看作带有  $GL^2(n) = GL(n) V_{(2)}^1$  的自然作用的向量空间. 一大类重要结构是无穷小齐性结构 (infinitesimally-homogeneous structure) 或  $G$  结构 ( $G$ -structure) 类, 这种结构是  $W$  型结构, 其中  $W = GL^k(n)/G$  是群  $GL^k(n)$  的齐性空间.

上述结构的定义还不是足够一般的, 未能包括一些重要的几何结构, 诸如旋量结构 (spinor structure), 辛旋量结构等. 一种自然的推广是研究广义  $G$  结构, 它是带有到一个  $G$  结构上的固定同态的主丛, 以及研究相伴丛的截面.

#### 参考文献

- [1] Ращевский, П. К., «Тр. сем. по вект. и тенз. анализу ...», 1 (1933), 126 – 142.
- [2] Вагнер, В., «Докл. АН СССР», 46 (1945), 9, 383 – 386.
- [3] Veblen, O., Whitehead, J. H. C., The foundations of differential geometry, Cambridge Univ. Press, 1932.
- [4] Ращевский, П. К., «Тр. Моск. матем. об-ва», 6 (1957), 337 – 370.
- [5] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964.
- [6] Ehresmann, Ch., Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie, in Géométrie Diff. Coll. Internat. C. N. R. S., 1953, 97 – 110. Д. В. Алексеевский 撰

【补注】 E. Cartan 是历史上最早引进结构概念的数学家.

#### 参考文献

- [A1] Cartan, E., La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle, Enseign. Math., 24 (1925), 5 – 18. 沈永欢 译

结构常数 [structure constant; структурная константа], 代数  $A$  的

在一个域或一个交换结合环  $P$  上的代数  $A$  的结构常数是等式

$$e_\alpha e_\beta = \sum_\gamma c_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$$

所定义的元素  $c_{\alpha\beta}^\gamma \in P$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in I$ , 这里  $\{e_\alpha: \alpha \in I\}$

是  $A$  的一个固定的基. 结构常数唯一确定了此代数. 如果  $d_{\xi\eta}^\zeta$  是代数  $A$  在另一个基  $\{f_\xi: \xi \in J\}$  内的结构常数, 这里  $f_\xi = \sum t_\xi^\alpha e_\alpha$ , 则

$$\sum_\zeta d_{\xi\eta}^\zeta t_\zeta^\gamma = \sum_{\alpha, \beta} t_\xi^\alpha t_\eta^\beta c_{\alpha\beta}^\gamma.$$

$A$  中的任何恒等式都可表达为结构常数间的关系式.

例如

$$c_{\alpha\beta}^\gamma = c_{\beta\alpha}^\gamma$$

(交换律);

$$\sum_\zeta c_{\alpha\beta}^\zeta c_{\zeta\gamma}^\lambda = \sum_\sigma c_{\alpha\sigma}^\lambda c_{\sigma\beta}^\gamma$$

(结合律);

$$\sum_\zeta (c_{\alpha\beta}^\zeta c_{\zeta\gamma}^\lambda + c_{\beta\gamma}^\zeta c_{\zeta\alpha}^\lambda + c_{\gamma\alpha}^\zeta c_{\zeta\beta}^\lambda) = 0.$$

(Jacobi 等式).

Л. А. Скорняков 撰

【补注】

#### 参考文献

- [A1] Cohn, P. M., Algebra 2, Wiley, 1989, 167 ff.

陈志杰 译

结构空间 [structure space; структурное пространство], 环的

环的所有准素理想的集合  $\mathfrak{P}$ , 带有下列拓扑: 子集  $C \subseteq \mathfrak{P}$  是闭的是指  $C$  包含所有下述的理想, 这些理想包含  $C$  中所有理想的交 (见 Zariski 拓扑 (Zariski topology)). 环  $R$  的结构空间同构于商环  $R/J$  的结构空间, 这里  $J$  是 Jacobson 根基. 结构空间是  $T_0$  空间. 如果环的所有准素理想是极大的, 则结构空间是  $T_1$  空间. 带有单位元的环的结构空间是紧的. 双正则环 (见正则环 (von Neumann 意义下的) (regular ring (in the sense of von Neumann))) 的结构空间是局部紧且完全不连通的. 它被用来把双正则环表示成具有紧支撑集的连续函数环的形式.

#### 参考文献

- [1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956. Л. А. Скорняков 撰

【补注】 这是交换环的极大理想的谱空间概念的推广 (见环的谱 (spectrum of a ring)).

#### 参考文献

- [A1] Goodearl, K. R., Von Neumann regular rings, Pitman, 1979. 陈志杰 译

Struve 函数 [Struve function; Струве функция]  
函数

$$H_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^{\pi/2} \sin(z \cos t) \sin^{2\nu} t dt,$$



$$\operatorname{Re} v > -\frac{1}{2},$$

它满足非齐次 **Bessel 方程** (Bessel equation):

$$z^2 y^{(n)} + z y' + (z^2 - v^2) y = \frac{4(z/2)^{v+1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(v+1/2)}.$$

幂级数展开式是

$$\begin{aligned} H_v(z) &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z/2)^{v+1}}{\Gamma(v+3/2)} \left[ 1 - \frac{z^2}{3 \cdot (2v+3)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^4}{3 \cdot 5 \cdot (2v+3)(2v+5)} \cdots \right]. \end{aligned}$$

阶为整数  $n$  的 Struve 函数与 **Weber 函数** (Weber function) 之间存在下列关系式:

$$H_0(z) = -E_0(z), H_1(z) = \frac{2}{\pi} - E_1(z),$$

$$H_2(z) = \frac{2z}{3\pi} - E_2(z) \cdots$$

阶为  $n+1/2$  ( $n$  为整数) 的 Struve 函数是初等函数, 例如

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} H_{1/2}(z) = \frac{1 - \cos z}{\sqrt{z}}.$$

当  $|z| \gg 1$ ,  $|z| \gg |v|$  时, 渐近展开式

$$\begin{aligned} H_v(z) - N_v(z) &\approx \\ &\approx \frac{(z/2)^{v-1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(v+1/2)} \left[ 1 + \frac{1 \cdot (2v-1)}{z^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot (2v-1)(2v-3)}{z^4} \cdots \right] \end{aligned}$$

成立, 其中  $N_v(z)$  是 **Neumann 函数** (Neumann function).

变形 Struve 函数 (modified function) 是函数

$$L_v(z) = -ie^{i\pi/2} H_v(iz).$$

它的级数展开是

$$L_v(z) = \left[ \frac{z}{2} \right]^{v+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{\Gamma(k+3/2)\Gamma(k+v+3/2)}.$$

对于大的  $|z|$ , 渐近展开式

$$L_v(z) - I_{-v}(z) \approx \frac{-(z/2)^{v-1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(v+1/2)}$$

成立, 其中  $I_{-v}$  是变形 Bessel 函数 (见 Bessel 函数 (Bessel functions)).

Struve 函数有时记为  $S_v(z)$ . 它是 H. Struve 引

入的 ([1]).

参考文献

- [1] Struve, H., Ann. Physik Chemie, 17 (1882), 1008 - 1016.
- [2] Jahnke, E., Emde, F. and Lösch, F., Tafeln höherer Funktionen, Teubner, 1966.
- [3] Abramowitz, M. and Stegun, A., Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1970.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 Struve 函数可以通过类型为  ${}_1F_2$  的超几何函数 (hypergeometric function) 来表示, 见 [A1], 公式 (7.5) (55).

参考文献

- [A1] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, 2, McGraw-Hill, 1953 (中译本: A. 爱尔台里等编, 高级超越函数, 上海科学技术出版社, 1957, 1958).
- [A2] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge Univ. Press, 1952.

杜小杨 译

**Student 分布** [Student distribution; Студента распределение], 自由度为  $f$  的,  $t$  分布 ( $t$ -distribution)

随机变量

$$t_f = \frac{U}{\sqrt{\chi_f^2/f}}$$

的概率分布, 其中  $U$  是服从标准正态律  $N(0,1)$  的随机变量, 而  $\chi_f^2$  是与  $U$  独立且服从自由度为  $f$  的  $\chi^2$  分布 ('chi-squared' distribution) 的随机变量. 随机变量  $t_f$  的分布函数为

$$\begin{aligned} P\{t_f \leq x\} &= S_f(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi f}} \frac{\Gamma((f+1)/2)}{\Gamma(f/2)} \int_{-\infty}^x \left(1 + \frac{u^2}{f}\right)^{-(f+1)/2} du, \end{aligned}$$

$$|x| < \infty.$$

特别地, 若  $f=1$ , 则

$$S_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$$

是 **Cauchy 分布** (Cauchy distribution) 的分布函数. Student 分布的概率密度关于 0 对称, 因此

$$S_f(t) + S_f(-t) = 1, \text{ 对于一切 } t \in \mathbf{R}^1.$$

对于  $r < f$ , Student 分布的矩  $\mu_r = E t_f^r$  存在, 且奇数阶矩等于 0, 特别地,  $E t_f = 0$ . Student 分布的偶数阶矩表示为

$$\mu_{2r} = f^r \frac{\Gamma((r+1/2)\Gamma(f/2-r))}{\sqrt{\pi} \Gamma(f/2)}, \quad 2 \leq 2r < f;$$

特别地,  $\mu_2 = D\{t_f\} = f/(f-2)$ . 随机变量  $t_f$  的分

布函数  $S_f(x)$  可以通过 B 分布 (beta-distribution) 函数表示为

$$S_f(x) = 1 - \frac{1}{2} I_{f/(f+x^2)} \left( \frac{f}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

其中  $I_z(a, b) (0 \leq z \leq 1)$  是不完全 B 函数. 当  $f \rightarrow \infty$  时, Student 分布收敛于标准正态分布律, 即

$$\lim_{f \rightarrow \infty} S_f(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

例. 设  $X_1, \dots, X_n$  是独立同正态分布  $N(a, \sigma^2)$  的随机变量, 其中参数  $a$  和  $\sigma^2$  未知. 这时, 统计量

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ 和 } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

是  $a$  和  $\sigma^2$  的最优无偏估计量, 而且  $\bar{X}$  与  $s^2$  统计独立. 因为随机变量  $\sqrt{n}(\bar{X} - a)/\sigma$  服从标准正态分布律, 而

$$\frac{n-1}{\sigma^2} s^2 = \chi_{n-1}^2$$

服从自由度  $f = n-1$  的  $\chi^2$  分布律, 且由于二者相互独立, 所以函数

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)/\sigma}{\sqrt{\chi_{n-1}^2/(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)}{s}$$

服从自由度为  $f = n-1$  的 Student 分布. 设  $t_f(P)$  和  $t_f(1-P) = -t_f(P)$  分别是如下方程的解:

$$S_{n-1} \left[ \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)}{s} \right] = \begin{cases} P, \\ 1-P, \end{cases}$$

其中  $0.5 < P < 1$ ,  $f = n-1$ . 那么, 统计量  $\bar{X} - st_f(P)/\sqrt{n}$  和  $\bar{X} + st_f(P)/\sqrt{n}$  是正态律  $N(a, \sigma^2)$  未知数学期望  $a$  的置信集的下限和上限, 该置信集的置信系数等于  $2P-1$ , 即

$$P \left\{ \bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_f(P) < a < \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_f(P) \right\} = 2P-1.$$

Student 分布为 W. S. Gosset (笔名 Student) 最先使用.

#### 参考文献

- [1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).
- [2] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.
- [3] 'Student' (W. S. Gosset), The probable error of a mean, Biometrika, 6 (1908), 1-25.

М. С. Никулин 撰 周概容、王健 译

Student 检验 [Student test; Стьюдента критерий],  $t$  检验 ( $t$ -test)

正态分布 (normal distribution) 的均值的显著性检验 (significance test).

单样本 Student 检验. 设独立随机变量  $X_1, \dots, X_n$  服从正态分布  $N_1(a, \sigma^2)$ , 其中参数  $a$  和  $\sigma^2$  未知; 要检验简单假设 (simple hypothesis)  $H_0: a = a_0$  对复合备选假设  $H_1: a \neq a_0$ . 为解此问题, 使用 Student 检验, 检验基于统计量

$$t_{n-1} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a_0}{s},$$

其中

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ 和 } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

是参数  $a$  和  $\sigma^2$  的估计量, 基于样本  $X_1, \dots, X_n$ . 当  $H_0$  成立时, 统计量  $t_{n-1}$  服从自由度为  $f = n-1$  的 Student 分布 (Student distribution), 即

$$P\{|t_{n-1}| < t | H_0\} = 2S_{n-1}(t) - 1, t > 0,$$

其中  $S_f(t)$  是自由度为  $f$  的 Student 分布函数. 根据显著性水平为  $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$  的单样本 Student 检验应接受假设  $H_0$ , 如果

$$\left| \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a_0}{s} \right| < t_{n-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right),$$

其中  $t_{n-1}(1-\alpha/2)$  是自由度为  $f = n-1$  的 Student 分布水平  $1-\alpha/2$  的分位数 (quantile), 即  $t_{n-1}(1-\alpha/2)$  是方程  $S_{n-1}(t) = 1-\alpha/2$  的解. 相反, 如果

$$\left| \sqrt{n} \frac{\bar{X} - a_0}{s} \right| \geq t_{n-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right),$$

则根据水平  $\alpha$  的 Student 检验, 应否定所检验假设  $H_0: a = a_0$ , 并接受备选假设  $H_1: a \neq a_0$ .

双样本 Student 检验. 设  $X_1, \dots, X_n$  和  $Y_1, \dots, Y_m$  是相互独立正态分布的随机变量, 具有相同的但未知的方差  $\sigma^2$ ; 又设

$$E X_1 = \dots = E X_n = a_1,$$

$$E Y_1 = \dots = E Y_m = a_2,$$

其中参数  $a_1$  和  $a_2$  未知 (常称有两个独立正态样本). 其次, 假定要检验假设  $H_0: a_1 = a_2$  对备选假设  $H_1: a_1 \neq a_2$ . 在此情形下, 两个假设都是复合的. 由观测值  $X_1, \dots, X_n$  和  $Y_1, \dots, Y_m$  可以计算未知数学期望  $a_1$  和  $a_2$  的估计量

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ 和 } \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_j,$$



以及未知方差  $\sigma^2$  的估计量

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2.$$

记

$$s^2 = \frac{1}{n+m-2} [(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2].$$

那么, 当  $H_0$  成立时, 统计量

$$t_{n+m-2} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s\sqrt{1/n + 1/m}}$$

服从自由度为  $f = n + m - 2$  的 Student 分布. 这一事实是双样本 Student 检验检定  $H_0$  对  $H_1$  的基础. 按水平  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 0.5$ ) 的双样本 Student 检验, 接受假设  $H_0$ , 如果

$$|t_{n+m-2}| < t_{n+m-2} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right),$$

其中  $t_{n+m-2}(1 - \alpha/2)$  是自由度为  $f = n + m - 2$  的 Student 分布水平  $1 - \alpha/2$  的分位数. 如果

$$|t_{n+m-2}| \geq t_{n+m-2} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right),$$

则按水平  $\alpha$  的 Student 检验否定假设  $H_0$  接受  $H_1$ .

#### 参考文献

- [1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).
- [2] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.
- [3] Смирнов, Н. В., Дунин-Борковский, И. В., Краткий курс математической статистики для технических приложений, М., 1959.
- [4] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.
- [5] Линник, Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, М., 1958.

М. С. Никулин 撰 周概容, 王健 译

**Student 化极差 [Studentized range; Студентизированный размах]**, 亦称  $t$  化极差

Student 化统计量类中的统计量. 所谓 Student 化统计量, 是基于正态样本的顺序统计量元线性组合的特别规范化.

设  $X_1, \dots, X_n$  是独立同正态分布  $N(a, \sigma^2)$  的随机变量, 而  $X^{(n)} = (X_{(n1)}, \dots, X_{(nn)})$  是由观测值  $X_1, \dots, X_n$  构造的顺序统计量向量. 其次, 设统计量  $\sum_{i=1}^n a_i X_{(ni)}$  是顺序统计量  $X_{(n1)}, \dots, X_{(nn)}$  的线性组合, 随机变量  $V/\sigma^2$  服从自由度为  $f$  的  $\chi^2$  分布, 且二者相互独立. 设  $s_f^2 = V/f$  是  $\sigma^2$  的某个无偏估计

量. 这时, 称

$$\frac{1}{s_f^2} \sum_{i=1}^n a_i X_{(ni)}$$

为 Student 化统计量 (Studentized statistic).

当  $\sum_{i=1}^n a_i X_{(ni)}$  是样本  $X_1, \dots, X_n$  的极差时, 即当

$$\sum_{i=1}^n a_i X_{(ni)} = X_{(nn)} - X_{(n1)}$$

时, Student 化统计量就是 Student 化极差. 于是, Student 化极差为

$$\frac{X_{(nn)} - X_{(n1)}}{s_f^2}.$$

#### 参考文献

- [1] Dovid, H., Order statistics, Wiley, 1977.
- [2] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.

М. С. Никулин 撰

【补注】 这里,

$$s_f^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

用于检验正态性和异常观测值的情形, 见 [1] 第 8 章. 关于 Student 化极差的分位数表参见 [A2].

#### 参考文献

- [A1] Mood, A. M. and Graybill, F. A., Introduction to the theory of statistics, McGraw-Hill, 1963, 243 (中译本: A. M. 穆德, F. A. 格雷比尔, 统计学导论, 科学出版社, 1978).
- [A2] Müller, P. H., Neumann, P. and Storm, R., Tafeln der mathematischen statistik, C. Hauser Verlag, 1977, 166 - 169.

【译注】 设  $R_n = X_{(nn)} - X_{(n1)}$  是极差,  $s_f^2$  是补注中定义的修正样本方差. 这时  $R_n$  与  $s_f^2$  不独立, 因此统计量  $R_n/s_f$  不是文中定义的 Student 化极差. 但是,  $R_n/s_f$  有编制好的分位数表, 可用于正态性检验和剔除异常值的检验 (见 [B1], [B2]).

#### 参考文献

- [B1] David, H. A., Hartley, H. O. and Pearson, E. S., The distribution of the ratio, in a single normal sample, of range to standard deviation, Biometrika, 41 (1954), 482 - 439.
- [B2] 周概容主编, 应用统计方法辞典, 中国统计出版社, 1993, 482 - 484.

周概容 译

**Sturm 曲线 [Sturm curves; Штурма кривые]**

在平面上与一个椭圆、双曲线或抛物线相联系的点当该曲线沿一条直线滚动时描出的超越曲线. Sturm 曲线的一个例子是抛物线的焦点当抛物线沿  $x$  轴滚动时的轨迹, 即悬链线 (catenary).

这些曲线由 J. Ch. Sturm 所研究.

## 参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】用“沿一条固定的曲线滚动”代替“沿一条直线滚动”，则该点将描出一条一般旋轮线 (roulette).

## 参考文献

[A1] Lawrence, J. D. H., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

[A2] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1-3, Chelsea, reprint, 1971. 陈维桓 译

## Sturm-Liouville 方程 [Sturm-Liouville equation; Штурма - Лиувилля уравнение]

二阶常微分方程

$$-\frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{dy}{dx} \right\} + l(x)y = \lambda r(x)y,$$

这里  $x$  在一给定的有限或无穷区间  $(a, b)$  中变动,  $p(x), l(x), r(x)$  是给定的系数,  $\lambda$  是复参数, 而  $y$  是待求的解. 如果  $p(x), r(x)$  是正的,  $p(x)$  具有一阶导数,  $p(x)r(x)$  具有二阶导数, 则此方程可通过 Liouville 代换 (见 [1]) 化简为标准形式

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad a < x < b. \quad (1)$$

假定复函数  $q$  在  $(a, b)$  上可测并在  $(a, b)$  的每一个子区间中可和. 同时还考虑非齐次方程

$$-y'' + q(x)y = \lambda y + f(x), \quad a < x < b, \quad (2)$$

其中  $f$  是给定的函数.

如果  $f$  在  $(a, b)$  上可测并在  $(a, b)$  的每个子区间中可和, 则对所有复数  $c_0, c_1$  和任一内点  $x_0$ , 方程 (2) 在  $(a, b)$  上有且仅有一个满足条件  $y(x_0, \lambda) = c_0, y'(x_0, \lambda) = c_1$  的解  $y(x, \lambda)$ . 对任一  $x \in (a, b)$ , 函数  $y(x, \lambda)$  是  $\lambda$  的整解析函数.  $x_0$  也可取  $(a, b)$  的端点之一 (如果此端点是正则的, 见 Sturm-Liouville 算子 (Sturm-Liouville operator)).

设  $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)$  是 (1) 的任意两个解, 于是  $y_1, y_2$  的 Wronski 行列式 (Wronskian)

$$W(y_1, y_2) =$$

$$= y_1(x, \lambda)y_2'(x, \lambda) - y_1'(x, \lambda)y_2(x, \lambda)$$

不依赖于  $x$ , 它当且仅当  $y_1, y_2$  线性相关时才等于零. (2) 的通解具有下面的形式:

$$y(x, \lambda) = a_1 y_1(x, \lambda) + a_2 y_2(x, \lambda) + \int_{x_0}^x R(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi,$$

其中

$$R(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \{ y_1(x, \lambda) y_2(\xi, \lambda) + y_1(\xi, \lambda) y_2(x, \lambda) \},$$

$a_1, a_2$  是任意常数,  $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)$  是 (1) 的线性无关的解.

下述 Sturm 基本定理 (fundamental theorem of Sturm) 成立: 给定两个方程

$$u'' + q_1(x)u = 0, \quad (3)$$

$$v'' + q_2(x)v = 0, \quad (4)$$

如果  $q_1(x), q_2(x)$  是实的, 且在整个区间  $(a, b)$  上有  $q_1(x) < q_2(x)$ , 则在第一个方程的任一非零解的任何两个零点之间, 至少有第二个方程的任一解的一个零点.

下述定理称为比较定理 (comparison theorem) (见 [1]): 设  $(a, b)$  的左端点是有限的,  $u(x)$  是 (3) 的满足条件  $u(a) = \sin \alpha, u'(a) = \cos \alpha$  的解,  $v(x)$  是 (4) 的满足同样条件的解, 并且还假定在整个区间  $(a, b)$  上有  $q_1(x) < q_2(x)$ , 于是如果  $u(x)$  在  $(a, b)$  上有  $m$  个零点, 则  $v(x)$  在  $(a, b)$  上至少有  $m$  个零点, 且  $v(x)$  的第  $k$  个零点小于  $u(x)$  的第  $k$  个零点.

(1) 的重要性质之一是具有简单结构的所谓算子变换的存在性. 算子变换来自与广义位移算子 (基的变换) 有关的一般代数考虑.

对于方程 (1) 有下述类型的算子变换. 设  $y(x, \lambda)$  是

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad -a < x < a, \quad a \leq \infty \quad (5)$$

的满足条件

$$y(0, \lambda) = 1, \quad y'(0, \lambda) = i\lambda \quad (6)$$

的解. 可以验证此解具有下述表示:

$$y(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_{-x}^x K(x, t) e^{i\lambda t} dt,$$

其中  $K(x, t)$  是不依赖于  $\lambda$  的连续函数, 且有

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt, \quad K(x, -x) = 0.$$

由

$$(I + K)f = f(x) + \int_{-x}^x K(x, t)f(t) dt$$

定义的积分算子  $I + K$  称为算子变换 (operator trans -



form) (或变形算子 (transmutation operator)), 它在点  $x = 0$  处保持所给的条件不变. 它把函数  $e^{i\lambda x}$  (最简单的方程  $y'' = \lambda^2 y$  满足条件 (6) 的解) 变换为方程 (5) 的在点  $x = 0$  处满足同一条件的解. 设  $\varphi_h(x, \lambda)$  和  $\varphi_\infty(x, \lambda)$  是 (5) 的满足

$$\varphi_h(0, \lambda) = 1, \varphi'_h(0, \lambda) = h,$$

$$\varphi_\infty(0, \lambda) = 0, \varphi'_\infty(0, \lambda) = 1$$

的解, 则这些解具有表示式

$$\varphi_h(x, \lambda) = \cos \lambda x + \int_0^x K_h(x, t) \cos \lambda t dt,$$

$$\varphi_\infty(x, \lambda) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + \int_0^x K_\infty(x, t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt,$$

其中  $K_h(x, t)$  和  $K_\infty(x, t)$  是连续函数.

已引进算子变换的一种新的类型 (见 [8]), 它保持解在无穷远处的渐近性态不变; 就是说, 可证明对上半平面  $\text{Im } \lambda \geq 0$  中所有的  $\lambda$ , 在半直线  $0 \leq x < \infty$  上考虑满足条件  $\int_0^\infty x |q(x)| dx < \infty$  的方程 (5), 则它具有能表示为下面形式的解  $y(x, \lambda)$ :

$$y(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt,$$

其中  $K(x, t)$  是连续函数, 满足不等式

$$|K(x, \tau)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\},$$

这里

$$\sigma(x) = \int_x^\infty |q(t)| dt, \sigma_1(x) = \int_x^\infty \sigma(t) dt.$$

此外还有

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty q(t) dt.$$

#### 参考文献

- [1] Левитан, Б. М., Саргсян, И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970 (英译本: Levitan, B. M. and Sargsyan, I. S., Introduction to spectral theory, Amer. Math. Soc., 1975).
- [2] Наймарк, М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969 (中译本: М. А. 纳依玛克, 线性微分算子, 科学出版社, 1964).
- [3] Левитан, Б. М., Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973 (英译本: Levitan, B. M., Generalized translation operators and some of their ap-

plications, Israel Progr. Sci. Transl., 1964).

- [4] Марченко, В. А., Операторы Штурма - Лиувилля и их приложения, К., 1977 (英译本: Marchenko, V. A., Sturm-Liouville operators and applications, Birkhäuser, 1986).
- [5] Delsarte, J., Sur certaines transformations fonctionnelles relatives aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, C. R. Acad. Sci. Paris, 206 (1938), 1780 - 1782.
- [6] Повзнер, А. Я., «Матем. сб.», 23 (1948), 1, 3 - 52.
- [7] Левитан, Б. М., «Успехи матем. наук», 4 (1949), в. 1, 3 - 112.
- [8] Левин, Б. Я., «Докл. АН СССР», 106 (1956), 2, 187 - 190.
- [9] Levitan, B. M. (Левитан, Б. М.), Inverse Sturm-Liouville problems, VNU, 1987 (译自俄文).

Г. Ш. Гусейнов, Б. М. Левитан 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Carroll, R., Transformation theory and application, North-Holland, 1985.
- [A2] Levitan, B. M. (Левитан, Б. М.) and Sargsyan, I. S. (Саргсян, И. С.), Sturm-Liouville and Dirac operators, Kluwer, 1991 (译自俄文).

沈永欢 译

#### Sturm-Liouville 算子 [Sturm-Liouville operator; Штурма-Лиувилля оператор]

由微分表达式

$$l[f] = -(p(x)f')' + q(x)f, x \in (a, b)$$

以及适当的边值条件在 Hilbert 空间  $L_2(a, b)$  中生成的自伴算子 (self-adjoint operator), 这里  $(a, b)$  是有限或无限区间,  $p', p, q$  是连续实值函数且对一切  $x \in (a, b)$ ,  $p(x) > 0$  (有时由类似于  $l$  的准微分表达式所生成的算子也这样称呼). 自 1830 年以来, J. Ch. Sturm 和 J. Liouville 关于有限区间上的 Sturm-Liouville 问题 (Sturm-Liouville problem) 发表了一系列基本的研究.

一点  $a$  若为有限,  $p(a) \neq 0$  且  $p', p, q \in C(a, b)$ , 就称为正则端点 (regular end-point), 否则此点就称为奇异端点 (singular end-point). 表达式  $l$  称为正则的 (regular) 或奇异的 (singular), 视  $(a, b)$  的两个端点是否均为正则而定.

令  $D_1$  为适合  $f \in L_2(a, b)$ ,  $f'$  为绝对连续, 且  $l[f] \in L_2(a, b)$  的函数  $f$  之集合,  $D_0$  为  $D_1$  中具有紧支集的函数之集合. 此外, 令  $L_1: f \rightarrow l[f]$ ,  $f \in D_1$ , 而  $L_0$  为算子  $L'_0: f \rightarrow l[f]$  ( $f \in D_0$ ) 之闭包;  $L_0$  是一对称算子, 且  $L_0^* = L_1$ . 一个 Sturm-Liouville 算子就

是算子  $L_0(L_1)$  的扩张 (限制)。

1) 令  $l$  为正则的, 令向量  $(\alpha_i, \alpha'_i, \beta_i, \beta'_i)$  ( $i = 1, 2$ ) 是线性无关的, 而且

$$p(b)(\overline{\beta'_i}\beta_j - \overline{\beta_i}\beta'_j) - p(a)(\overline{\alpha'_i}\alpha_j - \overline{\alpha_i}\alpha'_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

于是, 满足条件

$$p(b)(\beta'_i f'(b) - \beta_i f(b)) - p(a)(\alpha'_i f'(a) + \alpha_i f(a)) = 0 \quad (2)$$

( $i = 1, 2$ ) 的所有的函数  $f \in D_l$  之集合是某个 Sturm-Liouville 算子的定义域。反过来, 每个 Sturm-Liouville 算子的定义域都可以这样来确定。

在边值条件中, 分离边值条件 (separated boundary conditions) (或称 Sturm 型边值条件 (boundary conditions of Sturm type)):

$$f(a)\cos\varphi - f'(a)\sin\varphi = 0, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad (3)$$

$$f(b)\cos\theta - f'(b)\sin\theta = 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad (4)$$

以及混合边值条件 (mixed boundary condition)

$$f(a) = \nu f(b), \quad f'(a) = \delta f'(b), \quad (5)$$

其中  $\nu\delta = p(b)/p(a)$ , 占有重要的地位。特别是, 若  $p(a) = p(b)$ , 则当  $\nu = \delta = 1$  时条件 (5) 称为周期的 (periodic),  $\nu = \delta = -1$  时称为反周期的 (anti-periodic) (或半周期的 (semi-periodic))。

2) 令  $l$  为奇异的。两个端点都为奇异的情况可以用分裂的方法化为仅有一个端点为奇异的情况。

2<sub>1</sub>) 令  $a$  为正则而  $b$  为奇异的, 并令方程  $l[f] = if$  的线性无关的  $L_2(a, b)$  解个数为 1。这时就说表达式  $l$  在  $b$  点属于 Weyl 极限点 (Weyl limit point) 的情况。Sturm-Liouville 算子的定义域是由边值条件 (3) 决定的。

2<sub>2</sub>) 若  $l[f] = if$  的属于  $L_2(a, b)$  的线性无关解的个数为 2, 就说表达式  $l$  在  $b$  点属于 Weyl 极限圆 (Weyl limit circle) 的情况。这时算子  $L_0$  的亏指数是  $(2, 2)$ 。Sturm-Liouville 算子的定义域可以类似于 1) 那样来描述, 而对 (2) 作如下的替代:  $p(b)$  代之以  $p(a)$ ,  $f(b)$  和  $f'(b)$  则分别代之以  $(Sf)_1(b)$  和  $(Sf)_2(b)$ , 而

$$(Sf)_1(b) = \lim_{x \rightarrow b} p(x)[fu_2](x),$$

$$(Sf)_2(b) = \lim_{x \rightarrow b} p(x)[u_1f](x);$$

这里  $[\varphi\psi](x)$  是函数  $\varphi$  和  $\psi$  在  $x$  点的 Wronski 行列式 (Wronskian),  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) 则是方程  $l[f] = 0$  在初始条件  $u_i^{(j-1)}(0) = \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) 下的解,  $\delta_{ij}$

是 Kronecker 符号。

一个 Sturm-Liouville 算子的预解核是一 Carleman 核 (Carleman kernel); 此外, 在情况 1) 和 2<sub>2</sub>) 下, 预解式是一个 Hilbert-Schmidt 积分算子 (Hilbert-Schmidt integral operator), 而在情况 2<sub>1</sub>) 下则不一定是。

Sturm-Liouville 算子的谱分解在离散谱的情况下 (例如, 在 1) 和 2<sub>2</sub>)), 类似于按 Sturm-Liouville 问题的本征函数的 Fourier 展开式, 在其他情况下, 它不在  $L_2(a, b)$  中的本征函数。

系数  $p$  与  $q$  要满足什么样的条件, Sturm-Liouville 算子有离散谱, 或者其谱填满整个直线, 在什么条件下  $l$  是极限点型或极限圆型, 这些都是有很大意义的问题。 $p$  和  $q$  的完全一般的保证  $l$  属于极限圆或极限点型 ( $b = +\infty$ ) 的必要充分条件, 迄至 1984 年仍是未知的。

#### 参考文献

- [1] Наймарк, М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969.
- [2] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 3 изд., т. 2, Харьков, 1978 (英译本: Akhiezer, N. I., Glazman, I. M. Theory of linear operators in Hilbert space, 2, Pitman, 1980).
- [3] Левитан, Б. М., Саргсян, И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970 (英译本: Levitan, B. M., Sargsyan, I. S., Introduction to spectral theory, Amer. Math. Soc., 1975).
- [4] Марченко, В. А., Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, К., 1977 (英译本: Marchenko, V. A., Sturm-Liouville operators and applications, Birkhäuser, 1986).
- [5] Coddington, E. A., Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.
- [6] Глазман, И. М., Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963.
- [7] Hutson, V., Pym, J., Applications of functional analysis and operator theory, Acad. Press, 1980.
- [8] Titchmarsh, E. C., Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, 1, Clarendon Press, 1946 (中译本: E. 梯其马希, 与二阶微分方程相联系的本征函数展开, 1, 上海科学技术出版社, 1964).
- [9] Мирзоев, Г. А., «Матем. заметки», 29 (1981), 2, 225 - 233.
- [10] Молчанов, А. М., «Тр. Моск. матем. об-ва», 2 (1953), 169 - 199.
- [11] Levinson, N., Criteria for the limit-point case for second order linear differential operators, Časopis Pěst. Mat. Fys., 74 (1949), 17 - 20.



[12] Исмагилов, Р. С., «Докл. АН СССР», 142 (1962), 6, 1239 – 1242.

[13] Повзнер, А. Я., «Матем. сб.», 23 (1948), 1, 3 – 52.

[14] Everitt, W., On the deficiency index problem for ordinary differential equations 1910 – 1976, in G. Berg, et al. (eds.), Differential Equations (Proc. Internat Conf. Uppsala), Almqvist & Weksell, 1977, 62 – 81.

Б. М. Левитан, К. А. Мирзоев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Березанский, Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965 (英译本: Berezanskiĭ, Yu. M., Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1968).

[A2] Dunford, N., Schwartz, J. T., Linear operators, Spectral theory, 2, Interscience, 1963.

[A3] Levitan, B. M., Sargsyan, I. S., Sturm-Liouville and Dirac operators, Kluwer, 1991 (译自俄文).

齐民友 译

#### Sturm-Liouville 问题 [Sturm-Liouville problem; Штурма-Лиувилля задача]

由方程 (其中  $x$  在已给的有限或无限区间  $(a, b)$  上变化)

$$-\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + l(x)y = \lambda r(x)y \quad (1)$$

和某些边值条件构成的问题, 这里  $p(x)$  和  $r(x)$  为正的,  $l(x)$  为实的, 而  $\lambda$  是一个复参数. 这个问题的认真的研究始于 J. Ch. Sturm 和 J. Liouville. 在研究 Sturm-Liouville 问题时产生的方法和概念对数学和物理学许多方向的发展起了重要的作用. 它过去是, 现在仍是算子谱理论 (spectral theory) 和分析中相关问题中新思想和新问题经常的来源. 近年来, 由于它和数学物理中某些非线性发展方程的关系被发现, 它甚至有了更大的意义.

若  $p(x)$  可微而  $p(x)r(x)$  二次可微, 则作代换后, 方程 (1) 可以化为 (见 [1])

$$-y'' + q(x)y = \lambda y. \quad (2)$$

通常要区别正则的与奇异的 Sturm-Liouville 问题. 方程 (2) 的一个 Sturm-Liouville 问题, 若  $x$  在其中变化的区间  $(a, b)$  为有限而  $q(x)$  在整个区间  $(a, b)$  上可和, 就称为正则的 (regular). 若区间  $(a, b)$  为无限或  $q(x)$  不可和 (或二者兼有), 这问题就称为奇异的 (singular).

下面要比较详细地考虑三种可能情况: 1) 区间  $(a, b)$  为有限 (这时不失一般性可设  $a = 0$ ,

$b = \pi$ ); 2)  $a = 0, b = \infty$ ; 3)  $a = -\infty, b = \infty$ .

1. 考虑由给定于区间  $[0, \pi]$  上的方程 (2) 以及分离的边值条件

$$y'(0) - hy(0) = 0, y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \quad (3)$$

所成的问题,  $q(x)$  是  $[0, \pi]$  上的可和实值函数,  $h$  和  $H$  是任意的有限或无限固定实数而  $\lambda$  是一复参数. 若  $h = \infty$  ( $H = \infty$ ) 则将 (3) 中第一个 (第二个) 条件改成  $y(0) = 0$  ( $y(\pi) = 0$ ). 为确定起见, 进一步设边值条件中出现的数都是有限的.

若当  $\lambda = \lambda_0$  时方程 (2) 有一个满足 (3) 的非平凡解  $y_0(x) \not\equiv 0$ ,  $\lambda_0$  就称为问题 (2), (3) 的本征值 (eigenvalue); 函数  $y_0(x)$  则称为相应于本征值  $\lambda_0$  的本征函数 (eigenfunction).

边值问题 (2), (3) 的本征值均为实的; 对应于不同本征值, 有线性无关的本征函数 (因为  $q(x)$  和数  $h, H$  均为实, 问题 (2), (3) 的本征函数也可取为实的); 相应于同一本征值的本征函数最多只相差一个常数因子; 相应于不同本征值的本征函数  $y_1(x)$  和  $y_2(x)$  正交, 即  $\int_0^\pi y_1(x)y_2(x)dx = 0$ .

边值问题 (2), (3) 有无限增加的本征值序列  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ ; 此外, 相应于本征值  $\lambda_n$  的本征函数  $y_n(x)$  在区间  $(0, \pi)$  中恰有  $n$  个零点.

令  $W_2^m[0, \pi]$  是 Соболев 空间, 其元素是区间  $[0, \pi]$  上的这样的复值函数, 它们有  $m-1$  阶绝对连续导数而且  $m$  阶导数在  $[0, \pi]$  上平方可积. 若  $q \in W_2^m[0, \pi]$ , 则边值问题 (2), (3) 的本征值  $\lambda_n$  对于大的  $n$  满足以下的渐近展开式 (见 [4]):

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_n} = & n + \sum_{1 \leq 2j+1 \leq m+2} \frac{c_{2j+1}}{n^{2j+1}} + \\ & + \frac{(-1)^{m-1}}{2^{m+2}} \left[ S_m(n) + \frac{\tilde{S}_m(n)}{n} \right] \frac{1}{n^{m+1}} + \\ & + \frac{\delta_n}{n^{m+2}} + \frac{\varepsilon_n(h, H)}{n^{m+2}}, \end{aligned}$$

其中数  $c_{2j+1}$  与  $n$  无关,

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \left[ h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t)dt \right],$$

$$S_m(n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi q^{(m)}(t) \sin \left\{ 2nt - \frac{\pi}{2}(m+1) \right\} dt,$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_m(n) = & \frac{2}{\pi} \int_0^\pi q^{(m)}(t) (2h - c_1 t) \sin \left\{ 2nt + \right. \\ & \left. - \frac{\pi}{2}(m+2) \right\} dt, \end{aligned}$$

$\delta_n$  不依赖于  $h, H$  而

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\delta_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n(h, H)|^2 < \infty.$$

特别地, 由上述可知, 若  $q \in W_2^1[0, \pi]$ , 则

$$\lambda_n = n^2 + c + \frac{\gamma_n}{n},$$

其中

$$c = \frac{2}{\pi} \left[ h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right], \quad \sum_{n=0}^\infty |\gamma_n| < \infty.$$

所以级数  $\sum_{n=0}^\infty (\lambda_n - n^2 - c)$  收敛, 其和称为问题 (2), (3) 的正规化迹 (regularized trace) (见 [13]):

$$\sum_{n=0}^\infty (\lambda_n - n^2 - c) = \frac{q(0) + q(\pi)}{4} + \frac{(h+H)^2}{2} + hH - \frac{c}{2}.$$

令  $v_0(x), v_1(x), \dots$  为问题 (2), (3) 的相应于本征值  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  的规范正交本征函数系. 对任意函数  $f \in L_2[0, \pi]$ , 下面所谓的 Parseval 等式 (Parseval equality) 成立:

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2,$$

其中

$$a_n = \int_0^\pi f(x) v_n(x) dx,$$

而且以下的本征函数展开式也成立:

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n v_n(x), \quad (4)$$

此级数在  $L_2[0, \pi]$  的度量下收敛. 正则 Sturm-Liouville 问题的完全性和展开定理是 B. A. Cтеклов 首先证明的 ([14]).

若函数  $f$  有连续二阶导数且满足边值条件 (3), 则以下结论成立 (见 [15]):

a) 级数 (4) 在  $[0, \pi]$  上绝对且一致收敛于  $f(x)$ ;

b) 级数 (4) 逐项求导一次后在  $[0, \pi]$  上绝对且一致收敛于  $f'(x)$ .

c) 在  $f''(x)$  满足有关 Fourier 级数展开的局部条件 (例如, 有有界变差) 的任何点处, 级数 (4) 逐项求导二次后收敛于  $f''(x)$ .

对任一函数  $f \in L_1[0, \pi]$ , 级数 (4) 与  $f$  的 Fourier 余弦级数一致等度收敛, 即有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq \pi} |V_{N,f}(x) - c_{N,f}(x)| = 0,$$

这里

$$V_{N,f}(x) = \int_0^\pi f(t) \sum_{n=0}^N v_n(x) v_n(t) dt,$$

$$c_{N,f}(x) = \int_0^\pi f(t) \left\{ \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \cos nx \cos nt \right\} dt.$$

这就表示,  $f$  对于边值问题 (2), (3) 的本征函数的展开式与  $f$  的 Fourier 余弦级数展开式在同样的条件下收敛 (见 [1], [4]).

2. 在半直线  $0 \leq x < \infty$  上考虑微分方程 (2) 而只在零点给一个边值条件

$$y'(0) - hy(0) = 0. \quad (5)$$

函数  $q(x)$  设为实的且在  $[0, \infty)$  的任一有限子区间上可和,  $h$  设为实数.

令  $\varphi(x, \lambda)$  是 (2) 的附有初始条件  $y(0) = 1, y'(0) = h$  的解 (所以  $\varphi(x, \lambda)$  也满足边值条件 (5)). 令  $f$  是  $L_2(0, \infty)$  中任一函数, 并令  $\Phi_{f,b}(x) = \int_0^b f(x) \varphi(x, \lambda) dx$ ,  $b$  是任意的有限正数. 对于任意的函数  $q$  和数  $h$ , 至少有一个递减的且与  $f$  无关的函数  $\rho(\lambda)$  ( $-\infty < \lambda < \infty$ ), 具有以下性质:

a)  $\Phi_{f,b}(\lambda)$  当  $b \rightarrow \infty$  时在  $L_{2,\rho}(-\infty, \infty)$  (即满足  $\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^\infty |\psi(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) < \infty$  的  $\rho$  可测函数的空间) 的度量下有极限  $\Phi_f(\lambda)$ , 亦即

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty |\Phi_f(\lambda) - \Phi_{f,b}(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) = 0;$$

b) Parseval 等式成立:

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |\Phi_f(\lambda)|^2 d\rho(\lambda).$$

函数  $\rho(\lambda)$  称为边值问题 (2), (5) 的谱函数 (spectral function) (或谱密度 (spectral density)) (见 [9] - [11]).

对于问题 (2), (5) 的谱函数  $\rho(\lambda)$  有以下渐近公式成立 (见 [16]) ([17], 其中有更精确的公式):

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e^{\sqrt{\lambda}x} (\rho(\lambda) - \rho(-\infty)) = 0, \quad 0 \leq x < \infty,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[ \rho(\lambda) - \rho(-\infty) - \frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} + h \right] = 0.$$

下面的等度收敛定理也成立 ([17]): 对任意函数  $f \in L_2(0, \infty)$ , 令

$$\Phi_f(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \varphi(x, \lambda) dx,$$

$$C_f(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \cos \sqrt{\lambda} x dx,$$

(这两个积分分别在  $L_{2,\rho}(-\infty, \infty)$  和  $L_{2,\sqrt{\lambda}}(0, \infty)$  中收敛); 于是对任一固定的  $b < \infty$ , 积分

$$\int_{-\infty}^b \Phi_f(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda)$$

对于  $x \in [0, b]$  绝对且一致收敛, 而且

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x < b} \left| \int_{-\infty}^N \Phi_f(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda) + \frac{2}{\pi} \int_0^N C_f(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} x d\sqrt{\lambda} \right| = 0.$$

设问题 (2), (5) 有离散谱, 即其谱由可数多个本征值  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  (它们以无穷远点为唯一的极限点) 构成. 在对函数  $q$  的某些限制下, 对于函数  $N(\lambda)$



$= \sum_{\lambda_n < \lambda} 1$ , 即小于  $\lambda$  的本征值个数, 以下的渐近公式成立:

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{q(x) < \lambda} [\lambda - q(x)]^{\frac{1}{2}} dx.$$

与  $\varphi(x, \lambda)$  同时, 还引入了方程 (2) 的第二个解  $\theta(x, \lambda)$ , 它满足条件  $\theta(0, \lambda) = 0$ ,  $\theta'(0, \lambda) = 1$ , 于是  $\varphi(x, \lambda)$  和  $\theta(x, \lambda)$  构成 (2) 的基本解组 (fundamental system of solutions). 对于固定的  $\lambda$  ( $\text{Im } \lambda \neq 0$ ) 和  $b > 0$ , 考虑以下的线性分式函数

$$w_{\lambda, b} = w_{\lambda, b}(t) = \frac{-\theta'(b, \lambda) - t\theta(b, \lambda)}{\varphi'(b, \lambda) + t\varphi(b, \lambda)}.$$

当自变量  $t$  在实数直线上变化时, 点  $w_{\lambda, b}$  围着一个圆盘  $K_{\lambda, b}$  描出一个圆. 它总是和  $\lambda$  在同一个半平面 (上或下半平面) 内. 当  $b$  增加时,  $K_{\lambda, b}$  缩小, 即对  $b < b'$ , 圆盘  $K_{\lambda, b'}$  全在  $K_{\lambda, b}$  内. 当  $b \rightarrow \infty$  时, 存在一个极限圆盘或极限点  $K_{\lambda, \infty}$ ; 若

$$\int_0^\infty |\varphi(x, \lambda)|^2 dx < \infty, \quad (6)$$

$K_{\lambda, \infty}$  是一圆盘, 否则是一个点 (见 [10]). 若条件 (6) 对某个非实的  $\lambda$  值成立, 则它对一切  $\lambda$  均成立. 在极限圆盘情况下, 对  $\lambda$  的任意值, (2) 的所有解都属于  $L_2(0, \infty)$ , 而在极限点情况, 对  $\lambda$  的任一非实值, 此方程有一解  $\theta(x, \lambda) + m(\lambda)\varphi(x, \lambda)$  属于  $L_2(0, \infty)$ , 这里  $m(\lambda)$  就是极限点 ( $m(\lambda) = K_{\lambda, \infty}$ ).

若  $q(x) \geq -cx^2$ ,  $c$  是一个正常数, 则极限点情况成立 (见 [19]); 更一般的结果可见 [20], [21].

3. 现在在整个直线  $-\infty < x < \infty$  上考虑方程 (2), 而假设  $q(x)$  在  $(-\infty, \infty)$  的每一个有限子区间上均为实的可和函数. 令  $\varphi_1(x, \lambda)$ ,  $\varphi_2(x, \lambda)$  为 (2) 的满足条件  $\varphi_1(0, \lambda) = \varphi_2'(0, \lambda) = 1$ ,  $\varphi_1'(0, \lambda) = \varphi_2(0, \lambda) = 0$  的解.

至少存在一个实对称非减矩阵函数

$$\rho(\lambda) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(\lambda) & \rho_{12}(\lambda) \\ \rho_{21}(\lambda) & \rho_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

具有以下性质:

a) 对任意函数  $f \in L_2(-\infty, \infty)$ , 存在函数  $\Phi_{j, f}(\lambda)$  ( $j=1, 2$ ), 其定义如下:

$$\Phi_{j, f}(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \int_{-b}^b f(x) \varphi_j(x, \lambda) dx, \quad j=1, 2,$$

这里的极限是在  $L_{2, \rho}(-\infty, \infty)$  的度量下取的;

b) Parseval 等式成立:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{j, k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{j, f}(\lambda) \overline{\Phi_{k, f}(\lambda)} d\rho_{jk}(\lambda).$$

## 参考文献

- [1] Левитан, Б. М., Саргсян, И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970 (英译本: Levitan, B. M. and Sargsyan, I. S., An introduction to spectral theory, Amer. Math. Soc., 1975).
- [2] Левитан, Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, М.-Л., 1950.
- [3] Левитан, Б. М., Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973 (英译本: Levitan, B. M., Generalized translation operators and some of their applications, Israel Progr. Sci. Transl., 1964).
- [4] Марченко, В. А., Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, К., 1977 (英译本: Marchenko, V. A., Sturm-Liouville operators and applications, Birkhäuser, 1986).
- [5] Titchmarsh, E., Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Clarendon Press, 1962 (中译本: E. 梯其马希, 与二阶微分方程相联系的本征函数展开, I, 上海科学技术出版社, 1964).
- [6] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.
- [7] Наймарк, М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969.
- [8] Костюченко, А. Г., Саргсян, И. С., Распределение собственных значений, М., 1979.
- [9] Weyl, H., Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, Gött. Nachr., (1909), 37-64.
- [10] Weyl, H., Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit Singularitäten und die Zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, Math. Ann., 68 (1910), 220-269.
- [11] Weyl, H., Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen (2), Gött. Nachr., (1910), 442-467.
- [12] Крейн, М. Г., «Изв. АН СССР, Сер. матем.», 16 (1952), 4, 293-324.
- [13] Гельфанд, И. М., Левитан, Б. М., «Докл. АН СССР», 88 (1953), 4, 593-596.
- [14] Стеклов, В. А., «Сообщ. Харьк. Матем. об-ва», 5 (1896).
- [15] Левитан, Б. М., Саргсян, И. С., «Успехи матем. наук», 15 (1960), 1, 3-98.
- [16] Марченко, В. А., «Докл. АН СССР», 72 (1950), 3, 457-460.
- [17] Левитан, Б. М., «Изв. АН СССР, Сер. матем.», 17 (1953), 4, 331-364; 19 (1955), 1, 33-58.
- [18] Wet, J. S. de and Mandi, F., On the asymptotic distribution of eigenvalues, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 200 (1950), 572-580.
- [19] Titchmarsh, E., On the uniqueness of the Green's function associated with a second-order differential

equation, *Canad. J. Math.*, 1 (1949), 191 - 198.

[20] Levinson, N., Criteria for the limit-point case for second order linear differential operators, *Časopis Pěst Mat. Fys.*, 74 (1949), 17 - 20.

[21] Sears, D. and Titchmarsh, E., Some eigenfunction formulae, *Quart. J. Math. (Oxford Ser.)*, 1 (1950), 165 - 175.

Г. Ш. Гусейнов, Б. М. Левитан 撰

【补注】(2)型的本征值问题和相应的反问题(见 Sturm-Liouville 反问题 (Sturm-Liouville problem, inverse))在用所谓“反散射法”(见 Korteweg-de Vries 方程 (Korteweg-de Vries equation))求解孤子 (soliton) 方程上起了主要作用. 关于这个方法的叙述, 例如见 [A1] - [A5]. 在西方通常考虑  $K_{\lambda, b}$  的边界说的是极限点与极限圆情况.

#### 参考文献

[A1] Lax P. D., Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.*, 21 (1968), 467 - 490.

[A2] Zakharov, V. E. and Shabat, A. B., Soviet Phys. JETP, (1972), 62 - 69.

[A3] Miura, R. M., The Korteweg-de Vries equation: a survey of results, *SIAM Review*, 18 (1976), 412 - 459.

[A4] Eckhaus, W. and Harten, A. van, The inverse scattering transformation and the theory of solitons, North-Holland, 1983.

[A5] Schuur, P. C., Asymptotic analysis of soliton problems, Springer, 1986.

[A6] Березанский, Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965 (英译本: Berezanskiĭ, Yu. M., Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1968).

[A7] Reid, W. T., Sturmian theory for ordinary differential equations, Springer, 1980. 齐民友 译

#### Sturm-Liouville 反问题 [Sturm-Liouville problem, inverse; Штурма-Лиувилля обратная задача]

这样一个问题, 其中要求由算子  $A$  的某些谱特征重新作出一个函数 (即位势)  $q$ , 使得  $A$  是由 Hilbert 空间  $L_2(a, b)$  中的微分式  $l[y] = -y'' + q(x)y$  以及某些边值条件生成的,  $x$  在有限或无限区间  $(a, b)$  中变化. 此外, 也要重新作出相应于算子  $A$  的边值条件.

在研究反问题时, 下面的问题自然会产生: 1) 找出是哪些谱特征唯一地决定算子  $A$ ; 2) 给出由这些谱特征重新作出算子  $A$  的方法; 3) 找出所考虑的谱特征的特殊性质. 由于选取不同的谱特征, 反问题可以有不同的提法 (在应用中时常出现).

关于反问题的第一个结果 (见 [10]), 亦即整个

理论的起点, 是: 令  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  为以下问题的本征值:

$$\left. \begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ y'(0) &= y'(\pi) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

而  $q$  是区间  $[0, \pi]$  上的实值连续函数. 若  $\lambda_n = n^2$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), 则  $q(x) \equiv 0$ .

反问题的深刻的研究起于 40 年代 (见 [11], [12]). 令  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  是方程 (1) 在边值条件

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \quad (2)$$

下的本征值 ( $h, H$  是实数), 而  $\mu_0, \mu_1, \dots$  是方程 (1) 在另一边值条件

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad h_1 \neq h$$

下的本征值. 这时序列  $\{\lambda_n\}, \{\mu_n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) 唯一地决定函数  $q$  以及数  $h, h_1$  与  $H$ . 进一步, 如果这些问题中只要有 (至少) 一个本征值没有决定, 则其余全体本征值仍不能唯一决定方程 (1). 特别要注意, 一般说来, 仅是谱是不能唯一决定方程的 (上述结果只是一般规则的例外).

若在半直线  $(0, \infty)$  上研究方程 (1), 且位势函数  $q$  满足以下要求:

$$\int_0^\infty x |q(x)| dx < \infty,$$

则问题  $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, y(0) = 0$  的解  $\varphi(x, \lambda)$  当  $x \rightarrow \infty$  时有以下的渐近表示:

$$\varphi(x, \lambda) = M(\lambda) \sin[\lambda x + \delta(\lambda)] + o(1),$$

函数  $\delta(\lambda)$  称为散射相位 (scattering phase). 主要结果是: 若在空间  $L_2(0, \infty)$  中考虑的一问题没有离散的本征值, 则散射相位唯一决定位势函数  $q$ .

反问题理论进一步发展的一个决定性的步骤是应用了所谓算子变换技术 (见 Sturm-Liouville 方程 (Sturm-Liouville equation)), 它是在广义平移算子理论的框架下自然地发展起来的 (见 [4]).

应用算子变换于反问题就可以推广上述定理 (见 [13]). 具体说来, 可以看到, 最一般的反问题就是由谱函数重新构造方程 (1) (见 Sturm-Liouville 问题 (Sturm-Liouville problem)). 证明了谱函数可以唯一决定这个方程. 此外, 所考虑的区间是有限或无限并不重要.

原则上说, 所有反问题都可以化为由谱函数重建算子这个反问题. 然而这并不总是最简单的途径; 此外, 按这一思路考虑, 时常需要去求用以重构算子的谱特征的必要和充分条件, 而这往往是困难的.



在发现了有可能应用反问题来解决某些数学物理中的非线性发展方程 (non-linear evolution equation of mathematical physics) 以后, 它的意义就更大. 特别是找到了某些谱中含有有限多个空隙的 Sturm-Liouville 算子的反问题与 Abel 积分的 Jacobi 反演问题 (Jacobi inversion problem) 的关系 (见 [25]). 这个思想最近的发展使得可以找到一些显式的公式, 来用 Riemann  $\theta$  函数表出有限空隙位势 (见 [1], [5]).

下面要考虑反问题的两种陈述与解法的.

1. 已知谱函数  $\rho(\lambda)$ , 求一下列形状的微分方程

$$l[y] = -y'' + q(x)y,$$

其中  $q(x)$  ( $0 \leq x < \infty$ ) 是实值局部可和位势, 再求一个出现在边值条件

$$y'(0) - hy(0) = 0 \quad (3)$$

中的数  $h$ , 使  $\rho(\lambda)$  是这个 Sturm-Liouville 问题的谱函数. 为解决这个问题, 令

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} x}{\lambda} d\rho(\lambda), \quad 0 < x < \infty, \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \{ \Phi''(x+y) + \Phi''(|x-y|) \}.$$

可证积分方程

$$f(x, y) + K(x, y) + \int_0^x K(x, t)f(t, y)dt = 0, \quad 0 \leq y \leq x \quad (5)$$

对每个固定的  $x$  有唯一解  $K(x, y)$ . 位势  $q$  由公式

$$q(x) = 2 \frac{dK(x, x)}{dx}$$

给出, 而 (3) 中的数  $h$  则由公式  $h = K(0, 0)$  给出 (见 [14]). 方程  $l[y] = \lambda y$  的满足边界条件  $\varphi(0, \lambda) = 1$ ,  $\varphi'(0, \lambda) = h$  的解  $\varphi(x, \lambda)$  可以用以下公式给出

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt.$$

此外, 一个非减函数  $\rho(\lambda)$  ( $-\infty < \lambda < \infty$ ) 是问题  $-y'' + q(x)y = \lambda y$  ( $0 \leq x < \infty$ ),  $y'(0) - hy(0) = 0$  的谱函数 (这里  $q(x)$  是一个实值函数而且有  $m$  阶局部可和的导数,  $h$  则为一实数) 的必要充分条件是, 由  $\rho(\lambda)$  用公式 (4) 作出的  $\Phi(x)$  具有  $m+3$  阶局部可和导数, 而且  $\Phi''(+0) = -h$  (见 [14], [17], [9]). 在许多特殊情况下, 可以由函数  $\rho(\lambda)$  有效地求出  $q$  和  $h$ . 例如, 令

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} + \alpha \chi(\lambda - \lambda_0), & \lambda > 0, \\ \alpha \chi(\lambda - \lambda_0), & \lambda < 0. \end{cases}$$

这里  $\chi(\lambda) = 0$  于  $\lambda < 0$  时而  $\chi(\lambda) = 1$  于  $\lambda > 0$  时,  $\alpha$  则为一正数. 这时, 积分方程 (5) 具有退化核  $f(x, y) = \alpha \cos \sqrt{\lambda_0} x \cos \sqrt{\lambda_0} y$ , 而其解则为

$$K(x, y) = - \frac{\alpha \cos \sqrt{\lambda_0} x \cos \sqrt{\lambda_0} y}{1 + \alpha \int_0^x \cos^2 \sqrt{\lambda_0} t dt}.$$

这时  $q$  和  $h$  由以下公式给出:

$$q(x) = 2 \frac{dK(x, x)}{dx} = -2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{\alpha \cos^2 \sqrt{\lambda_0} x}{1 + \alpha \int_0^x \cos^2 \sqrt{\lambda_0} t dt} \right],$$

$$h = K(0, 0) = -\alpha.$$

2. 设实值函数  $q$  满足不等式

$$\int_0^\infty x |q(x)| dx < \infty. \quad (6)$$

于是边值问题

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < \infty, \quad (7)$$

$$y(0) = 0, \quad (7')$$

当  $\lambda^2 > 0$  和  $\lambda = i\lambda_k$  ( $\lambda_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ ) 时有有界解. 此外, 这些解当  $x \rightarrow \infty$  时满足渐近公式

$$y(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} - S(\lambda)e^{i\lambda x} + o(1), \quad 0 < \lambda^2 < \infty,$$

$$y(x, i\lambda_k) = m_k e^{-\lambda_k x} [1 + o(1)], \quad m_k > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

$m_k$  是一个规范化因子, 即保证  $\int_0^\infty |y(x, i\lambda_k)|^2 dx = 1$ . 值的集合  $\{S(\lambda): -\infty < \lambda < \infty; \lambda_k, m_k: k = 1, \dots, n\}$  称为边值问题 (7), (7') 的散射数据 (scattering data). 要求从散射数据中作出位势  $q$  来.

为解决这个问题, 按下式构造函数  $F$ :

$$F(x) = \sum_{k=1}^n m_k^2 e^{-\lambda_k x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - S(\lambda)] e^{i\lambda x} d\lambda,$$

然后考虑以下方程

$$F(x+y) + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, t)F(t+y)dt = 0. \quad (8)$$

它对任意  $x \geq 0$  有唯一解  $K(x, y)$ . 解出这个方程后, 位势  $q$  即可由下式决定:

$$q(x) = -2 \frac{dK(x, x)}{dx}.$$

为使集合  $\{S(\lambda): -\infty < \lambda < \infty; \lambda_k, m_k: \lambda_k > 0, m_k > 0, k = 1, \dots, n\}$  成为某个形如 (7), (7') 的边值问题 (其中实的位势  $q$  满足条件 (6)) 的散射数

据, 其必要充分条件是以下条件得以满足 (见 [1]):

a) 函数  $S(\lambda)$  在整个实数直线上连续,  $\overline{S(\lambda)} = S(-\lambda) = [S(\lambda)]^{-1}$ ,  $1 - S(\lambda)$  当  $|\lambda| \rightarrow \infty$  时趋于 0. 而且是函数

$$F_S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - S(\lambda)] e^{i\lambda x} d\lambda$$

的 Fourier 变换,  $F_S(x)$  可以写为两个函数之和, 其一属于  $L_1(-\infty, \infty)$ , 其二为有界且属于  $L_2(-\infty, \infty)$ .  $F_S(x)$  在半直线  $0 < x < \infty$  上有导数  $F'_S(x)$ , 满足条件  $\int_0^\infty x |F'_S(x)| dx < \infty$ ;

b) 函数  $S(\lambda)$  幅角的增量与边值问题 (7), (7') 的负本征值 (即  $-\lambda_1^2, \dots, -\lambda_n^2$ ) 的个数  $n$  有关, 可用下式来表示:

$$n = \frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} - \frac{1 - S(0)}{4}.$$

若  $S(\lambda)$  是一个有理函数, 则  $K(x, y)$  的积分方程 (8) 有显式解. 这时, 方程 (7) 之解和位势  $q$  可以表为三角函数和双曲函数的有理函数. 例如, 若

$$S(\lambda) = \frac{(\lambda + i)(\lambda + 2i)}{(\lambda - i)(\lambda - 2i)}, \lambda_1 = 1, m_1 = \sqrt{6},$$

则相应的位势是

$$q(x) = -\frac{24}{(2 \cosh 2x - \sinh 2x)^2}.$$

#### 参考文献

- [1] Марченко, В. А., Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, К., 1977 (英译本: Marchenko, V. A., Sturm-Liouville operators and applications, Birkhäuser, 1986).
- [2] Агранович, З. С., Марченко, В. А., Обратная задача теории рассеяния, Харьков, 1960.
- [3] Shadan, C. and Sabatier, P., Inverse problems in quantum scattering theory, Springer, 1989.
- [4] Левитан, Б. М., Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973 (英译本: Levitan, B. M., Generalized translation operators and some of their applications, Israel Progr. Sci. Transl., 1964).
- [5] Теория солитонов: метод обратной задачи, М., 1980.
- [6] Березанский, Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965 (英译本: Berezanskii, Yu. M., Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1968).
- [7] Фаддеев, Л. Д., «Успехи матем. наук», 14 (1959), 4, 57 - 119.
- [8] Фаддеев, Л. Д., в кн., Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики, М., 3 (1974), 93 - 180.
- [9] Левитан, Б. М., Гасымов, М. Г., «Успехи матем. наук», 19 (1964), 2, 3 - 63.

- [10] Ambarzumian, V., Z. Phys., 53 (1929), 690 - 695.
- [11] Borg, G., Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Bestimmung der Differentialgleichungen durch die Eigenwerte, Acta Math., 78 (1946), 1 - 96.
- [12] Levinson, N., On the uniqueness of the potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase, Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd., 25 (1949), 9, 1 - 29.
- [13] Марченко, В. А., «Докл. АН СССР», 72 (1950), 3, 457 - 460.
- [14] Гельфанд, И. М., Левитан, Б. М., «Изв. АН СССР, сер. матем.», 15 (1951), 4, 309 - 360.
- [15] Крейн, М. Г., «Докл. АН СССР», 76 (1951), 1, 21 - 24; 82 (1952), 5, 669 - 672; 88 (1953), 3, 405 - 408.
- [16] Марченко, В. А., «Докл. АН СССР», 104 (1955), 5, 695 - 698.
- [17] Левин, Б. Я., «Докл. АН СССР», 106 (1956), 2, 187 - 190.
- [18] Newton, R. and Jost, R., The construction of potentials from the S-matrix for systems of differential equations, Nuovo Cimento, 1 (1955), 4, 590 - 622.
- [19] Гасымов, М. Г., Левитан, Б. М., «Докл. АН СССР», 167 (1966), 6, 1219 - 1222.
- [20] Гасымов, М. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 19 (1968), 41 - 112.
- [21] Рофе-Бекетов, Ф. С., «Теория Функций, Функци. Анализ и их Прилож.», Харьков, 1967, 4, 189 - 197.
- [22] Левитан, Б. М., в кн.: Задачи механики и математической физики (Посвящ. памяти И. Г. Петровского), М., 1976, 166 - 207.
- [23] Ахиезер, Н. И., «Докл. АН СССР», 141 (1961), 2, 263 - 266.
- [24] Гусейнов Г. Ш., «Докл. АН СССР», 231 (1976), 5, 1045 - 1048.
- [25] Levitan, B. M., Inverse Sturm-Liouville problems, VNU, 1987 (译自俄文).

Г. Ш. Гусейнов, Б. М. Левитан 撰

【补注】 Schrödinger 算子  $-(d^2/dx^2) + q(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 的反问题在 [A1] 中研究过 (亦见 Schrödinger 方程 (Schrödinger equation)). 为了得出散射数据对应于方程  $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$  ( $-\infty < x < \infty$ ) 的必要充分条件, 在 [A1] 中假设了  $q$  满足  $\int_{-\infty}^{\infty} |q(x)|(1+x^2) dx < \infty$  (见 [6]). 对于 Fourier 变换  $F$  所加的条件, 类似于上面定义的  $F_S$ , 但也有改变:  $\int_a^\infty |F'_1(x)| dx, \int_{-\infty}^a |F'_2(x)|(1+x^2) dx < \infty$  对一切  $-\infty < a < +\infty$  成立.

#### 参考文献

- [A1] Deift, P. and Trubowitz, E., Inverse scattering on the line, Comm. Pure Appl. Math., 32 (1979),



121 - 251.

- [A2] Pöschel, J. and Trubowitz, E., Inverse spectral theory, Acad. Press, 1987.
- [A3] Ramm, A. G., Inverse scattering on half-line, *J. Math. Anal. Appl.*, 133 (1988), 543 - 572.
- [A4] Ramm, A. G. and Taylor, B. A., Example of a potential in one-dimensional scattering problem for which there are infinitely many purely imaginary resonances, *Phys. Lett.*, 124 A (1987), 313 - 319.
- [A5] Andersson, L. E., Inverse eigenvalue problems with discontinuous coefficients, *Inverse Probl.*, 4 (1988), 353 - 397.
- [A6] Ramm, A. G., Recovery of the potential from 1-function, *Math. Reports Canad. Acad. Sci.*, 9 (1987), 177 - 182.
- [A7A] Ramm, A. G., Necessary and sufficient conditions on the scattering data for the potential to be in  $L^2$  for the Schrödinger operator on the half-line, *Inverse Probl.*, 3 (1987), L71 - 76.
- [A7B] Ramm, A. G., An inverse problem for the Helmholtz equation in a semi-infinite medium, *Inverse Probl.*, 3 (1987), L19 - 22.
- [A8] Isaacson, E. L. and Trubowitz, E., The inverse Sturm-Liouville problem I, *Comm. Pure Appl. Math.*, 36 (1983), 767 - 784.
- [A9] Isaacson, E. L., McKean, H. P. and Trubowitz, E., The inverse Sturm-Liouville problem II, *Comm. Pure Appl. Math.*, 37 (1984), 1 - 12.
- [A10] Dahlberg, B. E. J. and Trubowitz, E., The inverse Sturm-Liouville problem III, *Comm. Pure Appl. Math.*, 37 (1984), 255 - 267. 齐民友 译

**Sturm 定理 [Sturm theorem; Штурма теорема]**

如果

$$f_0(x), \dots, f_s(x) \quad (*)$$

是区间  $[a, b]$  ( $a < b$ ) 上的一个 Sturm 级数,  $w(x)$  是在一个点  $x \in [a, b]$  上级数 (\*) 中改变符号的数目 (变成零的项不考虑), 则函数  $f_0$  在区间  $[a, b]$  上不等根的数目等于差  $w(a) - w(b)$ .

Sturm 级数 (Sturm series) (或者 Sturm 序列 (Sturm sequence)) 是  $[a, b]$  上的一个实值连续函数序列 (\*), 这些函数在这个区间上有有限个根, 而且使得

- 1)  $f_0(a)f_0(b) \neq 0$ ;
- 2) 在  $[a, b]$  上  $f_s(x) \neq 0$ ;
- 3) 若对某个  $k$  ( $0 < k < s$ ) 和在  $[a, b]$  中给定的  $c$ , 函数  $f_k(c) = 0$ , 则可得  $f_{k-1}(c)f_{k+1}(c) < 0$ ;
- 4) 若对某个给定的  $c$  ( $a < c < b$ ), 函数  $f_0(c) = 0$ , 则对充分小的  $\varepsilon > 0$  有

$$\begin{aligned} f_0(x)f_1(c) &< 0 \quad (c - \varepsilon < x < c); \\ f_0(x)f_1(c) &> 0 \quad (c < x < c + \varepsilon). \end{aligned}$$

J. Ch. Sturm ([1]) 证明了这个定理, 对具有实系数和没有重根的多项式  $f(x)$ , 他也提出了下列构造 Sturm 级数的方法:  $f_0(x) = f(x)$ ,  $f_1(x) = f'(x)$ , 而且如果已经构造了多项式  $f_0(x), \dots, f_k(x)$ , 则对  $f_{k+1}^{(x)}$ , 应取用  $f_k(x)$  除  $f_{k-1}(x)$  所得余项的负值, 其中  $f_s(x)$  应该是一个非零常数.

**参考文献**

- [1] Sturm, J. Ch., *Bull. de Férussac*, 11 (1829).
- [2] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975 (中译本: А. Г. 库洛什, 高等代数教程, 高等教育出版社, 1953).

И. В. Проскуряков 撰

【补注】 Sturm 级数中多项式的系数必须属于一个实闭域. 确定一个多项式  $f_0(x)$  的 Sturm 级数的算法可以叙述如下:

$$f_0(x) = f(x), f_1(x) = f'(x),$$

$$f_0(x) = q_1(x)f_1(x) - f_2(x), \deg f_2(x) < \deg f_1(x),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_{k-1}(x) = q_k(x)f_k(x) - f_{k+1}(x),$$

$$\deg f_{k+1}(x) < \deg f_k(x),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_{s-1}(x) = q_s(x)f_s(x).$$

因此  $f_s(x)$  是一个非零常数.

**参考文献**

- [A1] Jacobson, N., Basic algebra, 1, Freeman, 1974 (中译本: N. 雅各布森, 基础代数, 高等教育出版社, 1987, 1988).
- [A2] Dickson, L. E. J., New first course in the theory of equations, Wiley, 1939. 袁国兴 张宝琳 译

**子代数格 [subalgebra lattice; решетка подалгебр]**, 泛代数  $A$  的

$A$  的一切子代数所成的 (关于包含的) 偏序集  $\text{Sub } A$ . 对于任意  $X, Y \in \text{Sub } A$ , 它们的上确界是  $X$  与  $Y$  所生成的子代数, 它们的下确界就是交  $X \cap Y$ . 子代数的交可能是空集, 所以对于某些类型的代数来说 (例如半群和格), 在子代数中包括空集. 对于任意代数  $A$  来说, 子代数格  $\text{Sub } A$  是代数的, 反过来, 对于任意代数格 (algebraic lattice)  $L$ , 存在一个代数  $A$  使得  $L \cong \text{Sub } A$  (Birkhoff-Frink 定理 (Birkhoff-Frink theorem)). 任意格都可以嵌入关于某个群  $A$  的格  $\text{Sub } A$  内.

子代数格  $\text{Sub } A$  是关于一个代数  $A$  的基本导出结构之一 (连同这样的结构一起, 如自同构群, 自同态半群, 合同格等等). 研究代数与它们的子代数格

之间的联系所包含的问题分为以下几个方面: 格同构, 各种代数类的格特征, 以及研究在子代数格上带有不同限制的代数. 两个代数  $A$  与  $B$  称为格同构的 (lattice isomorphic), 如果  $\text{Sub } A \cong \text{Sub } B$ ;  $\text{Sub } A$  与  $\text{Sub } B$  之间的一个同构称为  $A$  到  $B$  上的格同构 (lattice isomorphism) (或射影 (projectivity)). 同构的代数是格同构的, 然而反之远非如此. 一个代数  $A$  称为格可定义的 (lattice definable) (在一个给定的类  $\mathcal{K}$  内), 如果对于任意 ( $\mathcal{K}$  内的) 具有同型的代数  $B$  来说,  $\text{Sub } B \cong \text{Sub } A$  蕴含  $B \cong A$ . 在某些情形 (例如半群的情形) 下, 格可定义的概念被推广为在蕴含的结论中再加上“或  $B$  反同构于  $A$ ”, 因为反同构的半群也是格同构的. 格可定义性的典型例子是由射影几何的第一基本定理给出的 (见 [1]), 在这里, 体上的向量空间被看作  $A$ . 下列也是格可定义的: 每个含有两个独立的无限阶元素的 Abel 群, 每个自由群 (自由半群), 每个非平凡地分解成自由积的群 (半群), 每个无挠幂零群, 每个满足消去律且没有幂等元素的交换半群, 每个幂等元素的自由半群, 以及有多于两个自由生成元的自由半格. 在这种情形下, 常常是一个代数的每个射影都是由它的一个同构 (或反同构) 所诱导的. 一个具有同一型的代数类  $\mathcal{K}$  可以含有一些不是格可定义的代数, 但是仍具有如下的性质:  $A \in \mathcal{K}$  且  $\text{Sub } B \cong \text{Sub } A$  蕴含  $B \in \mathcal{K}$ ; 在这一情形下  $\mathcal{K}$  称为格可定义的 (lattice definable) (或格闭的 (lattice closed)); 如果这里的代数  $B$  只是从一个类  $\mathcal{K}$  中取的, 则要求在相应的术语中加上“在类  $\mathcal{K}$  内”. 格闭类包括一切可解群的类.

很多附加在代数上的限制是用子代数格的语言陈述的. 典型的例子就是关于子代数的极小和极大条件.  $\text{Sub } A$  满足极大条件, 当且仅当  $A$  中所有子代数都是有限生成的 (亦见具有有限性条件的群 (group with a finiteness condition; 具有有限性条件的半群 (semi-group with a finiteness condition))). 附加在子代数格上其他的限制包括像分配性, 模性, 各种形式的半模性, Jordan-Dedekind 条件, 有补性, 相对有补性等等这样的格论性质. 例如, 对于一个群  $A$  来说, 子代数格是分配的, 当且仅当  $A$  是局部循环的 (Ore 定理 (Ore theorem)); 分配性条件也在半群, 结合环, 模, Lie 代数等等中被研究.

除了子代数格的同构外, 对偶性 (duality) (即反同构) 和同态也被研究. 当  $A$  是一个拓扑代数时, 更自然的是考虑  $A$  的一切闭子代数格; 相应问题的研究很活跃.

#### 参考文献

- [1] Baer, R., Linear algebra and projective geometry, Acad. Press, 1952.

- [2] Suzuki, M., Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups, Springer, 1967.  
 [3] Скорняков, Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961 (英译本: Skornyakov, L. A., Complemented modular lattices and regular rings, Olives & Boyd, 1964).  
 [4] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.  
 [5] Садовский, Л. Е., «Успехи матем. наук», 23 (1968), 3, 123 – 157.  
 [6] Аршинов, М. Н., Садовский, Л. Е., «Успехи матем. наук», 27 (1972), 6, 139 – 180.  
 [7] Шеврин, Л. Н., «Сибирск. матем. ж.», 3 (1962), 3, 446 – 470.  
 [8] Итоги науки. Алгебра, 1964, М., 1966, 237 – 274.  
 [9] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1968, М., 1970, 101 – 154.  
 [10] Упорядоченные множества и решетки, 3, Саратов, 1975, 50 – 74. Л. Н. Шеврин 撰

【补注】 对于一个给定的子代数代数格  $S$ , 一个给定的合同关系的代数格  $C$  和一个给定的自同构群  $G$  的同时表示, 在 [A1] 中被讨论.

#### 参考文献

- [A1] Lampe, W. A., The independence of certain related structures of universal algebra I – IV, Algebra Univ., 2 (1972), 99 – 112; 270 – 283; 286 – 295; 296 – 302. 郝钢新 译

#### 子范畴 [subcategory; подкатегория]

数学结构的子结构概念的一种特殊情况. 范畴 (category)  $\mathcal{Q}$  叫作范畴  $\mathcal{R}$  的子范畴 (subcategory), 是指  $\text{Ob } \mathcal{Q} \subseteq \text{Ob } \mathcal{R}$ , 任取  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{Q}$ ,

$$H_{\mathcal{Q}}(A, B) = H_{\mathcal{R}}(A, B) \cap \text{Mor } \mathcal{Q},$$

且两个态射在  $\mathcal{Q}$  中的合成与它们在  $\mathcal{R}$  中的合成一致.

若  $\mathcal{Q}'$  是  $\text{Ob } \mathcal{R}$  的任意子类, 则  $\mathcal{R}$  有一个最小子范畴  $\mathcal{Q}_1$  和一个最大子范畴  $\mathcal{Q}_2$ , 其对象与  $\mathcal{Q}'$  的对象一致; 子范畴  $\mathcal{Q}_1$  仅含  $\mathcal{Q}'$  中的对象的恒等态射, 叫作由  $\mathcal{Q}'$  生成的离散子范畴 (discrete subcategory); 子范畴  $\mathcal{Q}_2$  包含定义域和值域都在  $\mathcal{Q}'$  中的  $\mathcal{R}$  的全体态射, 叫作由  $\mathcal{Q}'$  生成的满子范畴 (full subcategory).  $\mathcal{R}$  的任意子范畴  $\mathcal{Q}$ , 若对任意  $A, B \in \text{Ob } \mathcal{Q}$ ,  $H_{\mathcal{Q}}(A, B) = H_{\mathcal{R}}(A, B)$ , 则叫作  $\mathcal{R}$  的满子范畴. 下述均为满子范畴: 集范畴中的非空集子范畴, 群范畴中的 Abel 群子范畴, 等等. 对于一个小范畴 (small category)  $\mathcal{D}$ , 从  $\mathcal{D}$  到集范畴的反变函子范畴的由 hom 函子 (态射函子,  $A \mapsto H_{\mathcal{D}}(A, B)$ ) 生成的满子范畴同构于  $\mathcal{D}$  (亦见函子 (functor)). 这一结果使得可以构造任意小范畴关于极限或上极限的完全



化.

范畴  $\mathcal{R}$  的任意子范畴不一定继承该范畴的任意性质. 但存在重要的子范畴类, 继承了原范畴的许多性质, 例如自反子范畴 (reflective subcategory) 和余自反子范畴. 参考文献见范畴 (category); 函子 (functor).

М. Ш. Цаленко 撰 张英伯 译

### 次微分 [subdifferential; субдифференциал]

定义在与空间  $Y$  对偶的空间  $X$  上的凸函数  $f: X \rightarrow \mathbf{R}$  在点  $x_0$  的次微分是  $Y$  中由下式定义的点集:

$$\partial f(x_0) = \{y \in Y: f(x) - f(x_0) \geq \langle y, x - x_0 \rangle, \text{ 对一切 } x \in X\}.$$

例如, 在对偶空间为  $X^*$  的赋范空间  $X$  中, 范数  $f(x) = \|x\|$  的次微分取如下形式:

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{x^* \in X^*: \langle x^*, x \rangle = \|x\|, \|x^*\| = 1\}, & \text{若 } x \neq 0, \\ \{x^*: \|x^*\| = 1\}, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

凸函数  $f$  在点  $x_0$  的次微分是一个凸集. 若  $f$  在该点连续, 则次微分非空且依拓扑  $\sigma(Y, X)$  为紧的.

凸函数的次微分的作用类似于经典分析中导数的作用. 与导数的一些定理类似, 相应的次微分定理也成立. 例如, 若  $f_1$  与  $f_2$  均为凸函数, 且在点  $\bar{x} \in (\text{Dom } f_1) \cap (\text{Dom } f_2)$  至少有一个函数是连续的, 那么对一切  $x$ ,

$$\partial f_1(x) + \partial f_2(x) = \partial(f_1 + f_2)(x)$$

(Moreau-Rockafellar 定理 (Moreau-Rockafellar theorem)).

若  $X$  中的凸集  $A$  依拓扑  $\sigma(Y, X)$  是紧的, 则  $A$  的支撑函数的次微分与  $A$  相重合. 这表示凸紧集与凸闭齐次函数之间的对偶性 (亦见支撑函数 (support function); 超图 (supergraph); 凸分析 (convex analysis)).

### 参考文献

- [1] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

В. М. Тихомиров 撰

【补注】 $\sigma(X, Y)$  拓扑是  $X$  上的弱拓扑 (weak topology), 它由半范数族  $p_y(x) = |\langle x, y \rangle|$  ( $y \in Y$ ) 定义; 这是使所有的泛函  $x \rightarrow \langle x, y \rangle$  为连续的最弱拓扑.

元素  $x^* \in \partial f(x)$  称为  $f$  在  $x$  的次梯度 (subgradient).

### 参考文献

- [A1] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in J. Tölke and J. M. Wills (eds):

Contributions to Geometry, Birkhäuser, 1979, 13 – 59.

- [A2] Barbu, V. and Precupanu, Th., Convexity and optimization in Banach spaces, Reidel, 1986, p. 101 ff.

王斯雷 译

### 次直积 [subdirect product; подпрямое произведение], 代数系统的

系统的直积 (Descartes 积) 中子系统的一个特殊类型 (见直积 (direct product)). 令  $A_i (i \in I)$  是一族同一类型的代数系统, 又令  $A = \prod_{i \in I} A_i$  是这些系统的直积, 带有射影  $\rho_i: A \rightarrow A_i (i \in I)$ . 具有同一类型的一个代数系统  $B$  称为系统  $A_i$  的一个次直积 (subdirect product), 如果存在一个嵌入  $m: B \rightarrow A$ , 使得同态  $\rho_i m (i \in I)$  是满射. 有时次直积指的是任意一个与这个直积的子系统同构的系统; 于是满足上述条件的系统称为特殊次直积 (special subdirect product). 在环论和模论中, 次直积也称为次直和 (subdirect sum). 次直积 (次直和) 记作  $\prod_{i \in I}^s A_i$  (相应地记作  $\sum_{i \in I}^s A_i$ ).

下列条件是等价的: a) 系统  $B$  是系统  $A_i (i \in I)$  的一个次直积; b) 存在满同态的一个分离族  $f_i: B \rightarrow A_i (i \in I)$ ; c) 存在系统  $B$  的一族合同  $\rho_i (i \in I)$ , 使得这些合同的交是恒等合同, 并且对每个  $i \in I$ ,  $B/\rho_i \cong A_i$ . 任意泛代数 (universal algebra) 是次直不可约代数的一个次直积.

依范畴论的观点, 次直积的概念是包含零 (一个元素) 子系统的代数系统正则积概念的对偶概念.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】一个代数  $B$  称为次直不可约的 (subdirectly irreducible), 如果在  $B$  被表示成次直积  $\prod_{i \in I}^s A_i$  的表示内, 同态  $B \rightarrow A_i$  中有一个是同构 (等价的说法是, 如果  $B$  上恒等同余不能表成严格大的同余的交). 关于每一个代数都可以表成次直不可约代数的一个次直积的定理属于 G. Birkhoff ([A1]); 它的用处在于这样的事实, 在许多熟悉的簇中, 次直不可约代数的数量很少, 而且可以很容易被明显地描述出来. 例如, 唯一的次直不可约 Boole 代数 (Boolean algebra) 就是二元链.

### 参考文献

- [A1] Birkhoff, G., Subdirect unions in universal algebra, Bull. Amer. Math. Soc., 50 (1944), 764 – 768.  
[A2] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

郝钢新 译

### 细分 [subdivision; подразделение], 亦称重分, 几何单纯复形 $K$ 的

一个几何单纯复形 (simplicial complex)  $K$ , 它

的底空间  $|K_1|$  与底空间  $|K|$  一致, 又  $K_1$  的每个单形包含在  $K$  的某个单形内. 在实际操作时, 细分是通过将  $K$  的单形分解为更小的单形而得到的, 不过, 在分解每个单形时, 要使它和面的分解匹配. 特别,  $K$  的每个顶点是  $K_1$  的顶点. 通常, 启用细分是为了证明多面体的那些用组合方式定义的特征 (例如见抽象多面体 (polyhedron, abstract), Euler 特征 (Euler characteristic) 或同调群 (homology group)) 的不变性, 也用于得到具有某些必要性质 (如充分小) 的三角剖分 (triangulation). 复形  $K$  的中心在点  $a \in |K|$  的星形细分 (stellar subdivision) 是用下面的办法产生的.  $K$  的不包含  $a$  的闭单形保持不变. 包含  $a$  的每个闭单形  $\sigma$ , 分裂为一些顶点在  $a$ , 底为  $\sigma$  的、不包含  $a$  的那些面上的锥形. 对同一个多面体的任意两个三角剖分  $T_1$  和  $T_2$ , 存在  $P$  的一个三角剖分  $T_3$ , 它既可以从  $T_1$ , 也可以从  $T_2$  用一序列的星形细分得到. 星形细分概念也可用抽象单纯复形 (单纯概形) 的语言陈述. 闭子复形的任一星形细分, 均可扩充为整个复形的星形细分. 复形  $K$  的导出复形 (derived complex)  $K'$  是对  $K$  施行一串星形细分而得到的, 不过这些星形细分的顶点均为  $K$  的开单形的点, 而且按维数减少的顺序进行. 对复形  $L$  的任一闭子复形  $K$ , 子复形  $K' \subset L'$  在下述意义下完全: 由单形  $\sigma \in L'$  的所有顶点属于  $K'$  这一事实, 便可推出  $\sigma \in K'$ . 如果导出复形的中心均取为单形的重心, 得到的便是重心重分 (barycentric subdivision). 如果  $n$  维复形  $K$  的每个单形的直径均不超过  $d$ , 那么重心重分里的诸单形的直径不会超过  $nd/(n+1)$ . 在  $K$  的  $m$  重重心重分里, 诸单形的直径不会超过  $(n/n+1)^m d$ . 因此取  $m$  足够大, 这些直径就可任意小.

## 参考文献

- [1] Александров, П. С., Комбинаторная топология, М.-Л., 1947 (英译本: Aleksandrov, P. S., Combinatorial topology, Graylock, 1956).
- [2] Hilton, P. J. and Wylie, S., Homology theory. An introduction to algebraic topology, Cambridge Univ. Press, 1965 (中译本: P. J. 希尔顿, S. 瓦理, 同调论, 上海科学技术出版社, 1963).

С. В. Матвеев 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Maunier, C. R. F., Algebraic topology, Cambridge Univ. Press, 1980.
- [A2] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966 (中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).

沈信耀 译 潘建中 校

子表述性质 [subformulation property; подформульности

свойство], 子公式性质 (subformula property)

某些逻辑演算和逻辑数学演算的一个性质 (见逻辑演算 (Logical calculus); 逻辑数学演算 (Logico-mathematical calculus)), 在这些演算中每一个法则的前提中的公式是由出现在该法则的结论中的公式的子公式构成的. 子公式性质使得能够颠倒推演的搜寻 (见 Gentzen 形式系统 (Gentzen formal system)). 为了改进在推演搜寻中的能行性, 使用了各种子公式性质的特殊化和一般化.

С. Ю. Маслов 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Schwichtenberg, H., Some applications of cut-elimination in J. Barwise (ed.): Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, 1977, 867 - 896.
- [A2] Beth, E. W., Formal methods, Reidel, 1962, Sects., 27 - 28.
- [A3] Kleene, S. C.: Introduction to metamathematics, North-Holland, 1950 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).

卢景波 译 罗里波 校

子群 [subgroup; подгруппа]

群 (group)  $G$  的非空子集  $H$ , 对于定义于  $G$  的运算, 它自身成为群. 群  $G$  的子集  $H$  是  $G$  的子群, 当且仅当: 1)  $H$  包含它的任两个元素的积; 2) 如  $H$  包含任一元素  $h$ , 则同时含有它的逆  $h^{-1}$ . 在有限群及周期群的情形条件 2) 是多余的.

群  $G$  中仅由元素 1 作成的子集显然是子群: 称为  $G$  的单位子群 (unit subgroup), 通常用  $E$  表示. 又  $G$  本身是子群. 不同于  $G$  的子群称为  $G$  的真子群 (proper subgroup). 无限群的真子群可与  $G$  本身同构. 群  $G$  本身和子群  $E$  称为平凡子群 (trivial subgroup), 而所有其他子群是非平凡的 (non-trivial).

群  $G$  的任两个子群 (或任意子群的集合) 的集论交集是  $G$  的子群.  $G$  中包含某非空子集  $M$  的全部元素的所有子群的交称为由集合  $M$  生成的子群 (subgroup generated by the set), 由  $\{M\}$  表示. 若  $M$  由一个元素  $a$  组成, 则  $\{a\}$  称为元素  $a$  的循环子群 (cyclic subgroup). 同某个循环子群重合的群称为循环群 (cyclic group).

子群的集论并集一般地不是子群. 子群  $H_i (i \in I)$  的集合并生成的子群称为子群  $H_i (i \in I)$  的联合 (join of subgroups).

群  $G$  的两个子群  $S_1$  及  $S_2$  的乘积是所有可能的 (不同的) 乘积  $s_1 s_2$ , 其中  $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ , 组成的集合. 两个子群  $H_1, H_2$  的积是子群, 当且仅当  $H_1 H_2 = H_2 H_1$ , 这时积  $H_1 H_2$  与由  $H_1$  和  $H_2$  生成的子群 (即  $H_1$  和  $H_2$  的联合) 重合.



## 60 SUBGROUP, INDEX OF A

子群的同态象是子群. 若群  $G_1$  同构于群  $G$  的子群  $H$ , 则称  $G_1$  可嵌入到  $G$  中 (作为群). 若给定两个群, 它们每一个都同构于另一个的真子群, 也不一定得出这两个群本身是同构的 (亦见同态 (homomorphism); 同构 (isomorphism)).

О. А. Иванова 撰

### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什: 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987; 下册, 1982).

[A2] Hall, M., The theory of groups, Macmillan, 1959 (中译本: М. 赫尔, 群论, 科学出版社, 1981).

石生明 译 王杰 校

子群的指数 [subgroup, index of a; подгруппы индекс], 在群  $G$  中的

$G$  对于子群  $H$  的任何分解中陪集 (coset) 的个数 (在无限群情形, 是这些陪集的集合的基数). 若陪集数为有限,  $H$  称为  $G$  中有限指数的子群 (subgroup of finite index). 有限指数的有限个子群的交本身仍有有限指数 (Poincaré 定理 (Poincaré theorem)).  $G$  中子群  $H$  的指数常记成  $|G:H|$ . 子群  $H$  的阶与其指数  $|G:H|$  相乘的积等于  $G$  的阶 (Lagrange 定理 (Lagrange theorem)). 对于相应的基数, 这个关系可应用于有限群也可应用到无限群.

#### 参考文献

[1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982 (英译本: Kargapolov, M. I. and Merzljakov, J. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

[2] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987; 下册, 1982).

О. А. Иванова 撰 石生明 译 王杰 校

子群列 [subgroup series; подгрупп ряд]

群 (group)  $G$  的逐个地包含的子群的有限链

$$E = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G \quad (*)$$

或

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_{n+1} = E.$$

也可考虑嵌入子群的无限链 (上升或下降的), 它们可用数列来标号或甚至用某有序集的元素来标号. 通常称它们为子群系统 (subgroup system).

次正规列, 正规列及中心列在群论中起重要作用. 子群列 (\*) 称为次正规的 (subnormal), 若链中每个子群是下一项的正规子群. 若每个子群  $G_i, i = 0,$

$\cdots, n$  还在  $G$  中正规, 则 (\*) 称为  $G$  的正规列 (normal series). 也有不同的术语, 将这里的次正规列给以名称正规列, 而这里定义的第二个概念用了术语“不变列” (invariant series). 商群  $G_{i+1}/G_i$  称为因子 (factor), 而数目  $n$  是次正规列的长度 (length). 正规列 (\*) 称为中心的 (central), 若它的因子是中心的, 即对所有  $i, G_{i+1}/G_i$  是在群  $G/G_i$  的中心内, 或等价地,  $G_{i+1}$  和  $G$  的换位子, 对所有  $i$ , 是位于  $G_i$  中. 若对所有  $i, G_{i+1}/G_i$  是群  $G/G_i$  的中心 (分别地, 若  $G_{i+1}$  与  $G$  的换位子与  $G_i$  重合), 则子群列 (\*) 称为  $G$  的上中心列 (upper central series) (分别地, 下中心列 (lower central series)). 设给定群  $G$  的次正规 (分别地正规或中心) 列以及某子群  $H \subseteq G$ , 令  $H_i = G_i \cap H, i = 0, \cdots, n$ , 则链

$$E = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = H$$

是  $H$  中的次正规 (分别地正规或中心) 列, 而该列中的因子同构于列 (\*) 中相应因子的子群. 设  $G/N$  是  $G$  的商群, 则链

$$E = G_0 N / N \subseteq G_1 N / N \subseteq \cdots \subseteq G_n N / N = G / N$$

是  $G/N$  中的次正规 (分别地正规或中心) 列, 且该列中的因子是列 (\*) 中相应因子的同态象.

群中的两个次正规列 (特别地正规列) 称为同构的 (isomorphic), 若它们有相同的长度且在它们的因子间有一一对应使得对应的因子同构. 若其中一个列的每个子群与另一个列中的一个子群重合, 则第二个列称为第一个列的加细 (refinement). 一个正规列, 若它不能被加细就称为主列 (principle series 或 chief series); 而不能被加细的次正规列称为合成列 (composition series). 这些列中的因子分别叫做主因子 (chief factors) 和合成因子 (composition factors). 群的任何两个次正规 (分别地正规或中心) 列有同构的次正规 (分别地正规或中心) 的加细. 特别地, 任何两个主 (合成) 列是同构的 (见 Jordan-Hölder 定理 (Jordan-Hölder theorem)).

#### 参考文献

[1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982 (英译本: Kargapolov, M. I. and Merzljakov, J. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

[2] Черников, С. Н., Группы с заданными свойствами системы подгрупп, М., 1980.

Н. С. Романовский 撰

### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Suzuki, M., Group theory, I, Springer, 1986.

[A2] Robinson, D. J. S., A course in the theory of

groups, Springer, 1980. 石生明 译 王 杰 校

子群系统 [subgroup system; подгруппа система]

群 (group)  $G$  的子群 (subgroup) 的集合  $\mathfrak{A}$ , 满足下列条件: 1)  $\mathfrak{A}$  含单位元子群 1 及群  $G$  本身; 2)  $\mathfrak{A}$  按包含关系是全序的, 即对  $\mathfrak{A}$  中任何  $A$  及  $B$  或有  $A \subseteq B$  或有  $B \subseteq A$ . 称  $\mathfrak{A}$  中两个子群  $A$  及  $A'$  构成一个跳跃 (jump), 若在  $\mathfrak{A}$  中  $A'$  紧跟着  $A$ . 若子群系统对于并和交是封闭的, 则称它是完全的 (complete); 若对于完全子群系统中任何跳跃  $A$  及  $A'$ ,  $A$  是  $A'$  的正规子群 (normal subgroup), 则称它为次正规的 (subnormal). 商群  $A'/A$  称为子群系统  $\mathfrak{A}$  的因子 (factor). 若子群系统  $\mathfrak{A}$  中每个成员都是  $G$  的正规子群, 则称为正规的 (normal). 如果一个次正规系统 (在集论意义下) 包含另一个系统, 则称第一个系统为第二个的加细 (refinement). 正规子群系统称为中心的 (central), 如果它的所有因子是中心的, 即  $A'/A$  包含在  $G/A$  的中心中, 对任何跳跃  $A$  和  $A'$ . 次正规子群系统称为可解的 (solvable), 如果它的所有因子是 Abel 群.

群中出现某种子群系统能使从所有群的类中区分出各种子类, 这些子类中最常用的有  $RN, \overline{RN}^*, \overline{RN}, RI, RI^*, \overline{RI}, Z, ZA, ZD, \overline{Z}, \tilde{N}, N$ ——它们是下面一些群的 Курош-Черников 类 (Kurosh-Chernikov classes):

$RN$  群: 存在可解的次正规子群系统;

$\overline{RN}^*$  群: 存在良序的上升可解次正规子群系统;

$\overline{RN}$  群: 这种群中任何次正规子群系统可加细成可解的次正规子群系统;

$RI$  群: 存在可解的正规子群系统;

$RI^*$  群: 存在良序上升可解正规子群系统;

$\overline{RI}$  群: 这种群中的任何正规子群系统可被加细成可解正规子群系统;

$Z$  群: 存在中心子群系统;

$ZA$  群: 存在良序上升中心子群系统;

$ZD$  群: 存在良序下降中心子群系统;

$\overline{Z}$  群: 这种群的任何正规子群系统可加细成中心子群系统;

$\tilde{N}$  群: 对该群的任何子群皆有子群系统通过它;

$N$  群: 对该群的任何子群皆有良序上升次正规子群系统通过它.

子群系统的特殊情形是子群列 (subgroup series).

参考文献

- [1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987; 下册, 1982).

- [2] Черников, С. Н., Группы с заданными свойст-

вами системы подгрупп, М., 1980.

- [3] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982 (英译本: Kargapolov, M. I. and Merzljakov, J. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

Н. С. Романовский 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Robinson, D. J. S., Finiteness conditions and generalized soluble groups, 1-2, Springer, 1972.

石生明 译 王 杰 校

下调和函数 [subharmonic function; субгармоническая функция], 亦称次调和函数

在 Euclid 空间  $\mathbf{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) 的区域  $D \subset \mathbf{R}^n$  中定义的、关于点  $x = (x_1, \dots, x_n)$  的函数  $u = u(x): D \rightarrow [-\infty, \infty)$ , 且有下列性质: 1)  $u(x)$  在  $D$  中上半连续; 2) 在每一点  $x_0 \in D$  对任意小的值  $r > 0$  满足:

$$u(x_0) \leq I(u; x_0, r) = \frac{1}{s_n r^{n-1}} \int_{S(x_0, r)} u(x) d\sigma(x),$$

这里  $I(u; x_0, r)$  是函数  $u(x)$  在以  $x_0$  为心,  $r$  为半径的球面  $S(x_0, r)$  上的平均值, 而  $s_n = 2\pi^{n/2} \Gamma(n/2)$  是  $\mathbf{R}^n$  中单位球面的面积; 3)  $u(x) \not\equiv -\infty$  (有时去掉这一条件). 在下调和函数的定义中, 球面上的平均值  $I(u; x_0, r)$  可以换成球体  $B(x_0, r)$  上的平均值

$$J(u; x_0, r) = \frac{1}{v_n r^n} \int_{B(x_0, r)} u(x) dv(x),$$

其中  $v_n = s_n/n$  是  $\mathbf{R}^n$  中单位球体的体积.

下调和函数的下述等价定义解释了“下调和函数”命名的由来, 它把上述条件 2) 换成 2'): 如果  $\Delta$  是  $D$  的相对紧子区域,  $v(x)$  是  $\Delta$  中的调和函数并在闭包  $\bar{\Delta}$  上连续, 且在边界  $\partial\Delta$  上满足

$$u(x) \leq v(x), \quad (1)$$

则不等式 (1) 在  $\Delta$  中处处成立 ( $v(x)$  称为下调和函数  $u(x)$  在  $D$  里的调和强函数 (harmonic majorant)). 如果函数  $u(x)$  属于  $C^2(D)$  类, 则它在  $D$  中为下调和的必要与充分条件是, 经 Laplace 算子 (Laplace operator) 作用的结果  $\Delta u$  在  $D$  中非负.

下调和函数的概念实质上在 H. Poincaré 的扫除法 (balayage method) 中已阐述. F. Hartogs ([1]) 关于多复变解析函数论的工作也涉及下调和函数; 而对下调和函数的系统研究始于 F. Riesz ([2]). 下调和函数与单 (或多) 复变量  $z = (z_1, \dots, z_n)$  ( $n \geq 1$ ) 的解析函数  $f(z)$  之间关系密切. 事实上, 解析函数的模  $|f(z)|$  与模的对数  $\ln|f(z)|$  都是下调和函数, 因此可利用下调和函数来研究解析函数. 另一方面, 条件 2') 表明下调和函数可以看作单个实变量的凸函



数的类似物. 见凸函数(实变量的)(convex function (of a real variable)).

下调和函数的简单性质.

1) 如果  $u_1, \dots, u_m$  是  $D$  中的下调和函数,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  为非负数, 则线性组合  $\sum_{k=1}^m \lambda_k u_k$  也是  $D$  中的下调和函数.

2) 下调和函数有限族  $\{u_k\}_{k=1}^m$  的上包络  $\sup\{u_k(x); 1 \leq k \leq m\}$  是下调和函数. 如果下调和函数无限族的上包络是上半连续的, 则它也是下调和函数.

3) 一致收敛的与单调减的下调和函数序列都收敛于下调和函数.

4) 如果  $u(x)$  是  $D$  中的下调和函数且  $\varphi(u)$  是函数  $u$  的值域  $E$  上的、凸的不减函数, 或者当  $u(x)$  是  $D$  中的调和函数而  $\varphi(u)$  是  $E$  上的凸函数时, 则  $\varphi(u(x))$  是  $D$  中的下调和函数. 特别地, 若  $u(x)$  是  $D$  中的下调和函数, 则  $e^{\lambda u(x)}$  ( $\lambda > 0$ ) 及  $[u^+(x)]^k$  ( $k \geq 1$ , 其中  $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ ) 都是  $D$  中的下调和函数; 如果  $u(x)$  是  $D$  中的调和函数, 则  $|u(x)|^k$  ( $k \geq 1$ ) 是  $D$  中的下调和函数.

5) 最大值原理 (maximum principle): 如果  $u(x)$  是  $D$  中的下调和函数, 且对任意边界点  $\xi \in \partial D$ , 任意  $\varepsilon > 0$  存在一个邻域  $V = V(\xi)$  使得在  $D \cap V$  里  $u(x) < \varepsilon$ , 则在  $D$  里要么  $u(x) < 0$  要么  $u(x) \equiv 0$ . 这个性质对于无界区域  $D$  也成立, 这时对于  $\xi = \infty \in \partial D$ , 邻域  $V$  取球的外部  $V = V(\infty) = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| > R\}$ .

6) 如果  $u(x)$  是复平面  $\mathbb{C}$  的区域  $D$  中的下调和函数,  $z = z(w)$  是区域  $D' \subset \mathbb{C}^n$  到  $D$  内的全纯映射, 则  $u(z(w))$  是  $D'$  中的下调和函数.

7) 区域  $D \subset \mathbb{R}^n$  中的函数  $u(x)$  是调和的, 当且仅当  $u(x)$  与  $-u(x)$  都是  $D$  中的下调和函数 (见调和函数 (harmonic function)).

8) 如果  $u(x)$  是整个平面  $\mathbb{R}^2$  上的上有界的下调和函数, 则  $u(x) = \text{常数}$  (在  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) 里这个性质不成立).

求解调和函数的 Dirichlet 问题 (Dirichlet problem) 的 Perron 法 (Perron method) 是建立在性质 2), 5) 及 7) 的基础上的.

下述下调和函数平均值的凸性性质 (convexity properties of the mean values of subharmonic functions) 具有很重要的意义: 如果  $u(x)$  是圆环  $r_1 \leq r = |x - x_0| \leq r_2$  ( $0 < r_1 < r_2$ ) 中的下调和函数, 则平均值  $I(u; x_0, r)$ ,  $J(u; x_0, r)$  以及最大值

$$M(u; x_0, r) = \max\{u(x): |x - x_0| = r\},$$

在区间  $r_1 \leq r \leq r_2$  上, 当  $n = 2$  时, 是  $\ln r$  的凸函

数, 而当  $n \geq 3$  时, 是  $r^{2-n}$  的凸函数; 如果  $u(x)$  是圆盘 (球体)  $0 \leq r = |x - x_0| \leq r_2$  里的下调和函数, 则  $I(u; x_0, r)$  与  $J(u; x_0, r)$  在区间  $0 \leq r \leq r_2$  上还是  $r$  的连续的不减函数; 而且

$$I(u; x_0, 0) = J(u; x_0, 0) = u(x_0);$$

在后面这种情况下还有

$$u(x_0) \leq J(u; x_0, r) \leq I(u; x_0, r)$$

在  $0 \leq r \leq r_2$  成立. 对于取定的  $u$  和  $r$ , 平均值  $I(u; x_0, r)$  与  $J(u; x_0, r)$  作为点  $x_0$  的函数在对应的子区域  $D' \subset D$  里是下调和函数, 且  $J(u; x_0, r)$  是连续的. 通过建立足够高次的迭代

$$u_m^{(k)}(x) = J\left[u_m^{(k-1)}; x, \frac{1}{m}\right], \quad u_m^{(0)}(x) = u(x),$$

可以得到具有任意阶光滑性的单调减的下调和函数序列  $\{u_m^{(k)}(x)\}_{m=m_0}^\infty$ , 当  $m \rightarrow \infty$  时, 它收敛于给定的下调和函数  $u(x)$ .

非负质量的 Newton 位势 (Newton potential) 与对数位势 (logarithmic potential) 若冠以负号, 则为  $\mathbb{R}^n$  中处处下调和的函数. 另一方面, 下调和函数论的基本定理之一是 Riesz 局部表示定理 (Riesz local representation theorem): 任意下调和函数可以表示成一个调和函数与带负号的位势之和 (见 [2]). 更精确地说, 若  $u(x)$  是区域  $D \in \mathbb{R}^n$  里的下调和函数, 则存在  $D$  上唯一的非负 Borel 测度  $\mu$  (与  $u(x)$  关联的测度, 或称 Riesz 测度 (Riesz measure)), 使得对任意紧集  $E \subset D$  有表示式

$$u(x) = \int_E K(x - \xi) d\mu(\xi) + h(x) \quad (2)$$

成立, 这里, 当  $n = 2$  时,  $K(x - \xi) = \ln|x - \xi|$ , 当  $n \geq 3$  时,  $K(x - \xi) = -|x - \xi|^{2-n}$ , 而  $h(x)$  是在  $E$  的内部调和的函数. Riesz 定理建立了下调和函数论与位势论 (potential theory) 之间的紧密联系.

如果  $E$  是一个正则闭区域  $\bar{G}$ , 是有界的, 比如是由一个 Ляпунов 曲面所界定的, 且具有 Green 函数 (Green function)  $g(x, \xi)$ , 则与 (2) 式一样, 利用 Green 位势表示的公式

$$u(x) = - \int_{\bar{G}} g(x, \xi) d\mu(\xi) + w(x) \quad (3)$$

也成立, 其中  $w(x)$  是下调和函数  $u(x)$  在区域  $G$  的最小调和强函数 (least harmonic majorant).

一般说来, 形如 (3) 的表示式在  $u(x)$  的整个定义域  $D$  里是不成立的. 在下调和函数论中, 很重要的问题是区分出那些在整个区域  $D$  有表达式 (3) 成立的下调和函数的类, 即区分出在整个区域  $D$  有调和强函数的下调和函数  $u(x)$  的类  $A$  的问题. 例如,

如果  $D = B(0, R)$  是一个球体 (圆盘) 且存在常数  $c = c(u)$  使得

$$\int_{S(0, R)} u^+(r\xi) d\sigma(\xi) < C(u) < +\infty, \quad 0 < r < 1, \quad (4)$$

则  $u(x)$  在  $D$  里有表达式 (3), 且最小调和强函数  $w(x)$  可用 Poisson-Stieltjes 积分表示成:

$$w(x) = \int \frac{R^{n-2}(R^2 - |x|^2)}{|x - \xi|^n} dv(\xi), \quad (5)$$

其中  $v$  是集中在边界球面 (圆周)  $\partial D = S(0, R)$  上且由条件  $\int dv(\xi) = 1$  规范的任意的带号 Borel 测度 (边界测度 (boundary measure)).

对于 (5) 式, 在实际应用中重要的是要了解, 在什么条件下边界测度  $v$  只有负的奇异分量, 即在什么条件下典型分解  $v = v^+ - v^-$  的分量  $v^+$  是绝对连续的. 通过引入严格下调和类这个问题得到解答 (见 [11] - [13], [15] 以及 [10], 其间也考虑了相应的推广). 设  $\psi(y)$  是关于  $y$  的增加的凹函数且  $\lim_{y \rightarrow +\infty} y/\psi(y) = +\infty$ . 称一个函数  $u(x)$  ( $x \in D$ ) 为相对于  $\psi(y)$  严格下调和的 (strictly subharmonic), 如果  $\psi(u(x))$  是下调和函数. 例如, 对数下调和函数 (logarithmically-subharmonic function)  $u(x) \geq 0$  (即  $\ln u(x)$  是下调和函数) 属于严格下调和函数类. 如果球  $D$  里的严格下调和函数  $u(x)$  满足条件 (4), 则  $u(x)$  在  $D$  里可表示成形式 (3) 且边界测度  $v$  可用分解式

$$dv(\xi) = u(\xi)d\sigma(\xi) - dv^-(\xi), \quad \xi \in \partial D \quad (a)$$

来刻画, 其中  $u(\xi)$  是函数  $u(x)$  的径向边界值 (它关于球面  $\partial D = S(0, R)$  上的 Lebesgue 测度几乎处处存在), 而  $v^- \geq 0$  是测度  $v$  的奇异分量.

球体  $D$  里  $A$  类的下调和函数在  $\partial D = S(0, R)$  上几乎处处有径向边界值. 但是, 已经构造出在  $D$  里有界、连续的下调和函数的这种例子, 它在  $\partial D$  上处处没有不相切的边界值. 这种现象对调和函数来说是不会发生的. 为了使不相切的边界值存在, 除了 (4) 以外, 需要对  $D$  里的关联测度  $\mu$  附加另外的条件 (例如见 [14]).

下调和函数论及其应用的本质问题之一, 是刻画  $A$  类中不同子类的函数的边界性质. 引进这些子类的一般方法在于, 对那些相对于凹函数  $\psi(y)$  的严格下调和函数  $u(x)$ , 考虑满足下面条件的任意的不减函数  $\varphi(y)$ : 它相对于  $\psi(y)$  是凸的且  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi(y)/\psi(y) = +\infty$ , 从而引进  $A_\varphi$  类. 对于球, 它由条件

$$\int_{S(0, R)} \varphi^+(u(r\xi)) d\sigma(\xi) < C(u, \varphi) < +\infty,$$

$$0 < r < 1$$

来定义. 关于下调和函数的边界性质, 见 [3] - [5], [10] - [16].

对于可表示成两个下调和函数之差的函数, 引进了 R. Nevanlinna 意义下特征函数的概念, 且有界特征函数 (function of bounded characteristic) 的理论也已推广 (见 [3], [7]).

整函数 (entire function) 论的一个有特色的推广是整个空间  $R^n$  里的下调和函数论. 这里, 整函数的 Weierstrass 与 Hadamard 的经典表示定理连同增长性与值分布理论, 渐近值与渐进路线理论等都已建立.

在多复变解析理论中, 研究多重下调和函数 (plurisubharmonic function) 与多重调和函数 (pluriharmonic function) 子类是相当重要的 (见 [17]). 关于下调和函数在公理系统中的推广, 见 [9].

#### 参考文献

- [1] Hartogs, F., Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten, *Math. Ann.*, 62 (1906), 1 - 88.
- [2A] Riesz, F., Sur les fonctions sousharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel I, *Acta Math.*, 48 (1926), 329 - 343.
- [2B] Riesz, F., Sur les fonctions sousharmonique et leur rapport à la théorie du potentiel II, *Acta Math.*, 54 (1930), 321 - 360.
- [3] Привалов, И. И., Субгармонические функции, М.-Л., 1937.
- [4] Привалов, И. И., Граничные свойства однозначных аналитических функций, М., 1941.
- [5] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956).
- [6] Radó, T., Subharmonic functions, Springer, 1937.
- [7A] Hayman, W. and Kennedy, P., Subharmonic functions, 1., Acad. Press, 1976.
- [7B] Hayman, W., Subharmonic functions, 2., Acad. Press, 1989.
- [8] Brelot, M., Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point, Hermann, 1934.
- [9] Brelot, M., Lectures on potential theory, Tata Inst., 1967.
- [10] Heins, M., Hardy classes on Riemann surfaces, Springer, 1969.
- [11] Соломенцев, Е. Д., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1938, 5 - 6, 571 - 582.
- [12] Привалов, И. И., Кузнецов, П. И., «Матем. сб.», 6 (1939), 3, 345 - 376.
- [13] Соломенцев, Е. Д., «Вестн. МГУ», 5 (1959),



73 - 91.

[14] Соломенцев, Е. Д., «Чехосл. матем. ж.», 8 (1958), 4, 520 - 536.

[15] Gårding, L. and Hörmander, L., Strongly subharmonic functions, *Math. Scand.*, 15 (1964), 93 - 96.

[16] Соломенцев, Е. Д., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование, 1962 (1964) М., 83 - 100.

[17] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., *Methods of the theory of functions of several complex variables*, M. I. T., 1966).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】公理化位势论可建立在性质 1)、3) 的基础上且对由负的下调和函数组成的集合  $S$  补充如下性质来加以完善: a)  $S$  的子集的上确界的上半连续正则化是下调和的; b) (Riesz 分解性质 (Riesz decomposition property)) 对任意  $u, v, w \in S$ , 若  $u \geq v + w$ , 则存在  $v', w' \in S$  使得  $u = v' + w'$ ,  $v' \geq v$ ,  $w' \geq w$ ; 及 c) 存在一个由连续下调和函数构成的足够好的子锥使得每个  $u \in S$  可表成子锥中某个单调减序列的极限. 见 [A1].

## 参考文献

[A1] Bliedtner, J. and Hansen, W., *Potential theory. An analytic and probabilistic approach to balayage*, Springer, 1986 (中译本: J. 波里特诺, W. 汉森, 位势理论—扫除之分析与概率方法, 厦门大学出版社, 1994).

[A2] Ronkin, L. I., *Introduction to the theory of entire functions of several variables*, Amer. Math. Soc., 1974 (译自俄文).

[A3] Kellogg, O. D., *Foundations of potential theory*, Dover, reprint, 1954, P. 315 ff.

高琪仁 吴炯圻 译

## 子格 [sublattice; подрешетка]

一个格 (lattice) 的对于其运算  $+$  和  $\cdot$  封闭的子集  $A$ , 也就是对  $A$  的任意元素  $a$  及  $b$ , 总有  $a + b \in A$  和  $a \cdot b \in A$ . 因此, 当把格看作具有两个二元运算的泛代数时, 子格就是子代数. 子格  $A$  称为凸的 (convex), 如果对任意  $a, b \in A$  及  $a \leq c \leq b$ , 总有  $c \in A$ . 一个格的任一只含一个元素的子集是子格的例子. 其他子格的例子有: 理想、滤子和区间. 所有这些子格都是凸的. 链的任意一个子集是它的子格 (不必是凸的). 一个给定格的所有子格, 对于包含关系定义的序构成一个格.

## 参考文献

[1] Birkhoff, G., *Lattice theory*, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[2] Скорняков, Л. А., *Элементы теории структур*, М., 1970 (英译本: Skornyakov, L. A., *Elements of*

*lattice theory*, A. Hilger & Hindushtan Publ. Comp., 1977).

[3] Житомирский, Г. И., в сб., Упорядоченные множества и решетки, в. 7, Саратов, 1981.

[4] Grätzer, G., *General lattice theory*, Birkhäuser, 1978. Т. С. Фофанова 撰 卢景波 译

## 子流形 [submanifold; подмногообразие]

1) 狭义地说,  $m$  维拓扑流形 (manifold)  $M$  的  $n$  维拓扑子流形是一个子集  $N \subset M$ , 它在诱导拓扑下是一个  $n$  维流形. 数  $m - n$  是子流形  $N$  的余维数 (codimension). 经常遇到的是局部平坦子流形, 即恒等嵌入  $i: N \rightarrow M$  是局部平坦嵌入 (locally flat imbedding). 子集  $N \subset M$  是局部平坦子流形, 如果对每个点  $p \in N$  存在这个点在  $M$  内的一个邻域  $U$  以及其中的局部坐标  $x_1, \dots, x_m$ , 使得  $N \cap U$  可用这些坐标由方程  $x_{n+1} = \dots = x_m = 0$  描述.

2) 广义地说,  $m$  维拓扑流形  $M$  的  $n$  维拓扑子流形是一个  $n$  维流形  $N$ , 作为点集,  $N$  是  $M$  的子集 (即  $N$  是  $M$  的具有  $n$  维流形结构的子集), 并且恒等嵌入  $i: N \rightarrow M$  是一个浸入 (见流形的浸入 (immersion of a manifold)). 狭义子流形必是广义子流形, 而后者也是狭义子流形, 当且仅当  $i$  是拓扑意义下的嵌入 (即对每个点  $p \in N$  存在  $N$  内任意小的邻域, 它们是  $M$  内某个邻域与  $N$  的交).

3) 分段线性的、解析的或微分的 ( $C^k$  ( $1 \leq k \leq \infty$ ) 类的) 流形  $M$  的分段线性的 (piecewise-linear)、解析的 (analytic) 或可微的 (differentiable) ( $C^l$  ( $1 \leq \infty$ ) 类的) 子流形 (submanifold), 广义地说 (或相应地, 狭义地说), 是具有分段线性的、解析的或微分的 ( $C^l$  类的) 流形结构的子集  $N \subset M$ , 这里  $i$  是分段线性的、解析的或微分的 ( $C^l$  类的) 浸入 (或相应地, 嵌入).  $C^l$  类微分子流形的定义当  $l = 0$  时也适用, 而且它与拓扑子流形的定义一致. 通常认为  $l \geq 1$ .

在解析或微分的情形子流形总是局部平坦的. 所以在定义狭义解析 (微分) 子流形时, 一开始就把 1) 中利用局部坐标给出的局部平坦子流形的定义改造成解析 (微分) 形式, 即附加一个条件, 要求局部坐标  $x_1, \dots, x_m$  是解析 ( $C^l$  级可微) 的. 如果子集  $N$  满足后一条件, 它就自然地具有解析 ( $C^l$  级微分) 流形的结构, 并且  $i$  是相应结构意义下的嵌入.

狭义的分段线性子流形可被局部地表示成环绕空间内的子多面体, 并且分段线性地等价于一个单形 (见单形 (抽象的) (simplex (abstract))). 它不总是局部平坦的 (虽然当  $m - n > 2$  时正确); 又对于这样的流形, 拓扑意义下为局部平坦的性质与分段线性意义下局部平坦的性质并不一致 (至少不是直接地一致).

4) 对这些定义作简单修改后可给出下列定义: 有边界的子流形; 有边界流形的子流形 (在拓扑的情形下, 在环绕流形的边界处对子流形加以限制看来是合适的, 见 [1]); 不同分支有不同维数的子流形; 无限维流形的子流形 ([2]); 以及复解析流形的复解析子流形.

狭义子流形的概念是曲线和曲面概念的直接推广. 广义的子流形被用于 Lie 群论 (此概念是在这里被首次引入的 ([3])), 微分几何 ([4]) 以及叶状结构 (foliation) 理论.

5) 在代数几何学 (algebraic geometry) 里, 子流形 (在这里通常称为子簇 (subvariety)) 是代数簇在 Zariski 拓扑 (Zariski topology) 下的一个闭子集. 因此闭子簇是由代数方程确定的. 除了从  $\mathbf{R}$  过渡到其他域之外, 这种情形的子簇概念的另一个变化是允许有奇点的子簇.

#### 参考文献

- [1] Рохлин, В. А., Фукс, Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977 (英译本: Rokhlin, V. A., Fuks, D. B., Beginner's course in topology. Geometric chapters. Springer, 1984).
- [2] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967.
- [3] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946.
- [4] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964. Д. В. Аносов 撰

【补注】任何  $C^r$  流形  $M^n$  可被  $C^r$  嵌入到  $\mathbf{R}^{2n}$  内 (Whitney 嵌入定理 (Whitney imbedding theorem)), 所以任何  $C^r$  流形可被看作某个  $\mathbf{R}^m$  的子流形.

#### 参考文献

- [A1] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.
- [A2] Borisovich, Yu., Bliznyakov, N. and Izrailevich, Yu., Introduction to topology, Kluwer, 1993 (译自俄文). 陈志杰 译

子矩阵 [submatrix; подматрица],  $m \times n$  矩阵  $A$  的

一个  $k \times l$  矩阵, 这里  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq l \leq n$ , 它由  $A$  中确定的  $k$  行与确定的  $l$  列相交处的元素, 按照原来的顺序所构成. 矩阵  $A$  的一个  $k$  阶主子式的行列式称为  $A$  的  $k$  阶子式 (minor).

Г. С. Пиголкина 撰 蒋滋梅 译

浸没 [submersion; субмерсия]

从  $m$  维流形  $M$  到  $n$  维流形  $N$  ( $n \leq m$ ) 中的一个映射  $f: M \rightarrow N$ , 在该映射下, 对任何点  $p \in M$ , 可能诱导出  $M$  上点  $p$  附近的一个局部坐标  $x_1, \dots, x_m$

和  $N$  上点  $f(p)$  附近的局部坐标  $y_1, \dots, y_n$ , 使得  $f$  依照这些坐标用

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

局部地表示. 如果  $M$  和  $N$  具有分片线性、分片解析或 ( $C^k$  阶) 分片可微流形的结构和局部坐标可选取分片线性、分片解析或 ( $C^l$  阶,  $l \leq k$ ) 分片可微, 则浸没称为分片线性的 (piecewise-linear)、分片解析的 (piecewise-analytic) 或 ( $C^l$  阶) 分片可微的 (piecewise-differentiable). 对于带边流形 (在拓扑的问题中, 当趋于边界时, 给映射的性质强加一个额外的条件是可取的, 见 [1]) 和无穷维的情形 (见 [2]), 浸没也可定义. 浸没的概念在非正式的意义下是浸入 (immersion) (也见流形的浸入 (immersion of a manifold)) 概念的一个对偶, 且它们的理论是类似的.

#### 参考文献

- [1] Rokhlin, V. A. and Fuks, D. B., Beginner's course in topology, Geometrical chapters, 1984.
- [2] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967. Д. В. Аносов 撰
- 【补注】当  $M$  是一个开流形时, 浸没是通过切丛的诱导映射  $TM \rightarrow TN$  而被分类的. 见 [A1].

#### 参考文献

- [A1] Phillips, A., Submersions of open manifolds, Topology, 6 (1966), 171 - 206. 薛春华 译

子模 [submodule; подмодуль]

模 (module) 的子系, 它是加法群的子群, 并且在乘以基环的元素的乘法下封闭. 特别地, 环  $R$  的左 (右) 理想是  $R$  作为左 (右)  $R$  模的子模. 一子模不等于模自身也不为 0 时称之为真 (proper) 子模. 给定模的所有子模集合, 依包含关系为序, 是一个完全 Dedekind 格 (见完全可约模 (completely-reducible module)). 如  $\varphi$  是从模  $A$  到模  $B$  中的同态, 则集合

$$\text{Ker } \varphi = \{x: x \in A, \varphi(x) = 0\}$$

是  $A$  的子模, 称为同态  $\varphi$  的核 (kernel of the homomorphism). 每个子模都是某个同态的核. 子模称为大的 (large) (或本质的 (essential)), 如果它与任一非零子模之交都不为零. 例如, 整数构成了有理数群的本性子模. 每个模是其内射包的一个本性子模 (见内射模 (injective module)). 模  $B$  的子模  $A$  称为小的 (small) (或非本质的 (inessential)), 如果对任一子模  $A' \subseteq B$ , 等式  $A + A' = B$ , 蕴含着  $A' = B$ . 链模 (chain module) 的任一真子模是非本质的. 例如, 局部环的非可逆元素形成一个非本性子模. 所有非本



质子模的和与所有极大理想之交相重合. 一个左理想  $I$  属于 Jacobson 根, 当且仅当对任一有限生成左模  $M$ ,  $IM$  是  $M$  中的非本质子模. 小子模的元素是非生成的 (non-generating), 即从模的任一生成元素中去掉任一此种元素后仍能生成模 (自然这并不意味着立刻将它们全去掉). 模的自同态环的 Jacobson 根等于有非本质象的自同态的集合.

## 参考文献

- [1] Kasch, F., modules and rings. Acad. Press, 1982 (译自德文).  
[2] Faith, C., Algebra, 1-2, Springer, 1973-1976.  
Л. А. Скорняков 撰 冯绪宁 译

次正规列 [subnormal series; субнормальный ряд], 群  $G$  的

$G$  的子群列 (subgroup series)

$$E = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G,$$

其中每个子群  $G_i$  是  $G_{i+1}$  的正规子群. 这时商群  $G_{i+1}/G_i$  称为因子 (factor), 数  $n$  称为次正规列的长度 (length). 无限的次正规列也已被研究 (见子群系统 (subgroup system)). 不能进一步加细的次正规列称为合成列 (composition series), 它的因子称为合成因子 (composition factors). О. А. Иванова 撰

【补注】次正规列也称为次不变列 (subinvariant series).

## 参考文献

- [A1] Hall, M., Theory of groups, Macmillan, 1959, Sect. 8.4 (中译本: M. 赫尔, 群论, 科学出版社, 1984).  
石生明 译 王杰 校

次正规子群 [subnormal subgroup; субнормальная подгруппа], 可达子群 (attainable subgroup)

群的次正规列 (subnormal series) 中的任一成员.

用记号  $H \triangleleft\triangleleft G$  表示群  $G$  的子群  $H$  的次正规性.

## 参考文献

- [1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977 (英译本: Kargapolov, M. H. and Merzljakov, J. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).  
Н. Н. Вильямс 撰

【补注】次正规子群也称为次不变子群 (subinvariant subgroup).

与其换位子群重合且除以其中心的商是单群的  $G$  的一个次正规子群, 称为  $G$  的分量 (component).  $G$  的所有分量之积称为  $G$  的层 (layer). 在有限单群理论中, 它是  $G$  的一个重要的特征子群, 例如见 [A1].

## 参考文献

- [A1] Suzuki, M., Group theory, 1-2, Springer, 1986.

[A2] Lennox, J. C. and Stonehewer, S. E., Subnormal subgroups of groups, Clarendon Press, 1987.

[A3] Robinson, D. J. S., A course in the theory of groups, Springer, 1982. 石生明 译 王杰 校

子对象 [subobject; подобъект], 范畴中一个对象的

与数学结构的子结构概念类似的一个概念. 令  $\mathcal{R}$  是任意范畴 (category),  $A$  是  $\mathcal{R}$  中一个固定的对象. 可以在  $\mathcal{R}$  的以  $A$  为值域 (目标) 的单态射类中定义一个前序关系 (右可除关系):  $\mu: X \rightarrow A$  先于  $\sigma: Y \rightarrow A$ , 或  $\mu < \sigma$ , 若有  $\mu': X \rightarrow Y$ , 使  $\mu = \mu' \sigma$ . 事实上, 态射  $\mu'$  是唯一确定的, 因为  $\sigma$  是单态射. 前序关系诱导出以  $A$  为值域的单态射之间的一个等价关系: 单态射  $\mu: X \rightarrow Y$  和  $\sigma: Y \rightarrow A$  是等价的, 当且仅当  $\mu < \sigma$  且  $\sigma < \mu$ . 单态射的一个等价类叫作  $A$  的一个子对象 (subobject). 以  $\mu: X \rightarrow A$  为代表的子对象有时记作  $(\mu: X \rightarrow A)$  或  $(\mu]$ . 也可用 Hilbert  $\tau$  符号选择  $A$  的子对象的代表, 并将这些代表作为子对象. 在集合、群、Abel 群和向量空间的范畴中, 任意对象的子对象定义为子集 (子群, 子空间) 在环绕集 (群、空间) 中的嵌入. 但是在拓扑空间范畴中, 子对象的概念比带有诱导拓扑的子集要广.

以  $A$  为值域的单态射之间的前序关系诱导出  $A$  的子对象之间的偏序关系:  $(\mu] \leq (\sigma]$ , 若  $\mu < \sigma$ . 这个关系类似于给定集合的子集的包含关系.

若单态射  $\mu$  是正则的 (见正规单态射 (normal monomorphism)), 则任意与之等价的单态射也是正则的. 从而可以谈论任意对象  $A$  的正则子对象. 特别地, 以  $1_A$  为代表的子对象是正则的. 在带有零态射的范畴中, 可类似地引出正规子对象. 若  $\mathcal{R}$  有双范畴 (bicategory) 结构  $(\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ , 则对象  $A$  的一个子对象  $(\mu: X \rightarrow A)$  当  $\mu \in \mathcal{M}$  时叫作 (相对于该双范畴结构) 容许的 (admissible). М. Ш. Цаленко 撰  
【补注】上文 (以及本书其他地方) 所用符号  $(\mu]$  并不标准. 大多数作者不在符号上区分子对象和代表它的单态射.

参考文献见范畴 (category).

张英伯 译

从属原理 [subordination principle; подчинения принцип]

Lindelöf 原理 (Lindelöf principle) 的一种形式, 它用到了函数从属的概念. 设  $\omega(z)$  是在圆盘  $|z| < 1$  内正则且满足条件  $\omega(0) = 0$ , 在  $|z| < 1$  内  $|\omega(z)| < 1$  的任一函数; 设  $F(z)$  是  $|z| < 1$  内的亚纯函数. 若函数  $f(z)$  具有形式  $f(z) = F(\omega(z))$ , 则称  $f(z)$  在圆盘  $|z| < 1$  内从属于函数  $F(z)$ , 并称  $F(z)$  为从属函数 (subordinating function). 这一从属关系 (sub-

ordination relation) 用  $f(z) \prec F(z)$  表示之. 在  $F(z)$  是  $|z| < 1$  内单叶函数 (univalent function) 的最简单情形, 该关系恰好意味着  $f(0) = F(0)$  且  $f(z)$  在圆盘  $|z| < 1$  内不取任一为  $F(z)$  所不取的值. 下列基本定理是常用的.

**定理 1** 设函数  $w = F(z)$  在圆盘  $|z| < 1$  内亚纯且把该圆盘映射成 **Riemann 曲面** (Riemann surface)  $G(F)$ . 设  $G_r(F)$  是  $G(F)$  的对应于  $|z| \leq r$  的那一部分,  $r < 1$ . 若  $f(z) \prec F(z)$ , 则在  $|z| \leq r$  内  $f(z)$  的值 (从  $f(0) = F(0)$  出发的解析延拓 (analytic continuation) 所确定的值) 属于  $G_r(F)$ , 且仅当  $f(z) = F(\varepsilon z)$ ,  $|\varepsilon| = 1$  时才取到  $G_r(F)$  的边界点 ([2]).

**定理 2** 若  $f(z) \prec F(z)$  且  $F(z)$  在  $|z| \leq r$  内正则,  $r < 1$ , 则令

$$M_\lambda(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta \right\}^{1/\lambda}, \lambda \geq 0$$

时有  $M_\lambda(r, f) \leq M_\lambda(r, F)$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $0 \leq r \leq 1$  ([1]).

**定理 3** 若  $f(z) \prec F(z)$  且  $F(z)$  在  $z=0$  正则, 则关于展开式  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$  的系数有  $\sum_{n=1}^m |a_n|^2 \leq \sum_{n=1}^m |A_n|^2$ ,  $m = 1, 2, \dots$  ([2]).

从属的一般理论对于研究解析函数的取值集合是有用的. 应用从属关系可以有两种不同的途径. 首先, 可从给定的函数  $F(z)$  出发并检验所有从属于  $F(z)$  的  $f(z)$  的性质. 若  $F(z)$  完全已知, 则使  $f(z)$  的值位于其内的区域  $G_r(F)$  亦已知 (定理 1), 同时积分均值  $M_\lambda(r, f)$  的上界亦已知 (定理 2). 若  $F(z)$  还在  $z=0$  正则, 则  $f(z)$  的系数有上界 (定理 3). 其次, 可考虑在圆盘  $|z| < 1$  内亚纯且其性质蕴含它不可能在  $|z| < 1$  内从属于给定函数  $F(z)$  的函数  $f(z)$ . 若其中的  $F(z)$  比如说是单叶的, 则  $f(z)$  在  $|z| < 1$  内必须取  $G(F)$  以外的值. 运用从属关系的这些思想不仅形象地描述了从属原理而且可以推广到多连通区域 ([3]).

#### 参考文献

- [1] Littlewood, J. E., On inequalities in the theory of functions, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **23** (1925), 481 – 519.
- [2] Rogosinski, W., On subordinate function, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **35** (1939), 1 – 26.
- [3] Аленицын, Ю. Е., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», **60** (1961), 5 – 21.
- [4] Rogosinski, W., *Schr. K. Gelehrt. Gesellsch. Naturwiss., Kl.*, **8** (1931), 1, 1 – 31.
- [5] Rogosinski, W., On a theorem of Bieberbach-Eilenberg, *J. Lond. Math. Soc.*, **14** (1939), 53, 4 – 11.
- [6] Rogosinski, W., On the coefficients of subordinate functions, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **48** (1943), 48 – 82.

[7] Lifflewood, J. E., *Lectures on the theory of functions*, Oxford Univ. Press, 1944.

[8] Голузин, Г. М., *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., *Geometric theory of functions of a complex variable*, Amer. Math. Soc., 1969).

Ю. Е. Аленицын 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Duren, P. L., *Theory of  $H^p$  spaces*, Acad. Press, 1970.

杨维奇 译

**下抛物函数** [subparabolic function; субпараболическая функция], 亦称次抛物函数, 下热函数 (subcaloric function)

关于热 (传导) 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta^2 u = 0 \quad (*)$$

的类似于下调和函数的概念, 其中  $u = u(x, t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ , 而  $\Delta^2 u = \sum_{j=1}^n \partial^2 u / \partial x_j^2$  为 **Laplace 算子** (Laplace operator). 例如, 对  $C^2$  类函数  $v = v(x, t)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ,  $t > 0$ ), 如果  $\partial v / \partial t - \partial^2 v / \partial x^2 \leq 0$  在矩形

$$D = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : a < x < b, 0 < t < h\}$$

里处处成立, 那么它是一个下抛物函数. 更一般地, 设  $(x_0, t_0) \in D$ ,  $\Delta$  是充分小的、底面平行于轴  $t=0$  的等边三角形使得  $(x_0, t_0) \in \Delta \subset D$ . 那么在闭区域  $\bar{D}$  连续的函数  $v = v(x, t)$  称为在  $D$  里是下抛物的 (subparabolic), 如果它在任一点  $(x_0, t_0) \in \bar{D}$  的值不大于方程 (\*) 在  $\Delta$  内的那种在  $\Delta$  的边上取与  $v(x, t)$  相同值的解在该点的值, 这里  $\Delta$  是任一充分小的三角形且  $(x_0, t_0) \in \Delta$ .

下调和函数的许多性质, 包括最大值原理, 对于下抛物函数也成立.

#### 参考文献

- [1] Смирнов, В. И., *Курс высшей математики*, 5 изд., т. 4, М., 1958 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 人民教育出版社, 1958).
- [2] Петровский, И. Г., *Лекции об уравнениях с частными производными*, 3 изд., М., 1961 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基, 偏微分方程讲义, 人民教育出版社, 第二版, 1965).
- [3] Petrovskii, I. G., Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung, *Compos. Math.*, **1** (1935), 383 – 419.

Е. Д. Соломенцев 撰

**【补注】** 用位势论的观点解释下抛物函数可见于 [A1].

#### 参考文献

- [A1] Doob, J. L., *Classical potential theory and its probabilistic counterparts*, Springer, 1983 (中译本: J. L. 杜布, 经典位势论与概率位势论, 上、下册, 科



学出版社, 1993).

[A2] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964.

吴炯圻 高琪仁 译

次射影空间 [subprojective space; субпроективное пространство]

常曲率空间 (射影空间) 的推广之一. 已定义过有仿射联络 (affine connection) 的  $k$  重射影空间 (projective space), 在某个坐标系下它的测地线用  $n-1$  个方程, 其中恰有  $k$  个方程是线性的系统来表示. 当  $k=n-2$  时, 测地线是平面曲线, 落在一个二维 Euclid 平面上. 如果所有这些二维 Euclid 平面通过一个公共点, 或者沿一个方向是平行的 (公共点在无穷远处), 则称该空间是次射影的.

设  $A_n$  是  $n$  维次射影空间, 有无挠的仿射联络. 关于  $A_n$  的射影坐标系  $x^i$ , 联络系数是

$$\Gamma_{jk}^i = x^i f_{jk} + \delta_k^i p_j + \delta_j^i p_k, f_{jk} = f_{kj},$$

其中  $\delta_j^i$  是 Kronecker 记号, 且

$$p_k = \frac{1}{2} (\Gamma_{kk}^k - f_{kk} x^k).$$

在此坐标系下,  $A_n$  的测地线所位于的二维 Euclid 平面都通过坐标原点.

一般地, 在次射影空间  $A_n$  中存在典型的坐标系  $x^i$ , 使联络系数取最简单的形式

$$\Gamma_{jk}^i = x^i f_{jk}.$$

Riemann 次射影空间 (Riemannian subprojective space)  $V_n$  用同样方式定义; 它的度量归结为三种可能形式之一:

$$ds^2 = g_{\alpha\gamma} dx^\alpha dx^\gamma,$$

其中 1)  $g_{ik} = \partial_i \tau \partial_k \tau + (\lambda/\theta) \partial_{ik} (v/\lambda)$ ,

$$2) g_{ik} = \partial_i \tau \partial_k \tau + c(\lambda/\theta) \partial_{ik} \lambda,$$

这里  $c = \text{常数} \neq 0$ ;  $\theta$  是  $x^i$  的任意函数,  $\tau$  是变量  $\lambda/\theta$  的函数,  $v$  是  $x^i$  的二次型, 在 1) 中  $\lambda$  是线性型, 在 2) 中  $\lambda$  是一个非完全平方的二次型的平方根.

3) 例外情形

$$\theta ds^2 = a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2d\lambda dx^{n-1} + 2dv dx^n,$$

其中  $a_{\alpha\beta}$  是常数,  $\det |a_{\alpha\beta}| \neq 0$ ,  $\theta$  是  $x^{n-1}$  和  $x^n$  的一次齐次函数,  $\lambda$  和  $v$  满足关系式

$$\frac{1}{2} a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + \lambda x^{n-1} + v x^n = 0,$$

$$\alpha, \beta = 1, \dots, n-2,$$

不是一次齐次函数.

所有这三种情形通过选择坐标  $z^i$  化为统一的表达式:

$$1) ds^2 = e^{-2\mu(z^1)} (e_1 dz^1{}^2 + \dots + e_n dz^n{}^2),$$

$$2) ds^2 = e^{-2\mu(z)} \sum_{i=1}^n (e_i dz^i{}^2), z = \sqrt{\sum_{i=1}^n e_i dz^i{}^2},$$

$$3) ds^2 = e^{-2\mu(z^1)} (2dz^1 dz^2 + \sum_{i=3}^n e_i dz^i{}^2)$$

( $e_i = \text{常数}$ ). 所有的 Riemann 次射影空间  $V_n$  是共形 Euclid 空间 (conformal Euclidean space). Riemann 次射影空间属于半可约 Riemann 空间类, 它们的度量有一个特殊的结构.

对于从共形 Euclid 空间类中区分出共形 Euclid 次射影空间的张量判别准则是存在的. 每一个 (除情形 3) 之外的) 次射影空间  $V_n$  在情形 1) 可实现为 Euclid 空间  $E_{n+1}$  中的一张超曲面, 在情形 2) 可实现为  $E_{n+1}$  中的旋转超曲面. 逆命题亦真: 在 Euclid 空间  $E_{n+1}$  ( $n > 2$ ) 中围绕一条非迷向轴的旋转超曲面是其度量为情形 2) 的 Riemann 次射影空间.

Riemann 次射影空间中的运动按通常的方式定义. 次射影空间  $V_n$  的表征事实是: 若  $V_n$  不是常曲率空间, 则它容许一个  $n(n-1)/2$  阶的极大可迁运动群, 反过来每一个容许  $n(n-1)/2$  阶极大可迁运动群的 Riemann 空间是一个次射影空间. Riemann 次射影空间  $V_n$  是有极大运动的非 Einstein 空间 (常曲率空间在 Einstein 空间中占有同样的位置).

次射影空间的概念容许有下列推广: 具有仿射联络的空间  $A_n$  称为广义次射影空间 (generalized subprojective space), 如果它的测地线落在 Euclid 平面  $E_{r+1}$  上 ( $1 \leq r \leq n-2$ ), 而且这些平面都经过一个固定的平面  $E_{r-1}$  (在有限远或无限远处).

#### 参考文献

[1] Каган, В. Ф., Субпроективные пространства, М., 1961. Л. А. Сидоров 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Schouten, J. A., Ricci calculus, Springer, 1954 (译自德文). 陈维桓 译

表示的子表示 [subrepresentation of a representation; подпредставление представления]

群 (代数、环或半群)  $X$  的表示  $\pi$  在不变子空间  $F \subset E$  中的线性表示 (linear representation)  $\rho$ , 其中  $E$  是表示  $\pi$  的向量 (拓扑向量) 空间, 而  $\rho$  由下列公式所定义:  $\rho(x)\xi = \pi(x)\xi$ , 对所有  $\xi \in F$ ,  $x \in X$ . 若  $\pi$  是群、拓扑代数、拓扑环或拓扑半群的连续表示 (continuous representation), 则它的任何子表示也是

连续的. А. И. Штерн 撰 石生明 译 王 杰 校

代换法则 [substitution rule; подстановки правило], 亦称代换规则

逻辑 - 数学演算中的推导法则 (derivation rule) 之一. 代换法则有各种不同形式. 例如, 在命题演算 (propositional calculus) 中, 代换法则是用一个公式代换命题变元在命题公式中的所有的出现. 在谓词演算 (predicate calculus) 中, 它是: a) 用一个公式代换谓词公式中的谓词变元 (predicate variable) (这里需要遵守一系列关于个体变元出现的限制以避免变元碰撞 (variable collision), 即出现在公式中的自由变元通过代换变为约束变元); b) 项的代换法则是用一个项代换谓词公式中相应类型的个体变元的自由出现 (这里也必须避免变元碰撞).

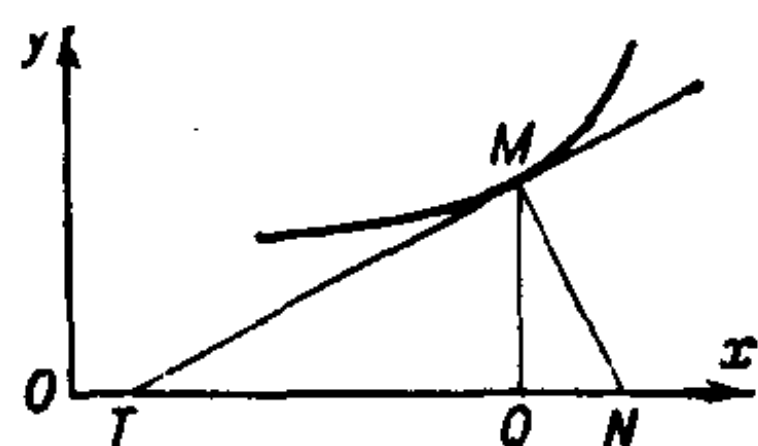
#### 参考文献

- [1] Новиков, П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973 (英译本: Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Oliver & Boyd and Acad. Press, 1964).
- [2] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.
- [3] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, 1 - 2, Springer, 1968 - 1970.

С. Н. Артемов 撰 陆跃飞 译

次切线和次法线 [subtangent and subnormal; подкасательная и поднормаль]

有向线段  $QT$  和  $QN$ , 它们是某一曲线在点  $M$  处的切线 (tangent line) 段  $MT$  和法线 (normal) 段  $MN$  在  $x$  轴上的投影 (见图).



如果这一曲线是函数  $y = f(x)$  的图形, 则次切线和次法线的长度分别等于

$$QT = -\frac{f(x)}{f'(x)}, \quad QN = f(x)f'(x),$$

其中  $x$  是点  $M$  的横坐标. 如果这一曲线由参数式给出:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

则

$$QT = -\frac{\psi(t)\varphi'(t)}{\psi'(t)}, \quad QN = \frac{\psi(t)\psi'(t)}{\psi'(t)},$$

其中  $t$  是确定曲线上点  $M$  的参数值.

БСЭ-3

#### 【补注】

[A1] Berger, M., Geometry, 2, Springer, 1989 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一 - 五卷, 科学出版社, 1987 - 1991).

[A2] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1 - 3, Chelsea, reprint, 1971.

[A3] Lamb, H., Infinitesimal calculus, Cambridge Univ. Press, 1924.

杜小杨 译

减法 [subtraction; вычитание]

一种算术运算, 是加法 (addition) 的逆运算, 即给定两项之和与其中的一项, 求另一项. 给定的和称为被减数 (minuend), 给定的一项称为减数 (subtrahend), 而所求的一项称为差 (difference). 减法的符号是  $-$  (减). 因此, 在表达式

$$a - b = c$$

中,  $a$  是被减数,  $b$  是减数,  $c$  是差.

#### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Cohn, P. M., Algebra, 1, Wiley, 1982.

杜小杨 译

对合子簇 [subvariety, involutive; инволютивное подобразие], 辛几何学中的

【补注】 设  $V$  是  $2n$  维向量空间,  $\omega$  是  $V$  上的非退化交错 2 形式. 给定  $V$  的子空间  $W$ , (按通常方式) 定义

$$W^\perp = \{x \in V : \omega(x, w) = 0, \forall w \in W\}.$$

如果  $W \subset W^\perp$ , 则称  $W$  是迷向子空间 (isotropic subspace); 如果  $W \supset W^\perp$ , 则称  $W$  为对合子空间 (involutive subspace) (或上迷向子空间 (co-isotropic subspace)); 如果  $W = W^\perp$ , 则称  $W$  是 Lagrange 子空间 (Lagrangian subspace).  $W$  是对合子空间的必要条件是  $\dim W \geq n$ .

现在设  $V$  是辛流形 (symplectic manifold)  $X$  的一个子簇 (可能有奇点; 或更一般地, 一个解析子集). 设  $\text{Reg}(V)$  是  $V$  的点集, 其中每一点有  $V$  中的一个邻域不含有任何奇点. 如果对于所有的  $p \in \text{Reg}(V)$ ,  $X_p$  的子空间  $V_p$  是对合的, 则称  $V$  是  $X$  的对合子簇 (involutive subvariety). 类似地可以定义迷向子簇 (isotropic subvariety), 和 Lagrange 子簇 (Lagrangian subvariety) 的概念. 若  $\text{Reg}(V)$  在  $V$  中是稠密的, 则  $V$  是对合的, 当且仅当  $X$  上任意两个在  $V$  上为零的  $C^\infty$  函数  $f, g$  的 Poisson 括号积  $\{f, g\}$  (根据  $X$  上的辛 2 形式来定义) 在  $V$  上也为零.

#### 参考文献



[A1] Libermann, P. and Marle, Ch. M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987 (译自法文). 陈维恒 译

充分统计量 [sufficient statistic; достаточная статистика], 概率分布族  $\{P_\theta: \theta \in \Theta\}$  的, 或参数  $\theta \in \Theta$  的

满足如下条件的统计量 (随机向量)  $X$ : 对于任意事件  $A$ , 条件概率  $P_\theta\{A|X=x\}$  不依赖于  $\theta$ . 此条件等价于: 在  $X=x$  的条件下, 任何其他统计量  $Y$  的条件分布不依赖于  $\theta$ .

关于充分统计量  $X$  的知识, 为对参数  $\theta$  的统计推断提供了完全的资料, 因为除  $X$  的分布所含关于参数  $\theta$  的信息外, 任何附加统计数据不会为此信息增加任何内容. 这一性质数学上表述了统计决策理论的结果之一: 基于充分统计量的决策规则集是本质完全类. 从原分布族转向充分统计量分布族, 称为统计问题的约化 (reduction of the statistical problem). 约化的含义是减小 (常是十分显著地减小) 观测空间的维数.

实际求充分统计量基于如下因子分解定理. 设分布族  $\{P_\theta\}$  受控于  $\sigma$  有限测度  $\mu$ , 而  $p_\theta = dP_\theta/d\mu$  是  $P_\theta$  对于测度  $\mu$  的密度. 统计量  $X$  对于分布族  $\{P_\theta\}$  是充分的, 当且仅当

$$p_\theta(\omega) = g_\theta(X(\omega))h(\omega), \quad (*)$$

其中  $g_\theta$  和  $h$  是非负可测函数 ( $h$  与  $\theta$  无关). 对于离散型分布, 作为  $\mu$  可以取“计数”测度: 这时, 或以 (\*) 中  $p_\theta(\omega)$  表示基本事件  $\omega$  的概率.

例如, 设  $X_1, \dots, X_n$  是独立随机变量列, 其中每个随机变量以概率  $v$  取 1 为值, 以概率  $1-v$  取 0 为值 (见 Bernoulli 方案 (Bernoulli scheme)). 那么

$$\begin{aligned} p_v(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n v^{x_i} (1-v)^{1-x_i} = \\ &= v^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-v)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}. \end{aligned}$$

如果令

$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad g_\theta = p_\theta, \quad h = 1(\theta = v),$$

则满足方程 (\*). 这样, 对于 Bernoulli 概形中的未知概率  $v$ , 经验频率

$$\hat{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

是充分统计量.

设  $X_1, \dots, X_n$  是独立正态分布随机变量, 其数学期望  $\mu$  和方差  $\sigma^2$  未知.  $X_1, \dots, X_n$  关于 Lebesgue 测度的联合分布密度为

$$p_{\mu, \sigma^2}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\begin{aligned} &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right] = \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left[ -\frac{n\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i \right], \end{aligned}$$

它仅仅通过变量

$$\sum_{i=1}^n x_i, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2$$

依赖于  $x_1, \dots, x_n$ . 因此, 向量统计量

$$X = \left( \sum_{i=1}^n X_i, \quad \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)$$

是二维参数  $\theta = (\mu, \sigma^2)$  的充分统计量. 这里, 样本均值

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

和样本方差

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$$

二者一起也是充分统计量, 因为统计量

$$\sum_{i=1}^n X_i, \quad \sum_{i=1}^n X_i^2$$

可以通过  $\hat{\mu}$  和  $\hat{\sigma}^2$  表示.

对于同一分布族可以存在多个充分统计量. 特别地, 全部观测值的总体 (上例中的  $(X_1, \dots, X_n)$ ) 是平凡充分统计量. 不过, 重要的是可以实现统计问题真正约化的统计量. 充分统计量称为最小的 (minimal) 或必要的 (necessary), 如果它是其他任何充分统计量的函数. 必要充分统计量能实现统计问题的最大限度约化. 在上例中求得的充分统计量是必要的.

充分性概念的重要应用, 是基于 Rao-Blackwell-Kolmogorov 定理 (Rao-Blackwell-Kolmogorov theorem) 改进无偏估计量的方法. 根据此定理, 如果  $X$  是分布族  $\{P_\theta\}$  的充分统计量,  $X_1$  是在向量空间  $\mathbf{R}^d$  取值的任意统计量, 则对于  $\mathbf{R}^d$  上的实连续凸函数  $g$ , 有

$$\mathbf{E}_\theta g(X_1 - \mathbf{E}_\theta(X_1)) \geq \mathbf{E}_\theta g(\hat{X}_1 - \mathbf{E}_\theta(\hat{X}_1)), \quad \theta \in \Theta,$$

其中  $\hat{X}_1 = \mathbf{E}_\theta(X_1|X)$  是统计量  $X_1$  关于  $X$  的条件数学期望 (由于  $X$  是充分统计量,  $\hat{X}_1$  实际上与  $\theta$  无关). 常用  $\mathbf{R}^d$  上的正定二次型作损失函数  $g$ .

统计量  $X$  称为完全统计量 (complete statistic), 若由等式  $\mathbf{E}_\theta f(X) \equiv 0 (\theta \in \Theta)$ , 可得关于  $P_\theta (\theta \in \Theta)$  几乎必然有  $f(X) = 0$ . Rao-Blackwell-Kolmogorov 定理的一条推论是: 如果存在完全充分统计量  $X$ , 则它

是其数学期望  $e(\theta) = E_\theta X$  关于  $\theta$  一致最优的无偏估计量. 在前面的例中有类似的情形. 例如, 在 Bernoulli 概形中, 经验频率  $\hat{v}$  是概率  $v$  的一致最优无偏估计量; 而样本均值  $\hat{\mu}$  和样本方差  $\hat{\sigma}^2$ , 是正态分布参数  $\mu$  和  $\sigma^2$  的一致最优无偏估计量.

在理论水平上, 有时并不使用充分统计量, 而宜使用充分  $\sigma$  代数. 设  $\{P_\theta: \theta \in \Theta\}$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{A})$  上的分布族, 则称子  $\sigma$  代数  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  为对于  $\{P_\theta\}$  充分的 (sufficient), 如果对于任何事件  $A \in \mathcal{A}$ , 存在不依赖于  $\theta$  的条件概率  $P_\theta(A|\mathcal{B})$ . 统计量  $X$  充分, 当且仅当它所诱导的  $\sigma$  代数  $\mathcal{A} = X^{-1}(\mathcal{B})$  充分.

#### 参考文献

- [1] Halmos, P. R. and Savage, L. I., Application of the Radon-Nikodym theorem on the theory of sufficient statistics, *Ann. Math. Stat.*, **20** (1949), 225 - 241.
- [2] Колмогоров, А. Н., «Изв. АН СССР сер. матем.», **14** (1950), 4, 303 - 326.
- [3] Rao, C. R., Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1973 (中译本: C. R. 劳, 线性统计推断及其应用, 科学出版社, 1987).

А. С. Холево 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.
- [A2] Kagan, A. M., Linnik, Yu. V. and Rao, C. R., Characterization problems in mathematical statistics, Wiley, 1973, Chapt. 8. 周概容 王健 译

和函数 [sum function; сумматорная функция], 函数  $f$  的

$x \geq 1$  的函数, 表示在自然数集  $n \leq x$  上函数  $f$  的值  $f(n)$  的和  $\sum_{n \leq x} f(n)$ . 和函数是表示数列的各种性质的基本方法之一.

和函数举例:  $\leq x$  的素数的个数;  $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$  —— Чебышев 函数 (Chebyshev function); 所有  $n \leq x$  的除数的个数, 等等. (见 [1], [2]).

基本问题是找出和函数的尽可能精确的表示式, 而对于没有渐近式的和函数, 则是寻求当  $x$  取大值时它的模的最佳估计.

**Cauchy 积分定理** (Cauchy integral theorem) 和形如

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$$

的 Dirichlet 级数 (Dirichlet series) 是研究和函数的解析方法的基础. 如果这级数当  $\operatorname{Re} s > \sigma_0 \geq 1$  时绝对收敛, 则对于非整数  $x$  及  $c > \sigma_0$ , 等式

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \frac{x^s}{s} ds$$

成立. 由此及利用  $F(s)$  的解析开拓, 移动积分路径至左边某直线  $\operatorname{Re} s = \sigma_1 < 0$ , 再沿新的路径估计积分, 就可以得到对和函数  $f$  的相应的估计. 例如, 当  $f(n) = \Lambda(n)$  时, 积分可以移至  $\operatorname{Re} s = -\infty$  上, 则得到关于  $\psi(x)$  的 Riemann-von Mangoldt 公式. 在这个方法的通常应用中, 下面的定理是已知的:

假设:  $f(n)$ ,  $l_n$  是复数,  $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha_r$ ,  $\gamma_r$  是实数,  $\sigma_r$ ,  $\beta_r$  是正数,  $\mu$  和  $\nu$  是  $\geq 1$  的整数,  $\Gamma$  是 gamma 函数, 及  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ .

1) 对于任意  $\varepsilon > 0$ ,  $f(n) \ll n^{\alpha+\varepsilon}$ ;

2) 在  $s = \sigma + it$ ,  $\sigma > 1 + \alpha$  上定义的函数

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$$

在全平面上是亚纯的, 且在带形  $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$  内有有限多个极点;

3) 当  $\sigma < 0$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} l_n \exp(\lambda_n s)$  绝对收敛;

4) 对于  $\sigma < 0$ ,

$$\prod_{r=1}^{\mu} \Gamma(\alpha_r + \beta_r s) F(s) = \prod_{r=1}^{\nu} \Gamma(\gamma_r - \delta_r s) \sum_{n=1}^{\infty} l_n \exp(\lambda_n s);$$

5)  $\beta_1 + \dots + \beta_{\mu} = \delta_1 + \dots + \delta_{\nu}$ ;

6) 如果假设有

$$\sum_{r=1}^{\nu} \gamma_r - \sum_{r=1}^{\mu} \alpha_r + \frac{1}{2} (\mu - \nu) = \eta,$$

则  $\eta \geq \alpha + 1/2$ .

对于固定的带形域  $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ , 存在常数  $\gamma = \gamma(\sigma_1, \sigma_2)$ , 使得估计式  $F(s) \ll \exp(\gamma|t|)$  在  $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$  及大的  $|t|$  上成立.

结论: 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 有

$$\sum_{n \leq x} f(n) = R(x) + O(x^{((\alpha+1)(2\eta-1)/(2\eta+1)) + \varepsilon}),$$

此处  $R(x)$  是函数  $F(s)x^s/s$  在带形

$$(\alpha+1) \frac{2\eta-1}{2\eta+1} < \sigma \leq \alpha+1$$

中所有极点上的残数和.

#### 参考文献

- [1] Titchmarsh, E. C., The theory of the Riemann zeta-function, Clarendon, 1951.

- [2] 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963. А. Ф. Лаврик 撰

【补注】关于  $\psi(x)$  ( $x > 1$ ) 的 Riemann-von Mangoldt 公式 (Riemann-von Mangoldt formula), 或者 von Mangoldt 公式 (von Mangoldt formula) 是

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum_n \frac{x^{-2n}}{2n} + \text{常数}.$$

这是 Riemann 主要公式 (Riemann main formula)



$$J(x) = \text{Li}(x) - \sum_p \text{Li}(x^p) - \log 2 + \int_0^x \frac{dt}{t(t^2-1)\log t}$$

的 von Mangoldt 的另一表示, 其中  $x > 1$ ,  $J$  函数 ( $J$ -function) 是

$$J(x) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n} + \sum_{p^n \leq x} \frac{1}{n} \right],$$

而  $\text{Li}(x)$  是对数积分 (logarithmic integral)

$$\text{Li}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right].$$

#### 参考文献

- [A1] Edwards, H. M., Riemann's zeta function, Acad. Press, 1974, Chapt. 3.

#### 【译注】

#### 参考文献

- [B1] Ivić, A., The Riemann zeta-function, John Wiley & Sons, 1985. 戚鸣皋 译 潘承彪 校

可和性域 [summability field; суммируемости поле], 求和法的收敛域 (convergence field of a summation method), 对于序列求和法的 (见求和法 (summation methods))

对于某种方法可和的所有序列的集合. 任意正则矩阵求和法 (matrix summation method) (亦见正则求和法 (regular summation methods)) 的可和性域, 不能包含所有有界序列 ([3]). 正则矩阵法的可和性域, 甚至一个发散序列有和的, 也不会仅由有界序列组成 ([4]). 然而, 正则矩阵求和法确实存在发散序列有和并且可和性域不含有有界发散序列的情形. 对于给定方法可和的有界序列的集合称为有界可和性域 (bounded summability field). 正则矩阵求和法的可和性域是具有连续坐标射影的完全局部凸度量空间.

#### 参考文献

- [1] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, Macmillan, 1950.  
[2] Кангро, Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5-70.  
[3] Steinhaus, H., Some remarks on the generalization of the concept of limit, *Prace. Mat. Fiz.*, **22** (1911), 121-134 (波兰文).  
[4] Mazur, S. and Orlicz, W., Sur les méthodes linéaires du sommation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **196** (1933), 32-34. И. И. Волков 撰 罗嵩龄 译

可和性乘子 [summability multipliers; суммируемости множители]

(对于级数的项) 数值因子  $\lambda_n$ , 它将一个依求和法 (summation methods)  $A$  可和的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

变成为依方法  $B$  可和的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n. \quad (2)$$

这时, 可和性乘子  $\lambda_n$  称为  $(A, B)$  型的可和性乘子. 例如, 当  $0 < s < k+1$  时, 数  $\lambda_n = 1/(n+1)^s$  是  $((C, k), (C, k-s))$  型可和性乘子 (见 Cesàro 求和法 (Cesàro summation methods)) (见 [1]).

可和性乘子理论中的基本问题是找出一个条件, 在此条件下数  $\lambda_n$  是一种类型或另一种类型的可和性乘子. 这个问题可以更恰当地叙述如下: 若  $X, Y$  为两类级数, 那么什么样的条件可以使数  $\lambda_n$  将  $X$  中的任意级数 (1) 变为属于  $Y$  的级数 (2)? 可和性乘子理论在外观上回到了 Dedekind-Hadamard 定理 (Dedekind-Hadamard theorem): 对于任何收敛级数 (1), 级数 (2) 收敛, 当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta \lambda_n| < \infty,$$

其中  $\Delta \lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$ . 对于 Cesàro 法的可和性, 这个定理可以推广.

#### 参考文献

- [1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.  
[2] Кангро, Г. Ф., «Ученые записки Тартуского университета», **37** (1955), 191-232.  
[3] Кангро, Г. Ф., Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5-70.  
[4] Барон, С., Введение в теорию суммируемости Таллин, 1977.  
[5] Moore, C. N., Summable series and convergence factors, Dover, reprint, 1966.

И. И. Волков 撰 罗嵩龄 译

强可和性 [summability, strong; суммируемость сильная], 数或函数 (或以  $S_n$  为部分和的级数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ) 的复序列  $\{S_n\}$  对于数  $S$  的

依方法  $A = |a_{nk}|$  的可和性 (见求和法 (summation methods)), 使对某一  $p > 0$ :

1) 序列

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |S_k - S|^p$$

对于每个  $n > 1$  及函数序列时几乎所有的  $x$  收敛;

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ . 保留 2), 并用下述 1') 代替 1):

1') 对于每个单调增加的指标序列  $\{v_k\}$ , 序列

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nv_k} |S_{v_k} - S|^p$$

对每个  $n > 1$  及函数序列时几乎所有的  $x$  收敛, 这就

引出了极强可和性 (very strong summability) 的概念.

强可和性概念的引进与 Fourier 级数的  $(C, 1)$  可和性有关 (见 Fourier 级数的求和 (summation of Fourier series)). 这一概念的重要性在强  $(C, 1)$  可和性的例子中得到很好的解释. 强  $(C, 1)$  可和性表明破坏序列  $\{S_n\}$  收敛性的部分和  $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots$ , 几乎完全没有位置, 即具有零密度. 与强可和性不同的是, 极强可和性表明序列  $\{S_n\}$  的收敛性会被很稀疏的序列  $\{S_{n_m}\}$  破坏.

#### 参考文献

- [1] Hardy, G. H. and Littlewood, J. E., Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **156** (1913), 1307 – 1309.
- [2] Алексич, Г., Проблема сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963 (英译本: Aleksich, G., Convergence problems of orthogonal series, Pergamon, 1961).
- [3] Zygmund, A., Trigonometric series, 2, Cambridge Univ. Press, 1988.
- [4] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).
- [5] Sunouchi, Gen-Ichirô, Strong summability of Walsh-Fourier series, *Tôhoku Math. J.*, **16** (1964), 228 – 237.
- [6] Sunouchi, Gen-Ichirô, *Acta Sci. Math.*, **27** (1966), 1 – 2, 71 – 76.
- [7] Болгов, В. А., Ефимов, А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», **35** (1971), 6, 1389 – 1408. (英译本: Bolgov, V. A. and Efimov, E. V., On the rate of summability of orthogonal series, *Math. USSR Izv.*, **5** (1971), 6, 1399 – 1417).
- [8] Zatewasser, Z., *Studia Math.*, **6** (1936), 82 – 88.
- [9] Leindler, L., Ueber die sehr starke Riesz-Summierbarkeit der Orthogonalreihen und Konvergenz lückenhafter Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), 3 – 4, 401 – 414.

А. В. Ефимов 撰 罗嵩龄 译

#### 可和函数 [summable function; суммируемая функция]

函数  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , 它定义在带非负测度的空间  $(X, \mu)$  上的 Lebesgue 积分 (Lebesgue integral)  $\int_X f d\mu$  是有限值. 在可测函数空间中, 可和函数的集合  $L(X)$  组成线性空间. 取其函数的绝对值, 以及一组有限个函数的最大值和最小值不会超出  $L(X)$  的范围. 若  $\mu X < \infty$ , 则  $L(X)$  在一致收敛 (uniform convergence) 意义下是封闭的. И. А. Виноградова 撰

【补注】  $(X, \mu)$  上的可和函数或 Lebesgue 可积函数 (Lebesgue integral functions) 的标准记法是  $L^1(\mu)$

或  $L^1(X, d\mu)$  (或  $L_1(\mu)$ ,  $L_1(X, d\mu)$ ).

#### 参考文献

- [A1] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1966, 24 (中译本: W. 卢丁, 实分析和复分析, 人民教育出版社, 1981).
- [A2] Shilov, G. E. and Gurevich, B. L., Integral, measure, and derivative: a unified approach, Dover, reprint, 1977, 29 ff (译自俄文).

周民强 译

求和 [summation; суммирование], 级数的, 序列的, 积分的

分别计算级数和, 序列极限以及积分值的方法. “求和”这个词也可以表示级数和 (序列极限, 积分值) 的实际定义, 其中这些值在通常定义中不存在, 即级数 (序列, 积分) 发散. 这种定义通常以规则形式给出, 并称之为级数 (序列, 积分) 的求和法, 见求和法 (summation methods).

И. И. Волков 撰 罗嵩龄 译

求和法 [summation methods; суммирования методы], 可和性方法 (summability methods)

构造级数广义和, 序列广义极限以及广义积分值的方法.

在数学分析中, 有必要将级数和 (序列极限, 积分值) 的概念推广到包括常规意义中级数 (序列, 积分) 发散的情形. 这种推广通常采用规则或算子的形式, 并称之为求和法 (summation method).

1) 以  $2\pi$  为周期的连续函数  $f$  的 Fourier 级数 (Fourier series), 在无穷点集  $E \subset [0, 2\pi]$  中可能发散. 该级数的前  $n$  项部分和的算术平均值序列  $\{\sigma_n(x)\}$ ,

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \dots + s_n(x)}{n+1}, \quad (1)$$

在整个  $x$  轴上一致收敛于  $f$ . 若级数的和定义为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x),$$

则在这个意义上,  $f$  的 Fourier 级数在整个  $x$  轴上一致收敛于  $f$ .

#### 2) 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad (2)$$

是由下面两个分别收敛于  $A$  和  $B$  的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ 与 } \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

相乘得到的, 仍可能证明它发散. 如果级数 (2) 的和仿例 1) 定义, 也就是用前  $n$  项部分和的算术平均值序列的极限定义, 那么在这个意义上两个给定级数的



积将收敛于和  $C = AB$ .

### 3) 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (3)$$

当  $|z| < 1$  时收敛于和  $1/(1-z)$ , 当  $|z| \geq 1$  时发散. 若 (3) 的和定义为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^n}{n!},$$

其中  $s_n$  为 (3) 的部分和, 则在这个意义上 (3) 对于满足条件  $\operatorname{Re} z < 1$  的所有  $z$  收敛, 并且和为函数  $1/(1-z)$  (见 **Borel 求和法** (Borel summation method)).

求和法的最重要性质是正则性 (见正则求和法 (regular summation methods)) 和线性性 (见线性求和法 (linear summation method)). 最普通的求和法都具有这些性质. 许多方法还有传递性 (见求和法的传递性 (translativity of a summation method)). 矩阵求和法与半连续求和法组成了更广泛的一类求和法 (见矩阵求和法 (matrix summation method); 半连续求和法 (semi-continuous summation method)). 这些方法是线性的, 并且对它们已经构造了正则性条件. 特别地, 矩阵求和法包括 **Voronoi 求和法** (Voronoi summation method) 及 **Cesàro 求和法** (Cesàro summation methods). 由行有限矩阵定义的方法 (见行有限求和法 (row-finite summation method)), 特别是由三角矩阵定义的方法 (见三角求和法 (triangular summation method)) 组成了矩阵求和法的一个子类. 在半连续求和法中有 **Abel 求和法** (Abel summation method), **Borel 求和法** (Borel summation method), **Mittag-Leffler 求和法** (Mittag-Leffler summation method), **Lindelöf 求和法** (Lindelöf summation method) 及 **Riesz 求和法** (Riesz summation method). 这些之外, 还存在其他形式的求和法, 如 **Borel 积分求和法** 及 **Hölder 求和法** (Hölder summation methods).

相同序列 (级数) 可能对一种方法可和, 而对另一种方法不可和. 对于给定方法可和的所有序列 (级数) 的集合, 称为该方法的 **可和性域** (summability field).

研究两种求和法, 如果一个方法的 **可和性域** 包含另一个的 **可和性域**, 就说是 **求和法的包含** (inclusion of summation methods); 如果域相同, 就说求和法等价 (equivalence). 如果一个求和法的域仅由收敛序列组成, 就说求和法与收敛等价. 确定求和法包含所需要的条件是可和性理论的问题之一. 两种或多种求和法可能相容, 可能不相容. 求和法称为 **相容的** (compatible), 如果它们没有和或者相同序列没有不同的极限. 这时, 如果从级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

依方法  $A$  的可和性, 能得到级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k u_k$$

依方法  $B$  可和, 就说数  $\lambda_k$  是  $(A, B)$  型的 **可和性乘子** (summability multipliers).

关于求和法有两种不同类型的定理. 在第一 (Abel) 型定理中, 序列的性质可以用来表示变换求和法后所得这个序列均值的性质. 例如, Cauchy 定理表明, 由  $s_n \rightarrow s$  总可得到  $(s_0 + \cdots + s_n)/(n+1) \rightarrow s$ . 在第二 (Tauber) 型定理中, 对应于给定求和法均值的性质, 加上附加条件, 可以表示被变换序列的性质 (见 **Tauber 定理** (Tauberian theorems)).

与通常的收敛相类似, 可以引进特殊形式可和性的概念: 绝对可和性, 无条件可和性, 强可和性, 殆可和性,  $\lambda$  可和性等.

广义极限概念也可应用于函数与积分中, 这时就说是函数 (或积分) 的求和. 例如, 对所有  $y$  都有定义的函数  $s(y)$ , 求和法与序列的矩阵求和法类似, 此序列由以  $c(x, y)$  为核的积分变换

$$t(x) = \int_0^{\infty} c(x, y) s(y) dy$$

给出, 若

$$\lim_{x \rightarrow \infty} t(x) = s,$$

就以与函数  $s(y)$  有关联的数  $s$  作为  $y \rightarrow \infty$  时的广义极限.

同样地, 广义积分

$$\int_0^{\infty} a(t) dt \quad (4)$$

有一种求和法就是由以  $K(x, t)$  为核的变换

$$\gamma(x) = \int_0^x K(x, t) a(t) dt$$

所组成, 若

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(x) = s,$$

则称积分 (4) 可和于值  $s$ .

由数列与函数列求和所引进的求和法的定义, 推广到包含任意集合的元素的序列, 求和法的一般定义就叙述为: 设  $X$  是给定集合,  $s(X)$  是元素  $\xi_n \in X$  的序列  $x = \{\xi_n\}$  的集合,  $\bar{A}$  是定义在取值于  $X$  的子集  $A^* \subset s(X)$  上的一个算子. 那么偶对  $(\bar{A}, A^*)$  称为定义在  $s(X)$  上的一种 **求和法** (summation method),  $A^*$  称为 **可和性域**. 这时, 称序列  $x \in A^*$  (或以  $u_k = \xi_k - \xi_{k-1}$  为项的级数  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ) 可和于极限  $\bar{A}(x)$ ,

这里  $\bar{A}(x) = \bar{A}x$ .

#### 参考文献

- [1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.
- [2] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, Macmillan, 1950.
- [3] Кангро, Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники, Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5-70 (英译文: Kangro, G. F., Theory of summability of sequences and series, J. Soviet Math. 5 (1970), 1, 1-45).
- [4] Барон, С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977.
- [5] Peyerimhoff, A., Lectures on summability, Springer, 1969.
- [6] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964.
- [7] Zeller, K. and Beekmann, W., Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1970.
- [8] Pitt, H., Tauberian theorems, Oxford Univ. Press, 1958.
- [9] Ganelius, T. H., Tauberian remainder theorems, Springer, 1971.
- [10] Petersen, G. M., Regular matrix transformations, McGraw-Hill, 1966.
- [11] Брудно, А. Л., «Матем. сб.», 16 (58), 2, (1945), 191-247. И. И. Волков 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Moore, C. N., Summable sequences and convergence factors, Dover, reprint, 1966. 罗嵩龄 译

#### 发散级数的求和 [summation of divergent series; суммирование расходящихся рядов]

利用求和法 (summation methods) 构造发散级数的广义和. 如果借助确定的规则  $P$ , 为级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad (*)$$

指定一个被称为级数和 (sum of the series) 的数, 那么就说该级数依求和法  $P$  是可和的 (summable), 其和为  $s$ , 或者说  $P$  可和于和  $s$ , 这个事实用下述记号中的一种表示:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = s(P), \quad \lim s_n = s(P),$$

$$P - \lim s_n = s,$$

其中  $s_n$  为级数 (\*) 的部分和. 这时, 数  $s$  也称为级数的  $P$  和 ( $P$ -sum). 例如, 对于级数 (\*), 它的前  $n$  项部分和的算术平均值序列  $\{\sigma_n\}$ :

$$\sigma_n = \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1}$$

就值得研究. 若当  $n \rightarrow \infty$  时  $\sigma_n$  有极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s.$$

则称级数 (\*) 依算术平均求和法 (arithmetical averages, summation method of) 是可和的, 其和为  $s$ , 并记为

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = s(C, 1)$$

或

$$\lim s_k = s(C, 1).$$

(亦见 Cesàro 求和法 (Cesàro summation methods)).

按照级数和的这种定义, 任何收敛级数必可和于它收敛的那个和, 此外, 存在着依这个方法可和的发散级数. 例如级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

依上述方法可和, 并且它的  $(C, 1)$  和等于  $1/2$ .

求和法的定义常常适合于那些需要研究的级数. 例如, 需要一种方法寻求整个级数类的和: 它不能与收敛相抵触, 也就是说, 对于收敛级数而言, 它的和就是级数收敛的那个和 (见正则求和法 (regular summation methods)); 最后, 对于级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda u_k + \mu v_k)$$

以  $\lambda U + \mu V$  为和的可和性, 可由给定的方法, 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad \text{与} \quad \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

分别以  $U$  与  $V$  为和的可和性得出 (线性性质). 也见发散级数 (divergent series).

#### 参考文献

- [1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.
- [2] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, Macmillan, 1950.
- [3] Кангро, Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники, Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5-70.
- [4] Барон, С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977.
- [5] Peyerimhoff, A., Lectures on summability, Springer, 1969.
- [6] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964.
- [7] Zeller, K. and Beekmann, W., Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1970.
- [8] Petersen, G. M., Regular matrix transformations, McGraw-Hill, 1966.

И. И. Волков 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Moore, C. N., Summable series and convergence



factors, Dover, reprint, 1966.

罗嵩龄 译

Fourier 级数的求和 [summation of Fourier series; суммирование рядов Фурье]

用求和法 (summation methods) 建立 Fourier 级数 (Fourier series) 的平均. 发展最好的是关于三角函数系的 Fourier 级数求和理论. 在这种情形时, 对于 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x)$$

的函数  $f \in L(0, 2\pi)$ , 相应于求和法的平均的性质已被研究. 例如, 对应于 Abel-Poisson 求和法 (Abel-Poisson summation method), 平均是单位圆盘上的调和函数

$$f(r, x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k A_k(x);$$

而对应于算术平均求和法 (arithmetical averages, summation method of), 平均是 Fejér 和

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) A_k(x).$$

除了这两种方法外, 在一维三角级数理论中最重要的求和法还有: Cesàro 求和法 (Cesàro summation methods), Riesz 求和法 (Riesz summation method), Riemann 求和法 (Riemann summation method), Бернштейн-Rogosinski 求和法 (Bernstein-Rogosinski summation method) 以及 de la Vallée-Poussin 求和法 (de la Vallée-Poussin summation method). 利用或多或少随意的  $\lambda$  乘子序列的求和法

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{n,k} A_k(x)$$

也已有研究.

Fourier 级数的求和应用于下述问题.

用 Fourier 级数表示函数. 例如, 在  $f(x)$  的连续点上, Abel-Poisson 平均  $f(r, x)$  当  $r \rightarrow 1-0$  及 Fejér 和  $\sigma_n(x)$  当  $n \rightarrow \infty$  时都收敛到  $f(x)$ , 而且如果  $f(x)$  在所有点上都连续, 则上述收敛是一致的; 对于任意函数  $f \in L$ , 这些平均依  $L$  的度量收敛到  $f$ . Fourier 级数的部分和不具有这些性质.

构造具有良好逼近性质的多项式. Jackson 不等式 (Jackson inequality) 的建立实际上借助于 Fourier 级数的求和. 为了解决这一问题, 除了应用一些已知的求和法外, 还提出了一些新方法, 诸如 Jackson 奇异积分 (Jackson singular integral) 及 de la Vallée-Poussin 和 (de la Vallée-Poussin sum).

函数的许多性质可以用 Fourier 级数的平均刻画. 例如, 函数  $f$  本质有界, 当且仅当存在常数  $M$

使得  $|\sigma_n(x)| \leq M$  对所有的  $n$  及  $x$  成立.

Fourier 级数的求和在多重三角级数理论中起着基本的作用. 例如, 经常使用足够高阶的 Riesz 平均代替球形部分和.

也研究了关于其他正交函数系的 Fourier 级数的求和, 包括具体的函数系和函数系类 (例如正交多项式) 以及任意的规范正交系.

#### 参考文献

- [1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).
- [2] Zygmund, A., Trigonometric series, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1988.
- [3] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.
- [4] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.
- [5] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960 (英译本: Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963).

С. А. Теляковский 撰 朱学贤 译 刘和平 校

超群 [super-group; супергруппа], Lie 超群 (Lie super-group)

超流形 (super-manifold) 范畴中的一个群对象. 超群  $\mathcal{G}$  是由交换超代数范畴到群范畴的一个函子  $\mathcal{G}$  定义的. Lie 定理 (Lie theorem) 适用于超群, 它给出了超群和有限维 Lie 超代数之间的对应 (见超代数 (superalgebra)).

例. 1) 超群  $GL_{n|m}$  定义为函子  $C \mapsto GL_{n|m}(C)$ , 其中  $GL_{n|m}$  是  $M_{n|m}(C)$  的偶可逆矩阵群 (见超空间 (super-space)), 即形如

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

的矩阵, 此处  $X$  和  $T$  是  $C_0^-$  上阶为  $n, m$  的可逆矩阵,  $Y$  和  $Z$  是  $C_1^-$  上的矩阵. 同态  $GL_{n|m}(C) \rightarrow C_0^*$  由公式

$$\text{Ber} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \det(X - YT^{-1}Z) \det T^{-1}$$

定义 (Березин 公式);

2)  $SL_{n|m} = \text{Ker Ber}$ ;

3)  $OS_{p|2m} \subset GL_{n|2m}$  和  $\Pi_n \subset GL_{n|m}$ ; 它们保持偶或奇的对称非退化双线性型不变.

对于任意超群  $\mathcal{G}$  及其超子群  $\mathcal{H}$ , 有一个相关超流形  $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ , 由函子  $C \mapsto \mathcal{G}(C)/\mathcal{H}(C)$  表示. 这个超流形是  $\mathcal{G}$  的一个齐性空间.

#### 参考文献

- [1] Manin, Yu. I., Gauge fields and complex geometry, Springer, 1988 (译自俄文).

- [2] Березин, Ф. А., Кац, Г. И., «Матем. сб.», 82 (1970), 343 – 350 (英译本: Berezin, F. A., Introduction to superanalysis, Reidel, 1987).
- [3] Лейтес, Д. А., «Успехи матем. наук», 35 (1980), 1, 3 – 57 (英译本: Leites, D. A. (ed.), Seminar on supermanifolds, Kluwer, 1991).

Д. А. Лейтес 撰 张英伯 译

### 超流形 [super-manifold; супермногообразие]

流形 (manifold) 概念的一个推广, 其上的函数取值于交换超代数 (super algebra). 带有结构层  $\mathcal{O}_M$  的微分流形  $M$  上的超流形结构定义为层  $\mathcal{O}_M$  上的交换超代数层  $\mathcal{O}_\infty$ , 任意点  $p \in M$  有一个邻域  $U$ , 使得环化空间  $(U, \mathcal{O}_U)$  同构于  $(U, (\mathcal{O}_U \otimes \Lambda(\mathbb{R}^m)))$ , 此处  $\Lambda(\mathbb{R}^m)$  是有  $m$  个奇生成元的外代数. 解析超流形可用同样的方法定义. 微分 (或解析) 超流形构成一个范畴, 它们的态射是戴环空间甚至结构层上的态射. 数对  $(\dim M, m)$  叫作超流形的维数 (dimension of the super-manifold). 形如  $(U, \mathcal{O}_U \otimes \Lambda(\mathbb{R}^m))$  的超流形叫作  $(n, m)$  维超区域 (super-domain), 此处  $(U, \mathcal{O}_U)$  是  $\mathbb{R}^n$  中的开子流形. 每个超流形都局部同构于一个超区域.

令  $E$  是  $M$  上的向量丛, 则丛  $\Lambda E$  的截面层  $L_{\Lambda E}$  定义了  $M$  上的一个超流形结构. 每个微分超流形都同构于一个形如  $(M, L_{\Lambda E})$  的超流形; 但在复分析中, 此结论不真. 这时在超流形范畴中比在向量丛范畴中有更多的态射.

一个超流形  $\mathcal{M}$  可以由从交换超代数范畴到集范畴的函子  $\mathcal{M}_-$  来定义; 该函子将每个超代数  $C$  对应到集合  $\mathcal{M}(C) = \text{Mor}(\text{Spec } C, \mu)$ , 此处  $\text{Spec } C$  是  $C$  中素理想的集合, 带有超代数的自然层结构 (见可表示函子 (representable functor)).

微分流形上的分析的基本概念亦被应用于超流形.

超流形也出现在理论物理学中; 它能够将粒子的 Bose-Einstein 统计法 (Bose-Einstein statistics) 以及 Fermi-Dirac 统计法 (Fermi-Dirac statistics) 统一到单一的多重谱, 也可将规范理论中的内部和动力对称统一到单一的超群.

### 参考文献

- [1] Березин, Ф. А., Кац, Г. И., «Матем. сб.», 82 (1970), 343 – 350 (英译本: Berezin, F. A., Introduction to superanalysis, Reidel, 1987).
- [2] Лейтес, Д. А., «Успехи матем. наук», 35 (1980), 1, 3 – 57 (英译本: Leites, D. A., (ed.): Seminar on supermanifolds, Kluwer, 1990).

Д. А. Лейтес 撰

【补注】如上所述, 超流形研究的部分动力来自理论物理学, 特别是超对称和超重力, [A4]. 并非所有的

作者都认为上述定义相对于这些目的而言是最好的, 见 [A2], [A3]. [A1] 中讨论了对于一个超流形的“良行为”范畴的“令人满意的公理”. 超流形的某些定义满足这些公理, 例如上述定义, 而另一些则不满足.

### 参考文献

- [A1] Rothstein, M., The axioms of supermanifolds and a new structure arising from them, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 297 (1986), 159 – 180.
- [A2] Seiert, H. J., Clarke, C. J. S., Rosenblum, A. (eds.): Mathematical aspects of superspace, Reidel, 1984.
- [A3] Bartocci, Cl., Bruzzo, U. and Hernández-Ruipérez, D., The geometry of supermanifolds Kluwer, 1991.
- [A4] De Witt, B., Supermanifolds, Cambridge Univ. Press, 1984.
- [A5] Leites, D. A., Introduction to the theory of supermanifolds, *Russian Math. Surveys*, 35 (1980), 1, 1 – 64. (*Uspekhi Mat. Nauk*, 35 (1980), 1, 3 – 58.)
- [A6] Berezin, F. A. and Shubin, M. A., The Schrödinger equation, Kluwer, 1991. Supplement 3: D. A. Leites, Quantization and supermanifolds.

张英伯 译

### 超空间 [super-space; суперпространство]

域  $k$  上一个向量空间 (vector space)  $V$  被赋予一个  $\mathbb{Z}/2$  分次  $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ . 空间  $V_{\bar{0}}$  和  $V_{\bar{1}}$  的元素分别称为偶的与奇的; 对于  $x \in V_i$ , 奇偶性  $p(x)$  定义为  $i (i \in \mathbb{Z}/2 = \{\bar{0}, \bar{1}\})$ . 每个超空间  $V$  带有与之关联的另一个超空间  $\Pi(V)$ , 使得  $\Pi(V)_i = V_{i+\bar{1}}$  ( $i \in \mathbb{Z}/2$ ). 数对  $(m, n)$  称为超空间  $V$  的维数 (dimension of the super-space), 其中  $m = \dim V_{\bar{0}}$ ,  $n = \dim V_{\bar{1}}$ . 域  $k$  通常被认为是一个具有维数  $(1, 0)$  的超空间.

对于两个超空间  $V$  和  $W$  来说, 空间  $V \oplus W$ ,  $\text{Hom}_k(V, W)$  和  $V^*$  等的超空间结构自然地定义. 尤其, 一个线性映射  $\varphi: V \rightarrow W$  称为偶的, 如果  $\varphi(V_i) \subset W_i$ ; 称为奇的, 如果  $\varphi(V_i) \subset W_{i+\bar{1}}$ . 一个齐次双线性型  $\beta: V \otimes V \rightarrow k$  称为对称的, 如果

$$\beta(y, x) = (-1)^{p(x)p(y) + p(\beta)(p(x) + p(y))} \beta(x, y);$$

称为斜对称的, 如果

$$\beta(y, x) = -(-1)^{p(x)p(y) + p(\beta)(p(x) + p(y))} \beta(x, y).$$

所有这些概念同样地适用于在一个任意交换超代数 (superalgebra)  $C$  上的  $\mathbb{Z}/2$  分次自由模  $V$ ,  $V$  里的基通常这样选择, 使得其最初的向量都是偶的, 而其最后的向量均为奇的. 模  $V$  的任一自同态  $\varphi$  在这样的基下记作一个分块矩阵



$$\alpha = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix},$$

其中  $X \in M_n(C)$ ,  $T \in M_m(C)$ , 使得若  $\varphi$  是偶的, 则  $X$  和  $T$  由偶元素组成, 以及  $Y$  和  $Z$  由奇元素组成, 反之若  $\varphi$  是奇的, 则  $X$  和  $T$  由奇元素组成, 以及  $Y$  和  $Z$  由偶元素组成 (在前面的情况下, 矩阵  $\alpha$  是偶的, 在后面的情况下,  $\alpha$  是奇的).

## 参考文献

- [1] Березин, Ф. А., Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными, М., 1983 (英译本: Berezin, F. A., Introduction to supersanalysis, Reidel, 1987).

- [2] Leites, D. A. (ed.), Seminar on super-manifolds, Kluwer, 1990. Д. А. Лейтес 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Berezin, F. A. and Shubin, M. A., The Schrödinger equation, Kluwer, 1991. Supplement 3: Leites, D. A. Quantization and supermanifolds.

蒋滋梅 译

## 超代数 [superalgebra; супералгебра]

域  $k$  上的  $\mathbb{Z}/2$  分次代数 (graded algebra), 即  $k$  上的一个超空间 (super-space)  $A$ , 带有一个偶线性映射  $A \otimes A \rightarrow A$ . 一个超代数被称为交换的 (commutative) (分次交换的 (graded-commutative) 或超交换的 (supercommutative)), 若

$$ab = (-1)^{p(a)p(b)}ba, a, b \in A;$$

这里  $p$  是奇偶性, 即  $\mathbb{Z}/2$  分次.

超代数的定义可以被推广到标量区域是任意交换结合超代数  $C$  的情形.

$C$  上结合超代数的例子是: 形如

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$$

的矩阵代数  $M_{m|n}(C)$ , 这里  $X \in M_m(C)$ ,  $T \in M_n(C)$ , 有一个自然的  $\mathbb{Z}/2$  分次 (见超空间 (super space));  $C$  上  $\mathbb{Z}/2$  分次模  $M$  的张量代数 (tensor algebra)  $T(M)$ ; 模  $M$  的对称代数 (symmetric algebra)  $S(M) = T(M)/I$ , 这里  $I$  是由形如

$$x \otimes y - (-1)^{p(x)p(y)} y \otimes x$$

的元素生成的理想; 以及模  $M$  的外代数 (exterior algebra)  $\Lambda(M) = S(\Pi(M))$  (后两个超代数是交换的).

带有乘法  $[\cdot, \cdot]$  的超代数  $\mathfrak{G}$  称为 Lie 超代数 (Lie superalgebra), 如果对所有的  $x, y, z \in \mathfrak{G}$ ,

$$[x, y] = (-1)^{p(x)p(y)+1} [y, x],$$

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{p(x)p(y)} [y, [x, z]]$$

(当  $p(x) = \bar{1}$ ,  $\text{char } k = 3$  时,  $[x, [x, x]] = 0$ ). 特别地, 当特征为 2 时不存在 Lie 超代数, 仅存在  $\mathbb{Z}/2$  分次 Lie 代数.

例. 任何结合的超代数, 以换位 (commutation) (超换位子差分 (supercommutator difference))

$$[x, y] = xy - (-1)^{p(x)p(y)+1} yx$$

作为括号运算; 任何超代数  $A$  的导子 (derivation) 代数  $\text{Der } A$  (即线性变换  $\delta: A \rightarrow A$  的代数, 其中  $\delta(ab) = (\delta a)b + (-1)^{p(\delta)p(a)} a(\delta b)$ ), 连同换位运算. 对任何 Lie 超代数  $\mathfrak{G}$ , 存在一个结合的泛包络超代数, 并且 Birkhoff-Witt 定理 (Birkhoff-Witt theorem) 的直接推广成立.

域  $C$  上的有限维单 Lie 超代数的分类已经知道 (见 [2], [3]). 它们被分成经典型 Lie 超代数 (Lie superalgebras of classical type) (由 Lie 代数  $\mathfrak{g}_0$  是约化的这一事实所刻画) 和 Cartan 型 Lie 超代数 (Lie superalgebras of Cartan type). 经典型 Lie 超代数由以下一系列矩阵代数完全给出:

$$\mathfrak{sl}(m, n) = \left\{ \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} \in M_{m|n}(C) : \text{Tr } X = \text{Tr } Y \right\}$$

$$(m \neq n);$$

对一个偶对称非退化双线性型  $\beta$

$$\mathfrak{osp}(m, 2n) =$$

$$= \{ \alpha \in M_{m|n}(C) : \beta(\alpha(x), y) + (-1)^{p(\alpha)p(x)} \beta(x, \alpha(y)) = 0 \};$$

对一个奇对称非退化双线性型  $\beta$

$$\mathfrak{pe}(n) = \{ \alpha \in M_{n|n}(C) : \beta(\alpha(x), y) + \beta(x, (-1)^{p(\alpha)p(x)} \alpha(y)) = 0 \};$$

$$\mathfrak{spe}(n) = \mathfrak{pe}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, n),$$

$$\mathfrak{q}(n) = \left\{ \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix} \in M_{n|n}(C) : \text{Tr } Y = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \alpha \in M_{n|n}(C) : \left[ \alpha, \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{bmatrix} \right] = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{sq}(n) = \{ \alpha \in \mathfrak{q}(n) : q \text{Tr } \alpha = 0 \},$$

这里

$$q \text{Tr} \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \text{Tr } B \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{psq}(n) = \mathfrak{sq}(n) / \{ cE : c \in C \};$$

及某些例外代数 (17, 31 和 40 维的). Cartan 型超

代数是代数  $\text{Der } \Lambda(C^n)$  及其超子代数, 类似于单 Lie 分次代数  $W_n, S_n, H_n$  (见分次 Lie 代数 (Lie algebra, graded)).

单 Lie 超代数的实结构分类和半单 Lie 超代数由单 Lie 超代数的刻画也已解决.

Lie 超代数的线性表示理论实质上比 Lie 代数的更为复杂, 单 Lie 超代数的表示一般不是完全可约的, 而可解 Lie 超代数的不可约表示未必是一维的.  $C$  上有限维单 Lie 超代数的不可约表示存在一个根据首权进行的分类 (见 [1], [2]). 有限维表示的明确的刻画, 如同这些代数的一系列特征标公式 (character formula) 一样, 已经得到 ([1]).

#### 参考文献

- [1A] Leites, D. A., Lie superalgebras, *Josmar* 30 (1984).
- [1B] Leites, D. A. (ed), Seminar on supermanifolds, Kluwer, 1990.
- [2] Kac, V. G., Lie superalgebras, *Adv. Math.*, 26 (1977), 8 - 96.
- [3] Scheunert, M., The theory of Lie superalgebras. An introduction, Springer, 1979. Д. А. Лейтес 撰
- 【补注】  $C$  上有限维单 Lie 超代数的分类由 V. G. Kac 在 1975 年获得 (见 [2]).

可解 Lie 超代数有限维不可约表示的分类可在 [2] 中找到.

单 Lie 超代数的有限维不可约表示分成两类: 典型的和非典型的 (例外的). 在 [A1] 中计算了典型表示 (typical representation) 的特征标. 非典型表示 (atypical representation) 的特征标, 甚至  $sl(m, n)$  的情形, 还不知道.

#### 参考文献

- [A1] Kac, V. G., Representations of classical Lie superalgebras, in K. Bleuler, et al. (ed.), *Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics II*, Lecture notes in math., Vol. 676, Springer, 1978, 597 - 626.
- [A2] Berezin, F. A. and Shubin, M. A., The Schrödinger equation, Kluwer, 1991. Supplement 3, D. A. Leites, Quantization and supermanifolds.
- [A3] Berezin, F. A., Introduction to superanalysis, Reidel, 1987 (译自俄文). 蔡传仁 译

**超有效估计量** [superefficient estimator 或 hyperefficient estimator; сверхэффективная оценка]

术语“超有效估计量序列”的通用简称, 指比未知参数的相合最大似然估计量序列好 (更有效) 的、相合渐近正态估计量序列.

设  $X_1, \dots, X_n$  是取值于样本空间  $(X, \mathcal{B}, P_\theta)$  ( $\theta \in \Theta$ ) 的随机变量. 假设对于分布族  $\{P_\theta\}$ , 存在参数  $\theta$  的相合最大似然估计量  $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$  的序列

$\{\theta_n\}$ . 其次, 设  $\{T_n\}$  是参数  $\theta$  的渐近正态估计量  $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$  的序列. 假如对于一切  $\theta \in \Theta$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_\theta [n(T_n - \theta)^2] \leq \frac{1}{I(\theta)},$$

其中  $I(\theta)$  是 Fisher 信息量 (Fisher amount of information), 并且至少在一个点  $\theta^*$  ( $\theta^* \in \Theta$ ), 满足严格不等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\theta^*} [n(T_n - \theta^*)^2] < \frac{1}{I(\theta^*)}, \quad (*)$$

则称序列  $\{T_n\}$  关于平方损失函数为超有效的 (super-efficient), 而使 (\*) 式成立的点  $\theta^*$  称为超有效点 (point of superefficiency).

#### 参考文献

- [1] Ибрагимов, И. А., Хасьминский, Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979 (英译本: Ibragimov, I. A. and Khas'minskiĭ, R. Z., Statistical estimation: Asymptotic theory, Springer, 1981).
- [2] Schmetterer, L., Introduction to mathematical statistics, Springer, 1974 (译自德文).
- [3] Le Cam, L., On some asymptotic properties of maximum likelihood estimates and related Bayes estimates, *Univ. California Publ. Stat.*, 1 (1953), 277 - 330. М. С. Никулин 撰 周概容 译

**母图** [supergraph; надграфик], 函数的

设  $f: X \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  为定义在某集合  $X$  上, 在扩充的实轴  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$  上取值的函数, 则  $f$  的母图是 Descartes 积  $X \times \mathbf{R}$  的子集, 它是由在  $f$  的图“之上”的所有点  $(x, \alpha)$  组成. 母图有时也称作上境图 (epigraph) 且记作  $\text{epi } f$ :

$$\text{epi } f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbf{R} : \alpha \geq f(x)\}.$$

母图在  $X$  上的投影称作  $f$  的有效定义域 (effective domain), 记作  $\text{dom } f$ :

$$\text{dom } f = \{x \in X : f(x) < +\infty\}.$$

称函数  $f$  是正常的 (proper), 如果

$$f(x) > -\infty, \quad \forall x, \quad \text{且 } \text{dom } f \neq \emptyset.$$

定义在实向量空间  $X$  上的函数  $f: X \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  是凸的 (convex), 当且仅当  $\text{epi } f$  是  $X \times \mathbf{R}$  的凸子集. 定义在拓扑空间  $X$  上的函数  $f: X \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  是上半连续的 (upper semi-continuous), 当且仅当  $\text{epi } f$  是闭集.

В. М. Тихомиров 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970, p. 23; 307. 赵希顺 译



上调和函数 [superharmonic function; супергармоническая функция]

在 Euclid 空间  $\mathbf{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) 或者调和空间中点  $x$  的函数  $u(x)$ , 使得  $-u(x)$  是下调和函数 (subharmonic function).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】既是下调和, 又是上调和的函数称为调和函数 (harmonic function).

吴炯圻 高琪仁 译

上抛物函数 [superparabolic function; суперпараболическая функция], 上热函数 (supercaloric function)

使得  $-v(x, t)$  是下抛物函数 (subparabolic function) 的函数  $v(x, t)$ , 其中  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

Е. Д. Соломенцев 撰 高琪仁 吴炯圻 译

函数的叠加 [superposition of functions; суперпозиция функций], 函数的合成 (composition of functions)

两个 (或更多个) 函数合成的函数.

王斯雷 译

超可解群 [supersolvable group 或 supersoluble group; сверхразрешимая группа]

一个群  $G$ , 它具有有限的正规子群列 (subgroup series)

$$G = G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_{n+1} = E,$$

且列中每个商群  $G_{i-1}/G_i$  是循环群. 超可解群皆为多循环群 (polycyclic group). 超可解群的子群和商群仍超可解, 超可解群的换位子群是幂零群. 一个有限群为超可解的, 当且仅当它的所有极大子群有素数指数 (Huppert 定理 (Huppert theorem)).

Н. Н. Вильямс 撰

【补注】

参考文献

[A1] Doerk, K. and Hawkes, T., Finite soluble groups, de Gruyter, 1992, p. 483.

[A2] Hall, M., The theory of groups, Macmillan, 1959 Sects. 10.1; 10.5 (中译本: M. 赫尔, 群论, 科学出版社, 1984).

石生明 译 王杰 校

支撑函数 [support function; опорная функция], 支撑泛函 (support functional), 实向量空间  $X$  中集合  $A$  的

对偶于  $X$  的向量空间  $Y$  上的函数  $sA$ , 由以下关系定义:

$$(sA)(x) = \sup_{y \in A} \langle x, y \rangle.$$

例如, 作为其共轭空间的对偶的赋范空间中单位球面

的支撑函数是其共轭空间的范数.

支撑函数总是凸的、闭的和正 (一次) 齐次的. 算子  $s: A \rightarrow sA$  是从  $X$  中闭凸集族到闭凸齐次函数族上的一一映射; 其逆算子是支撑函数 (在零点) 的次微分 (subdifferential). 事实上, 如果  $A$  是  $X$  中的凸闭子集, 则  $\partial(sA) = A$ ; 如果  $p$  是  $Y$  上的闭凸齐次函数, 则  $s(\partial p(0)) = p$ . 这两个关系式 (由 Fenchel-Moreau 定理导出的结果, 见共轭函数 (conjugate function)) 也表示了闭凸集和闭凸齐次函数之间的对偶性.

联系算子  $s$  与代数和集合论运算的关系的例子是:

$$s(\lambda C) = \lambda sC, \lambda > 0; s(A_1 + A_2) = sA_1 + sA_2;$$

$$s(\text{conv}(A_1 \cup A_2))(x) = \max(sA_1(x), sA_2(x)).$$

参考文献

[1] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.

[2] Minkowski, H., Geometrie der Zahlen, Chelsea, reprint, 1953.

[3] Minkowski, H., Gesammelte Abhandlungen, 2 Teubner, 1911.

[4] Fenchel, W., On conjugate convex functions, Canad. J. Math., 1 (1949), 73 - 77.

[5] Fenchel, W., Convex cones, sets and functions, Princeton Univ. Press, 1953.

[6] Hörmander, L., Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe, Ark. Mat., 3 (1955), 181 - 186.

В. М. Тихомиров 撰

【补注】支撑函数在泛函分析和凸分析的其他应用, 例如最优化和数的几何中, 有重要作用.

已发现  $\mathbf{R}^{2n}$  中闭凸域的支撑函数在整函数的增长 (和零点分布) 的研究中的应用, 如见 Borel 变换 (Borel transform); 整函数 (entire function); 增长标形 (growth indicatrix).

参考文献

[A1] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.

[A2] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in J. Tölke and J. M. Wills (eds.): Contributions to Geometry, Birkhäuser, 1979, 13 - 59.

陆珊年 译

函数  $f$  的支集 [support of a function; носитель функции], 定义在拓扑空间  $X$  上的

使数值函数  $f$  在余集  $X \setminus S$  上处处为 0 的最小闭集  $S = \text{supp } f \subset X$ . 换言之,  $S$  为  $X$  中使  $f(x) \neq 0$

的所有点  $x$  所成点集的闭包. E. Д. Соломенцев 撰  
 【补注】称函数  $f$  具有紧支集 (compact support), 若  $\text{supp } f$  为紧集. 取值于实数域  $\mathbf{R}$  或复数域  $\mathbf{C}$  (或其他环或域) 的具紧支集的函数, 构成一个向量空间.

#### 参考文献

- [A1] Rudin, W., Real and complex analysis, Mc Graw-Hill, 1966, p. 38 (中译本: W. 卢丁: 实分析与复分析, 人民教育出版社, 1981). 王斯雷 译

**广义函数的支集** [support of a generalized function; обобщенной функции носитель]

使得该广义函数 (generalized function) 在其任何邻域内不为零的那些点 (且只是那些点) 的集合.  $D'(O)$  中的一个广义函数  $f$  在一开集  $O' \subset O$  为零, 如果对所有的  $\varphi \in D(O')$ ,  $(f, \varphi) = 0$ . 用单位分解可证明如果  $D'(O)$  中广义函数  $f$  对每点  $y \in O$  在某邻域  $U_y \subset O$  为零, 则  $f$  在  $O$  中为零. 其中  $f$  为零的所有邻域之并, 称为  $f$  的零集 (zero set) 且记为  $O_f$ .  $f$  的支集, 记为  $\text{supp } f$ , 是  $O_f$  在  $O$  中的补, 即  $\text{supp } f = O \setminus O_f$  是  $O$  中闭集. 如果  $f$  是  $O$  中的一个连续函数, 则  $f$  的支集的一个等价定义如下:  $\text{supp } f$  是在其上  $f$  为零的点的集合的补集在  $O$  中的闭包 (见函数的支集 (support of a function)). 例如,  $\text{supp } x = \mathbf{R}^1$ ,  $\text{supp } \delta = \{0\}$ .

一个广义函数的奇异支集 (singular support) (sing-sup) 是使得该广义函数在其任何邻域中不等于  $C^\infty$  函数的那些点 (且只是那些点) 的集合. 例如,  $\text{sing supp } x = \emptyset$ ,  $\text{sing supp } \delta = \{0\}$ . В. С. Владимиров 撰  
 【补注】上面用到的零集概念有点不寻常且与普通函数 (不是广义函数) 的零集不一致, 后者是指函数取零值的点的集合. 当然, 对广义函数  $f$  语句 " $f(x) = 0$ " 无意义.

广义函数  $f$  的支集中的一个点  $x_0$  称为  $f$  的本质点 (essential point), 见 [A4].

#### 参考文献

- [A1] Schwartz, L., Théorie des distributions, Hermann, 1966.  
 [A2] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 1, Springer, 1983.  
 [A3] Vladimirov, V. S., Drozzinov, Yu. N. and Zavalov, B. I., Tauberian theory for generalized functions, Kluwer, 1988 (译自俄文).  
 [A4] Gel'fand, I. M. and Shilov, G. E., Generalized functions, 1, Properties and operations, Acad. Press, 1964, p.5 (译自俄文; 中译本: И. М. 盖尔芳特等, 广义函数 (1), 科学出版社, 1965).

葛显良 译 鲁世杰 校

**测度  $\mu$  的支集** [support of a measure  $\mu$ ; носитель меры  $\mu$ ]

集合  $S(\mu) = G \setminus G_0(\mu)$ , 其中  $G$  是局部紧 Hausdorff 空间,  $\mu$  是此空间上给定的正则 Borel 测度,  $G_0(\mu)$  是使  $\mu(G_0) = 0$  的最大开集. 换句话说,  $S(\mu)$  是  $\mu$  被支撑的最小闭集. (这里, 如果  $\mu(G \setminus E) = 0$ , 那么  $\mu$  支于  $E$ .) 若  $S(\mu)$  是紧集, 则称  $\mu$  是具有紧支集 (compact support) 的.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】对拓扑空间  $G$  上的测度  $\mu$ , 当所有  $\mu$  零开子集的并集仍为零测集时, 是可以定义  $\mu$  的支集的. 在  $G$  有可数基, 或  $\mu$  是胎紧的或  $\mu$  是 Radon 测度 (见正则测度 (regular measure)) 时正是这种情形. 但若  $G$  仅为局部紧以及  $\mu$  不是胎紧的, 则就不总是如此了.

当然, 对于带拓扑  $\tau$  的拓扑空间  $G$  上的测度  $\mu$ , 总是可以定义

$$S(\mu) = G \setminus \bigcup \{V : V \in \tau \text{ 且 } \mu(V) = 0\},$$

但此时不一定有  $\mu(G \setminus S(\mu)) = 0$ , 而有违于支集的直觉.

#### 参考文献

- [A1] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1966, 57 (中译本: W. 卢丁, 实分析和复分析, 人民教育出版社, 1981).  
 [A2] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, 1969, 60, 62, 71, 108. 周民强 译

**模的支集** [support of a module; носитель модуля], 交换环  $A$  上模  $M$  的

所有使得此模的局部化  $M_p$  不为零的  $A$  的素理想  $p$  的集合 (见交换代数中的局部化 (localization in a commutative algebra)). 此集合记为  $\text{Supp}(M)$ . 它是此环的谱的子集 (见环的谱 (spectrum of a ring)). 例如, 对于有限 Abel 群  $M$ , 把它看作整数环上的模, 则  $\text{Supp}(M)$  由所有素理想  $(p)$  组成, 其中  $p$  整除  $M$  的阶. 对任一模  $M$ ,  $\text{Supp}(M)$  为空集, 当且仅当  $M = 0$ .

#### 参考文献

- [1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

Л. В. Кузьмин 撰 赵春来 译

**支撑超平面** [supporting hyperplane; опорная гиперплоскость],  $n$  维向量空间中集合  $M$  的

一个含有  $M$  的闭包的若干点的  $(n-1)$  维平面, 使得  $M$  位于一个闭半空间中. 当  $n=3$  时, 支撑超平面称为支撑平面 (supporting plane), 当  $n=2$



时, 称为支撑直线 (supporting line).

至少有一个支撑超平面通过的  $M$  的一个边界点称为  $M$  的一个支撑点 (support point). 在一个凸集  $M$  中, 所有的边界点都是支撑点. 这一性质被 Archimedes 用于作为  $M$  的凸性的一个定义. 只有一个支撑超平面通过的凸集  $M$  的边界点称为光滑的 (smooth).

在一般的向量空间中, 其中一个超平面可定义为一个线性泛函取常数值值的区域, 一个集合  $M$  的支撑超平面的概念也可以定义 (线性泛函在  $M$  的点上取的值都小于 (都大于) 或等于线性泛函在该超平面上取的值).

В. А. Залгаллер 撰

【补注】支撑超平面在凸性, 如最优化和数的几何中也有重要的应用.

#### 参考文献

- [A1] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.
- [A2] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970.
- [A3] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in J. Tölke and J. M. Wills (eds.): Contributions to Geometry, Birkhäuser, 1979, 13 – 59.
- [A4] Stoer, J. and Witzgall, Ch., Convexity and optimization in finite dimensions, 1, Springer, 1970.
- [A5] Lindenstrauss, J. and Milman, V. D. (eds.), Geometric aspects of functional analysis, Lecture notes in math., 1376, Springer, 1988.

陆珊年 译

#### 曲面 [surface; поверхность]

几何学中的基本概念之一. 在各种几何学领域内曲面的定义有实质性差别.

在初等几何学中, 考虑平面, 多面形, 以及某些弯曲的面 (如球面). 每一个弯曲的面都用一种特殊的方式来定义, 经常作为点的集合或线的集合. 在初等几何学中对面的一般概念只是作描述, 而不是定义: 通常把一个物体的边界, 或者一条运动的线的迹称为一个面, 等等.

在解析几何学和代数几何学中, 曲面被看作其坐标满足一种特定形式的方程的点的集合 (见二次曲面 (surface of the second order); 代数曲面 (algebraic surface)).

在三维 Euclid 空间  $E^3$  中, 曲面是借助于曲面片 (surface patch)——一个矩形在  $E^3$  中的同胚象来定义的. 曲面被看作是一个连通集, 它是曲面片的并集 (例如, 球面是两个半球面的并集, 而每一个半球面是曲面片).

通常,  $E^3$  中的曲面是用向量函数给出的:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

其中  $0 \leq u, v \leq 1$ , 且

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$$

是参数  $u, v$  的函数, 满足一定的正则性条件, 例如

$$\text{rank} \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 2.$$

(见微分几何学 (differential geometry); 曲面理论 (theory of surfaces); Riemann 几何学 (Riemannian geometry)).

从拓扑学的观点看, 曲面是一个二维流形 (two-dimensional manifold).

Л. А. Сидоров 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Stoker, J. J., Differential geometry, Wiley (Interscience), 1969.
- [A2] Thorpe, J. A., Elementary topics in differential geometry, Springer, 1979.

陈维桓 译

曲面函数 [surface function; поверхностная функция]  
同面积函数 (area function).

曲面积分 [surface integral; поверхностный интеграл]

曲面 (surface) 上的积分 (integral). 假设  $S$  为三维 Euclid 空间  $R^3$  中的可能自相交的曲面, 它用直角坐标  $x, y, z$  的向量表达式为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (1)$$

其中  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  是  $(u, v)$  的连续可微向量函数, 定义在直角坐标  $u, v$  的平面中某二维 Jordan 可测区域  $G$  的闭包  $\bar{G}$  上. 设

$$g_{11} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right)^2, g_{12} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, g_{22} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2$$

为  $S$  的第一基本形式 (first fundamental form) 的系数. 若  $F(x, y, z)$  为定义在  $S$  上的函数, 即函数  $F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , 则第一类曲面积分 (surface integral of the first kind) (或曲面积分上的积分 (integral over the surface area)) 由下式定义:

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_G F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv. \quad (2)$$

这定义与曲面的表达式无关. 第一类曲面积分是相应于曲面上的 Riemann 和的极限. 例如, 假设  $F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  为 Riemann 可积函数,  $\tau = \{S_i\}_{i=1}^k$  为把  $S$  剖分成许多部分  $S_i$  的一个分解, 它

们是  $\bar{G}$  分解成点集  $E_i \subset \bar{G}$  的一个剖分  $\tau_0 = \{E_i\}_{i=1}^k$  在映射 (1) 下的象 (见多重积分 (multiple integral)), 又设

$$\text{mes } S_i = \iint_{E_i} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv$$

为  $S_i$  的面积, 那么

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \lim_{\delta_{\tau_0} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k F(x(\xi_i, \eta_i),$$

$$y(\xi_i, \eta_i), z(\xi_i, \eta_i)) \text{mes } S_i,$$

其中  $\delta_{\tau_0}$  为剖分  $\tau_0$  的直径, 而  $(\xi_i, \eta_i) \in E_i$ . 若  $S$  可以显式表示为  $z = f(x, y), (x, y) \in \bar{G}$ , 则 (2) 成为

$$\begin{aligned} \iint_S F(x, y, z) dS &= \\ &= \iint_G F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy. \end{aligned}$$

若向量表达式 (1) 的曲面  $S$  上无奇点, 即  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ , 那么其上可以选取一连续的单位法向量  $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , 例如

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|},$$

而将  $S$  定向. 对于定向曲面  $S^+$ , 用下面的关系定义第二类曲面积分 (surface integrals of the second kind)

$$\left. \begin{aligned} \iint_{S^+} F(x, y, z) dx dy &= \iint_S F(x, y, z) \cos \gamma dS, \\ \iint_{S^+} F(x, y, z) dy dz &= \iint_S F(x, y, z) \cos \alpha dS, \\ \iint_{S^+} F(x, y, z) dz dx &= \iint_S F(x, y, z) \cos \beta dS, \end{aligned} \right\} (3)$$

其中, 右方均为第一类曲面积分. 假如  $S^-$  表示与  $S^+$  定向相反的曲面  $S$ , 那么定义

$$\iint_{S^-} F(x, y, z) dx dy = - \iint_{S^+} F(x, y, z) dx dy.$$

(3) 中另外两个积分也类似地定义. 与第一类曲面积分类似, 第二类曲面积分, 也可以通过曲面上 Riemann 和的极限来表示.

若

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|},$$

那么

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} F(x, y, z) dx dy &= \\ &= \iint_G F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv. \end{aligned}$$

(3) 中其余两个第二类型积分也有类似的公式. 特别, 对于曲面  $z = f(x, y), (x, y) \in \bar{G}$  的情形,

$$\iint_{S^+} F(x, y, z) dx dy = \iint_G F(x, y, f(x, y)) dx dy,$$

$$\iint_{S^-} F(x, y, z) dx dy = - \iint_G F(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

上述积分的第一个称为在  $S$  的“上”侧的积分, 而第二个积分则称为在  $S$  的“下”侧的积分. 这些名词的由来是因为当  $S$  在显式表示, 即  $x = u, y = v$  而  $z = f(x, y)$  时, 向量

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

在第一种情形, 与  $z$  轴的夹角为锐角, 即“向上”; 而在第二种情形, 它与  $z$  轴的夹角为钝角即“向下”.

若光滑曲面  $S$  为一有界区域的边界,  $S^+$  表示相对于区域, 用向外的法线将  $S$  定向, 从而  $S^-$  表示用向内的法线对  $S$  的定向, 这样, 在定向曲面  $S^+$  上的第二类曲面积分就称为关于曲面外侧的曲面积分 (surface integrals with respect to the outside of the surface), 而  $S^-$  上的积分, 则称为关于曲面内侧的曲面积分 (surface integrals with respect to the inside).

能分解成有限片并可分别有向量表达式 (1) 的逐片光滑的曲面, 其上的曲面积分定义为逐片光滑曲面的曲面积分之和. 这样定义的曲面积分与曲面的分法无关.

Остроградский 公式 (Ostrogradski formula) 建立了三维有界区域上的三重积分与其边界上曲面积分之间的关系, 而 Stokes 公式 (Stokes formula) 给出了曲面积分和表示其边界的围道上的曲线积分之间的关系.

曲面积分  $\iint_S dS$  等于  $S$  的面积 (area). 假设密度为  $F(x, y, z)$  的物质分布在  $S$  上, 那么曲面积分  $\iint_S F(x, y, z) dS$  等于它的全部质量. 若  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$  为  $S$  上定义的向量函数, 而  $S$  通过它的单位法线  $\mathbf{n}$  定向, 那么曲面积分

$$\iint_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS$$

称为向量场  $\mathbf{a}$  通过  $S$  的流量 (flux of the vector field  $\mathbf{a}$ ). 显然, 它与  $\mathbf{R}^3$  中坐标的选取无关. 曲面积分也用来表示双层位势 (double-layer potential) 或单层位势 (simple-layer potential).

假设曲面  $S$  是可微 2 维流形, 而连续可微的非负函数  $\varphi_j(x, y, z), j = 1, \dots, m$ , 构成了  $S$  上的一个单位分解 (partition of unity), 即每个函数的支集含于  $S$  的某坐标卡 (chart) 内, 且  $\sum_{j=1}^m \varphi_j(x, y, z) = 1$  对每点  $(x, y, z) \in S$  成立, 再设  $F(x, y, z)$  是定义在  $S$  上的函数, 那么由定义,



$$\iint_S F(x, y, z) dS = \sum_{j=1}^m \iint_{S_j} \varphi_j(x, y, z) F(x, y, z) dS, \quad (4)$$

其中右方每个积分都是 (2) 意义下的积分. 假设  $S^+$  是定向的二维流形, 那么

$$\begin{aligned} & \iint_{S^+} F(x, y, z) dx dy = \\ &= \sum_{j=1}^m \iint_{S_j^+} \varphi_j(x, y, z) F(x, y, z) dx dy. \end{aligned} \quad (5)$$

(3) 中第二类曲面积分其他情形可类似定义. 定义 (4) 与 (5) 均与  $S$  上单位分解的选取无关.

#### 参考文献

- [1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980 (英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1-2, Mir, 1982).
- [2] Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа, т. 2, М., 1981.
- [3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975 (中译本: С. М. 尼科尔斯基, 数学分析教程, 第二卷, 高等教育出版社, 1992).
- [4] Дубровин, Б. А., Повиков, С. П., Фоменко, А. Т., Современная геометрия, М., 1979 (英译本: Dubrovin, B. A., Novikov, S. P. and Fomenko, A. T., Modern geometry, Springer, 1987).
- [5] Мищенко, А. С., Фоменко, А. Т., Курс дифференциальной геометрии и топологии, М., 1980 (英译本: Mishchenko, A. S. and Fomenko, A. T., A course of differential geometry and topology, Mir, 1988). Л. Д. Кудрявцев 撰
- 【补注】 Остроградский 公式在西方通常称为 Gauss 公式 (Gauss formula). 有时也叫散度定理 (divergence theorem).

可以将  $g_{11}g_{22} - g_{12}^2$  写成向量形式:

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|.$$

在西方文献中, 通常不区分第一类与第二类曲面积分.

用 2 次形式可以容易地定义可微 2 维流形上的积分. 例如见 [A4] 以及流形上的积分 (integration on manifolds).

#### 参考文献

- [A1] Shilov, G. E., Mathematical analysis, 1-2, M. I. T., 1974 (译自俄文).
- [A2] Apostol, T., Calculus, 2, Waltham, 1969 (中译本: Т. М. 阿波斯托, 微积分学, 高等教育出版社, 1987).
- [A3] Apostol, T., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1974.

- [A4] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry: manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988 (译自法文).
- [A5] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 1-5, Publish or Perish, 1979.
- [A6] Stoker, J. J., Differential geometry, Wiley (Interscience), 1969.
- [A7] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Addison-Wesley, 1961.
- [A8] Buck, R. C., Advanced Calculus, McGraw-Hill, 1965.
- [A9] Fleming, W., Functions of several variables, Springer, 1977.
- [A10] Marsden, J. and Weinstein, A., Calculus, 3, Springer, 1988. 王斯雷 译

**螺旋运动曲面** [surface of screw motion; винтовая поверхность], 螺旋面 (helical surface)

一条平面曲线  $L$  绕一条轴匀速旋转, 同时沿该轴匀速前进所描绘出的曲面. 若  $L$  落在旋转轴  $z$  的平面上, 由方程  $z = f(u)$  所定义, 则螺旋面的位置向量是

$$\mathbf{r} = \{u \cos v, u \sin v, f(u) + hv\}, \quad h = \text{常数},$$

其线元是

$$ds^2 = (1 + f'^2) du^2 + 2hf' du dv + (u^2 + h^2) dv^2.$$

螺旋面能变形为一个旋转面, 使得生成螺旋线成为平行圆 (Boor 定理 (Boor theorem)). 若  $f = \text{常数}$ , 则得直螺旋面 (helicoid); 若  $h = 0$ , 则得旋转曲面 (rotation surface). И. Х. Сабитов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988 (译自法文).
- [A2] Coxeter, H., Introduction to geometry, Wiley, 1963.
- [A3] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976. 陈维桓 译

**二次曲面** [surface of the second order; поверхность второго порядка]

三维实或复空间中一些点的集合, 这些点在 Descartes 坐标系中的坐标满足二次代数方程 (algebraic equation):

$$\begin{aligned} & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ & + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

方程 (\*) 不一定定义实的几何图象, 在这种情况下,

就说 (\*) 定义一个虚的二次曲面. 根据一般方程 (\*) 中的系数, 可以通过坐标系的平移和旋转, 把这个方程变换为下面给出的 17 种典范形式之一, 其中每一种形式对应某一类曲面. 确切地说, 包括非奇异不可约曲面 (non-singular irreducible surfaces):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (椭球面 (ellipsoid))},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ (虚椭球面)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(单叶双曲面 (hyperboloid)),

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (双叶双曲面)},$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0$$

(椭圆抛物面 (elliptic paraboloid)),

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0$$

(双曲抛物面 (hyperbolic paraboloid));

奇异不可约曲面 (singular irreducible surfaces) (见柱面 (cylindrical surface (cylinder))):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (椭圆柱面 (elliptic cylinder))},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ (虚椭圆柱面)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (双曲柱面 (hyperbolic cylinder))},$$

$$y^2 = 2px \text{ (抛物柱面 (parabolic cylinder))};$$

锥面 (conical surface):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ (锥面)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ (虚锥面)},$$

奇异可约曲面 (singular reducible surfaces):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (一对相交平面)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (一对虚相交平面)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ (一对平行平面)},$$

$$x^2 + a^2 = 0 \text{ (一对虚平行平面)},$$

$$x^2 = 0 \text{ (一对重合平面)}.$$

具有唯一对称中心 (曲面的中心 (centre of sur-

face)) 的二次曲面称为中心曲面 (central surface). 中心的坐标作为下列方程的解来确定:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0,$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0,$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0.$$

无对称中心的, 或具有不确定中心的二次曲面称为非中心曲面 (non-central surface).

可以不把一般方程化为典范形式而是通过联合考虑所谓的二次曲面的基本不变量 (basic invariants of second-order surfaces) 来研究二次曲面. 这是一些由方程 (\*) 的系数构成的表达式, 它们的值在坐标系的平移和旋转下保持不变:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix},$$

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

以及半不变量 (semi-invariants)  $\Delta'$  和  $\Delta''$ , 它们在坐标系的旋转下保持不变:

$$\Delta' = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33},$$

其中  $\Delta_{ij}$  是在  $\Delta$  中  $a_{ik}$  的代数余子式, 以及

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

表 1 根据不变量对二次曲面的分类

		非奇异曲面		奇异曲面
		$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$
中心曲面 $\delta \neq 0$	$\delta S > 0$ $T > 0$	虚椭球面	椭球面	虚锥面
	$\delta S < 0$ 和 (或) $T \leq 0$	单叶双曲面	双叶双曲面	实锥面
非中心曲面 $\delta = 0$		双曲抛物面	椭圆抛物面	柱面和 可约曲面 (见表 2)

一般地说, 这些不变量确定二次曲面到相差 Euclid 空间中的一个运动 (motion); 如果两个曲面的对应的不变量相等, 则通过运动可使这两个曲面重合. 换句话说, 这两个曲面关于空间运动群是等价的 (度量等价



的)。

表 2 柱面和二次可约曲面

$T > 0$	柱 面 $\Delta' \neq 0$		可 约 曲 面 $\Delta' = 0$		
	椭圆柱面		一对虚相交平面		
	虚的 $\Delta'S > 0$	实的 $\Delta'S < 0$			
$T < 0$	双曲柱面		一对相交平面		
$T = 0$	抛物柱面		一对虚平行平面 $\Delta'' > 0$	一对平行平面 $\Delta'' < 0$	一对重合平面 $\Delta'' = 0$

从其他变换群的观点来看，也存在二次曲面的分类。例如，关于仿射变换群，由相同典范形式的方程定义的任何两个曲面是等价的，例如，两个相似的二次曲面是等价的。

利用二次曲面的各种仿射类之间的关系可以从射影几何学的观点来建立一种分类。这时，认为通过射影变换可以相互映射的那些曲面是等价的。例如，从射影几何学的观点来看，椭球面、椭圆抛物面和双叶双曲面都是实卵形曲面。它们的射影等价性表现在：存在某一射影坐标系，使得这些曲面的方程具有相同的形式：

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

即对应的二次形式  $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$  具有相同的阶 (4) 和相同的符号差 (3)。它们的射影差别表现在同反常平面的交线的类型上：椭圆面相交于虚卵形线，双曲面相交于实卵形线，椭圆抛物面相交于一对虚相交直线。总共有八种二次曲面的射影等价类：

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$  (虚卵形曲面)，
- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$  (实卵形曲面)，
- $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$  (环形曲面)，
- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$  (虚锥面)，
- $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$  (实锥面)，
- $x_1^2 + x_2^2 = 0$  (一对虚平面)，
- $x_1^2 - x_2^2 = 0$  (一对实平面)，
- $x_1^2 = 0$  (一对重合平面)。

关于参考文献，见二次曲线 (second-order curve)。

А. Б. Иванов 撰

【补注】 在其他域上，例如在  $C$ ，有限域和  $p$  进域上，也可进行类似的分类。

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 2, Springer, 1989 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一—五卷, 科学出版社, 1987—1991)。

[A2] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S. E., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952 (译自德文)。  
[A3] Brink, R. W., Analytic geometry, Appleton-Century, 1935。  
[A4] Погорелов, А. В., Геометрия, М., 1987。  
[A5] Погорелов, А. В., Аналитическая геометрия, М., 1980。  
杜小杨 张鸿林 译

曲面位势 [surface potential; поверхностный потенциал]

集中在某个曲面上的测度的位势。有两种形式的曲面位势被利用于处理位势论 (potential theory) 中的主要边值问题：一种是分布在曲面  $S$  上、其密度为  $\mu(y) (y \in S)$  的测度产生的单层位势 (simple-layer potential)

$$V(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|y-x|} dS_y;$$

而另一种是由分布在  $S$  上具有密度  $v(y)$  的测度产生的双层位势 (double-layer potential)

$$W(x) = \int_S v(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|y-x|} dS_y.$$

在物理学中，单层位势被解释为具有密度  $\mu(y)$  的电荷的位势，而双层位势是具有密度  $v(y)$  的偶极子的位势 (亦见多极位势 (multi-pole potential))。

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kellog, O. D., Foundations of potential theory, Dover, reprint, 1953。  
吴炯圻 高琪仁 译

割补术 [surgery; перестройка], 球面割补术 (spherical surgery), 在型  $(\lambda, n-\lambda)$  的流形上的

从一个  $(n-1)$  维流形  $M_1$  到另一个流形  $M_2$  的一个转变，在于删去嵌入于  $M_1$  中的  $\lambda-1$  维的一个球面且用一个  $n-\lambda-1$  维的嵌入球面代替它。有关细节见环柄理论 (handle theory)。

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 也见 Morse 割补术 (Morse surgery)。

薛春华 译

满射 [surjection 或 surjective mapping; сюръекция], 集合  $A$  到集合  $B$  上的

映射  $f$  满足  $f(A) = B$ ，即满足对每一  $b \in B$  存在  $a \in A$ ，使得  $f(a) = b$ 。既可以说“ $f$  是满射”，也可以说“ $f$  是从  $A$  到  $B$  上的映射”。

О. А. Иванова 撰

【补注】 亦见单射 (injection); 一一映射 (bijection); 集合的置换 (permutation of a set)。  
赵希顺 译

超实数 [surreal numbers; сюрдействительные числа]  
【补注】超实数是英国数学家 J. H. Conway [A2] 的创造。它们起源于对策论领域。它们的描述可以在 Conway [A2] (1976) 中找到，但是两年以前 D. E. Knuth 已经在他的数学小说 ([A7]) 中普及了超实数。只是在那以后超实数才成为较传统的数学论文和数学书的主题 ([A4], [A1])。

超实数是通过把 Dedekind 从有理数构造出实数的方法 (见 Dedekind 分割 (Dedekind cut)) 变成一种强有力的机制而得到的。这种机制可以从什么都没有为起点把所有的数产生出来。从空集开始，以划分现有的数集成两个有序的部分为工具逐步地引进新数。用这个办法新的超实数创造出来了，同一个集合的不同分划所产生的数具有同一的生日 (birthday)。这个构造对每一个作为生日的序数重复，包括超限序数在内。事实上，这个构造永不停止，因此超实数不形成一个集合，它们形成一个真类 (见类型论 (types, theory of))。

在有限阶段构造所产生的对象，它们在有理数中充当二进分数的角色。余下的有限有理数以及其他实数将一起在第  $\omega$  日出现，但是在这一天里第一批超限数和第一批无穷小也将产生。随之而来更多的标准数也被加入。

有趣的是这个构造随着提出对象的归纳定义也可以规定顺序、相等以及代数运算诸如加法乘法等的归纳定义。配备了这些运算的超实数的习性很像实闭域 (除了超实数不是集合而是真类之外)。

事实上对象的定义和顺序的定义是相辅相成的。一个数是左集中没有数是大于等于右集中的任何数的一对集合。如果两个数中第一个数的左集中没有数是大于等于第二个数的并且第二个数的右集中没有数是小于等于第一个数的，则第一个数是小于等于第二个数。上面的定义看起来是循环的，因此抓住这个定义后面的直观是较为困难的，但 Knuth 的数学小说指出，这个定义是有意义的，并且也可以向普通读者说清楚的。虽然如此，Knuth 和 Conway 二人还都是把给出证明和构造的细节的任务故意留给了读者，只有以后的作者才不得不全部作出并发表这一困难的数学。

结果，定义的对象形成了一个前顺序 (pre-order)。不同的对象可以同时既小于等于又大于等于，所以顺序构造只有在按对应的等价关系作商之后才能得到。

加法和乘法的定义照此办理。例如和的左集是由一个数与另一个数的左集的数的所有和所组成，而和的右集是由一个数和另一个数的右集的数的所有和所组成。

证明关于构造的性质在几乎所有的情形相当于对

每一个对象的总体归纳法 (见归纳公理 (induction axiom))，或者在某些情形相当于对出生日子的超限归纳法 (transfinite induction)。这些归纳法是建立在集合的良基性的基础之上 (见良基关系 (well-founded relation)) 或者在生日 0 时什么都没有产生的基础之上。

尽管初始的对超实数的出版物是起源于对策论 (Conway) 和休闲数学 (Knuth)，但超实数与严肃数学是有关的。N. L. Alling 曾写了一本书 ([A1])，在此书中他把超实数与 Hahn ([A5]) 在有序向量空间上的古典结果联系起来；这种空间是有理数或实数在一个指标集上的字典顺序和的一个子域，而指标集自己是一个有序 Abel 群。这对应于超实数的另一种表示法，后者可以利用在一个指标集上的形式幂级数来给出，而指标集同构于超实数本身。

Dedekind 构造是用来填平有理数之间的缝隙的。对于超实数来说，事情就更为复杂。Alling (在 [A3] 之后) 把构造超实数的分割称为 Cuesta Dutari 分割 (Cuesta Dutari cut)，当这种分割把前面的缝隙填满时新的缝隙又产生了。没有一个阶段能使结果形成一个连通的拓扑区域。无论如何，在减弱点集拓扑的公理 (只要求开集对有界的基数来说是封闭于并运算的) 的代价之下将存在这样的生日，使直到这一天所构造出来的区域在弱拓扑的意义之下行为像是一个连通集。

幂级数的经典理论可以在很大程度上推广到超实数。事实上收敛性质有时要比传统的实数好。Conway 观察到：例如，每一个实系数的形式多变量幂级数对于变数的所有无穷小值是绝对收敛的。微分和导出函数的概念也是可以推广的，这些概念的行为和初等微积分是一样的。充斥在 Alling 书中的麻烦仍然是超实数不能形成一个集合而形成一个真类的事实。对 Conway 这是一个支持他的数学家解放运动 (mathematicians liberation movement) 的又一个论点：只要仍然是好的数学，自由构造就应该得到允许并且数学家们永远不应该把他们的手绑在任何特殊的数学基础之上。Alling 指出，这种革命的号召对超实数来说是不需要的；他的处理是完全包含于 Kelley-Morse 的集合论的框架之中。

#### 参考文献

- [A1] Alling, N. L., Foundations of analysis over surreal number fields, North-Holland, 1987.
- [A2] Conway, J. H., On numbers and games, Acad. Press, 1976.
- [A3] Cuesta Dutari, N., Algebra ordinal, Rev. Acad. Cienc. Madrid, 48 (1954), 103 - 145.
- [A4] Gonshor, H., An introduction to the theory of surreal numbers, Cambridge Univ. Press, 1986.
- [A5] Hahn, H., Über die nichtarchimedischen Grössens-



ysteme, S. Ber. Akad. Wiss. Wien., Math. Naturw. Abt. II, 116 (1907), 601 – 655.

[A6] Kelley, J. E., General Topology, van Nostrand, 1955.

[A7] Knuth, D. E., Surreals numbers, Addison-Wesley, 1974.

Peter van Emde Boas 撰 罗里波 译 王世强 校

### Суслин 条件 [Suslin condition; Суслина условие]

陈述 **Суслин 假设** (Suslin hypothesis) 时提出的一个条件. 一个拓扑空间 (Boole 代数, 偏序集合) 满足 **Суслин 条件**, 当且仅当每个非空互不相交的开子集族是可数的. **Суслин 条件**已被推广到任意基数; 相应的基数不变量是 **Суслин 数**. В. И. Малыгин 撰

【补注】在偏序集中, **Суслин 条件**常被称为可数反链条件 (countable anti-chain condition). 在 Boole 代数中, 与 **Суслин 条件**等价的陈述是每一个全序子集是可数的; 由于这个原因, **Суслин 条件**也被称为可数链条件 (countable chain condition), 而且这种说法也被 (使人误解地) 用于偏序集.

拓扑空间  $X$  的 **Суслин 数**是最小基数  $\kappa$ , 使得  $X$  的每个两两不相交的开子集族的基数小于  $\kappa$ . **Суслин 数**与胞腔度 (cellularity) 密切相关; 胞腔度是两两互不相交的开子集族的基数的上确界.

### 参考文献

[A1] Comfort, W. W. and Negreponis, S., Chain conditions in topology. Cambridge Univ. Press, 1982.

何青译 罗里波校

### Суслин 准则 [Suslin criterion; Суслина критерий]

见 **Суслин 定理** (Suslin theorem).

### Суслин 假设 [Suslin hypothesis; Суслина гипотеза]

一个断言每个没有端点的、完全的、稠密并且满足 Suslin 条件的线性序集同构于实直线的假设. 这里完全性预示着每个非空有界集合存在最小上界, 稠密性表示每个区间  $(a, b)$ ,  $a < b$  非空, 而 **Суслин 条件** (suslin condition) 要求每个两两互不相交的区间族是可数的. 实直线具有 **Суслин 假设**中陈述的所有这些性质. 因此 **Суслин 假设**断言有序集的上述性质完全地定义了它. 这个假设是 М. Я. Суслин 在 1920 年提出的 ([1]).

假设 ZF 是和谐的, 在 ZFC (ZF 系统加选择公理 (axiom of choice)) 的系统框架下不可能证明和否定 **Суслин 假设**. 由 Gödel 的可构造性公理 (见 Gödel 构造集 (Gödel constructive set)) 可以证明 **Суслин 假设**的否定成立. 使用力迫方法 (forcing method) 的一个变种 (迭代力迫), 通过构造一个相应的模型可以证明 **Суслин 假设**与 ZFC 公理系统的协调性. 在

ZFC 系统上添加上连续统假设 (continuum hypothesis) 既不能证明, 也不能否定 **Суслин 假设**.

**Суслин 假设**和它的推广对于公理集合论 (axiomatic set theory) 的发展产生了巨大的影响. 许多思想和原理是在研究 **Суслин 假设**的过程中产生. 它们包括 Jensen 的组合原理  $\Diamond_\kappa$  和  $\square_\kappa$  (见 [4]), 可构造分层的精细结构理论 (见 [5]), Martin 公理 [7] 和迭代力迫原理 [2].

**Jensen 原理** (Jensen principle)  $\Diamond_\kappa$ : 一个基数  $\kappa = \{\alpha: \alpha < \kappa\}$  的子集  $A \subseteq \kappa$  被称为是闭无界的 (closed unbounded), 如果它包含它的所有  $< \kappa$  的极限点, 而且对任何  $\alpha < \kappa$ , 都存在  $\beta \in A$ , 使得  $\alpha < \beta$ . 一个集合  $A \subseteq \kappa$  称为是稳定的 (stationary), 如果它与每个基数为  $\kappa$  的有界闭集的交都不空.

**Jensen 原理**  $\square_\kappa$ : 存在一个序列  $\langle S_\alpha: \alpha < \kappa \rangle$ ,  $S_\alpha \subseteq \alpha$ , 使得对每一个  $X \subseteq \kappa$ , 集合  $\{\alpha < \kappa: S_\alpha = X \cap \alpha\}$  是稳定的. 对每个正则基数  $\kappa$ , 原理  $\Diamond_\kappa$  可由可构造性公理证明, 而 **Суслин 假设**的否定可由  $\Diamond_{\omega_1}$  证明. Jensen 组合原理, 以及 Martin 公理在拓扑学中有许多成功的应用 (见 [4], [6], [8]).

设  $P$  是一个偏序集. 集合  $D \subseteq P$  称为是稠密的 (dense), 如果对每个  $p \in P$ , 都存在  $d \in D$ , 使得  $d \leq p$ . 集合  $Q \subseteq P$  称为是相容的 (compatible), 如果对任何有限子集  $F \subseteq Q$ , 都存在  $p \in P$ , 使得对每个  $r \in F$  都有  $p \leq r$ .  $P$  中的两个元素  $p_1, p_2$  称为是不相容的, 如果集合  $\{p_1, p_2\}$  是不相容的. 如果偏序集  $P$  的每个两两不相容的元素组成的集合都是可数的, 则称  $P$  满足可数反链条件 (countable anti-chain condition). Martin 公理 (Martin axiom) 陈述为: 如果偏序集  $P$  满足可数反链条件, 并且  $\mathcal{S}$  是基数小于  $2^{\omega}$  的稠密子集族, 则存在一个相容集  $Q \subseteq P$ , 使得对每个  $D \in \mathcal{S}$ , 交  $D \cap Q$  都不空.

在连续统假设 (continuum hypothesis) (CH) 成立的条件下, Martin 公理可以证明. 组合 Martin 公理 (MA) 和连续统假设的否定 ( $\neg CH$ ) 可以得到更有趣的结果. 原理  $\Diamond_{\omega_1}$  矛盾于  $MA + \neg CH$  组合, 因为  $\Diamond_{\omega_1}$  蕴涵 CH. 经常出现的情况是由  $\Diamond_{\omega_1}$  推出的结果将被  $MA + \neg CH$  否定. 例如 **Суслин 假设**就是这种情况. 事实上,  $MA + \neg CH$  蕴涵 **Суслин 假设**, 而  $\Diamond_{\omega_1}$  蕴涵 **Суслин 假设**的否定.

如果 ZF 是协调的, 则组合  $MA + \neg CH$  与 ZFC 是相容的.

### 参考文献

[1] Souslin, M. [M. Ya. Suslin], Problème 3, *Fundam. Math.*, 1 (1920), 223.

[2] Devlin, K. J. and Johnsbraten, H., The Souslin problem, *Lecture notes in math.*, 405, Springer, 1974.

- [3] Jech, T., Lectures in set theory, with particular emphasis on the method of forcing, Lecture notes in math., 217, Springer, 1971.
- [4] Barwise, J. (ed.), Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977, Chaps. B4 – B7.
- [5] Devlin, K. J., Aspects of constructibility, Lecture notes in math., 354, Springer, 1973.
- [6] Федорчук, В. В., «Матем. сб.», 99 (1976), 1, 3 – 33.
- [7] Martin, D. A. and Solovay, R., Internal Cohen extensions, *Ann. Math. Logic*, 2 (1970), 143 – 178.
- [8] Малыхин, В. Н., «Успехи матем. наук», 38 (1983), 1, 69 – 118. В. Н. Гришин 撰

【补注】 Jensen 组合原理 (Jensen combinatorial principles)  $\diamond$  和  $\square$  分别被称作钻石 (diamond) 和正方形 (square). 可数反链条件有时被称作可数链条件 (countable chain condition), 而且被缩写为 ccc.

#### 参考文献

- [A1] Devlin, K. J., Constructibility, Springer, 1984.
- [A2] Fremlin, D. H., Consequences of Martin's axiom, Cambridge Univ. Press, 1984.
- [A3] Jech, T. J., Multiple forcing, Cambridge Univ. Press, 1986.
- [A4] Jech, T. J., Set theory, Acad. Press, 1978.
- [A5] Kunen, K., Set theory. An introduction to independence proofs, North-Holland, 1980.

何 青 译 罗里波 校

#### Суслин 问题 [Suslin problem; Суслина проблема]

一个完全稠密没有端点的、并且每个互不相交的非空区间族为可数的线性序集, 是否同构于实数集?

认为上述断言是真的假设就是 **Суслин 假设** (Suslin hypothesis), 它是由 М. Я. Суслин 在 [1] 中提出的. Суслин 假设等价于不存在一个线序不可分的, 并且每个互不相交的区间族是可数的  $T_2$  紧统, 这样的  $T_2$  紧统称为 **Суслин 连续统** (Suslin continuum), 或 **Суслин 线** (Suslin line).

现已证明, Суслин 问题是独立于集合论的基本公理的. 在 1967 – 1968 年, 应用力迫方法首先构造了 Суслин 连续统. 在 1970 年, 又证明了由 Martin 公理与连续统假设的否定 (它们是与集合论的 Zermelo-Fraenkel 公理系统相容的) 可以推出不存在 Суслин 连续统, 也就是说 Суслин 假设成立.

#### 参考文献

- [1] Suslin, M. [М. Ya. Suslin], Problèm 3, *Fundam. Mat.*, 1 (1920), 223. В. И. Малыхин 撰

【补注】 更多的细节参见 **Суслин 假设** (Suslin hypothesis). 何 青 译 罗里波 校

#### Суслин 定理 [Suslin theorem; Суслина теорема],

描述集合论中的

1) 存在一个不是 **Borel 集** (Borel set) 的  $\mathcal{A}$ -集 (数轴  $R$  上的).

2) 使得给定的  $\mathcal{A}$ -集是 Borel 集的充分必要条件是它的补集也是  $\mathcal{A}$ -集.

3)  $n$  维空间  $R^n$  中每个  $\mathcal{A}$ -集都是  $R^{n+1}$  中的 Borel 集 (甚至为  $G_\delta$  型) 的 (正交) 投影 (作为推论, 存在平面的  $G_\delta$  型的 Borel 集, 它的投影不是 Borel 集);  $\mathcal{A}$ -集的投影还是  $\mathcal{A}$ -集.

所有这些结论都是 М. Я. Суслин 在 [1] 中得到的. 为了定义  $\mathcal{A}$ -集, 他使用了  $\mathcal{A}$ -运算 ( $\mathcal{A}$ -operation), 其他定义  $\mathcal{A}$ -集的方法陆续被发现.  $\mathcal{A}$ -运算实际上是由 П. С. Александров ([2]) 首先发现的, 他证明了 (虽然他没有明确用公式表示它) 每个 Borel 集可以由闭集 (也是  $\mathcal{A}$ -集) 通过  $\mathcal{A}$ -运算得到, 应用这个结果可以证明关于  $R$  上的 Borel 集 (事实上, 也是  $\mathcal{A}$ -集) 的基数的定理. Н. Н. Лузин 后来提出了是否存在不是 Borel 集的  $\mathcal{A}$ -集的问题. 定理 1) 回答了这个问题. 定理 1) 和 2) 是 Суслин 在 [1] 中给出的但是没有证明. Суслин 后来证明了它们, 但是直到 Luzin 简化这个了这个证明之后才正式发表. 为了证明 1), Суслин 构造了一个平面  $\mathcal{A}$ -集, 它对于所有 Borel 集是泛的, 并且考察了点在对角线  $y = x$  上的集合 (见 [3], p. 94). 定理 2) 现在常称为 Borel 集的 Суслин 准则. Суслин 关于这个定理的证明是基于将一个  $C_{\mathcal{A}}$ -集分解为  $\aleph_1$  个 Borel 集的和 (见 [4], [5]).

#### 参考文献

- [1] Souslin, M., Sur une definition des ensembles mesurables  $B$  sans nombres transfinis, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 164 (1917), 88 – 91.
- [2] Alexandroff, P. S., Sur la puissance des ensembles mesurables  $B$ , *C. R. Acad. Sci. Paris*, 162 (1916), 323 – 325.
- [3] Келдыш, Л. В., Новиков, П. С., «Успехи матем. наук», 8 (1953), 2, 93 – 104.
- [4] Лузин, Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958.
- [5] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914, Reprinted (incomplete) English translation: Set theory, Chelsea (1978). А. Г. Елькин 撰

【补注】 关于  $\mathcal{A}$ -集 (也称为解析集) 的更综合的历史注记见 Rogers 在 [A1] 中的文章. 事实上, Суслин的工作始于发现 H. Lebesgue 的一篇著名论文 (1905) 的错误, 这篇论文对于构造描述集合论中的首批工具 (泛集,  $\mathcal{A}$ -运算等等) 有巨大的正面影响. Александров 证明的 Borel 集的基数定理也被 F. Hausdorff 独立证明 ([A2]) (用类似的方法). Суслин的定理 2) 现在被做为第一分离定理的推论 (见 Лузин分离原理 (Luzin separability principles)). 在有效的



描述集合论 (见描述集合论 (descriptive set theory) 补注) 中, Суслин 定理有一个更强的版本称为 Суслин - Kleene 定理: 一个集合是超算术的 (一般说来, 是一个有效 Borel 集), 当且仅当它属于  $D_1^1 = S_1^1 \cap P_1^1$  (一般说来, 是一个有效解析和余解析集).

## 参考文献

- [A1] Rogers, C. A., Jayne, J. E., Dellacherie, C., Töpsoe, F., Hoffman-Jørgensen, J., Martin, D. A., Kechris, A. S. and Stone, A. H., Analytic sets, Acad. Press, 1980.  
[A2] Hausdorff, F., Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen, *Math. Ann.*, 77 (1916), 430 - 437.  
[A3] Moschovakis, Y. N., Descriptive set theory, North-Holland, 1980. 何青译 罗里波校

纬垂 [suspension; надстройка], 拓扑空间 (CW 复形)  $X$  的

空间或 CW 复形 (CW-complex)

$$(X \times [0, 1]) / [(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})],$$

其中  $[0, 1]$  是单位区间, 斜线表示把一个子空间等同于一个点的运算. 带基点的空间 (pointed space)  $(X, x_0)$  的纬垂定义为带基点的空间

$$S^1 \wedge X = (X \times [0, 1]) / [(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (x_0 \times [0, 1])].$$

这也称为约化纬垂 (reduced suspension) 或收缩纬垂 (contracted suspension). 纬垂记为  $SX$  (有时也记为  $\Sigma X$ ). 对应  $X \mapsto SX$  定义了 (带基点) 拓扑空间的范畴到自身的一个函子.

由于纬垂运算是函子, 就可定义同态  $\pi_n(X) \rightarrow \pi_{n+1}(SX)$ , 也称为纬垂. 这个同态与嵌入  $X \rightarrow \Omega SX$  诱导的同态及 Hurewicz 同构  $\pi_n(\Omega SX) \cong \pi_{n+1}(SX)$  的复合相同, 其中  $\Omega$  是取闭路空间 (loop space) 的运算. 对任何同调论 (homology theory)  $h$ . (上同调论  $h^*$ ), 存在同构

$$\delta: \tilde{h}^n(X) \cong \tilde{h}^{n+1}(SX) = \tilde{h}^{n+1}(CX, X),$$

这个同构就是空间偶  $(CX, X)$  的正合列的连接同态, 其中  $CX$  是  $X$  上的锥 (cone). 一个同调类  $x \in h^n(X)$  在这个同构下的象称为  $x$  的纬垂并记为  $\delta x$  (或  $Sx$ ).

上同调运算 (cohomology operation)  $a$  的纬垂是如下的上同调运算, 它在  $\tilde{h}^*$  上的作用是  $\delta^{-1} a \delta$ , 在  $h^*(pt)$  上的作用与  $a$  的作用相同.

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 纬垂函子及闭路空间 (loop space) 函子是带基点空间范畴上的相伴函子:

$$\text{Top}(SX, Y) \cong \text{Top}(X, \Omega Y).$$

上述一一映射把映射  $f: SX \rightarrow Y$  映为映射  $g: X \rightarrow \Omega Y$ , 其中  $g(x)(t) = f(x, t)$ . 这个相伴与同伦匹配, 因而定义了带基点拓扑空间及映射的同伦类的范畴上的一对相伴函子.

## 参考文献

- [A1] Switzer, R. M., Algebraic topology - homotopy and homology, Springer, 1975, Chapt. 2.

潘建中译 沈信耀校

## 铃木 2 群 [Suzuki 2-group; Судзуки 2-группа]

有限非 Abel 2 群  $U$ , 它不是四元数群, 在它的二阶元素的集合  $\Omega$  上有  $U$  的自同构的循环群  $\langle a \rangle$  传递地作用. 这意味着对  $\Omega$  的任两个元素  $x, y$ , 有自然数  $n$  使  $y = x^{a^n}$ . 在铃木 2 群  $U$  中, 集  $\Omega$  和单位元素构成子群  $Z$ , 它与  $U$  的中心重合; 商群  $U/Z$  则是初等 Abel 群. 若  $Z$  的阶等于  $q$ , 则  $U$  的阶为  $q^2$  或  $q^3$ .

铃木 2 群已完全描述清楚了 (见 [1]). 其名称来源于下列事实, 在铃木群 (Suzuki group) 中, Sylow 2 子群  $U$  就有这些性质.

## 参考文献

- [1] Higman, G., Suzuki 2-group, *Ill. J. Math.*, 7 (1963), 1, 79 - 96.

В. Д. Мазуров 撰 石生明译 王杰校

## 铃木群 [Suzuki group; Судзуки группа]

有限单群 (simple finite group)  $Sz(q)$ , 铃木通夫所发现的单群的无限系列中的成员.

令  $n$  是自然数,  $F$  是  $q = 2^{2n+1}$  个元素的有限域,  $\theta$  是  $F$  的自同构使得  $\alpha^{\theta^2} = \alpha^2$ , 对任何  $\alpha \in F$ . 由对角元素为  $\lambda^{1+\theta}, \lambda, \lambda^{-1}, (\lambda^{1+\theta})^{-1}$  的所有 4 阶对角矩阵,  $\lambda \in F, \lambda \neq 0$ , 作成子群  $T$ , 由所有下述形式的三角矩阵

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^{1+\theta} + \beta & \alpha^\theta & 1 & 0 \\ \alpha^{2+\theta} + \alpha\beta + \beta^\theta & \beta & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$(\alpha, \beta \in F)$  作成子群  $U$ , 由子群  $T$ , 子群  $U$  及矩阵

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

一起就生成铃木群  $Sz(q)$ . 子群  $U$  是群  $Sz(q)$  的 Sylow 2 子群; 它是铃木 2 群 (Suzuki 2-group). 子

群  $UT$  恰为  $U$  的正规化子. 群  $Sz(q)$  在  $UT$  的陪集上的置换表示是双传递的; 它的次数是  $q^2 + 1$ . 铃木群  $Sz(q)$  的阶是  $q^2(q-1)(q^2+1)$ , 它不被 3 整除. 另一方面, 阶不能被 3 除尽的任何非 Abel 有限单群必同构于铃木群. 群  $Sz(q)$  是辛群  $Sp(4, q)$  的极大子群, 且是群  $Sp(4, q) = B_2(q)$  的一个二阶自同构在  $Sp(4, q)$  中的中心化子. 换句话说,  $Sz(q)$  同构于  $q$  个元素的有限域上  $B_2$  型 Chevalley 群 (Chevalley group) 的扭类似物  ${}^2B_2(q)$ .

#### 参考文献

[1] Suzuki, M., On a class of doubly transitive groups, *Ann. of Math.*, 75 (1962), 1, 105 – 145.

[2] Carter, R., Simple groups of Lie type, Wiley (Interscience), 1972. В. Д. Мазуров 撰

【补注】实际上恰有  $F$  的一个自同构  $\theta$  使得  $\theta^2(\alpha) = \alpha^2$ , 对所有  $\alpha \in F$ . 它是  $\theta(\alpha) = \alpha^{2^{m+1}}$ .

存在扭配极, 其绝对点是  $F_q^q$  的  $q^2 + 1$  个 1 维子空间, 它们是被  $UT$  的一个共轭所固定. 如上得到的绝对点的集合是一个卵形 (ovoid). 见 [A1] – [A2].

#### 参考文献

[A1] Tits, J., Ovoides et groupes de Suzuki, *Arch. Math.*, 13 (1962), 187 – 198.

[A2] Tits, J., Une propriété caractéristique des ovoides associés aux groupes de Suzuki, *Arch. Math.*, 17 (1966), 136 – 153.

[A3] Huppert, B. and Blackburn, N., Finite groups, 3, Springer, 1982. Chapt. IX. 3.

石生明 译 王杰 校

铃木零散群 [Suzuki sporadic group; Судзуки спорадическая группа]

铃木通夫构造的阶为

$$448\,345\,497\,600 = 2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

的有限单群 (simple finite group), 是 1782 次本原置换群, 其稳定化子同构于 Chevalley 群 (Chevalley group)  $G_2(4)$ .

对别的零散群, 见零散单群 (sporadic simple group).

【补注】它的 Schur 乘子是 6; 其中心覆盖是复 Leech 格 (Leech lattice) 的自同构群. 参见 [A1].

#### 参考文献

[A1] Conway, J. H., et al., Atlas of finite groups, Clarendon Press, 1985. 石生明 译 王杰 校

曲线的突转 [swerve of a curve; извивание кривой], 曲线的自旋转 (self-rotation of a curve)

非正则曲面上一条曲线的转动的、不是由于曲面的

积分曲率集中在曲线的点集上引起的变差部分. 对于一条简单曲线弧, 突转等于  $(\sigma_l + \sigma_r - \Omega)/2$ , 其中  $\sigma_l$ ,  $\sigma_r$  是左、右横越  $L$  所得的变差,  $\Omega$  是  $L$  作为集合的曲率变差. 突转为零的曲线称为拟测地线 (quasi-geodesic line).

#### 参考文献

[1] Александров, А. Д., Стрельцов, В. В., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 76 (1965), 67 – 80.

Ю. Д. Бураго 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Busemann, H., Convex surfaces, Interscience, 1958, Chapt. III, Sect. 15. 陈维桓 译

Sylow 基 [Sylow basis; Силовая базис]

【补注】令  $G$  是有限群 (finite group),  $\pi$  是  $G$  的阶  $n$  的素因子集合的子集合. Sylow  $\pi$  基 (Sylow  $\pi$ -basis)  $S$  是  $G$  的一些 Sylow  $p$  子群  $P_p$  的集合 (见 Sylow 子群 (Sylow subgroup)), 对每个素数  $p \in \pi$  有一个  $P_p$ , 且满足: 若  $P_{p_1}, \dots, P_{p_t}$  属于  $S$ , 则  $\{P_{p_1}, \dots, P_{p_t}\}$  (由  $P_{p_1}, \dots, P_{p_t}$  生成的子群) 中的每个元素的阶是  $p_1, \dots, p_t$  的非负幂的积. 若  $\pi$  是整除  $n$  的全部素数的集合, 则说成完全 Sylow 基 (complete Sylow basis). 两个 Sylow 基是共轭的, 若有  $G$  的单个元素, 用它作共轭可把第一个基的全部群变到第二个基的全部群中. Hall 第二定理 (Hall second theorem) ([A2]) 说, 每个有限可解群有完全 Sylow 基, 且所有这种基皆共轭. 反之, 若有限群有完全 Sylow 基, 则它是可解群 (solvable group).

#### 参考文献

[A1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд, М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987; 下册, 1982).

[A2] Hall, P., On the Sylow systems of a soluble group, *Proc. London. Math. Soc.*, 43 (1937), 316 – 323.

石生明 译 王杰 校

Sylow 子群 [Sylow subgroup; Силовая подгруппа]

群的极大  $\pi$  子群, 其中  $\pi$  是素数的一个集合; 也即周期子群, 但其元素的阶仅被  $\pi$  中的素数除尽且它不含于有这种性质的更大的子群中 (Sylow  $\pi$  子群 (Sylow  $\pi$ -subgroup)).  $\pi$  仅有一个素数  $p$  时, 即为 Sylow  $p$  子群, 它在群论中有基本的重要性. 赋以此名称是表示对 L. Sylow 的敬意, 他证明了有限群中有关这种子群的若干定理 (见 Sylow 定理 (Sylow theorems)).

Sylow 子群在有限群论中起重要作用. 例如, 正规 Abel 子群的补的问题化为 Sylow 子群的同样问



题; 非平凡  $p$  商群的存在性与 Sylow  $p$  子群的正规化子的非平凡  $p$  商群的存在性相联系; 有限单群的结构很大程度上由它的 Sylow 2 子群决定的. 无限群论中, 除去局部有限群外, Sylow 子群的作用较为次要, 因为除一些特殊情形外, Sylow  $p$  子群的共轭性的基本问题不再有肯定的回答.

## 参考文献

- [1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1977 (英译本: Kargaplov, M. I. and Merzjakov, J. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).
- [2] Шметков, Л. А., «Успехи матем. наук», 30 (1975), 2, 179 – 198.
- [3] Suzuki, M., Group theory, 1, Springer, 1982.
- [4] Huppert, B., Endliche Gruppen, 1, Springer, 1974 (中译本: 贝·胡佩特, 有限群, I, 上、下册, 福建人民出版社, 1992).

В. Д. Мазуров 撰 石生明 译 王杰 校

## Sylow 定理 [Sylow theorems; Силова теоремы]

L. Sylow ([1]) 所证明的关于有限群的极大  $p$  子群的三个定理, 它们在有限群论中起重要作用. 有时将这三个定理统称为 Sylow 定理 (Sylow theorem).

令  $G$  为阶为  $p^m s$  的有限群, 这里  $p$  为除不尽  $s$  的素数. 下列定理成立.

**Sylow 第一定理 (Sylow first theorem):** 对所有  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $G$  含有阶为  $p^i$  的子群; 且每个  $p^{i-1}$  阶的子群必至少在一个阶为  $p^i$  阶的子群中正规. 特别地, 这个定理蕴涵了下述重要结果:  $G$  中有阶为  $p^m$  的 Sylow 子群 (Sylow subgroup);  $G$  的任何  $p$  子群皆包含在  $p^m$  阶的某 Sylow  $p$  子群中; Sylow  $p$  子群的指数不能被  $p$  除尽; 若  $G = P$  是  $p^m$  阶的群, 则它的任何真子群含在阶  $p^{m-1}$  的某极大子群中, 且  $P$  的所有极大子群为正规子群.

**Sylow 第二定理 (Sylow second theorem):** 一个有限群的所有 Sylow  $p$  子群皆共轭.

对无限群, 一般地没有类似的结果.

**Sylow 第三定理 (Sylow third theorem):** 有限群的 Sylow  $p$  子群的数目除尽群的阶且模  $p$  同余于 1.

对任意素数集合  $\pi$ , 类似的定理仅对有限可解群才具有 (见 Hall 子群 (Hall subgroup)). 对非可解群, 情形就不同了. 例如在 5 次交错群  $A_5$  中, 对  $\pi = \{2, 3\}$  存在 6 阶 Sylow  $\pi$  子群  $S$ , 可是它的指数能被  $\pi$  中的一个数除尽. 此外, 在  $A_5$  中有同构于  $A_4$  的 Sylow  $\pi$  子群, 但它与  $S$  不共轭.  $A_5$  中 Sylow  $\pi$  子群的数目除不尽  $A_5$  的阶.

## 参考文献

- [1] Sylow, L., Théorèmes sur les groupes de substitutions, Math. Ann., 5 (1872), 584 – 594.

- [2] Hall, M., The theory of groups, Macmillan, 1959 (中译本: M. 赫尔: 群论, 科学出版社, 1982).

В. Д. Мазуров 撰 石生明 译 王杰 校

## 算子的象征 [symbol of an operator; символ оператора]

与一算子相关且多少反映算子性质的标量或矩阵函数. 通常假设赋以象征的算子属于一个代数. 然后, 作为一个规则, 当算子求和时, 其象征应相加; 算子相乘时, 象征也应相乘, 这种乘法或者是准确地相乘, 或者允许相差一个在某种意义下的小项. 算子的象征通常是在一个代数 (特别是, 在一个算子代数) 中取值, 而此代数比算子原来所属的代数较为简单.

通常是对作用在函数空间上的算子赋以象征. 这时, 典型的情况是, 算子作用在  $n$  元函数上 (或者更广泛一些说, 作用在定义于一  $n$  维流形的函数上), 而象征则是  $2n$  元函数 (或定义在一个  $2n$  维流形上). 伪微分算子 (pseudo-differential operator) 理论就是使用这种象征建立出来的. 象征和算子的对应是量子化的基础, 在这个对应中, 象征是经典的可观测量, 而算子自身则是相应的量子可观测量.

$\mathbf{R}^n$  上算子的象征. 设有一多项式

$$a(p, q) = \sum_{|\alpha| + |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta} q^\alpha p^\beta$$

这里  $q, p \in \mathbf{R}^n$ ,  $q = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $\alpha$  与  $\beta$  是重指标 (即  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ;  $\alpha_i \geq 0$  是整数,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ),  $a_{\alpha\beta} \in \mathbf{C}$ . 于是可以用多种方法作出作用于  $\mathbf{R}^n$  上的函数的算子  $A$ , 而都是将  $q_j$  换成算子  $\hat{q}_j$ , 就是乘以  $\mathbf{R}^n$  的坐标  $x_j$  之一, 将  $p_j$  换成算子  $\hat{p}_j = (h/i)(\partial/\partial x_j)$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $h$  是任意常数 (起 Planck 常数的作用). 只要将  $p$  和  $q$  的位置改变, 就会得到不同的算子. 如果令

$$A = a(\hat{q}, \hat{p}) = \sum_{|\alpha| + |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta} \hat{q}^\alpha \hat{p}^\beta,$$

则  $a(q, p)$  称为  $A$  的  $qp$  象征 ( $qp$ -symbol) 或左象征 (left symbol). 左象征与这样得出的算子的对应是多项式与具有多项式系数的微分算子的一一对应, 而可以用以下公式

$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{i(x-y)\xi/h} a(x, \xi) u(y) dy d\xi$$

推广到广泛得多的算子类 and 象征类上去, 这里  $z\xi = z_1\xi_1 + \dots + z_n\xi_n$  而  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  是  $n$  维向量,  $dy = dy_1 \dots dy_n$ ,  $d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n$ .

具有  $pq$  象征 ( $pq$ -symbol) 或右象征 (right symbol)  $a(q, p)$  的算子  $A$  由下式定义:

$$A = a(\hat{q}, \hat{p}) = \sum_{|\alpha| + |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta} \hat{p}^\beta \hat{q}^\alpha,$$

或对更广的象征类用下式定义

$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{i(x-y)\xi/h} a(y, \xi) u(y) dy d\xi.$$

构造相应于一多项式  $a(q, p)$  的算子的更为对称的方法是, 对不可交换的算子  $B, C$  用下式引入其对称化乘积  $(B^k C^l)$

$$(sB + tC)^n = \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!} s^k t^l (B^k C^l),$$

然后再令

$$A = \sum_{|\alpha+\beta| \leq m} a_{\alpha\beta} (\hat{q}_1^{\alpha_1} \hat{p}_1^{\beta_1}) \cdots (\hat{q}_n^{\alpha_n} \hat{p}_n^{\beta_n}).$$

这时  $a(q, p)$  称为  $A$  的 Weyl 象征 (Weyl symbol).

算子  $A$  可以用其 Weyl 象征按下式来表示:

$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{i(x-y)\xi/h} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

另一种量子化会导致  $\mathbf{R}^n$  上的算子的另外两类象征出现, 即 Wick 象征 (Wick symbol) 与反 Wick 象征 (anti-Wick symbol). 这种量子化即引入产生算子 (creation operators)  $a_j^- = \hat{q}_j - i\hat{p}_j$  与湮没算子 (annihilation operators)  $a_j^+ = \hat{q}_j + i\hat{p}_j$ , 并将带多项式系数的微分算子  $A$  写成

$$A = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} (a^+)^{\alpha} a^{\beta},$$

或

$$A = \sum_{\alpha, \beta} c'_{\alpha, \beta} a^{\beta} (a^+)^{\alpha},$$

则其 Wick 象征  $c(q, p)$  与反 Wick 象征  $a(q, p)$  各由下式给出

$$c(q, p) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} (q - ip)^{\alpha} (q + ip)^{\beta},$$

$$a(q, p) = \sum_{\alpha, \beta} c'_{\alpha, \beta} (q - ip)^{\alpha} (q + ip)^{\beta}.$$

关于一个算子的不同象征的关系公式见 [1]—[4].

**流形上算子的象征.** 上述  $\mathbf{R}^n$  上的各类象征与相当广泛的算子类一一对应, 而在流形上, 一般说来就没有自然的象征使这种一一对应存在. 在流形上, 所谓主象征 (principal symbol) 起重要的作用, 它是对某些伪微分算子定义的, 而且是  $T^*X \setminus 0$  (即流形  $X$  的余切丛除去零截面) 上的齐次函数. 它的可逆性就蕴涵所述的算子  $A$  是椭圆型的, 且保证正则性定理成立, 即具有光滑右方  $f$  的方程  $Au = f$  的解是光滑的, 同时 (若  $X$  为紧)  $A$  在某些适当的 Sobolev 空间中是 Fredholm 的. 在算子的加法与乘法之下, 主象征也分别相加与相乘. 当对算子加上低阶项时, 主象征不变.

**有边流形上算子的象征.** 在以  $Y$  为边的流形  $X$

上, 伪微分算子形如矩阵 ([5]—[7]):

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A+B & K \\ T & Q \end{pmatrix}: \begin{matrix} \Gamma(E_1) \\ \oplus \\ \Gamma(G_1) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \Gamma(E_2) \\ \oplus \\ \Gamma(G_2) \end{matrix}$$

这里  $E_1$  和  $E_2$  是  $X$  上的向量丛;  $G_1$  和  $G_2$  是  $Y$  上的向量丛;  $A$  是  $X$  上一个具有传输性质 (见传输条件 (transmission, condition of)) 的伪微分算子;  $T$  是一边缘算子, 即在某边界条件中作用的算子 (通常是伪微分算子);  $K$  是一上边缘算子或称位势型算子;  $B$  是奇异 Green 算子 (即一边缘算子与上边缘算子之乘积或一有类似构造的更广泛的算子);  $Q$  是  $Y$  上的一个伪微分算子. 算子  $\mathfrak{A}$  有两类象征: 内象征与边缘象征. 内象征 (interior symbol)  $\sigma^0(\mathfrak{A})$  即  $A$  的通常的象征, 它是  $T^*X \setminus 0$  上的函数, 更准确地说, 是从  $\text{Hom}(\pi^*E_1, \pi^*E_2)$  的一个截面, 这里  $\pi: T^*X \setminus 0 \rightarrow X$  是典范投射. 边缘象征 (boundary symbol)  $\sigma_Y(\mathfrak{A})$  则是  $T^*Y \setminus 0$  上的函数, 而其值为半轴  $[0, \infty)$  上的算子, 这算子是由  $\mathfrak{A}$  将其主部系数冻结在边缘的点上 (采用一个坐标系使边界为一超平面), 然后再对切向变量作 Fourier 变换而得.  $\sigma^0(\mathfrak{A})$  的可逆性即  $A$  的通常的椭圆性 (见椭圆型算子 (elliptic operator)). 若假设了这个椭圆性,  $\sigma_Y(\mathfrak{A})$  在定义于半轴上的减函数类上的可逆性, 事实上就是由  $\mathfrak{A}$  定义的边值问题的椭圆性条件, 即所谓的 Шапиро-Лопатинский 条件 (Shapiro-Lopatinskiĭ condition). 所以自然地就把偶对  $(\sigma^0(\mathfrak{A}), \sigma_Y(\mathfrak{A}))$  称为  $\mathfrak{A}$  的象征. 若象征  $\sigma^0(\mathfrak{A})$  与  $\sigma_Y(\mathfrak{A})$  均可逆, 则称  $\mathfrak{A}$  为椭圆型的, 这时, 通常的正则性定理以及 Fredholm 性质定理 (后者需设  $X$  为紧) 均成立.

#### 参考文献

- [1] Березин, Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965 (英译本: Berezin, F. A., The method of second quantization, Acad. Press, 1966).
- [2] Маслов, В. П., Операторные методы, М., 1973 (英译本: Maslov, V. P., Operator methods, MIR, 1976).
- [3] Шубин, М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978 (英译本: Shubin, M. A., Pseudodifferential operators and spectral theory Springer, 1987).
- [4] Березин, Ф. А., «Матем сб.», 86 (1971), 4, 578—610.
- [5] Boutet de Monvel, L., Boundary problems for pseudo-differential operators, Acta Math., 126 (1971), 11—51.
- [6] Rempel, S. and Schulze, B.-M., Index theory of elliptic boundary problems, Akad. Verlag, 1982 (译自德文).
- [7] Grubb, G., Functional calculus of pseudo-differential boundary problems, Birkhäuser, 1986.

М. А. Шубин 撰



【补注】 象征的概念在奇异积分算子 (singular integral operators) (一维或多维, 见奇异积分方程 (singular integral equations)) 理论中也起重要作用. 含这种算子的方程组的研究引出了矩阵象征 (matrix symbol) 的概念. 后一概念不仅对方程组是重要的; 它也在具有分段连续标量系数的奇异积分算子的研究中出现.

#### 参考文献

- [A1] Krupnik, N. Ya., Banach algebras with symbol and singular integral operators, Birkhäuser, 1987 (译自俄文).
- [A2] Михлин, С. Г. и Проессдорф, С., Сингулярные интегральные операторы, М., 1970 (英译本: Mikhlin S. G. and Prossdorf, S., Singular integral operators, Akad. Verlag, 1986).
- [A3] Boutet de Monvel, L., A course on pseudodifferential operators and their applications, Math. Dept. Duke University, 1976.
- [A4] Taylor, M. E., Pseudodifferential operators, Princeton Univ. Press, 1981.
- [A5] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, Vol. 3, Springer, 1985.
- [A6] Plamenevskiĭ, B. A., Algebras of pseudodifferential operators, Kluwer, 1989 (译自俄文). 齐民友 译

#### 符号动力学 [symbolic dynamics; символическая динамика]

1) 狭义的符号动力学就是研究拓扑 Bernoulli 自同构 (Bernoulli automorphism)  $\sigma$  (其定义见下) 及其不变闭子集, 不变测度等等. 拓扑 Bernoulli 自同构 (topological Bernoulli automorphism)  $\sigma$  作用在一空间  $\Omega$  上,  $\Omega$  由某字母表  $A$  (通常是有限的) 中的符号所成的双侧无穷序列构成, 对  $\Omega$  赋以无穷多个  $A$  的直积拓扑 (在每个  $A$  中通常取离散拓扑). 具体说来,  $\sigma$  映序列  $\omega = \{\omega_i\}$  为  $\omega' = \{\omega'_i\}$  而  $\omega'_i = \omega_{i+1}$  (即序列向“左”方“位移”一位). 一个明显的推广是群 (或半群)  $G$  在由  $G$  到  $A$  的函数之空间  $A^G$  上的作用.

把  $A$  中的符号的某些对  $(a, b)$  称为“可容许的”. 对一切  $i$ ,  $(\omega_i, \omega_{i+1})$  均为可容许的这种序列  $\{\omega_i\}$ , 形成一个闭的 ( $\sigma$ -) 不变子集  $\Omega_1 \subset \Omega$ . 这是拓扑 Bernoulli 自同构的不变子集最重要的例子. 由移位  $\sigma|_{\Omega_1}$  在  $\Omega_1$  中产生的动力系统 (dynamical system) 称为拓扑 Марков 链 (topological Markov chain).

2) 广义的符号动力学就是把狭义符号动力学用于研究这样的动力系统, 它的定义与  $\Omega$  和  $\sigma$  完全无关.

#### 参考文献

- [1] Алексеев, В. М., Символическая динамика, К., 1976 (Одиннадцатая (летняя) математическая школа, ч. 1).

- [2] Bowen, R., Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Lecture notes in math., 470, Springer, 1975. Д. В. Аносов 撰

【补注】 A1) 通常用移位变换 (shift transformation) 一词 (简称移位 (shift)) 来代替“拓扑 Bernoulli 自同构”一词. 移位系统及其闭的不变子空间 (时常称为子移位 (subshift)) 是一族有许多应用 (包括动力系统理论以外的应用) 的重要的瀑布族.

在遍历理论 (ergodic theory) 和拓扑动力学 (topological dynamics) 中有许多重要的例子与反例都是用子移位来定义的, 这些子移位又经常是作为  $\Omega$  中某点的轨道之闭包得出的, 问题中的点是具有特殊的组合性质的双侧无穷序列  $\omega = \{\omega_i\}$ . 例如 Morse-Thue 序列 (Morse-Thue sequence) 就是字母表  $\{0, 1\}$  上的双侧序列  $\{\mu_i\}$ , 这里对于一切  $i \geq 1$ ,  $\mu_{-i} = \mu_{i-1}$ , 而  $i \geq 0$  时的  $\mu_i$  又是这样给出的: 若用  $Q_n$  记最初  $2^n$  项所成的块, 则  $Q_0 = 0$  而  $Q_{n+1}$  则是块  $Q_n$  和  $\bar{Q}_n$  的链锁;  $\bar{Q}_n$  是将  $Q_n$  中的 0 与 1 对换而得. 于是  $\mu$  的非负坐标是 0110100110010110... 另一个定义是: 令  $\alpha_n$  是  $n$  的二进展开式中 1 的个数; 则当  $n \geq 0$  时令  $\mu_n = \alpha_n \pmod{2}$ . 这个序列定义了  $\Omega$  中一点, 它是殆周期的 (almost periodic) 而非周期的; 见 [A10], Chapt. 12. 关于移位系统的一般结果, 可参看 [A11], [A12].

上面定义的拓扑 Марков 链也称为有限型子移位 (subshifts of finite type). 这样一个子移位可以用一  $(m \times m)$  矩阵  $M$  来刻画,  $m$  是所考虑的字母表  $A$  中元素个数,  $M$  的作法如下: 令  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ ; 则偶对  $(a_i, a_j)$  为可容许的, 当且仅当  $M$  之元  $M_{ij}$  为 1;  $M$  的其他元为 0 ( $M$  即拓扑 Марков 链的转移矩阵 (transition matrix)). 拓扑 Марков 链的性质常可用相伴的转移阵来表述. 例如拓扑 Марков 链的拓扑熵 (topological entropy) 等于  $\log \lambda$ , 而  $\lambda$  是转移阵的最大的正本征值. 关于拓扑 Марков 链的分类, 参见 [A2] 与 [A8].

与拓扑 Марков 链有关的还有复杂移位系统 (sofic system) ([A5], [A18]). 复杂移位系统就是一个子移位  $\Omega_1$  使得有一个拓扑 Марков 链  $\Omega_2$  和一个连续的满射  $\varphi: \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ , 而且  $\varphi$  与  $\Omega_2$  和  $\Omega_1$  中的移位变换可交换. 关于复杂移位系统分类的问题可见 [A7].

关于拓扑 Марков 链和复杂移位系统在信息理论中构造代码上的应用可见 [A1], [A18], 作为另一个例子应该提到 Morse-Thue 序列还可用于证明某些负曲率流形上返回的非闭测地线的存在性 ([A21]), 以及用于否认 Burnside 猜想即有界群必为有限 (见 Burnside 问题 (Burnside problem) 2).

移位系统在遍历理论中几乎起了“无所不在”的

作用. 一个重要的类是由 Bernoulli 移位 (Bernoulli shift) (亦称 Bernoulli 自同构 (Bernoulli automorphism)) 组成的; 例如见 [A24]. 许多用别的方式定义的系统原来都是同构于 Bernoulli 移位的 (例如负曲率表面上的测地流 [A22]). 在这方面也应提到 Jewett-Krieger 定理 (Jewett-Krieger theorem) (见强遍历性 (strong ergodicity)). 关于 Morse (-Thue) 系统的遍历性质, 例如可见 [A15]; 它是唯一遍历的 (uniquely ergodic) ([A16], [A17]). 直接或间接讨论移位系统的遍历理论的论著还有 [A2], [A3], [A9], [A13], [A14], [A23].

A2) 广义的符号动力学依据于以下原理. 设一瀑布  $f: W \rightarrow W$  的相空间  $W$  可分成有限多个互不相交的集合  $W_1, \dots, W_n$ , 则对每一个  $w \in W$  与  $n \in \mathbb{Z}$ , 都有唯一的  $\varphi(n, w) \in \{1, \dots, n\}$  使得  $f^n(w) \in W_{\varphi(n, w)}$ . 序列  $\Phi(w) = \{\varphi(n, w); n \in \mathbb{Z}\}$  —— 称为  $w$  的日程表 (itinerary) —— 可以看作是字母表  $A = \{1, \dots, n\}$  上的移位系统  $\Omega$  中的元素, 而映射  $\Phi: W \rightarrow \Omega$  对一切  $w \in W$  满足等式  $\Phi(f(w)) = \sigma(\Phi(w))$ . 在实践上, 这种表示法过于受限制. 于是试图构造一个所谓的  $W$  的 Марков 分划 (Markov partition). 它其实完全不是分划, 而是用内部互不相交的闭集来覆盖  $W$  (还要适合一些附加的条件, 因为过于复杂, 此处不讲). 与这样一个 Марков 分割相联, 也有一个转移阵  $M$  定义如下:  $M_{ij} = 0$  或  $1$ , 视  $\text{int } W_i \cap f^{-1}(\text{int } W_j)$  是否为空集而定. 在对  $f$  的适当条件下 (包括相空间为双曲集 (hyperbolic set)), 这个矩阵定义一个拓扑 Марков 链  $\Omega_M$ , 使得对于它可以定义一个连续满射  $\pi: \Omega_M \rightarrow W$  而  $f \circ \pi = \pi \circ \sigma$ ,  $\pi$  在  $\Omega_M$  的一个稠密的  $G_\delta$  集上是一一的, 而且对所有  $\omega \in \Omega$  和所有  $n \in \mathbb{Z}$  有  $f^n(\pi(\omega)) \in W_{\omega_n}$ , 即  $\omega = \{\omega_n\}$  是  $\pi(\omega)$  的日程表. 这个映射可以利用拓扑 Марков 链  $\Omega_M$  的特殊性质从拓扑学的与测度论的两种观点用来研究已给的瀑布.

应用这个方法得到成功的瀑布的重要例子例如有环面的双曲自同构 ([A3]), Аносов 微分同胚 (见  $Y$  系统 ( $Y$ -system)) ([A26], [A27]), 公理  $A$  微分同胚 (axiom- $A$  diffeomorphism) 的“基本子集” ([A6], 亦见 [2], [A25] 和 [A4]) (紧  $C^\infty$  流形上的微分同胚称为满足公理  $A$  (axiom- $A$ ), 如果其非游荡点 (non-wandering point) 的集合是双曲的, 且为周期点集合的闭包).

符号动力学也被用于分析动力系统的混沌行为 (见混沌 (chaos); 分形集 (fractals); 奇怪吸引子 (strange attractor)). 与符号动力学有关的还有区间映射的“揉搓演算” ([A20]).

参考文献

- [A1] Adler, R. L., Coppersmith, D. and Hassner, M., Algorithms for sliding block codes, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **219** (1983), 5 – 22.
- [A2] Adler, R. L. and Marcus, B., Topological entropy and equivalence of dynamical systems, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **219** (1979).
- [A3] Adler, R. L. and Weiss, B., Similarity of automorphisms of the torus, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **98** (1970).
- [A4] Alekseev, V. M. and Yakobson, M. V., Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems, *Physics Reports*, **75** (1981), 5, 287 – 325.
- [A5] Weiss, B., Subshifts of finite type and sofic systems, *Monatsh. Math.*, **77** (1973), 462 – 474.
- [A6] Bowen, R., Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 725 – 747.
- [A7] Boyle, M. and Krieger, W., Almost Markov and shift equivalent sofic systems, in J. C. Alexander (ed.): *Dynamical Systems*, Springer, 1988, 33 – 93.
- [A8] Boyle, M., Marcus, B. and Trow, P., Resolving maps and the dimension group for shifts of finite type, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **377** (1987).
- [A9] Denker, M., Grillenberger, C. and Sigmund, K., *Ergodic theory on compact spaces*, Springer, 1976.
- [A10] Gottschalk, W. H. and Hedlund, G. H., *Topological dynamics*, Amer. Math. Soc., 1955.
- [A11] Hedlund, G. H., Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system, *Math. Systems Theory*, **3** (1969), 320 – 375.
- [A12A] Hedlund, G. H. and Morse, M., Symbolic dynamics I, *Amer. J. Math.*, **60** (1938), 815 – 866.
- [A12B] Hedlund, G. H. and Morse, M., Symbolic dynamics II, *Amer. J. Math.*, **62** (1940), 1 – 42.
- [A13] Jacobs, K. and Keane, M., 0 – 1 sequences of Toeplitz type, *Z. Warsch. verw. Geb.*, **13** (1969), 123 – 131.
- [A14] Del Junco, A., Keane, M., Kitchens, B., Marcus, B. and Swanson, L., Continuous homomorphisms of Bernoulli schemes, in A. Katok (ed.): *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Birkhäuser, 1981, 91 – 111.
- [A15] Kakutani, S., Ergodic theory of shift transformations, in L. le Cam and J. Neyman (eds.): *Proc. 5 th Berkeley Symp. Math. Probab. Stat.* II, Univ. Calif. Press, 1967, 405 – 414.
- [A16] Kakutani, S., Strictly ergodic symbolic dynamical systems, in L. le Cam, Neyman, J. and Scott, E. L. (eds.): *Proc. 6 th Berkeley Symp. Math. Probab. Stat.* II, Univ. Calif. Press, 1972, 319 – 326.
- [A17] Keane, M., Generalized Morse sequences, *Z. Warsch. verw. Geb.*, **10** (1968) 335 – 353.
- [A18A] Krieger, W., On sofic systems I, *Israel J. Math.*,



48 (1984), 305 - 330.

- [A18B] Krieger, W., On sofic systems II, *Israel J. Math.*, **60** (1987), 167 - 176.
- [A19] Marcus, B., Sofic systems and encoding data, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **31** (1985), 366 - 377.
- [A20] Milnor, J. and Thurston, R., On iterated maps of the interval, in J. C. Alexander (ed.): *Dynamical Systems*, Lecture notes in math., Vol 1342, Springer, 1988, 465 - 563.
- [A21] Morse, M., Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, *Amer. J. Math.*, **43** (1921), 33 - 51.
- [A22] Ornstein, D. and Weiss, B., Geodesic flows are Bernoullian, *Israel J. Math.*, **14** (1973), 184 - 198.
- [A23] Parry, W. S. and Tuncel, S., Classification problems in ergodic theory, Cambridge Univ. Press, 1982.
- [A24] Shields, P., The theory of Bernoulli shifts, Univ. Chicago Press, 1973.
- [A25] Shub, M., Global stability of dynamical systems, Springer, 1987 (译自法文).
- [A26] Sinai, Ya. Markov partitions and C-diffeomorphisms, *Funct. Anal. Appl.*, **2** (1968), 1, 64 - 89 (*Funkts. Anal. Prilozh.*, **2** (1968), 1, 64 - 89).
- [A27] Sinai Ya., Construction of Markov partitions, *Funct. Anal. Appl.*, **2** (1968), 2, 70 - 80 (*Funkts. Anal. Prilozh.*, **2** (1968), 3, 64 - 80). 齐民友 译

对称代数 [symmetric algebra; симметрическая алгебра]

多项式代数的一个推广. 如果  $M$  是一个有么元的交换结合环  $A$  上的一个么模 (unitary module), 则  $M$  的对称代数是代数  $S(M) = T(M)/I$ , 其中  $T(M)$  是  $M$  的张量代数 (tensor algebra),  $I$  是形如  $x \otimes y - y \otimes x$  ( $x, y \in M$ ) 的元素生成的理想. 对称代数是具有么元的交换结合的  $A$  代数. 它是分次的

$$S(M) = \sum_{p \geq 0} S^p(M),$$

其中  $S^p = T^p(M)/I \cap T^p(M)$ ,  $S^0(M) = A$ ,  $S^1(M) = M$ . 模  $S^p(M)$  称作模  $M$  的  $p$  次对称幂 ( $p$ -th symmetric power). 如果  $M$  是以  $x_1, \dots, x_n$  为有限基的自由模, 则对应  $x_i \rightarrow X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 扩充为  $S(M)$  到多项式代数  $A[X_1, \dots, X_n]$  上的同构 (见多项式环 (ring of polynomials)).

对任一  $A$  模同态  $f: M \rightarrow N$ ,  $p$  次张量幂  $T^p(f): T^p(M) \rightarrow T^p(N)$  诱导出同态  $S^p(f): S^p(M) \rightarrow S^p(N)$  (同态  $f$  的  $p$  次对称幂 ( $p$ -th symmetric power of the homomorphism  $f$ )). 结果得到一个  $A$  代数同态  $S(f): S(M) \rightarrow S(N)$ . 对应  $f \rightarrow S^p(f)$  和  $f \rightarrow S(f)$  分别是  $A$  模范畴到自身和  $A$  代数范畴的共变函子. 对任意两个  $A$  模  $M$  和  $N$ , 有自然的同构  $S(M \oplus N) \simeq S(M)$

 $\otimes_A S(N)$ .

如果  $M$  是特征 0 的域上的向量空间, 则对称化  $\sigma: T(M) \rightarrow T(M)$  (见对称化 (张量的) (symmetrization (of tensors))) 定义了由对称代数  $S(M)$  到代数  $\tilde{S}(M) \subset T(M)$  上的同构, 其中  $\tilde{S}(M)$  是  $M$  上的关于对称乘法

$$u \vee v = \sigma(u \otimes v), u \in \tilde{S}^p(M), v \in \tilde{S}^q(M)$$

的对称反变张量的代数.

#### 参考文献

- [1] Bourbaki, N., *Eléments de mathématique*, 2. Algèbre, Hermann, 1964, Chapt. IV - VI.
- [2] Кострикин, А. И., Манин, Ю. И., *Линейная алгебра и геометрия*, М., 1980 (英译本: Kostrikin, A. I. and Manin, Yu. I., *Linear algebra and geometry*, Gordon & Breach, 1989). А. Л. ОНИЩИХ 撰
- 【补注】由  $A$  模到交换酉  $A$  代数的函子  $S$  解决了下述泛问题 (universal problem). 设  $M$  是  $A$  模,  $B$  是交换酉  $A$  代数. 对每个  $A$  模同态  $f: M \rightarrow B$ , 存在唯一的  $A$  代数同态  $g: S(M) \rightarrow B$ , 使得  $g$  在  $S^1(M)$  上的限制与  $f$  相同. 于是  $S$  是交换酉  $A$  代数范畴到  $A$  模范畴的基础函子的左伴随函子.

赵春来 译

对称信道 [symmetric channel; канал симметричный]

转移函数具有某种对称性的通信信道 (communication channel). 输入和输出字母集分别为有限集  $Y$  和  $\tilde{Y} = Y$  的齐次离散时间无记忆信道 (memoryless channel) 称为对称信道, 如果它的转移概率矩阵  $\{q(y, \tilde{y}): y, \tilde{y} \in Y\}$  满足

$$q(y, \tilde{y}) = \begin{cases} q & \text{当 } y = \tilde{y} \text{ 时,} \\ \frac{1-q}{n-1} & \text{当 } y \neq \tilde{y} \text{ 时,} \end{cases} \quad (*)$$

其中  $n$  表示集合  $Y$  中元素个数,  $0 \leq q \leq 1$ . 研究最广泛的一类无记忆对称信道是二元对称信道 (binary symmetric channel), 其转移概率矩阵为

$$\begin{vmatrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{vmatrix}.$$

和非对称信道相比, 对称信道中许多重要的信息理论的特征参数或者直接通过公式计算出来或者在计算中有实质上的简化. 例如, 当无记忆对称信道的转移概率矩阵  $\{q(y, \tilde{y}): y, \tilde{y} \in Y\}$  满足 (\*) 式时, 其信道容量  $C$  (见信道传输速率 (transmission rate of a channel)) 由下式给出:

$$C = \log n + q \log q + (1 - q) \log \frac{1 - q}{n - 1}.$$

参考文献见通信信道 (communication channel) 文献 [1], [4]. Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gallager, R. C., Information theory and reliable communication, Wiley, 1968.

【译注】参考文献亦见 Shannon 定理 (Shannon theorem) 译注之参考文献.

骆源 符方伟 沈世镒 译

对称导数 [symmetric derivative; симметрическая производная]

导数概念对  $n$  维 Euclid 空间上集函数  $\Phi$  情形的一种推广. 在点  $x$  的对称导数是极限

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\Phi(S(x; r))}{|S(x; r)|} \equiv D_{\text{sym}} \Phi(x),$$

如果它存在的话, 其中  $S(x; r)$  表示以  $x$  为心,  $r$  为半径的闭球. 一元函数  $f$  在点  $x$  的  $n$  阶对称导数 (symmetric derivative of order  $n$ ) 定义为极限

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_s^n f(x, h)}{h^n} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f\left(x + \frac{n-2k}{2} h\right)}{h^n} = \\ &= D_{\text{sym}}^n f(x). \end{aligned}$$

一元函数  $f$  在点  $x$  有  $2r$  阶对称导数

$$D_{\text{sym}}^{2r} f(x) = \beta_{2r},$$

如果

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (f(x+h) + f(x-h)) - \sum_{k=0}^r \beta_{2k} \frac{h^{2k}}{(2k)!} &= \\ &= o(h^{2r}); \end{aligned}$$

如果

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (f(x+h) - f(x-h)) - \sum_{k=0}^r \beta_{2k+1} \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \\ &= o(h^{2r+1}), \end{aligned}$$

则  $f$  在点  $x$  有  $2r+1$  阶对称导数

$$D_{\text{sym}}^{2r+1} f(x) = \beta_{2r+1}.$$

当  $f$  在点  $x$  有  $n$  阶导数  $f^{(n)}$  时, 则 (在两种情形) 它在点  $x$  都有对称导数, 且等于  $f^{(n)}(x)$ .

参考文献

[1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

[2] James, R. D., Generalized  $n$ th primitives, Trans. Amer. Math. Soc., 76 (1954), 1, 149 - 176.

Т. П. Лукашенко 撰 王斯雷 译

对称导出数 [symmetric derived number; симметрическое производное число]

通常导出数概念 (见 Dini 导数 (Dini derivative)) 对于  $n$  维 Euclid 空间中集函数  $\Phi$  的一种推广.  $\Phi$  在  $x$  的对称导出数定义为极限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(S(x, r_k))}{|S(x, r_k)|},$$

其中  $S(x, r_k)$  是以  $x$  为心, 半径为  $r_k$  的一系列闭球, 且当  $k \rightarrow \infty$  时,  $r_k \rightarrow 0$ .

一元函数  $f$  在  $x$  的  $n$  阶对称导出数 ( $n$ -th symmetric derived numbers) 定义为极限

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta_s^n f(x, h_k)}{h_k^n} &= \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-1)^m f\left(x + \frac{n-2m}{2} h_k\right)}{h_k^n}, \end{aligned}$$

其中当  $k \rightarrow \infty$  时,  $h_k \rightarrow 0$ , 而  $\Delta_s^n f(x, h_k)$  是  $f$  在  $x$  的对称差分 ( $n$  阶的) (symmetric difference of order  $n$ ).

参考文献

[1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

Т. П. Лукашенко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1974 (中译本: W. 卢丁, 实分析与复分析, 人民教育出版社, 1982).

王斯雷 译

对称差分 ( $n$  阶的) [symmetric difference of order  $n$ ; симметрическая разность порядка  $n$ ], 一元实变函数  $f$  在点  $x$  上的

表达式

$$\Delta_s^n f(x, h) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f\left(x + \frac{n-2k}{2} h\right).$$

将  $h$  换成  $2h$ , 下面的表达式也称为对称差分:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f(x + (n-2k)h).$$

假若  $f(x)$  在  $x$  有  $n$  阶导数  $f^{(n)}(x)$ , 那么

$$\Delta_s^n f(x, h) = f^{(n)}(x) h^n + o(h^n).$$

Т. П. Лукашенко 撰

【补注】

参考文献



[A1] Meschkowski, H., Differenzengleichungen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959.

[A2] Milne-Thomson, L. N., The calculus of finite differences, Chelsea, reprint, 1981.

[A3] Nörlund, N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, Chelsea, reprint, 1954. 王斯雷 译

**集合的对称差** [symmetric difference of sets; симметрическая разность]

集合间的一种运算. 给定两个集合  $A$  和  $B$ , 它们的对称差 (symmetric difference), 记作  $A \Delta B$ , 定义为

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \\ &= (A \cup B') \cap (B \cup A'), \end{aligned}$$

其中符号  $\cup, \cap, \setminus, '$  分别表示集合的并运算, 交运算, 差运算和补运算. М. И. Войцеховский 撰

【补注】对称差运算满足结合律, 即  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ , 且交运算关于它是可分配的, 即  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ . 从而, 与并和交相对应,  $\Delta$  和  $\cap$  定义了集合  $X$  的幂集 (power set) ( $X$  的子集的集合) 上的环结构. 这个环与  $X$  上的  $Z(2)$  值函数组成的环 (其上运算为点态乘法和点态加法) 相同. 亦见 **Boole 代数** (Boolean algebra) 和 **Boole 代数** 中关于对称差运算的 **Boole 环** (Boolean ring).

参考文献

[A1] Kuratowski, K., Introduction to set theory and topology, Pergamon, 1961, p. 34, 35 (译自法文).

赵希顺 译

**对称区域** [symmetric domain; симметрическая область]

一复流形 (complex manifold)  $D$  同构于  $\mathbb{C}^n$  中的一有界区域并使得, 对每一点  $p \in D$ , 有一对合全纯变

换  $\sigma_p: D \rightarrow D$  以  $p$  为唯一不动点. 一对称区域是关于 Bergman 度量 (见 **Bergman 核函数** (Bergman kernel function)) 是负曲率的 **Hermite 对称空间** (Hermitian symmetric space). 它的自守群是包含在 (作为一复流形) 运动群中并且有相同的连通分支  $G(D)$ , 它是一没有中心的非紧实半单 Lie 群.  $G(D)$  中  $p \in D$  的固定子群  $H(D)$  是一具有一维中心的连通紧 Lie 群. 作为一实流形, 一对称区域微分同胚于  $\mathbb{R}^{2n}$ .

每一对称区域都可唯一分解为一不可约对称区域的直积, 这些列于下表中 (其中  $M_{p,q}$  表示复  $(p \times q)$  矩阵空间).

一 III 型的对称区域可表为 Siegel 上半平面:

$$\{Z \in M_{p,p}: Z^t = Z, \operatorname{Im} Z > 0\}.$$

它的点主要地参数化配极 Abel 簇. 其他对称区域也可表为第一或第二类 **Siegel 区域** (Siegel domain) (见 [2]).

参考文献

[1] Siegel, C. L., Automorphe Funktionen in mehreren Variablen, Math. Inst. Göttingen, 1955.

[2] Пятский-Шапиро, И. И., Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, Москва, 1961 (英译本: Pyatetskii-Shapiro, I. I., Automorphic functions and the geometry of classical domains, Gordon & Breach, 1969).

[3] Cartan, E., Domaines bornés homogènes de l'espace de  $n$  variables complexes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1 (1935), 116 - 162.

[4] Drucker, D., Exceptional Lie algebras and the structure of hermitian symmetric spaces, Amer. Math. Soc., 1978. Э. Б. Винберг 撰

【补注】固定子群  $H(D)$  有一维中心, 当且仅当对称区域是不可约的.

参考文献

[A1] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups,

Cartan 型	$G(D)$ 的类型	$H(D)$ 的类型	$D$ 的维数	$D$ 的模式
I	$A_{p+q-1}$	$A_{p-1} + A_{q-1}$ ( $p \geq q$ )	$pq$	$\{Z \in M_{p,q}: Z^* Z < E\}$
II	$D_p$	$A_{p-1}$	$\frac{p(p-1)}{2}$	$\{Z \in M_{p,p}: Z^t = -Z, Z^* Z < E\}$
III	$C_p$	$A_{p-1}$	$\frac{p(p+1)}{2}$	$\{Z \in M_{p,p}: Z^t = Z, Z^* Z < E\}$
IV	$D_{p/2+1}$ $B_{(p+1)/2}$	$D_{p/2-1}$ $B_{(p-1)/2}$	$\frac{1}{2}p$	$\{z \in \mathbb{C}^p: \sum  z_i ^2 < 1, \sum  z_i ^2 < 1\}$
V	$E_6$	$D_5$	16	
VI	$E_7$	$E_6$	27	

and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

#### 【译注】

#### 参考文献

- [B1] 华罗庚, 多复变函数论中典型域的调和分析, 科学出版社, 1958.  
[B2] 陆启铿, 典型流形与典型域, 上海科学技术出版社, 1963. 钟同德 译

对称函数 [symmetric function; симметрическая функция]

在自变量任意置换下不变的函数. 下面是对称函数的一些例子:  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ,  $x_1 x_2 \cdots x_n$ ,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j, \max(x_1, \cdots, x_n), \\ x_1 + \cdots + x_n \pmod{m},$$

在十进制下由单数字组成的任意集之和, 以及“选举”函数——自变量仅取 1 (“同意”) 和 0 (“反对”), 而函数值当自变量取 1 超过半数时为 1 否则为 0 的这样的函数. 常数函数和一元函数是对称函数最简单的例子.

任意非常数的对称函数本质上依赖于它所有的变量. 因此加入除常数外的非本质变量将使函数不对称, 而去掉它将会使之对称. 所以对称函数的概念依赖于它所有变量的精确表达. 判别函数  $f(x_1, \cdots, x_n)$  为对称的一个简单准则是, 下面两个等式同时成立:

$$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \cdots, x_n), \\ f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = f(x_n, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}),$$

或以下  $n-1$  个等式成立:

$$f(x_1, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_{i+1}, x_i, \cdots, x_n)$$

以及

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) = f(x_n, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_1).$$

对称函数与对称多项式 (symmetric polynomial) 有一定的联系 (在特征为 0 的域上的) 任何对称有理函数必为两个对称多项式之商. 任何 Boole 对称函数, 在含有同样多个单位元的自变量集上取相同值. 这些函数在数学控制论及它的应用, 尤其是在算术和其他运算的模式实现中都起着重要的作用.

#### 参考文献

- [1] Waerden, B. L. van der., Algebra, 1-2, Springer, 1967-1971 (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学, 1-2, 科学出版社, 1962).  
[2] Яблонский, С. В., Введение в дискретную математику, М., 1979. В. М. Храпченко 撰

【补注】对称多项式是初等对称函数的多项式这一定理也称为 Newton 定理 (Newton theorem). 类似的结论

对连续函数, 全纯函数以及  $C^\infty$  函数 (光滑函数) 也成立. 例如, 若  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  为对称的光滑函数, 则存在光滑函数  $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  使

$$f(x_1, \cdots, x_n) = g(S_1(x), \cdots, S_n(x))$$

([A1]). 更一般地, 设  $G$  为线性作用于  $\mathbf{R}^n$  上的紧群,  $\rho_1, \cdots, \rho_m$  为不变量环  $\mathbf{R}[x_1, \cdots, x_n]^G$  的齐次生成元. 又设  $\rho: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  为相应的映射,  $x \mapsto (\rho_1(x), \cdots, \rho_m(x))$ . 那么

$$\rho: C^\infty(\mathbf{R}^m) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n)^G$$

为满射 ([A2]), 这是光滑不变函数的基本定理 (fundamental theorem for smooth invariant functions). 这结果依赖于 Malgrange 预备定理 (Malgrange preparation theorem) ( $C^\infty$  预备定理, 光滑预备定理), Weierstrass 预备定理的  $C^\infty$  类比 (见 Weierstrass 定理 (Weierstrass theorem 4)).

#### 参考文献

- [A1] Glaeser, G., Fonction composées différentiables, Ann. of Math., 77 (1963), 193-209.  
[A2] Schwarz, G., Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group, Topology, 14 (1975), 63-68.  
[A3] Golubitsky, M. and Guillemin, V., Stable mappings and their singularities, Springer, 1973, p. 108 ff.  
[A4] Poénaru, V., Singularités  $C^\infty$  en présence de symétrie, Springer, 1976, 3-58. 王斯雷 译

对称群 [symmetric group; симметрическая группа]

集合  $X$  上所有置换 (到自身的一一映射) 的群, 其运算是合成 (见置换群 (permutation group)). 集合  $X$  上的对称群记为  $S(X)$ . 对等势的  $X$  和  $X'$ , 群  $S(X)$  和  $S(X')$  是同构的. 有限集  $X = \{1, 2, \cdots, n\}$  上的对称群记为  $S_n$ . 每个抽象群同构于某集合  $X$  上的对称群  $S(X)$  的一个子群 (Cayley 定理 (Cayley theorem)).

令  $X$  是有限集.  $X$  上的每个置换  $\pi$  可唯一地表示为无交轮换的乘积 (置换的轮换分解 (cycle decomposition of a permutation) (无交的)); 整数序列

$$z(\pi) = (a_1, \cdots, a_n),$$

其中  $a_i$  是  $\pi$  的长为  $i$  的轮换个数, 称为  $\pi$  的轮换型 (cycle type) (或轮换指数 (cycle index)). 两个置换  $\pi$  及  $\pi'$  在  $S_n$  中共轭, 当且仅当它们的轮换类型相同, 具有轮换型

$$(n-2, 1, 0, \cdots, 0)$$

的置换称为对换 (transposition); 它们构成  $S_n$  的生成系. 对换的集合  $\Sigma = \{(i, i+1) | i = 1, \cdots, n-1\}$



是  $S_n$  的极小生成集. 一般地, 集合  $\Delta = \{(i_k, j_k) | i_k \neq j_k\}$  生成  $S_n$ , 当且仅当由  $X$  作顶点集又以点对  $(i_k, j_k)$  作边, 作成的图是树 (tree) ([2]). 这样的生成集的数目为  $n^{n-2}$  个.

交错群 (alternating group)  $A_n$  是  $S_n$  的正规子群. 若  $n \neq 4$ ,  $A_n$  是  $S_n$  的唯一非平凡真正规子群, 又  $S_4$  仅含一个别的非平凡正规子群——Klein 4 群 (Klein four-group):  $K_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ . 对  $n \leq 4$ , 群  $S_n$  是可解群, 但  $n \geq 5$  时, 它不可解且  $A_n$  是非 Abel 单群. Hölder 定理 (Hölder theorem): 对  $n \neq 2, 6$ , 群  $S_n$  是完全群 (complete group). 群  $S_2$  是交换群及  $S_6$  有一个 2 阶的外自同构.

$S_n$  中所有极大的非传递及非本原子群都已知. 对每个分划  $n = m_1 + m_2$ ,  $m_1 \neq m_2$ ,  $S_n$  中仅有的极大非传递子群是子群  $S_{m_1} \times S_{m_2}$ .  $S_n$  中仅有的传递非本原极大子群是  $S_{m_1}$  与  $S_{m_2}$  的圈积 (wreath product) (对每个分解  $n = m_1 m_2$ ).  $S_n$  中本原极大子群还未弄清 (1992), 但已知某些无限系列. 例如,  $S_n$  自然地作用在  $\{1, 2, \dots, n\}$  中  $m$  个元素的全部子集的集合  $B_n^m$  上; 当  $n \neq 2m$  时, 这决定了  $B_n^m$  的置换的一个本原群. 当  $(m, n) \neq (2, 6), (2, 8), (3, 10), (4, 12), (m, 2m), (m, 2m+1)$  时它在  $S(B_n^m)$  中是极大子群 (见 [1]). 考虑  $q$  个元素的有限域上  $n$  维向量空间中半线性变换的群  $\Gamma L_n(q)$ , 就可得另一个系列. 该群确定了 Grassmann 流形 (Grassmann manifold)  $G_{n,m}(q)$ ,  $1 \leq m \leq n-1$ , 的一个本原置换群, 当  $n \geq 3$  时, 它在  $S(G_{n,m}(q))$  中是极大子群.

令  $X$  是无限集. 仅变动  $X$  上有限个元素的全体置换的群称为在  $X$  上有限的 (finitary) 或限制的 (restricted) 对称群 (symmetric group), 且记成  $SF(X)$ ; 它的偶置换的群称为  $X$  上有限的 (finite) 或限制的 (restricted) 交错群 (alternating group), 记成  $AF(X)$ . 子群  $SF(X)$  及  $AF(X)$  都在  $S(X)$  中正规. 更一般地, 令  $\alpha$  为  $X$  的基数, 令  $\beta \leq \alpha$  是无限基数;  $X$  上至多移动  $\beta$  个元素的置换的集合是  $S(X)$  的子群, 记成  $S_\beta(X)$ . 和  $SF(X)$  及  $AF(X)$  一起, 群  $S_\beta(X)$ , 对所有  $\beta \leq \alpha$ , 是  $S(X)$  的正规子群, 且实际上,  $S(X)$  中没有其他非平凡正规子群 (Schreier-Ulam-Baer 定理 (Schreier-Ulam-Baer theorem), 见 [3]).

亦见集合的置换 (permutation of a set) 的参考文献.

#### 参考文献

- [1] Калужнин, Л. А., Клиш, М. Х., «Матем. сб.», 87 (1972), 1, 91 – 121.
- [2] Ore, O., Theory of graphs, Amer. Math. Soc., 1962.

- [3] Плоткин, Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966 (英译本: Plotkin, B. I., Groups of automorphisms of algebraic systems, Wolters-Noordhoff, 1972).

- [4] Устименко-Бакумовский, В. А., «Докл. АН. СССР.», 240 (1978), 6, 1305 – 1308.

Л. А. Калужнин 撰

【补注】完全群 (complete group), 即为无中心及无外自同构的群, 也称为完满群 (perfect group).

关于  $S_n$  的子群结构的一个结果, 亦见 [A1].

#### 参考文献

- [A1] Aschbacher, I. M. and Scott, L. L., Maximal subgroups of finite groups, *J. Algebra*, 1 (1985), 44 – 80.
- [A2] Wielandt, H., Finite permutation groups, Acad. Press, 1964 (中译本: H. 维兰特, 有限置换群, 科学出版社, 1984).

- [A3] Passman, D., Permutation groups, Benjamin, 1968.

【译注】 $S_n$  中极大子群的分类参见文献 [B1].

#### 参考文献

- [B1] Liebeck, M. W., Praeger, C. E., Saxl, J., A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups, *J. Algebra*, 111 (1987), 365 – 383. 石生明 译 王杰 校

对称矩阵 [symmetric matrix; симметрическая матрица]

一个方阵, 其中关于主对角线位置对称的任意两个元素彼此相等, 即矩阵  $A = \|a_{ik}\|_1^n$  等于它的转置矩阵:

$$a_{ik} = a_{ki}, i, k = 1, \dots, n.$$

一个  $n$  阶实对称矩阵恰有  $n$  个实本征值 (按重数计算). 如果  $A$  是一个对称矩阵, 那么  $A^{-1}$  和  $A^p$  也是对称矩阵, 如果  $A$  与  $B$  是同阶的对称矩阵, 那么  $A+B$  是对称矩阵, 而  $AB$  是对称的, 当且仅当  $AB=BA$ .

Т. С. Пиголкина 撰

【补注】每一个复方阵相似于一个对称矩阵. 一个  $(n \times n)$  实矩阵是对称的, 当且仅当其相伴算子  $R^n \rightarrow R^n$  (关于标准基) 是自伴的 (关于标准内积). 极分解 (polar decomposition) 将矩阵  $A$  分解为一个对称矩阵与一个正交矩阵之积  $SQ$ .

令  $B: V \times V \rightarrow k$  是向量空间  $V$  上的一个双线性型 (bilinear form) (见双线性映射 (bilinear mapping)). 那么  $B$  的矩阵 (关于这两个因子  $V$  的相同的基) 是对称的, 当且仅当  $B$  是一个对称双线性型 (symmetric bilinear form), 即  $B(u, v) = B(v, u)$ .

#### 参考文献

- [A1] Gantmacher, F. R. [Gantmakher, F. R.], The

theory of matrices, Chelsea, reprint, 1959 - 1960, Vol. 1, Chapt. IX; Vol. 2, Chapt. XI (中译本: 甘特马赫尔, 矩阵论, 高等教育出版社, 1955).

[A2] Noll, W., Finite dimensional spaces, Nijhoff, 1987, Sect. 2.7. 蒋滋梅 译

**对称算子** [symmetric operator; симметрический оператор]

从 Hilbert 空间  $H$  (一般是复的) 中集合  $D_A$  到  $H$  中一个线性映射  $A$ , 使得对所有  $x, y \in D_A$ ,  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ . 如果  $D_A$  是  $H$  中一个处处稠密的流形 (以下总作此假设), 则  $A$  是线性算子. 如果  $D_A = H$ , 则  $A$  是有界的从而在  $H$  上连续. 对称算子  $A$  在  $D_A$  上诱导出一个双线性 Hermite 型  $B(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ , 即  $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$ . 对应的二次型  $\langle Ax, x \rangle$  是实的. 反之, 如果型  $\langle Ax, x \rangle$  在  $D_A$  上是实的, 则  $A$  是对称的. 具有公共定义域  $D_A = D_B$  的两个对称算子  $A$  和  $B$  的和  $A + B$  仍然是对称算子, 而如果  $\lambda$  是一个实数, 则  $\lambda A$  也是对称的. 每个对称算子有唯一定义的闭包  $\bar{A}$  和一个伴随  $A^* \supset \bar{A}$ , 一般,  $A^*$  不是对称的且  $A^* \neq \bar{A}$ . 如果  $A^* = A$ , 则  $A$  称为**自伴算子** (self-adjoint operator). 例如, 在定义在整个  $H$  上的对称算子的情形, 这是成立的. 如果  $A$  在  $D_A$  上对称且有界, 则  $A$  可以扩张成整个  $H$  上的一个有界对称算子.

例 1) 设  $\|a_{ij}\|$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$ , 是一个无穷矩阵使得  $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ , 且

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

则对  $x = \{\xi_i\} \in l_2$  确定  $y = \{\eta_i\}$  的方程组

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j, i = 1, 2, \dots$$

定义了一个有界对称算子, 可证明它在复空间  $l_2$  上是自伴的.

2) 在复空间  $L_2(0, 1)$  中, 设  $A = id/dt$  是定义在有平方可和导数且满足条件  $x(0) = x(1) = 0$  的  $[0, 1]$  上绝对连续函数  $x$  的集合  $D_A$  上. 则  $A$  是对称的但不是自伴的.

**参考文献**

- [1] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965 (中译本: Л. А. 刘斯铁尔尼克, В. И. 索伯列夫, 泛函分析概要, 第二版, 科学出版社, 1985).
- [2] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, B., Leçons d'analyse fonctionnelle, Akad. Kiadó, 1955 (中译本: F. 黎茨, B. 塞克佛尔维-纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷, 1963, 第二卷, 1980).

В. И. Соболев 撰

**【补注】** 一个重要问题是求一个对称算子的自伴扩张. 这个问题有不同的说法, 依赖于在原空间或在更大的空间求扩张. 现有这个课题的完整的理论.

**参考文献**

- [A1] Akhiezer, N. I. and Glazmann, I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, 1 - 2, Pitman, 1980 (译自俄文). 葛显良 译 吴绍平 校

**对称多项式** [symmetric polynomial; симметрический многочлен]

系数属于某域或有单位元的可交换结合环  $K$  的多项式  $f$ , 且关于各变量为一**对称函数** (symmetric function), 即对变量的一切置换不变:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)). \quad (*)$$

对称多项式全体构成  $K$  上的一个代数  $S(x_1, \dots, x_n)$ .

对称多项式最重要的例子是**初等对称多项式** (elementary symmetric polynomials)

$$s_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

以及**乘方和** (power sums)

$$p_k(x_1, \dots, x_n) = x_1^k + \dots + x_n^k.$$

后者通过循环公式可以用初等对称多项式表达, 称为**Newton 公式** (Newton formulas):

$$\begin{aligned} p_k - p_{k-1}s_1 + p_{k-2}s_2 - \dots \\ \dots + (-1)^{k-1}p_1s_{k-1} + (-1)^kks_k = 0, \end{aligned}$$

当  $1 \leq k \leq n$  时;

$$\begin{aligned} p_k - p_{k-1}s_1 + p_{k-2}s_2 - \dots \\ \dots + (-1)^{n-1}p_{k-n+1}s_{n-1} + (-1)^np_{k-n}s_n = 0, \end{aligned}$$

当  $k > n$  时.

对于最高次项系数为 1 的任意一元多项式  $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  的根的初等对称多项式  $s_1, s_2, \dots, s_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 成立  $a_k = (-1)^ks_k$  (见 **Viète 定理** (Viète theorem)).

**对称多项式的基本定理** (fundamental theorem on symmetric polynomials): 每个对称多项式都是初等对称多项式的多项式, 且表示是唯一的. 换言之, 初等对称多项式是代数  $S(x_1, \dots, x_n)$  的自由生成元的集合. 如果域有特征 0, 那么多项式  $p_1, \dots, p_n$  也构成此代数的自由生成元集.

**斜对称多项式** (skew-symmetric polynomial) 或**交错多项式** (alternating polynomial) 是这样的多项式  $f(x_1, \dots, x_n)$ , 当  $\pi$  为偶时, 它满足关系 (\*), 而当  $\pi$  为奇时, 则满足条件



$$f(x_1, \dots, x_n) = -f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)).$$

任何斜对称多项式能写成  $\Delta_n g$  的形式, 其中  $g$  为对称多项式, 而

$$\Delta_n = \prod_{i < j} (x_i - x_j).$$

这样的表示式并不唯一, 因为有关系式  $\Delta_n^2 = \text{Dis}(s_1, \dots, s_n)$ .

#### 参考文献

- [1] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975 (中译本: А. Г. 库洛什, 高等代数教程, 1962).
- [2] Кострикин, А. И., Введение в алгебру, М., 1977 (英译本: Kostrikin, A. I., Introduction to algebra, Springer, 1982).
- [3] Мишина, А. П., Проскураков, И. В., Высшая алгебра, 2 изд., М., 1965.

О. А. Иванова 撰

【补注】 另外一类重要的对称多项式是 Schur 多项式 (Schur polynomials) ( $S$  函数 ( $S$ -functions))  $S_{\{\lambda\}}$ , 出现在对称群的表示论中. 它们对一切分划  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \lambda$  都有定义, 并且包含上述函数作为特例, 例如  $S_{\{1, 1, \dots, 1\}} = s_k$ ,  $S_{\{k\}} = p_k$  (例如见 [A4], 第六章).

一般地, 根为  $x_1, \dots, x_n$  的多项式  $a_0 x^n + \dots + a_n$  的判别式定义为  $D = a_0^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$ , 且满足

$$D = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} p_0 & \cdots & p_{n-1} \\ p_1 & \cdots & p_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-1} & \cdots & p_{n-2} \end{vmatrix},$$

而  $p_0(x_1, \dots, x_n) = n$ .

见判别式 (discriminant).

设  $A_n \subset S_n$  为交错群 (alternating group), 它由一切偶置换组成. 域  $k$  上多项式的多项式环  $k[x_1, \dots, x_n]$  显然包含初等对称函数  $s_1, s_2, \dots, s_n$  以及  $\Delta_n = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ . 如果  $k$  的特征不为 2, 那么多项式环由  $s_1, \dots, s_n$  及  $\Delta_n$  生成, 而且关系的理想由  $\Delta_n^2 = \text{Dis}(s_1, \dots, s_n)$  生成. 对于形如  $\Delta_n g$  而  $g$  为对称的每个斜对称多项式, 条件  $\text{char } k \neq 2$  对于上述结论也是必要的. 更精确地说, 对此要求的是:  $2u = 0$  蕴涵着当  $u \in k$  时有  $u = 0$ .

#### 参考文献

- [A1] Jacobson, N., Basic algebra, Freeman, 1974.
- [A2] Kurosh, A. G., An introduction to algebra Mir, 1971 (译自俄文).
- [A3] Waerden, B. L. van der., Algebra, 1, Springer, 1967 - 1971 (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学,

1, 科学出版社, 1976).

- [A4] Littlewood, D. E., The theory of group characters and matrix representations of groups, Clarendon Press, 1950.
- [A5] Poénaru, V., Singularités  $C^\infty$  en présence de symétrie, Springer, 1976, p. 14 ff.
- [A6] Cohn, P. M., Algebra, 1, Wiley, 1982, p. 181.

王斯雷 译

### 对称空间 [symmetric space; симметрическое пространство]

赋予微分几何学中各种类型空间的一个通用名称.

1) 具有仿射联络的流形称作是局部对称的仿射空间 (locally symmetric affine space), 如果它的挠率张量 (torsion tensor), 和曲率张量 (curvature tensor) 的协变导数恒为零.

2) 一个 (伪) Riemann 流形 (pseudo-Riemannian manifold) 称作是局部对称的 (伪) Riemann 空间 (locally symmetric (pseudo-) Riemannian space), 如果它的曲率张量关于 Levi-Civita 联络的协变导数恒为零.

3) 一个伪 Riemann 流形 (或者是具有仿射联络的流形)  $M$  称作是整体对称的伪 Riemann (仿射) 空间 (globally symmetric pseudo-Riemannian (affine) space), 如果对每一点  $x \in M$  指定了  $M$  的一个等距 (仿射变换)  $S_x$ , 使得  $S_x^2 = \text{id}$ , 且  $x$  是  $S_x$  的孤立不动点.

4) 设  $G$  是连通 Lie 群,  $\Phi$  是一个对合自同构 ( $\Phi^2 = \text{id}$ ), 设  $G^\Phi$  是所有的  $\Phi$  不动点构成的闭子群,  $G_0^\Phi$  是  $G^\Phi$  的单位元连通分支,  $H$  是  $G$  的闭子群, 使得

$$G_0^\Phi \subset H \subset G^\Phi,$$

则齐性空间  $G/H$  称为对称齐性空间 (symmetric homogeneous space).

5) 在 Loos 意义下的对称空间 (symmetric space in the sense of Loos) (Loos 对称空间 (a Loos symmetric space)) 是指具有乘法

$$M \times M \rightarrow M, (x, y) \mapsto x \cdot y$$

的流形  $M$ , 该乘法满足下列 4 个条件:

- $x \cdot x = x$ ;
- $x \cdot (x \cdot y) = y$ ;
- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$ ;
- 每一点  $x \in M$  有一个邻域  $U$ , 使得对于所有的点  $y \in U$ ,  $x \cdot y = y$  蕴涵着  $y = x$ .

任何一个大范围对称的仿射 (伪 Riemann) 空间是局部对称的仿射 (伪 Riemann) 空间, 也是对称齐性空间. 任意一个齐性对称空间是大范围对称仿射空

间和 Loos 对称空间. 每一个连通的 Loos 对称空间是一个齐性对称空间.

设  $M$  是一个连通的 Loos 对称空间, 因而是一个齐性空间:  $M = G/H$ . 则  $G/H$  能装备一个无挠的不变仿射联络, 具有以下性质:  $\alpha$ ) 曲率张量的协变导数为零;  $\beta$ ) 每一条测地线  $\gamma$  是  $G$  的某个单参数子群  $\psi$  的轨道, 向量沿  $\gamma$  的平行移动与它们借助于  $\psi$  的平行移动是一致的;  $\gamma$ ) 测地线在乘法之下是封闭的 (它们称为一维子空间). 类似地, 能引进  $M$  的任意的子空间的概念, 即  $M$  的在乘法之下为封闭的、且关于诱导的乘法是对称的子流形.  $M$  的、在乘法之下是稳定的闭子集  $N$  是一个子空间. 对于对称空间  $G/H$  而言, Lie 代数的类似物定义如下. 设  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}$  分别是群  $G$ ,  $H$  的 Lie 代数, 设  $\varphi = d\Phi_e$  (在单位元处的微分), 其中  $\Phi$  是定义对称齐性空间  $G/H$  的对合自同构. 空间的自同构  $\varphi$  的对应于特征值  $-1$  的特征向量构成一个子空间  $\mathfrak{m}$ , 使得  $\mathfrak{g}$  是子空间  $\mathfrak{m}$  和  $\mathfrak{h}$  的直和,  $\mathfrak{m}$  能够等同于  $G/H$  在点  $0 = H$  的切空间. 若在向量空间  $\mathfrak{m}$  上定义三重线性合成

$$\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}, (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z,$$

其中  $R$  是曲率张量, 则  $\mathfrak{m}$  成为一个 Lie 三元系统 (Lie ternary system). 若  $N$  是  $M$  的经过  $0$  的子空间, 则  $N$  在  $0$  的切空间是  $\mathfrak{m}$  的子系统. 反之亦然.

若  $M$  是 Loos 对称空间, 则乘积  $M \times M$  也是. 设  $R$  是  $M \times M$  的一个子空间, 它在  $M$  上定义了一个等价关系, 则称  $R$  为一个合同 (congruence). 这个概念用于构造对称空间的覆盖理论. 两点  $x, y \in M$  称为是交换的 (commute), 若对所有的  $a, b \in M$  有

$$x \cdot (a \cdot (y \cdot b)) = y \cdot (a \cdot (x \cdot b)).$$

$M$  关于一点  $0 \in M$  的中心 (centre)  $Z(M)$  定义为  $M$  中与  $0$  交换的点的集合.  $Z(M)$  是  $M$  的闭子空间, 能够装备一个 Abel 群结构. 设  $M$  是单连通对称空间, 则寻求以  $M$  为覆盖空间的对称空间归结为  $Z(M)$  的离散子群的分类.

在对称空间理论中, 相当多的注意力集中于分类问题 (见 [2]). 设  $M$  是局部对称 Riemann 空间, 则  $M$  称为可约的 (reducible), 如果在某个坐标系下, 它的基本二次形式能写成

$$ds^2 = g_{ij}(x^1, \dots, x^k) dx^i dx^j + \\ + g_{\alpha\beta}(x^{k+1}, \dots, x^n) dx^\alpha dx^\beta, \\ i, j = 1, \dots, k; \alpha, \beta = k+1, \dots, n.$$

若不然, 则称该空间是不可约的 (irreducible). E. Cartan 证明了所有不可约局部对称 Riemann 空间的研

究归结为他所完成的实紧 Lie 代数的对合自同构的分类. 同时, 他解决了其基础群是单、紧情形的对称齐性空间的局部分类问题. 基础群是单、非紧情形的对称齐性空间的分类也已经得到 (见 [2], [3], [5]).

#### 参考文献

- [1] Широков, П. А., Избранные работы по геометрии, Казань, 1966.
- [2A] Cartan, E., Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, *Bull. Soc. Math. France*, **54** (1926), 214 - 264.
- [2B] Cartan, E., Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, *Bull. Soc. Math. France*, **55** (1927), 114 - 134.
- [3] Berger, M., Les espaces symétriques noncompacts, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **74** (1957), 85 - 177.
- [4] Loos, O., Symmetric spaces, 1 - 2, Benjamin, 1969.
- [5] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

А. С. Феденко 撰

【补注】 设  $M$  是整体对称 Riemann 空间,  $G$  是  $M$  的等距群的单位元连通分支,  $H$  是  $G$  在  $M$  的某一点的迷向子群, 则可以根据对应的 Lie 代数对  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  来给出  $M$  是紧型 (compact type), 非紧型 (non-compact type) 和 Euclid 型 (Euclidean type) 的定义. 特别是, 若  $M$  是非紧型的, 则  $\mathfrak{g}$  有 Cartan 分解 (Cartan decomposition)  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ , 见 [5].

陈维桓 译

对称张量 [symmetric tensor; симметрический тензор], 关于一对指标的

在互易这对指标时不变的张量. 一个对称张量关于这对指标交错 (alternation) 的结果为零. 一个张量关于一组指标是对称的 (symmetric with respect to a set of indices), 如果它关于该组中任意两个指标是对称的.

А. В. Иванов 撰

【补注】 见对称化 (张量的) (symmetrization (of tensors)).

#### 参考文献

- [A1] Brand, L., Vector and tensor analysis, Wiley, 1947.
- [A2] Nelson, E., Tensor analysis, Princeton Univ. Press, 1967.
- [A3] Spain, B., Tensor calculus, Oliver & Boyd, 1953.

陈维桓 译

对称化 [symmetrization; симметризация]

对每个对象  $F$  结合一个具有某种对称性的 (同一类的) 对象  $F^*$ . 通常, 对称化用于 Euclid 空间  $E^n$  (或常曲率空间) 中的闭集  $F$ , 也用于映射; 进一步, 对称化构造使得  $F^*$  连续依赖于  $F$ . 对称化保



持对象的一些特征同时单调地改变另一些特征. 对称化被用于几何学、数学物理和函数论中极值问题的求解. 第一个对称化由 J. Steiner 于 1836 年引进, 用于等周不等式 (isoperimetric inequality) 的证明.

$E^n$  中关于子空间  $E^{n-k}$  的对称化 (symmetrization relative to a subspace  $E^{n-k}$  in  $E^n$ ): 对集合  $F$  和子空间  $E^k \perp E^{n-k}$  相交的每个非空截面, 构造一个中心在  $E^k \cap E^{n-k}$  且和  $F \cap E^k$  有相同  $k$  维体积的  $E^k$  中的球; 由这些球构成的集合  $F^*$  就是对称化的结果. 关于子空间的对称化保持体积和凸性, 且不增加边界的面积或横截测度的积分 (见 [2]). 对  $k=1$ , 这是 Steiner 对称化 (Steiner symmetrization), 对  $k=n-1$ , 它是 Schwarz 对称化 (Schwarz symmetrization).

$E^n$  中关于半空间  $H^{n-k}$  的对称化 (symmetrization relative to a half-space  $H^{n-k}$  in  $E^n$ ): 对  $F$  和中心在边界  $\partial H^{n-k}$  的  $E^{k+1} \perp H^{n-k}$  中的球面  $S^k$  相交的每个非空截面, 构造一个和  $F \cap S^k$  有相同  $k$  维体积的球冠  $S^k \cap D^n$  ( $D^n$  是中心在  $H^{n-k} \cap S^k$  的球); 由这些球冠构成的集合  $F^*$  就是对称化的结果. 对  $k=n-1$ , 这是球对称化 (spherical symmetrization), 如果  $n=2$ , 它是圆对称化 (circular symmetrization).

位移对称化 (symmetrization by displacement): 对凸集  $F \subset E^n$ , 构造它关于子空间  $E^k$  的对称  $F'$ ; 位移对称化的结果是集合  $F^* = (F + F')/2$ , 其中集合加法取向量和.

滚动对称化 (symmetrization by rolling): 对凸体  $F \subset E^n$ , 将其支撑函数 (support function) 在单位球面的平行截面上求平均; 滚动对称化的结果是由所得支撑函数构造出的体  $F^*$ .

在  $E^3$  中, Steiner 对称化保持体积且不增加曲面积、直径和容量; Schwarz 对称化保持边界的 Gauss 曲率的连续性且不减少其最小值; 关于半空间的对称化不增加该区域的基频或边界的面积; 球对称化不增加容量; 位移对称化保持边界的平均曲率的积分且不减少边界的面积; 滚动对称化保持宽度 (见 [1], [3]).

在  $E^2$  中 Steiner 对称化不增加惯性极矩、外半径、容量或基频; 不减少挠刚性或最大内共形半径 (见 [3]).

与对称化的多种应用相联系, 对称化的收敛性问题已被考虑过. 非闭集类似对称化的定义允许有分歧. 关于对称化在函数论中的应用见对称化方法 (symmetrization method).

#### 参考文献

[1] Blaschke, W., Kreis und Kugel, Chelsea, reprint,

1949 (中译本: W. 伯拉须凯, 圆与球, 上海科学技术出版社, 1986).

[2] Hadwiger, H., Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Springer, 1957.

[3] Pólya, G. and Szegő, G., Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton Univ. Press, 1951.

[4] Leichtweiss, K., Konvexe Mengen, Springer, 1979.

С. Л. Печерский 撰

#### 【补注】

非常一般地, 如果  $G$  是一个作用在域  $k$  上向量空间  $V$  上的有限群,  $v \in V$ , 则  $v$  的对称化形式 (symmetrized version) 是元素  $\sum_{s \in G} s v$  (或  $(1/|G|) \sum_{s \in G} s v$ ).

元素

$$e = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} s \in k[G]$$

称为对称化子. 例如, 如果  $G = S_m$  是  $m$  个字母的对称群且  $V = \otimes^m W$ , 向量空间  $W$  的  $m$  次张量积 (相应地, 域  $k$  上  $m$  个变元的多项式的向量空间), 则  $G$  自然地作用 (通过置换张量的因子, 相应地, 置换变元) 并且应用幂等元  $e$  于一个张量 (相应地, 多项式) 给出对应的对称化张量 (symmetrized tensor) (相应地, 对称化多项式 (symmetrized polynomial)). 亦见对称化 (张量的) (symmetrization (of tensors)).

对适当的无限群, 代替求和, 对称化子用积分定义.

如果  $G$  是  $S_m$  的子群, 也可考虑交错化 (alternation), 即应用元素

$$f = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \text{sgn}(\sigma) \sigma,$$

其中  $\text{sgn}(\sigma)$  是置换  $\sigma$  的符号. Young 对称化子 (Young symmetrizer) 是由关于 Young 子群 (Young subgroup) 的对称化再 (关于对应于对偶分拆的 Young 子群) 交错化得到的. 更一般地, 如果  $\chi$  是任意作用在  $V$  上的群  $G$  的特征标 (character of a group),  $H$  是  $G$  的子群, 则由  $\chi$  和  $H$  定义的对称化子 (symmetrizer) 是

$$\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi(h) h.$$

交错化子 (alternator) 对应于  $S_m$  的交错特征标  $\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$ .

#### 参考文献

[A1] Bandle, C., Isoperimetric inequalities, in P. M. Gruber and J. M. Wills (eds.): Convexity and Its Applications, Birkhäuser, 1983, 30 - 48.

[A2] Eggleston, H. G., Convexity, Cambridge Univ. Press, 1963.

[A3] Benson, R. V., Euclidean geometry and convexity, McGraw-Hill, 1966.

[A4] Weyl, H., The classical groups, Princeton Univ.

Press, 1946, 120.

[A5] Marcus, M., Finite dimensional multilinear algebra, 1, M. Dekker, 1973, 78 ff.

陆珊年 译 彭家贵 校

**对称化方法** [symmetrization method; симметризации метод], 函数论中的

几何函数论中求解极值问题的方法之一. 该方法的基础是  $n$  维 Euclid 空间的开集和闭集的对称化 (symmetrization) 概念. 函数论中的对称化方法首先被用来研究超限直径的性质 (见 [1]), 稍后用来求解 Carleman-Milloux 问题 (见 [2]), 此后其应用就十分广泛了 (见 [3]—[6], [9]).

对称化方法在函数论中的应用基于在各种形式的对称化下区域的容量与内半径的改变的单调性质. 用对称化方法求解几何函数论中的极值问题的可行性源自极值变换的一种确定的对称性. 基于在关于直线或射线的对称化下区域内半径的非减性质, 并应用关于正则函数变换下区域内半径的改变的定理, 可得到如下的对称化原理 (symmetrization principle) (见 [4]): 设函数  $w = f(z)$  在圆盘  $E: |z| < 1$  内正则,  $f(0) = w_0$ ,  $f'(0) = a_1$ ,  $E_f$  是  $w = f(z)$  在  $E$  内的值域,  $E_f^*$  是  $E_f$  关于过  $w = w_0$  的直线或射线的对称化集,  $r(E_f^*, w_0)$  是  $E_f^*$  关于点  $w_0$  的内半径, 则

$$r(E_f^*, w_0) \geq |a_1|. \quad (*)$$

(\*) 中等号成立, 当且仅当  $w = f(z)$  在  $E$  内单叶且  $E_f^*$  与  $E_f$  重合 (在 Steiner 对称化下) 或为  $E_f$  绕  $w_0$  旋转所得 (在 Pólya 对称化下). 对于满足内半径非减性质的别的对称化方式亦有类似结果. 常常需要作进一步研究的是判明 (\*) 中等号成立的条件.

对称化原理已推广到圆环的情形及具有任意连通性的区域 (参看 [6]). 对于求解几何函数论中的极值问题, 将对称化方法与其他方法联合起来是十分有效的 (见极值度量法 (external metric, method of the), 二次微分 (quadratic differential) 等). 通过这一途径已得到给定区域内各种正则函数类 (圆盘或圆环内单叶, 平均单叶, 弱  $p$  叶等函数类) 的一系列覆盖定理与畸变定理 (见 [4]—[6]).

对称化方法亦已被应用于拟共形映射空间的性质研究. 对于研究此类映射有效的有限几个方法来说, 这一进展尤为重要. 对称化方法使人们能够在具有不变的几何性质的二连通空间区域中找出具有最大共形模的区域. 这样一个区域的确定, 使得随之而确定了拟共形映射的一个极值性质. 特别地, 通过运用对称化方法, 对三维 Euclid 空间中的拟共形映射已建立了一些畸变定理 (见 [7], [8]).

## 参考文献

- [1] Faber, G., Ueber Potentialtheorie und konforme Abbildung, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl., 20 (1920), 49—64.
- [2] Beurling, A., Etudes sur un problème de majoration, in L. Carleson, et al. (ed.): Collected Works, Birkhäuser, 1989, 1—108. Thèse.
- [3] Pólya, G. and Szegő, G., Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton Univ. Press, 1951.
- [4] Hayman, W. K., Multivalent functions, Cambridge Univ. Press, 1958.
- [5] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal mappings, Springer, 1958.
- [6] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).
- [7] Шабат, Б. В., «Докл. АН СССР», 132 (1960), 5, 1045—1048.
- [8] Gehring, F. W., Symmetrization of rings in space, Trans. Amer. Math. Soc., 101 (1961), 3, 499—519.
- [9] Baernstein, A., Integral means, univalent functions and circular symmetrization, Acta Math., 133 (1974), 139—169. И. П. Митюк 撰 杨维奇 译

**对称化 (张量的)** [symmetrization (of tensors); симметрирование]

张量代数中的一种运算, 它从一个已知张量构造出 (关于一组指标) 对称的张量. 对称化总是对若干个上指标或若干个下指标进行的. 分量为  $\{s_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} : 1 \leq i_v, j_\mu \leq n\}$  的张量是分量为  $\{t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} : 1 \leq i_v, j_\mu \leq n\}$  的张量关于  $m$  个上指标, 例如关于指标组  $I = (i_1, \dots, i_m)$ , 作对称化的结果, 如果

$$s_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{m!} \sum_{\alpha} t_{j_1 \dots j_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_m i_{m+1} \dots i_p}. \quad (*)$$

这里的和号是在  $I$  的全体  $m!$  个置换  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  上取的. 关于一组下指标的对称化是以类似方式定义的. 关于一组指标的对称化记成用圆括号 ( ) 把这组指标括起来. 固定不动的指标 (即在对称化中不用的指标) 用竖线分隔出来. 例如 (若在 4, 1, 7 上作对称化; 5 保持不动),

$$t_{(4|5|7)} = \frac{1}{3!} [t^{4517} + t^{1574} + t^{7541} + t^{4571} + t^{7514} + t^{1547}].$$

若指标组  $I_1 \subset I_2$ , 则关于  $I_1$  和  $I_2$  接连作两次对称化的结果与关于  $I_2$  作对称化的结果一致. 换言之, 若  $s_{j_1 \dots j_q} = t_{(j_1 \dots (j_k \dots j_l) \dots j_q)}$ , 则  $s_{j_1 \dots j_q} = t_{(j_1 \dots j_q)}$  (即去掉内含的圆括号).



关于某指标组的对称化不变的张量称为一个**对称张量** (symmetric tensor)。

关于某指标组先作交错化 (见交错 (alternation)), 再作对称化, 则得零张量。

两个以上的张量作张量积, 然后作关于全体指标的对称化, 称为**对称乘法** (symmetric multiplication)。张量的对称化和交错化一起用于把张量分解成结构较简单的张量。对称化也用于表述形如 (\*) 的有多重指标的项之和。例如, 若矩阵

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

的元素关于乘法是交换的, 则表达式

$$\begin{aligned} n! a_1^{(1)} a_2^{(2)} \cdots a_n^{(n)} &= n! a_{(1)}^1 a_{(2)}^2 \cdots a_{(n)}^n \\ &= n! a_{(1)}^1 a_{(2)}^2 \cdots a_{(n)}^n \end{aligned}$$

称为**矩阵的积和式** (permanent of the matrix)。

#### 参考文献

- [1] Широков, П. А., Тензорное исчисление, 2 изд., Казань, 1961.
- [2] Беклемишев, Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1971.
- [3] Schouten, J. A., Tensor analysis for physicists, Cambridge Univ. Press, 1951. Л. П. Кушнов 撰

【补注】 见对称化 (symmetrization) 的补注。

#### 参考文献

- [A1] Akivis, M. A. and Goldberg, V. V., An introduction to linear algebra & tensors, Dover, reprint, 1977 (译自俄文)。
- [A2] Marcus, M., Finite dimensional multilinear algebra, 1, M. Dekker, 1973, p. 77 ff. 陈维恒 译

#### 对称 [symmetry; симметрия]

1) 一个改变定向的对合正交变换 (对合变换是实施两次则产生恒等变换的变换)。例如, 空间内关于一平面  $\alpha$  (或平面内关于一直线  $a$ ) 的一个反射 (reflection) 是一个对称, 在它之下每一点  $M$  映射到一点  $M'$ , 使得线段  $MM'$  垂直于平面  $\alpha$  (直线  $a$ ) 且被它平分。 $\alpha(a)$  称为**对称平面** (plane) (轴 (axis)) (见图 1)。任何正交变换或等距是有限个反射的复合。

2) 对称是一个几何图形  $\Phi$  的如下性质: 在某个变换群  $G$  的作用下,  $\Phi$  被映射到自身上, 这个群称为  $\Phi$  的**对称群** (group of symmetries)。这样, 对称反映一个图形形状的某种正则性, 即它在群  $G$  中的变换的作用下的不变性。例如,  $\Phi$  是一个平面图形, 使得关于某点  $O$  旋转一个  $360^\circ/n$  ( $n$  是一个整数) 的角时

映到自身上, 那么  $\Phi$  有一个  $n$  阶对称, 且  $O$  称为**对称中心** (centre) (见图 2), 这里  $G$  是  $n$  阶的循环群。一个圆有无限阶的对称 (因为它旋转任何角后均映到自身上)。

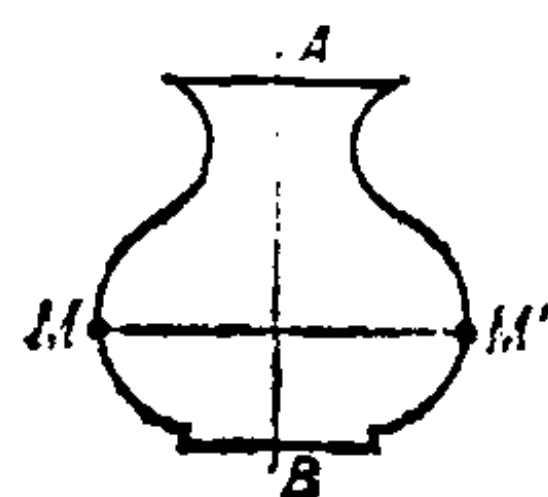


图 1

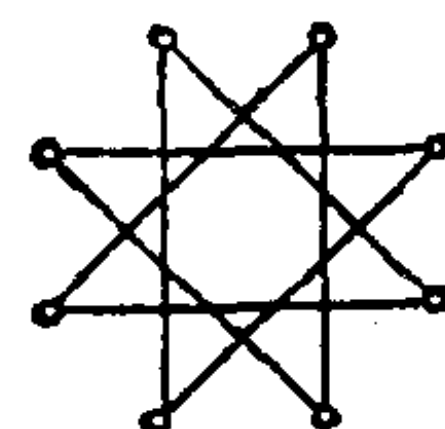


图 2

空间对称的其他的简单形式如下:

a) 关于一直线的  $n$  阶对称 (symmetry of order  $n$ )。这里图形关于某直线 (对称轴) 旋转  $360^\circ/n$  角而映到自身上。例如, 如果一个平面图形关于一直线  $AB$  是对称的, 则在空间里它有这直线作为轴的 2 阶对称。立方体有直线  $AB$  作为轴的 3 阶对称, 且有直线  $CD$  作为轴的 4 阶对称 (见图 3)。一般地, 正正则与半正则多面体关于多条直线是对称的 (见图 4)。对称轴的位置、个数与阶在结晶学中起着基本作用。

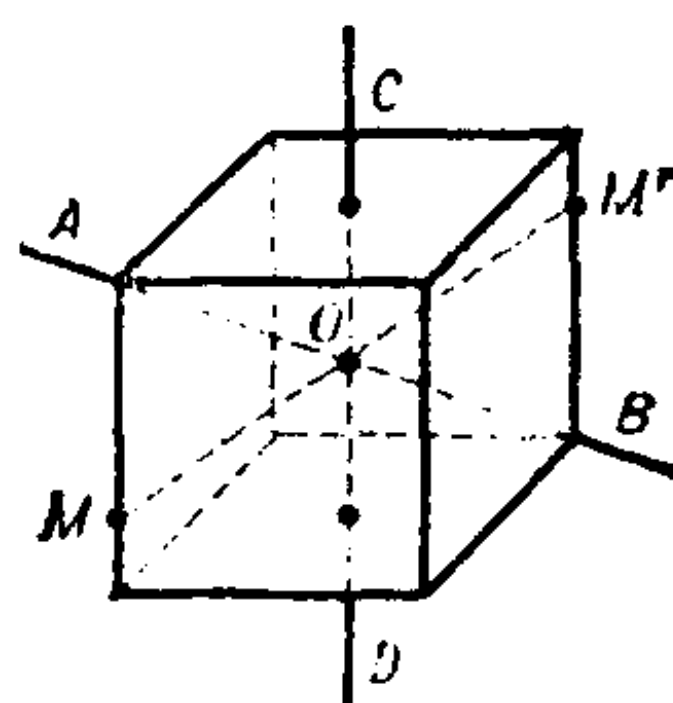


图 3

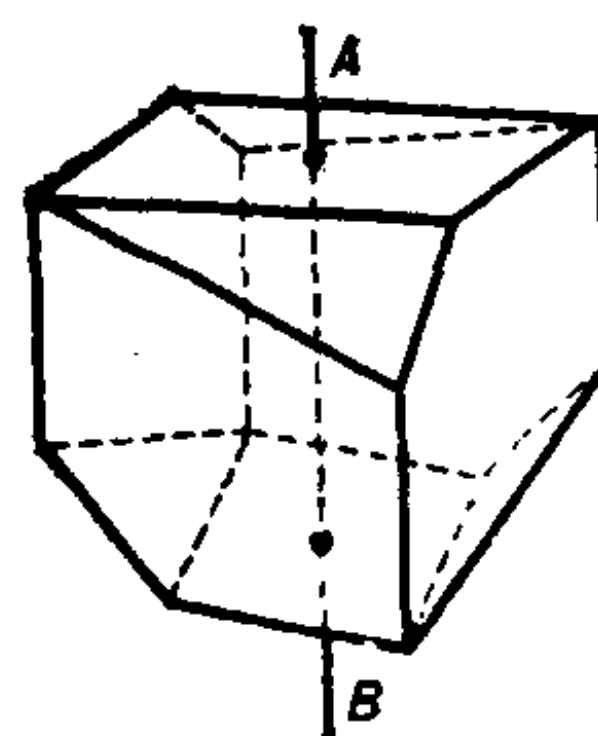


图 4

b) **平移对称** (translational symmetry)。这里图形沿着一条确定的直线 (平移的轴 (axis of the translation)) 平移某一区间而映到自身上。一个具有唯一平移轴与一个对称平面的图形可以有无限多个对称平面 (因为任何平移是两个反射的复合) 垂直于平移轴 (见图 5)。具有多个平移轴的图形在晶体格的研究中具有重要作用。

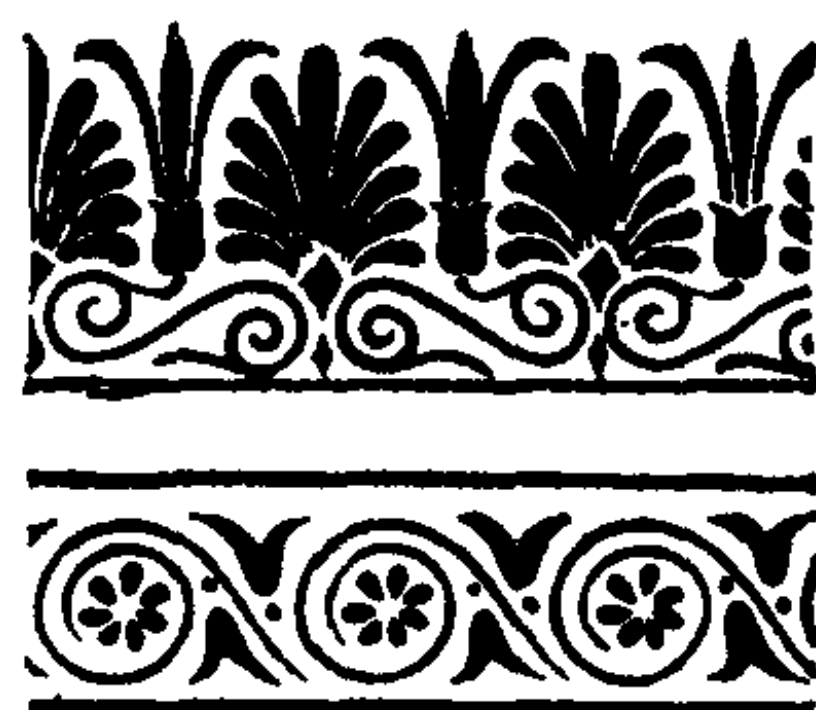


图 5



图 6

由反射和旋转复合成的对称(有界图形的简单对称均属此类), 还有平移对称是很有趣的, 并且是自然科学、艺术等的诸多领域中的一个研究课题, 等等. 例如, 一个扭曲(twist)或螺旋对称是由关于一个轴经过某个角的旋转与沿着那个轴的平移复合而成的, 这是在研究植物叶子排列时观察到的(见图6). 对称性作为制作刺绣与装饰品的一种手法而被广泛地传播(具有一个或多个平移对称与反射的复合的平面图形, 见图7, 8).



图7

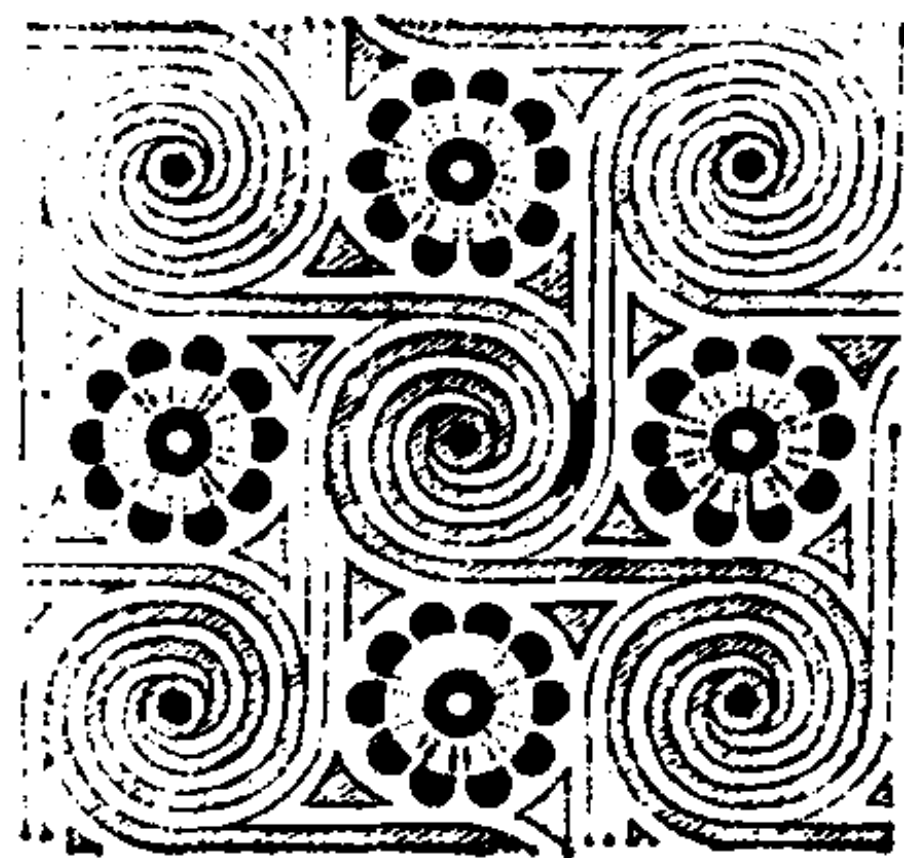


图8

## 参考文献

- [1] Шубников, А. В., Симметрия. (Законы симметрии и их применение в науке, технике и прикладном искусстве), М. - Л. 1940 (英译本: Shubnikov, A. V. and Koptsik, V. A., Symmetry in science and art, Plenum, 1974).
- [2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1959.
- [3] Weyl, H., Symmetry, Princeton Univ. Press, 1952 (中译本: H. 魏尔, 对称, 商务印书馆, 1986).

М. И. Воицеховский 撰

【补注】 十分一般地, 令  $G$  是一个作用在一个集合  $X$  上的群(例如,  $G$  可以是  $\mathbb{R}^n$  的 Euclid 运动群,  $X$  可以是  $\mathbb{R}^n$  中在 Euclid 运动下封闭的几何图形的某个集合). 对于每一个  $x \in X$ , 迷向子群(isotropy subgroup)  $G_x = \{g \in G: gx = x\}$  是  $x$  的对称群(symmetry group).

具有唯一平移轴的平移对称性蕴涵关于平面的对称性, 这个陈述对一般情形不正确.

## 参考文献

- [A1] Schattschneider, D., Visions of symmetry, Freeman, 1990.
- [A2] Grünbaum, B. and Shephard, G. C., Tilings and patterns, Freeman, 1986.
- [A3] Coxeter, H. S. M., Regular polytopes, Macmillan, 1963.

林向岩 译 陆珊年 校

对称性(关系的)[symmetry (of a relation); симметричность]

二元关系(binary relation)的一个性质. 称集合  $A$  上的二元关系  $R$  是对称的(symmetric), 如果对任意两个元素  $a, b \in A$ ,  $aRb$  蕴涵  $bRa$ , 即  $R^{-1} \subseteq R$ . 对称关系的一个例子是等价(equivalence).

Т. С. Фофанова 撰

【补注】 集合  $A$  上的反对称关系(anti-symmetric relation)是一个自反关系  $R$ , 满足  $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta = \{(x, x): x \in A\}$ .

## 参考文献

- [A1] Cohn, P. M., Algebra, I, Wiley, 1982, p. 17ff.

赵希顺 译

集合  $X$  上的对称性[symmetry on a set; симметрика на множестве]

定义在  $X$  的所有元素对的集合上的非负实值函数  $d$ , 它满足下述公理:

- 1)  $d(x, y) = 0$ , 当且仅当  $x = y$ ;
- 2)  $d(x, y) = d(y, x)$ , 对任意  $x, y \in X$ .

与度量(metric)及伪度量(pseudo-metric)的明显不同, 对称性不必满足三角形公理. 关于集合  $X$  上对称性  $d$ , 有一个定义在  $X$  上的拓扑: 集合  $A \subseteq X$  (关于  $d$ ) 闭, 当且仅当对每个  $x \in X \setminus A$ ,  $d(x, A) > 0$ , 这里

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y): y \in A\}.$$

集合  $A$  在这个拓扑空间的闭包, 包含使  $d(x, A) = 0$  的所有  $x \in X$  的集合, 但不限于这种集合. 相应地, 环绕  $X$  中一个点的  $\varepsilon$  球可能有空内部. 拓扑空间称为可对称化的(symmetrizable), 如果它的拓扑是由某对称性按上述法则生成的. 可对称化空间类比可度量化空间(metrizable space)类更广泛: 可对称化空间未必是仿紧空间, 正规空间或 Hausdorff 空间. 此外, 可对称化空间不必满足第一可数公理.

但是, 每个可对称化空间都是序列(sequential)空间, 即它的拓扑由收敛序列依下述法则确定: 集合  $A$  闭, 当且仅当  $A$  中每个在  $X$  中收敛点列的极限属于  $A$ . 对紧 Hausdorff 空间, 可对称性与可度量化等价.

## 参考文献



- [1] Архангельский, А. Б., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).
- [2] Недев, С. Й., «Тр. Моск. Матем. об-ва», 24 (1971), 201 – 236.

А. В. Архангельский 撰 罗嵩龄 译

**对称原理** [symmetry principle; симметрии принцип], Schwarz 对称原理 (Schwarz symmetry principle), Riemann-Schwarz 对称原理 (Riemann-Schwarz symmetry principle), 关于解析函数的

设  $G$  是扩充复平面  $\bar{C}$  中由闭 Jordan 曲线  $\Gamma$  围成的区域, 而  $\Gamma$  有一部分是  $C$  中一个圆  $L$  的弧  $l$ ; 再设  $f(z)$  是在  $G \cup l$  上定义且连续的函数, 它在  $G$  内解析, 在  $l$  上取属于  $\bar{C}$  中某个圆  $C$  的值, 于是  $f(z)$  可越过弧  $l$  延拓到  $G$  关于  $L$  对称的区域  $G^*$  中, 即延拓为  $G \cup l \cup G^*$  内的解析函数. 这样的 (越过  $l$  的) 延拓是唯一的并由初始函数  $f(z)$  的下述性质确定: 如果  $z \in G$  与  $z^* \in G^*$  关于  $L$  为对称 (反演), 则  $w = f(z)$  与  $w^* = f(z^*)$  关于  $C$  为对称. 特别地, 如果  $L$  和  $C$  与  $\bar{C}$  中的实轴相同, 则对  $z \in G \cup l \cup G^*$  有  $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ . 扩充复平面中的圆理解为本义的圆和直线两者. 连续性可取通常意义或推广意义即  $f(z)$  称为在  $z_0$  处连续, 如果当  $z \rightarrow z_0$  时有  $f(z) \rightarrow f(z_0)$ , 不管  $f(z_0)$  为有限或无穷. 曲线  $\Gamma$  和  $l$  都可通过无穷远点. 由条件,  $f(l) \subset C$ , 但不必有  $f(l) = C$ . 此外, 如果  $G$  和  $G^*$  有公共内点, 则延拓后的函数在这些点处不一定是单值的.

对同样假定的  $G, L, l, G^*$ , 关于调和函数的对称原理 (symmetry principle for harmonic functions) 有如下述: 如果函数  $u(x, y)$  在  $G$  内调和, 在  $G \cup l$  上连续且在  $l$  上等于零, 则  $u$  可越过  $l$  延拓到  $G^*$  内即延拓为在  $G \cup l \cup G^*$  内调和的函数. 此处如果  $(x, y) \in G$  与  $(x^*, y^*) \in G^*$  关于  $L$  为对称, 则  $u(x^*, y^*) = -u(x, y)$ .

对称原理推广到  $l$  (和  $C$ ) 为解析弧情形的是解析函数和调和函数解析或调和延拓的 Schwarz 原理 (见 [1], [2]). 关于调和函数的对称原理推广到任意多元函数的情形称为反射原理 (reflection principle). 对称原理广泛用于解析函数论和调和函数论的应用 (弹性论、流体力学、静电学等等中出现的具有一个或几个对称轴的区域的双形映射) 中.

#### 参考文献

- [1] Schwarz, H. A., Gesammelte mathematische Abhandlungen, 2, Springer, 1890.
- [2] Привалов, И. И., Введение в теорию функций

комплексного переменного, 12 изд., М., 1977, 350 – 360 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 复变函数引论, 人民教育出版社, 1956, 374 – 386).

- [3] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973, 158 – 197, 214 – 215 (中译本: М. А. 拉甫伦捷夫, Б. В. 沙巴特, 复变函数论方法, 高等教育出版社, 1956, 161 – 174, 216 – 217).

Е. П. Долженко 撰

**【补注】** 在多复变量全纯函数和全纯映射理论中有对称原理的有趣推广.

作为例子, 有楔棱定理 (见 Боголюбов 定理 (Bogolyubov theorem)) 和关于全纯映射的反射原理, 在许多情形它导致这种映射的光滑性延拓到所涉及的区域的边界, 亦见双全纯映射 (biholomorphic mapping).

#### 参考文献

- [A1] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986.
- [A2] Carathéodory, C., Theory of functions, 2, Chelsea, reprint, 1981.
- [A3] Hille, E., Analytic function theory, 2, Ginn, 1959.

沈永欢 译

#### 对称性检验 [symmetry test; симметрии критерий]

检定假设  $H_0$  “一维概率密度关于 0 对称” 的统计检验 (statistical test).

设拟检定对称性假设  $H_0: p(x)$  关于 0 对称 (即对于其定义域内的一切  $x$ , 有  $p(x) = p(-x)$ ), 其中  $p(x)$  是独立随机变量  $X_1, \dots, X_n$  的分布律的概率密度. 检定假设  $H_0$  的任何统计检验, 均称为对称性检验 (symmetry test).

相对  $H_0$  最常考虑的备选假设是  $H_1$ : 被考察的所有随机变量  $X_1, \dots, X_n$  有形如  $p(x - \Delta)$  的概率密度, 其中  $\Delta \neq 0$ . 换句话说, 根据假设  $H_1$ , 随机变量  $X_i$  的概率密度, 由密度  $p(x)$  经沿  $Ox$  轴方向移位距离  $|\Delta|$  取得: 依  $\Delta$  符号不同, 向左移或向右移. 若移位  $\Delta$  的符号已知, 则备选假设  $H_1$  是单侧的 (one-sided), 否则是双侧的 (two-sided). 符号检验 (sign test) 是对称性检验的一个简单例子.

对称性检验一般采用随机化检验 (radomization test).

#### 参考文献

- [1] Hajek, J. and Sidak, Z., Theory of rank tests, Acad. Press, 1967.
- [2] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2. Inference and relationship, Griffin, 1979.

М. С. Никулин 撰 周概容 译

辛联络 [symplectic connection; симплектическая связность]

在具有一个非退化 2-形式  $\Phi$  的  $2n$  维光滑流形  $M$  上的一个仿射联络 (affine connection), 使得  $\Phi$  关于它是协变常量. 如果  $M$  上的仿射联络由局部的联络形式

$$\omega^i = \Gamma_k^i dx^k, \quad \|\det \Gamma_k^i\| \neq 0,$$

$$\omega_j' = \Gamma_{jk}^i \omega^k$$

给出, 且

$$\Phi = a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j, \quad a_{ij} = -a_{ji},$$

则  $\Phi$  是协变常量的条件能表示成

$$da_{ij} = a_{kj} \omega_i^k + a_{ik} \omega_j^k.$$

2-形式  $\Phi$  在  $M$  上定义了一个辛结构 (或殆 Hamilton 结构), 它使每一个切空间  $T_x(M)$  转化成为有斜对称数量积  $\Phi(X, Y)$  的辛空间. 辛联络也能定义为在向量的平行移动下保持该数量积不变的仿射联络. 在每一个  $T_x(M)$  中能选取一个标架使得

$$\Phi = 2 \sum_{\alpha=1}^n \omega^\alpha \wedge \omega^{n+\alpha}.$$

所有这种标架的集合构成  $M$  上的一个主纤维丛, 其结构群是辛群 (symplectic group). 辛联络就是在这个主纤维丛上的联络. 存在这样的偶数维流形  $M$ , 使得在它上面没有大范围定义的非退化 2-形式  $\Phi$ , 因而没有辛联络. 但是, 如果  $\Phi$  是存在的, 则使  $\Phi$  关于它成为协变常量的辛联络不是唯一决定的.

#### 参考文献

- [1] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964. Ю. Г. Лумисте 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Abraham, R. and Marsden, J., Foundations of mechanics, Benjamin/Cummings, 1978. 陈维桓 译

辛群 [symplectic group; симплектическая группа]

典型群之一, 定义为左  $K$  模  $E$  上斜对称双线性型  $\Phi$  的自同构群, 其中  $K$  是交换环 (见典型群 (classical group)). 当  $E = K^{2m}$  及型  $\Phi$  在  $E$  的典范基  $\{e_i\}$  下的矩阵是

$$J_m = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$$

时 (其中  $I_m$  是  $m$  阶单位矩阵), 相应的辛群称为环  $K$  上  $2m$  个变量的辛群, 记为  $\text{Sp}(m, K)$  或  $\text{Sp}_{2m}(K)$ .  $\text{Sp}_{2m}(K)$  中任意自同构关于基  $\{e_i\}$  的矩阵称为辛矩阵 (symplectic matrix).

令  $K$  是域,  $\Phi$  是  $K$  上  $n$  维向量空间  $E$  上的非

退化斜对称双线性型. 若  $n$  是偶数, 则相应于  $\Phi$  的辛群同构于  $\text{Sp}_n(K)$ , 且由  $E$  的所有形为

$$x \mapsto \sigma_{e, \alpha}(x) = x + \alpha \Phi(e, x)e$$

的线性变换  $\sigma_{e, \alpha}$  所生成, 其中  $e \in E, \alpha \in K$ . 形为  $\sigma_{e, \alpha}$  的线性变换称为辛平延 (symplectic transvections) 或沿直线  $Ke$  方向的平移 (translations).  $\text{Sp}_n(K)$  的中心  $Z$  当  $\text{char } K \neq 2$  时由矩阵  $I_n$  及  $-I_n$  组成, 当  $\text{char } K = 2$  时  $Z = \{I_n\}$ . 商群  $\text{Sp}_n(K)/Z$  称为射影辛群 (projective symplectic group), 记作  $\text{PSp}_n(K)$ . 除了

$$\text{PSp}_2(F_2) = \text{Sp}_2(F_2), \quad \text{PSp}_4(F_2) = \text{Sp}_4(F_2)$$

$$\text{及 } \text{PSp}_2(F_3)$$

以外, 所有射影辛群皆为单群 (这里  $F_q$  表示  $q$  个元素的域), 且上面三个群分别同构于对称群 (symmetric group)  $S_3, S_6$  及交错群 (alternating group)  $A_4$ . 群  $\text{Sp}_{2m}(F_q)$  的阶为

$$q^{m^2}(q^2 - 1) \cdots (q^{2m-2} - 1)(q^{2m} - 1).$$

辛群  $\text{Sp}_2(K)$  与特殊线性群 (special linear group)  $\text{SL}_2(K)$  一致. 若  $\text{char } K \neq 2$ ,  $\text{PSp}_4(K)$  同构于  $\Omega_5(K, f)$  被其中心除得的商群, 其中  $\Omega_5(K, f)$  是与 5 个变量的对称双线性型  $f$  相应的正交群的 (指数为 2) 换位子群.

除去  $m = 2$  及  $\text{char } K = 2$  的情形,  $\text{Sp}_{2m}(K)$  的每个自同构  $\varphi$  可写成

$$\varphi(g) = h_1 h_2 g^\tau h_2^{-1} h_1^{-1},$$

其中  $\tau$  是域  $K$  的自同构,  $h_1 \in \text{Sp}_{2m}(K)$ , 而  $h_2$  是空间  $E$  在基  $\{e_i\}$  下由形为

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \beta I_m \end{pmatrix}$$

的矩阵所表示的线性变换 ( $\beta$  是  $K$  的非零元素).

$\text{Sp}_{2m}(K)$  与由方程  $A' J_m A = J_m$  确定的线性代数群 (linear algebraic group)  $\text{Sp}_{2m}$  的  $K$  点的群一致. 这个代数群, 亦称辛群, 是维数为  $2m^2 + m$  的型  $C_m$  的单的单连通线性代数群.

在  $K = \mathbb{C}$  或  $\mathbb{R}$  的情形,  $\text{Sp}_{2m}(K)$  是连通的单的复或实的 Lie 群.  $\text{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$  是复辛群  $\text{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$  的实型之一. 这个群的其他实型有时也称为辛群. 这些实型是  $\text{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$  的子群  $\text{Sp}(p, q)$ ,  $p, q \geq 0, p + q = m$ , 由  $\text{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$  的保持 Hermite 型

$$\sum_{i=1}^{2m} \varepsilon_i z_i \bar{z}_i$$

的那些元素组成, 这里  $\varepsilon_i = 1$  对  $1 \leq i \leq p$  及  $m+1 \leq i \leq m+p$ , 在其他情形  $\varepsilon_i = -1$ . 群  $\text{Sp}(0, m)$  是



复辛群  $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$  的紧实型. 辛群  $\mathrm{Sp}(p, q)$  同构于四元数除环  $\mathbb{H}$  上的  $m = p + q$  维右向量空间  $\mathbb{H}^m$  中保持指数为  $\min(p, q)$  的四元数 Hermite 型

$$(x, y) = \sum_{i=1}^p x_i \bar{y}_i - \sum_{i=p+1}^m x_i \bar{y}_i$$

的所有线性变换的群, 其中

$$x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{H}^m,$$

字母上的杠表示四元数共轭.

#### 参考文献

- [1] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.
- [2] Bourbaki, N., Algebra, Elements of mathematics, 1, Addison-Wesley & Hermann, 1974 (译自法文).
- [3] Dieudonné, J., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1955.
- [4] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces, Acad. Press, 1962.
- [5] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946.

В. Л. Попов 撰

【补注】  $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$  也是单连通的. 但  $\mathrm{Sp}_m(\mathbb{R})$  具有  $S^1 \times \mathrm{SU}_n$  的同伦型, 故  $\pi_1(\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ . 此处  $S^1$  是圆周, 而  $\mathrm{SU}_n$  是特殊酉群. 酉辛群 (unitary symplectic group)  $\mathrm{USp}_{2m}(\mathbb{C})$  是酉群 (unitary group)  $U_{2m}$  与  $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$  (在  $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{C})$  中) 的交. 在拓扑上,  $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{USp}_{2m}(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{2n^2+n}$ .

在 Hamilton 力学 (Hamiltonian mechanics) 中 (见 Hamilton 方程 (Hamilton equations)), 相空间是辛流形 (symplectic manifold), 即赋予辛形式 (symplectic form) (次数为 2 的在每点上都是非退化的闭微分形式  $\omega$ ) 的流形  $M$ . 若  $M = T^*Q$ , 即局部坐标为  $(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$  的构形空间  $Q$  的余切丛, 则辛形式  $\sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j$  称为典范的 (canonical). Hamilton 系统的流保持辛形式不变. 因此, 不动点上的切映射属于切空间的辛群.

见辛齐性空间 (symplectic homogeneous space); 辛结构 (symplectic structure).

石生明 译 刘木兰 校

辛齐性空间 [symplectic homogeneous space; симплектическое пространство однородное]

一个辛流形 (symplectic manifold)  $(M, \omega)$ , 且有一个可迁地作用在  $M$  上的自同构 Lie 群  $G$ .  $G$  的 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  的元素可看作  $M$  上的辛向量场, 即保持辛 2-形式  $\omega$  不变的向量场  $X$ :

$$X \cdot \omega = di_X \omega = 0,$$

这里 “ $\cdot$ ” 表示 Lie 导数,  $i_X$  是用  $X$  作内乘的算子,  $d$  是外微分. 一个辛齐性空间称作是严格辛的

(strictly symplectic), 如果所有的向量场  $X \in \mathfrak{g}$  是 Hamilton 向量场, 即  $i_X \omega = dH_X$ , 这里  $H_X$  是  $M$  上的函数 ( $X$  的 Hamilton 量), 它的选取方式是使映射  $X \mapsto H_X$  是从 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  到  $M$  上的函数关于 Poisson 括号的 Lie 代数的同态. 严格辛齐性空间的一个例子是 Lie 群  $G$  关于它在  $\mathfrak{g}$  上的线性形式空间  $\mathfrak{g}^*$  中的余伴随表示  $\mathrm{Ad}^*G$  的通过任意一点  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$  的轨道  $M_\alpha = (\mathrm{Ad}^*G)\alpha$ . 在  $M_\alpha$  上不变的辛 2 形式  $\omega$  由公式

$$\omega(X_\beta, Y_\beta) = d\beta(X, Y) \equiv \beta([X, Y])$$

给出, 其中  $X_\beta, Y_\beta$  是向量场  $X, Y \in \mathfrak{g}$  在点  $\beta \in M_\alpha$  的值. 向量场  $X \in \mathfrak{g}$  有 Hamilton 量  $H_X(\beta) = \beta(X)$ .

对于任意一个严格辛齐性空间  $(M, \omega, G)$ , 存在一个  $G$  等变的矩映射

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*, x \mapsto \mu_x, \mu_x(X) = H_X(x),$$

它把  $M$  映到  $G$  在  $\mathfrak{g}^*$  中的轨道  $\mu(M)$ , 且是辛流形的局部同构. 这样,  $G$  的每一个严格辛齐性空间是  $G$  在余伴随表示中的一条轨道的覆盖.

有一个单连通的、但未必是有效作用自同构群  $G$  的单连通辛齐性空间与  $G$  在其 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  上的闭 2 形式的空间  $Z^2(\mathfrak{g})$  上的自然作用是——对应的. 该对应的定义如下: 2 形式  $\sigma \in Z^2(\mathfrak{g})$  的核  $\mathfrak{K}^\sigma$  是  $\mathfrak{g}$  的子代数. Lie 群  $G$  的对应于  $\mathfrak{K}^\sigma$  的连通子群  $K^\sigma$  是闭的, 定义了一个单连通齐性空间  $M^\sigma = G/K^\sigma$ . 形式  $\sigma$  在流形  $M^\sigma$  关于点  $O = eK^\sigma$  的切空间  $T_O M^\sigma \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{K}^\sigma$  上决定了一个非退化的 2 形式, 它可以扩充成  $M^\sigma$  上  $G$  不变的辛形式  $\omega^\sigma$ . 这样, 对于形式  $\sigma$  指定了单连通的辛齐性空间  $(M^\sigma, \omega^\sigma)$ . 若  $\mathfrak{K}^\sigma$  不包含  $\mathfrak{g}$  的理想, 则  $G$  在  $M^\sigma$  上的作用是局部有效的. 两个辛齐性空间  $M^\sigma$  和  $M^{\sigma'}$  是同构的, 当且仅当形式  $\sigma, \sigma'$  属于  $G$  在  $Z^2(\mathfrak{g})$  中的同一个轨道. 对于恰当 2 形式  $\sigma = d\alpha$ , 辛齐性空间  $M^\sigma$  等同于辛齐性空间  $M_\alpha$  的通用覆盖空间, 后者是点  $\alpha$  在余伴随表示中的轨道. 若  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ , 则任意一点  $\sigma \in Z^2(\mathfrak{g})$  的轨道  $G\sigma$  可以典型地装备辛齐性空间的结构, 单连通群  $G$  的任何一个辛齐性空间同构于这些轨道之一上面的覆盖空间. 特别是,  $M^\sigma$  是  $G\sigma$  的通用覆盖空间.

设  $(M, \omega)$  是单连通、连通群  $G$  的紧辛齐性空间,  $G$  的作用是有有效的. 则  $G$  是半单紧群  $S$  和一个可解群  $R$  的直积, 其中  $R$  同构于一个 Abel 群及一个 Abel 正规子群的半直积, 辛齐性空间  $(M, \omega)$  分解成分别有自同构群  $S$  和  $R$  的辛齐性空间的直积.

辛群空间是一种特殊的辛齐性空间, 它由 Lie 群和一个左不变的辛形式  $\omega$  组成. 熟知对于容许有一个左不变辛形式的 Lie 群, 可约性蕴含着可交换性, 么

模性蕴含着可解性. 维数  $\leq 4$  的所有这种群是可解的, 但是从 6 维以上, 存在不可解的辛群空间 ([3]).

#### 参考文献

- [1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本: Kirillov, A. A. Elements of the theory of representations, Springer, 1976).
- [2] Guillemin, V. and Sternberg, S., Geometric asymptotics, Amer. Math. Soc., 1977.
- [3] Chu, B. - Y., Symplectic homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 197 (1974), 145 - 159.
- [4] Zwart, Ph. B., and Boothby, W. M., On compact, homogeneous symplectic manifolds, Ann. Inst. Fourier, 30 (1980), 1, 129 - 157.
- [5] Hurt, N. E., Geometric quantization in action, Reidel, 1983.
- [6] Alekseevskii, D. V., Vinogradov, A. M. and Lychagin, V. V., The principal ideas and methods of differential geometry, Encycl. Math. Sc., 28, Springer, Chap. 4, Sect. 5 (译自俄文).

Д. В. Алексеевский 撰

【补注】关于 Lie 导数 (Lie derivative) 和内乘法 (interior multiplication) 的定义, 见 Lie 微分 (Lie differentiation). 陈维桓 译

**辛流形** [symplectic manifold; симплектическое многообразие]

赋予辛结构 (symplectic structure) 的流形.

**辛空间** [symplectic space; симплектическое пространство]

域  $k$  上奇维数的射影空间  $P_{2n+1}$ , 赋予了零配极的对合关系; 用  $Sp_{2n+1}$  表示它.

令  $\text{char } k \neq 2$ .  $Sp_{2n+1}$  中绝对的零配极总能写成形式  $u_i = a_{ij} x^j$ , 其中  $\|a_{ij}\|$  是斜对称矩阵 ( $a_{ij} = -a_{ji}$ ). 用向量形式, 绝对零配极可写成  $u = Ax$ , 这里  $A$  是斜对称算子, 在适当基下, 它的矩阵化成

$$\|A\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

这时, 绝对零配极取典范形式

$$u_{2i} = x^{2i+1}, u_{2i+1} = -x^{2i}.$$

绝对零配极诱导了一个双线性型, 写成典范形式如下:

$$xAy = \sum_i (x^{2i} y^{2i+1} - x^{2i+1} y^{2i}).$$

$Sp_{2n+1}$  的与其零配极交换的直射变换称为辛变换 (symplectic transformation); 确定这些直射变换的算子称为辛 (symplectic) 算子.  $\|A\|$  的上述典范形式确定了辛算子  $U$  的  $2n+2$  阶方阵, 其元素满足条件

$$\sum_i (U_j^{2i} U_k^{2i+1} - U_j^{2i+1} U_k^{2i}) = \delta_{j,k-1} - \delta_{j,k+1},$$

其中  $\delta_{a,b}$  是 Kronecker 符号. 这样的矩阵称为辛矩阵; 其行列式等于 1. 辛变换构成群, 它是一个 Lie 群.

空间  $Sp_{2n+1}$  的每个点位于它相对于绝对零配极的极超平面上. 也能定义  $Sp_{2n+1}$  的极子空间.  $Sp_{2n+1}$  的自极  $n$  空间的流形称为它的绝对线性复形 (absolute linear complex). 在这背景下, 辛群也称 (线性的 (linear)) 复形群 (complex group).

每对直线以及它们在零配极下的极  $(2n-1)$  空间在  $Sp_{2n+1}$  中确定了对于该空间的辛变换群的唯一辛不变量. 过每条线的任何点都有该线和  $(2n-1)$  空间的横截通过, 这就确定了点的射影四元组. 这是辛不变量 (symplectic invariant) 的几何解释, 它断定了点的这些四元组的交叉比的等式.

辛 3 维空间可在双曲空间中解释, 这给出了辛空间和双曲空间的联系. 例如  $Sp_3$  的辛变换群同构于双曲空间  $^2S_4$  的运动群. 按这种解释, 辛不变量相应于双曲空间中点之间的距离.

#### 参考文献

- [1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. Л. А. Сидоров 撰

【补注】 $P_{2n+1}$  中辛几何的记号  $Sp_{2n+1}$  不是惯常的记号. 用  $Sp_{2n}(k)$  表示具有交错 (即斜对称) 双线性型的线性空间  $k^{2n}$  中的辛群.  $P_{2n+1}(k)$  中相应的射影群记成  $PSp_{2n}(k)$ ; 它就是上面正文中所说的群, 称为射影辛群 (projective symplectic group).

具有零配极的射影空间中的极子空间, 也称作迷向子空间 (isotropic subspace), 构成所谓极几何 (polar geometry) 的例子 (亦见极空间 (polar space); 可见 [A1]). 在 Tits 的厦 (buildings) 理论中, 解释为极几何的辛空间是型  $C_n$  的厦 (见 [A2] 及 Tits 厦 (Tits building)).

#### 参考文献

- [A1A] Veldkamp, F. D., Polar geometry, Indag. Math., 21 (1959), 512 - 551.
- [A1B] Veldkamp, F. D., Polar geometry, Indag. Math., 22 (1960), 207 - 212.
- [A2] Tits, J., Buildings of spherical type and finite BN-pairs, Lecture notes in math., 386, Springer, 1974.
- [A3] Baer, R., Linear algebra and projective geometry, Acad. Press, 1952.
- [A4] Dieudonné, J., La géométrie des groupes classiques,



Springer, 1963.

- [A5] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.
- [A6] O'Meara, O. T., Symplectic groups, Amer. Math. Soc., 1978.
- [A7] Weyl, H., The classical groups, Princeton Univ. Press, 1946.
- [A8] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Toronto Univ. Press, 1965, 69 - 70.
- [A9] Guillemin, V. and Sternberg, S., Symplectic techniques in physics, Cambridge Univ. Press, 1984.
- [A10] Hahn, A. J. and O'Meara, O. T., The classical groups and K-theory, Springer, 1989.
- [A11] Libermann, P. and Marle, C. M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987 (译自法文). 石生明 译 刘木兰 校

**辛结构** [symplectic structure; симплектическая структура]

在一个偶数维可定向光滑流形  $M^{2n}$  上由一个非退化 2 形式  $\Phi$  所定义的一阶无穷小结构 (infinitesimal structure). 每一个切空间  $T_x(M^{2n})$  有辛空间结构, 其反对称数量积是  $\Phi(X, Y)$ ,  $M^{2n}$  的所有与辛结构相适配的切标架 (即关于该标架,  $\Phi$  有典范形式  $\Phi = 2 \sum_{a=1}^n \omega^a \wedge \omega^{n+a}$ ) 构成  $M^{2n}$  上的一个主丛, 其结构群是辛群 (symplectic group)  $Sp(n)$ . 在  $M^{2n}$  上指定一个辛结构等价于在  $M^{2n}$  上指定一个  $Sp(n)$  结构 (见 G 结构 (G-structure)).

在  $M^{2n}$  上给定一个辛结构, 则在  $M^{2n}$  上的向量场和 1 形式的模之间存在一个同构. 在该同构下向量场  $X$  对应于 1 形式  $\omega_X: Y \mapsto \Phi(X, Y)$ . 在这种情况下, Lie 括号  $[X, Y]$  的象称为 Poisson 括号 (Poisson bracket)  $[\omega_X, \omega_Y]$ . 特别是, 当  $\omega_X, \omega_Y$  是恰当微分时, 便得到  $M^{2n}$  上两个函数的 Poisson 括号的概念, 推广了相应的经典概念.

辛结构也称为殆 Hamilton 结构 (almost Hamiltonian structure); 如果  $\Phi$  是闭的, 即  $d\Phi = 0$ , 则称为 Hamilton 结构 (Hamiltonian structure). 有时条件  $d\Phi = 0$  也包含在辛结构的定义之中. 这些结构在大范围分析力学中找到了应用, 因为任意一个光滑流形  $M$  的余切丛  $T^*(M)$  有一个典型的 Hamilton 结构. 它由形式  $\Phi = d\theta$  定义, 这里  $T^*(M)$  上的 1 形式  $\theta$  称为 Liouville 形式 (Liouville form), 定义为: 对于在点  $u \in T^*(M)$  的任意一个切向量  $X_u$ ,  $\theta_u(X_u) = u(\pi_* X_u)$ , 其中  $\pi: T^*(M) \rightarrow M$  是投影. 如果在  $M$  上选取局部坐标  $x^1, \dots, x^n$ ,  $u = y_i(u) dx^i_{\pi(u)}$ , 则  $\theta = y_i dx^i$ , 所以  $\Phi = dy_i \wedge dx^i$ . 在经典力学中,  $M$  解释为构形空间,  $T^*(M)$  是相空间.

在有 Hamilton 结构的流形  $M^{2n}$  上的一个向量场  $X$  称作是一个 Hamilton 向量场 (Hamiltonian vector

field) (或 Hamilton 系统 (Hamiltonian system)), 如果 1 形式  $\omega_X$  是闭的. 如果它是恰当的, 即  $\omega_X = -dH$ , 则称  $H$  为  $M^{2n}$  上的一个 Hamilton 量 (Hamiltonian), 它是相应的经典概念的推广.

#### 参考文献

- [1] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964.
- [2] Godbillon, C., Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969. Ю. Г. Лумисте 撰
- 【补注】 对于一个流形上的辛结构, 通常要求定义中的 2 形式  $\Phi$  是闭的 (参看 [A1], p. 176, [A4], p. 36 ff). 若  $\Phi$  未必是闭的, 通常说成是殆辛结构 (almost symplectic structure).

用  $\Phi(\omega)$  记在辛流形  $M$  上与 1 形式  $\omega$  对应的向量场, 则在  $C^\infty(M)$  上的 Poisson 括号定义为

$$\{f, g\} = \Phi(\varphi(df), \varphi(dg)).$$

这使  $C^\infty(M)$  成为一个 Lie 代数, 它满足 Leibniz 性质 (Leibniz property)

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}. \quad (*)$$

更一般地, 若一个代数  $A$  有一个额外的 Lie 括号  $\{, \}$  使得 (\*) 满足, 则称它为一个 Poisson 代数 (Poisson algebra). 若一个光滑流形  $M$  在  $C^\infty(M)$  上有一个 Poisson 代数结构, 则称为一个 Poisson 流形 (Poisson manifold), [A4], p. 107 ff.

#### 参考文献

- [A1] Abraham, R. and Marsden, J., Foundations of mechanics, Benjamin/Cummings, 1978.
- [A2] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982 (译自德文).
- [A3] Souriau, J. M., Structure des systems dynamiques, Dunod, 1969.
- [A4] Libermann, P. and Marle, C. M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987.
- [A5] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (中译本: В. И. Арнольд, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992).
- [A6] Arnol'd, V. I. and Givental, A. B., Symplectic geometry, Dynamical Systems, IV, Springer, 1990 (译自俄文).
- [A7] Crumeyrolle, A. and Grifone, J. (eds.), Symplectic geometry, Pitman, 1983. 陈维桓 译

**语法语言** [syntactic language; синтаксический язык]

一种用来研究形式语言而不考虑其解释的语言. 数理逻辑中语法语言概念的产生是与研究和形式化有内容的数学理论的问题相联系的. 形式化某一理论得到的一个形式系统 (formal system), 这个形式系统

可以看成是独立的研究对象，而不管它的来源如何。语法语言就是用这种观点来研究形式系统的。

语法语言是用来描述形式系统的语言，即它的初始符号、项、公式等，用来定义形式系统的推演概念，用公式表述和证明形式系统的定理。因此，一个形式系统同两种语言有关：一种是形式系统自身被研究的语言（对象语言（object language）），另一种是研究形式系统的语言（语法语言（syntactic language）或元语言（meta-language））。

一个语法语言必须含有对象语言的符号和公式的名称，还必须含有取值为这些符号和公式的变元。对象语言的符号和公式在语法语言中作为它们的固有名称出现（即这些名称表示这些符号和公式本身）。通常，语法语言不一定包含语言手段来处理作为独立对象的无穷集。为强调这一点，在提到给定形式系统的基本语法（elementary syntax）时，还要对照理论语法（theoretical syntax），在理论语法中假设任意构词都能研究。理论语法的语言也称为元语言（meta-language）。表示得十分仔细的语法语言也可以形式化而成为对象语言。许多足够强的形式系统可以用作其自身的基本语法语言的形式化。关于形式系统的 Gödel 不完全性定理（Gödel incompleteness theorem）就是基于这一事实得到证明的。

在理论语法的语言中，可以考虑给定形式系统的模型，可以在这些模型中确定该形式系统的真假值。初等算术的理论语法的形式语言的一个例子，就是二阶算术语言。

#### 参考文献

- [1] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.

В. Н. Гришин 撰 沈复兴 译 罗里波 校

#### 语法结构 [syntactic structure; синтаксическая структура]

一个在数理语言学（mathematical linguistics）中用来描述自然语言句子结构的数学构造。两种类型的语法结构用得最为广泛——部件系统（component system）和语法的从属关系（relation of syntactic subordination）。部件系统的概念可以用下面的方式来定义。设  $x$  是在字母表（alphabet） $V$  上的非空链（chain）（字（word））；在链中嵌入的字（或者字母，见嵌入的字（imbedded word））称为它的点（point）；链中形如  $\{x: a \leq x \leq b\}$  的点的集合称为链的片段（segment），其中  $a, b$  是固定的点。一个链  $x$  的片段的集合  $C$  称为这个链的部件（component）集，如果：1)  $C$  含有一个由所有  $x$  的点组成的片段，也含有所有  $x$  的由一个点组成的片段；2)  $C$  的任意两个片段或者互

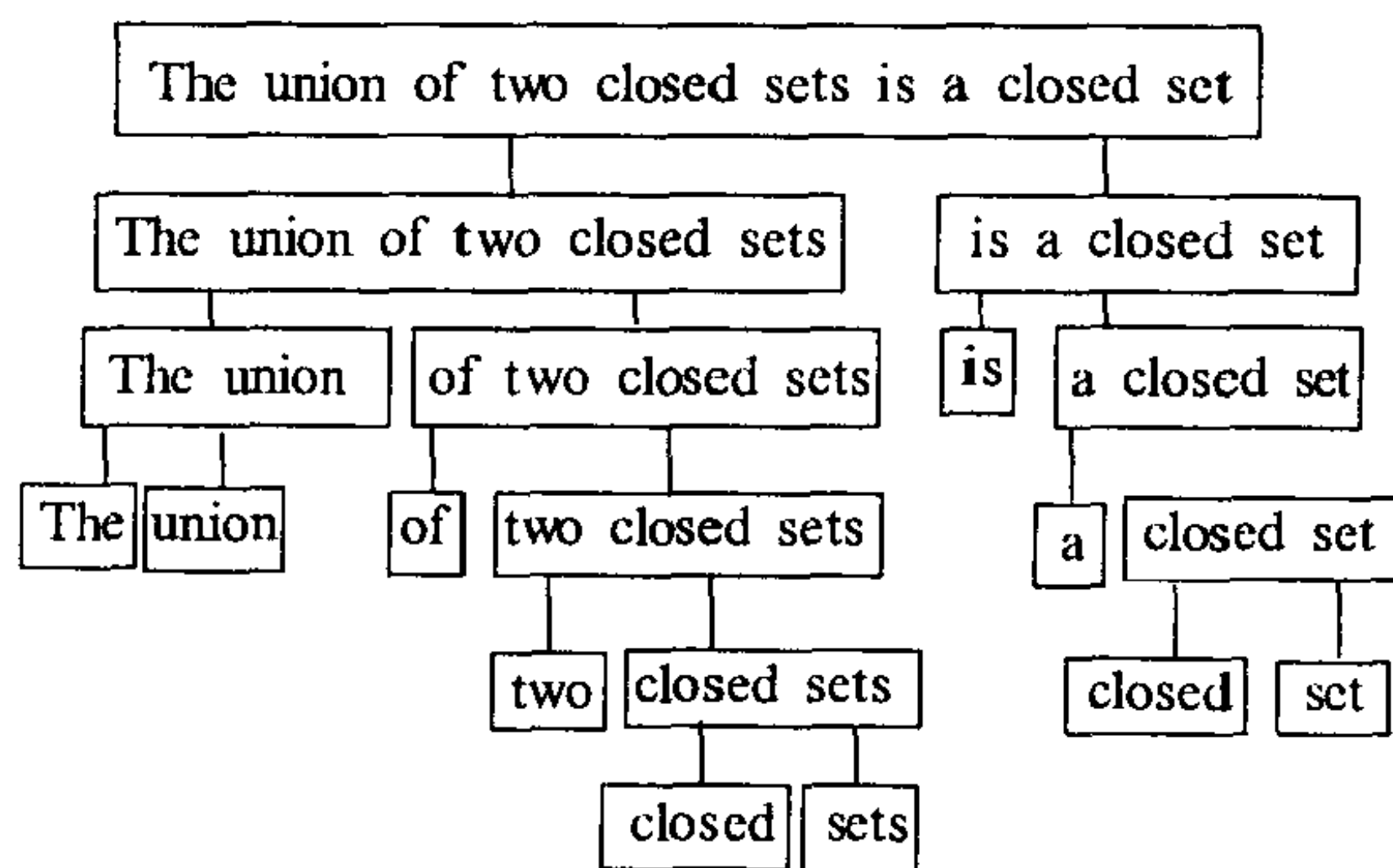
不相交或者一个包含于另一个的内部。 $C$  的元素称为部件。如果字母表  $V$  解释成为在自然语言中的字的集合而  $x$  是一个句子，那么在对于  $x$  适当选择一个部件系统时， $C$  的非平凡的部件（即那些在  $C$  中但不是 1）所提到的部件）代表字组合（word combination），也就是说被懂此语言的人直观地理解为具有“语法联系”的句子片断的字群。例如句子

The union of two closed sets is a closed set

可分解为下面的“自然的”部件系统（非平凡部件的边界用括号来表示）：

(( (The union) (of (two (closed sets))))  
(is (a (closed set))))

如果用直接包含关系来装备部件系统  $C$ ，那么  $C$  就是一棵有根的树（其中根恰好是  $x$  本身）称为部件树（component tree）。对上面所举例子，它的部件树有如下形式：



部件通常带有标记（label），它就是字组的语法特征（一个部件可以有多个标记）。在上面的例子中等同于整个句子的部件是自然地用标记 SENT 来表示句子。部件“*The union of two closed sets*”记成  $S_{平均}$ ，用以表示“一个主格单数在本质上是平均型的群体”，等等。这样得到的对象是一个带有标记顶点的树，称为标记部件树（labelled component tree）。

另一种描述句子结构的方式是在链  $x$  的点的集合  $X$  上定义一个二元关系  $\rightarrow$ ，使得图  $(X; \rightarrow)$  形成一棵有向的有根的树。这样一个关系称为（语法）从属关系（relation of (syntactic) subordination），而其所对应的树就称为（语法）从属树（syntactic subordination tree）。从属概念是通常在中学文法（特别是俄文文法）中考虑一个句子的一些字之间的从属关系的形式化而得到的。在从属树的图表示中人们通常在水平线上安排链的点，然后在它上面画一些箭头。上面的句子有如下的“自然的”从属树。





(从属树的根通常放在谓词上, 因为它是句子的组织元素.)

在一棵从属树上的箭头常常配有指明它所代表的语法关系类型的标记. 在例子里“is”和“union”之间的关系很自然地是谓词型而“sets”和“closed”之间的关系就是限定型, 等等.

商业和科学用文中的从属树通常满足一个所谓的射影条件 (projectivity condition), 用上面的图表示来描述便得到如下的说法: 在某一个箭头之下的每一个点都能有一个从该箭头的起点通向每一个点的路径. 由此推出没有两个箭头是交叉的. 这有时又称为弱射影条件 (weak projectivity condition). 而这个条件在小说中常常被违反, 那是为了起到一定的艺术效果.

一个单一的句子可以采取几种不同的“自然的”部件系统 (从属树). 这一点常常见于当一个句子可以有不同的方式来理解的时候, 而各种不同的部件系统 (从属树) 对应着对它的意义作各种不同的解释 (语法上的一体多义 (syntactic homonymy)).

例如句子 “She took the people from London” 可能的意义是或者 “她把一些伦敦人带到 (某一个地方)” 或者 “她把某些人从伦敦带到 (某一个地方)”. 前一种意义的部件系统是

She (took (the (people (from London))))

它的从属树是



而后一种意义的部件系统是

She (took (the people) (from London))

它的从属树是



给定一棵在一条链上的从属树和链上的一个点  $\alpha$ , 链上的可以从  $\alpha$  出发经由有向路径所能达到的全体点的集合 (包括  $\alpha$  自己) 称为点  $\alpha$  的相关群 (dependence group). 任何从  $\alpha$  的相关群中去掉某些 (或全部) 从属于  $\alpha$  的点 (也就是从  $\alpha$  出发的一个箭头能到达的点) 的相关群所得的集合称为  $\alpha$  的一个截断相关群 (truncated dependence group).

一条链  $x$  的部件系统  $C$  和定义在  $x$  上的从属树称为是相容的 (compatible), 如果  $x$  的所有点的相关群是部件, 并且每一个部件都是  $x$  的某些点的相关群或截短了的相关群. 一个给定句子的在一定意义下是“自然的”部件系统和从属树通常是相容的 (见上面的

例子). 一棵从属树连带一个兼容的部件系统是射影的. 对于一个给定的部件系统可以有一棵以上的从属树. 但是如果附加某种支配关系于部件之间, 则可能构造出一棵“自然的”唯一地定义的从属树. 这可以由以下步骤来完成: 给定链  $x$  的部件系统  $C$ , 对每一个不是只由一个点组成的部件在它的直接包含集中结合上一个所需要的部件, 并且把这称为它的主要部件 (main component). 此时, 有序对  $(C, C')$  (其中  $C'$  是所有主要部件的集合) 称为等级部件系统 (hierarchical component system). 一个等级部件系统称为连结 (connected) 着一棵从属树, 如果它是和树相容的, 并且对于每一个不是单点的部件  $A$ , 在从属树中对应于它的子树的根与在  $A$  中直接包含的部件相结合的主要部件相对应的子树的根相重合. 一个句子的“自然的”部件系统在“自然的”等级中是通常与“自然的”从属树相连结的. 所以如果在上面的例子中配备部件系统以如下形式的等级:

[[The [union]] (of [two [closed[sets]]])]  
[[is] (a [closed[set]])]

(其中主要部件以方括号来表示), 那么所得到的等级部件系统是连结着上面的这个句子的从属树的.

不是所有类型的句子都能用部件系统和从属树来充分满意地描述. 特别, 对含有字组中带有“特别密切的”内在联系 (例如复合动词形式) 和复合结构的句子的描述可能会产生困难. 此外, 要在更深的层次上描述句子的结构以及其他各种词类往往有必要用一个比树更为复杂的图来进行. 为了对一个语言作更为满意的描述往往有必要不仅考虑语法连结还要考虑通常称为首语重复的连结 (anaphoric connection), 也就是在“为同一事物命名”的字的嵌入中的连结, 例如

如果  $f$  是一个由  $E$  到  $F$  上的对应

并且存在一个逆对应  $f^{-1}$ ,

那么后者是一个由  $F$  到  $E$  上的对应.

正在发展着其他更为复杂的语法结构的概念用以适应这种连结.

#### 参考文献

- [1] Tesnière, L., *Eléments de syntaxe structurale*, Paris, 1965.
- [2] Падучева, Е. В., «Вопросы языкознания», 2 (1964), 99 – 113.
- [3] Гладкий, А. В., «Научно-техническая информация, Сер. 2», 1971, 7, 35 – 38.
- [4] Гладкий, А. В., *Формальные грамматики и языки*, М., 1973.
- [5] Гладкий, А. В., «Slavica», 1981, v. XVII, XVIII.  
А. В. Гладкий 撰 罗里波 译 王世强 校

语法定理 [syntactic theorem; синтаксическая теорема]

关于语法语言 (syntactic language) 的一种定理, 即关于形式系统的一种定理, 例如谓词演算中的演绎定理、Gödel 算术不完全性定理. 这些都是与基本语法有关的定理. 一个非基本语法定理 (即其证明实质性地用到无穷集的定理) 的例子是初等算术的相容性定理. В. Н. Гришин 撰 沈复兴 译 罗里波 校

语法 [syntax; синтаксис], 数理逻辑中的

作为纯符号系统的形式公理理论的描述和研究 (与之比较, 语义 (semantics) 涉及形式理论对象的含义). 在数学基础中区别语法和语义是特别重要的, 数学基础所研究的形式理论的语义不是直观上明显的. 在这种情形下, 形式理论语法的描述和研究常借助元理论 (meta-theory) 中更加可靠的直觉可信的方法来实现, 元理论作为基础使用, 而不直接解释所研究的复杂的语义的本质特征. 例如, 在公理集合论 (axiomatic set theory) 中, 熟知的 Gödel 的选择公理的相容性可以作为语法的、有限地可证明的结论, 只要 Zermelo-Fraenkel 形式理论和谐, 则加上选择公理也和谐.

当我们不限于数学基础而考虑证明论 (proof theory) 时, 语法和语义的区别就不是这么重要的了. 有人采用所谓的半形式系统 (semi-formal system), 其中推演概念就与某些语义约定有关. 形式语言可以实质上是集合论式地用无穷长公式等来定义. 另一方面, 对于有界可表示的形式语言, 诸如组合逻辑 (combinatory logic) 的语言, 算术语言 (algorithmic language), 它们的语义可以用该语言的纯语法的方法严格地阐述出来.

#### 参考文献

- [1] Carnap, R., The logical syntax of language, Kegan Paul, Trench & Truber, 1937 (译自德文).
- [2] Church, A., Introduction to mathematical logic. 1, Princeton Univ. Press, 1956.
- [3] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).

А. Г. Драгалин 撰 沈复兴 译 罗里波 校

综合问题 [synthesis problems; синтеза задачи]

旨在以预先指定的运转方式构造一个控制系统 (control system) 的问题的总称. 一个控制系统通常由一些部件组成, 这些部件本身也是些简单的控制系统. 早先的综合意指给出部件的结构和组合这些部件的规则, 以及使用控制系统结构以确定该系统实现的函数.

每一类控制系统按自然方式产生特定的一类函数. 综合问题 (synthesis problem) 本意就是要构造一个控制系统, 使之实现这一函数类中给定的一个函数.

例子. 1) 给定一 Boole 函数 (Boolean function), 构造一实现此 Boole 函数的公式. 2) 给定一 Boole 函数集, 构造一种多极触点配置方案 (contact scheme), 使之实现这一函数集. 3) 给定一自动机 (automaton) 行为的确切描述, 构造这一自动机本身. 4) 给定一可计算函数 (computable function), 找出计算它的一种方法, 或编制相应的程序.

上述例子涉及离散数学. 然而, 下面的几个例子具有连续特性. a) 给定一 (自动) 控制系统的对数振幅-频率特性曲线 (或更一般地, 该系统的工作条件, 诸如扰动和控制作用, 干扰, 对工作时间的限制, 等等), 综合一具有这些特性的 (自动) 控制系统. b) 给定一组线性方程和不等式, 以及一线性函数, 构造一种计算格式, 以使该线性函数在此组线性方程和不等式的解集上达到极大. c) 给定一微分方程组及关于其解的精度要求, 找出数值求解该方程组的一种算法, 使之达到此精度要求.

习惯上处理后三个例子被视为属于连续数学, 然而, 寻找近似数值解本身已经预先假定连续函数用离散函数逼近. 因此, 这些问题涉及到连续数学和离散数学之间的相互关系.

综合问题的数学提法预先假定用以给出函数的语言有确切的表达. 在解综合问题中到底会发生什么样的问题, 取决于所使用的这种语言. 在大多数情况下, 存在一种比较简单的方法用以构造一个典范形式的控制系统.

但是, 当控制函数类并不太小时, 问题就可能有许多别的解; 于是自然就产生在某种意义下选择最优解的问题. 为此引进一个刻画控制系统品质的泛函, 如系统中部件的个数, 系统的代价, 体积, 容量 (即主动状态下其部件的最大数目), 工作时间, 损坏概率, 等等. 重要的是, 通常称为复杂度 (complexity) 的这种泛函应该准确反映控制系统所要求的性质, 并且还应该容易计算. 综合问题的一种改进提法就是对于一给定的函数, 构造一控制系统使之以最小复杂度实现这一函数.

实际上, 问题的这种明确的提法仅仅适用于控制系统的有限模型. 所有综合问题在这种情形下叙述得更清楚. 因此在下面主要关心有限模型.

对于控制系统的有限模型, 一种典型的情况是, 该问题有平凡解法. 例如, 如果希望一个配置方案中的部件数达到最小, 那么这种平凡解法就是, 首先列出所有含一个部件的配置方案, 并检查其中的一种配



置方案能否实现给定的函数，然后列出所有含两个部件的配置方案，并再次检查其中的一种配置方案能否实现给定的函数，如此直到找出一种配置方案使之实现给定的函数。于是这一配置方案具有最小部件数目。

然而，由于所要求的步数太大，这种平凡解法并不是十分有效的。此外，如果待实现的函数的复杂度超出某个相对低的阈值，则这种平凡解法实际上无法实现，并且即使使用最快速计算机也只能稍微扩大其范围。这意味着需要对综合问题的提法做进一步的修正。

下面通过一类控制系统，功能元图 (diagram of functional elements) 的例子，以及对于复杂度取为配置方案部件的数目这种特殊情形，说明了这里所列出的这些意向。由这种类型控制系统能实现的函数是逻辑代数中的函数 (Boole 函数)。

首先必须注意，平凡解法求解的不适用性仅仅是导致修改综合问题提法的一个原因。有一个猜测认为，对于每一 Boole 函数，构造一种具有极小部件数目的配置方案，任何一种这样的算法必然在某种意义上包含罗列所有 Boole 函数。作为肯定这一猜测的一个证据，存在一定理：如果对每一变量数目，考虑含有一最复杂函数的 Boole 函数的无穷集合，并且让这一集合在重新命名变量 (不加区别) 和置换常数这些运算下取闭包，那么就得到由所有一般 Boole 函数组成的集合 (不计非本质的可变函数)。这一猜测有许多间接的支持，它们断定：在构造配置方案中，即使放松接近于最优部件数目的要求，而仅仅要求算法适用于每一 Boole 函数，则这种罗列所有 Boole 函数的要求仍然无法减弱。罗列原理中的这种必然性概念是有必要修正综合问题提法的另一个原因。这里有几种可能修正方法。

Shannon 方法 (以第一个提出这种触点配置方法的 C. E. Shannon 的名字命名) 与函数

$$L(n) = \max L(f)$$

有关，这里  $L(f)$  为实现函数  $f$  的配置方案中部件的最小可能数目，而求极大是对所有  $n$  元 Boole 函数  $f$  取的。 $L(f)$  和  $L(n)$  依赖于在构造配置方案中使用的一组函数部件 (功能元) 组成的基底。综合问题就是对于任意一个  $n$  元 Boole 函数，找出一种部件数目本质上不超过  $L(n)$  的构造配置方案的有效方法。

为了综合问题的更一般的提法，对于每一个函数部件 (功能元)  $E$ ，指定一正数  $L(E)$  作为该部件的复杂度，它仅依赖于由部件  $E$  所能实现的函数，并且让每一种配置方案  $S$  对应于复杂度

$$L(S) = \sum L(E),$$

这里求和是对配置方案  $S$  的所有部件  $E$  取的。对于每一 Boole 函数  $f$ ，其实现的复杂度 (在给定的基底) 定义作

$$L(f) = \min L(S),$$

这里求极小是相对于实现  $f$  的所有配置方案  $S$  取的。于是像前面一样，令  $L(n) = \max L(f)$ ，并且对于任意  $n$  元 Boole 函数，要求构造一种配置方案，使其复杂度不大于 (或不十分大于)  $L(n)$ 。

关于这种算法，要求能计算  $L(n)$  或精确地得到它的界，至少是下界。看来，通过幂法 (power method)，基于下面的考虑可以得到  $L(n)$  的一个很好的下界。复杂度不超过  $L(n)$  的实现  $n$  元 Boole 函数的所有可能的配置方案的数目不可能小于  $n$  元 Boole 函数的总数。在幂法中，只需要得到所考虑的配置方案数目的一个满意的上界。

因此，对于给定的  $n$ ，知道所构造配置方案的复杂度与  $L(n)$  的下界相差多少倍，就能在很大程度上判断任意一种普适综合方法 (即适用于任意 Boole 函数的方法) 的品质。同时，这些配置方案的复杂度用作  $L(n)$  的一个构造性界，并且当  $n \rightarrow \infty$  时渐近地与它相等。于是，这是一种渐近最好的综合方法，并且能描述  $L(n)$  的渐近行为。设

$$\rho = \min \frac{L(E)}{i-1},$$

其中  $i$  是部件  $E$  出现的数目，而极小是对  $i \geq 2$  的所有  $E$  取的。于是

$$L(n) \sim \rho \frac{2^n}{n}.$$

对于其他类控制系统， $L(S)$ ，以及复杂度  $L(f)$  和  $L(n)$  用类似的方式定义。对于一个触点配置方案  $S$ ， $L(S)$  通常是其中的触点数，而当  $S$  是一公式时， $L(S)$  表示其中变量的符号的数目。对于自动机和 Turing 机 (Turing machine)， $L(S)$  有时取作状态数。在这些情形下， $L(n)$  的相应的渐近行为示于表 1。

表 1

控制系统类	$L(n)$	备 注
功能元图	$\sim \rho \frac{2^n}{n}$	$\rho = \min \frac{L(E)}{i-1}$
触点配置方案	$\sim \frac{2^n}{n}$	
公式	$\sim \frac{2^n}{\log_2 n}$	
自动机	$\sim \alpha(n) \frac{2^n}{n}$	$1 \leq \alpha(n) \leq 2$
Turing 机	$\sim \frac{2^n}{n(k-1)}$	$k$ 是机器的内部字母表中字母的个数

对于像误差概率这样的其他类型的复杂度, 以及像自动机这样的其他类控制系统, 相应的渐近关系可以包含不只一个, 而是两个甚至更多个参数, 并且, 寻找 (比如说对于自动机) 渐近性的问题一般说来是无法算出来的。

分析  $L(n)$  的下界表明, 实际上对于几乎所有的  $n$  元 Boole 函数, 其实现的复杂度渐近地不小于  $L(n)$ . 这意味着对几乎所有的 Boole 函数, 一种给定的综合方法产生几乎最简单的配置方案。

但是首先, 尽管这一函数类包含几乎所有的 Boole 函数, 但对于充分大的  $n$ , 这一函数类中没有一个函数能够清楚地被描述出来. 其次, 它由最难以实现的函数组成, 而这些函数在应用性问题中很少遇到. 因此, 这样的函数价值不大. 这一事实又一次表明有必要修正综合问题的提法。

必须指出, 在全体 Boole 函数中, 对综合问题确实重要的这些函数形成可忽略的一部分, 并且如果关于罗列的必要性的如上所述的猜测是真的, 则任何一种有效的普适综合方法将自动地在某些情况下给出一些配置方案, 这些配置方案决不会是最简单的. 描述这些函数集合是不可能的, 并且为了综合目的又出现 Boole 函数的分类问题. 提出问题的这一方法涉及到重要函数类的选择, 特定函数类中函数的特殊综合方法的建立, 以及如此所得到的配置方案的品质的评估等。

局部编码原理 (local coding principle) 提供了求解这种问题的一个有效的手段. 这一原理预先假定所考虑类中的函数以这样的方式编码, 使得一个函数的值可以利用该码的相当小部分计算出来. 如果人们以足够简单的方式成功地实现某些辅助运算, 则局部编码原理对于所考虑类给出渐近最优的综合算法. 此外, 下列关系在很大普适程度上成立:

$$L(N_n) \sim \rho \frac{\log_2 |N_n|}{\log_2 \log_2 |N_n|},$$

这里  $N_n$  是该类中依赖于给定的  $n$  变量集的一些函数组成的子集, 并且

$$L(N_n) = \max L(f),$$

而其中的极大取在  $N_n$  中所有 Boole 函数  $f$  上 (这里  $\rho = 1$ ).

为了用例子说明这种渐近关系所取的具体形式, 最方便的是使用在一给定点数上取值为 1 的 Boole 函数类. 最典型的例子示于表 2.

基于局部编码原理, 对于十分窄的一些函数 (例如对称函数) 类, 也就是说, 对于从实用观点上最有意义的这些函数, 已经得到了一些好的综合方法. 然而, 在所考虑的情形下, 由幂法所得到的下界看来太

表 2

函数取值为 1 的点数	$L(N_n)$
$(\log_2 n)^c, c > 1$	$\sim n(\log_2 n)^{c-1}$
$n^c, c > 0$	$\sim \frac{n^{c+1}}{(c+1)(\log_2 n)}$
$2^n, 0 < c < 1$	$\sim n^{1-c} 2^n$
$2^{cn}, 0 < c < 1$	$\sim \frac{1-c}{c} 2^{cn}$
$\frac{2^n}{n^c}, c > 0$	$\sim c \frac{2^n \log_2 n}{n^{c+1}}$

弱, 以致无法判断配置方案的品质. 在给定时刻限制所考虑函数类, 这是不可避免的, 因为狭窄类的极限情形就是这样的函数类, 其在每一变量数目下所含函数个数不多于 1 个. 这实际上意味着人们考虑个别具体的函数。

这里发生两个问题.  $\alpha$ ) 对于一给定的具体函数  $f$ , 构造一具有最少可能部件数的配置方案, 从而得到  $L(f)$  的一上界.  $\beta$ ) 得到  $L(f)$  最好可能的下界. 在这些问题中, 通常第一个问题比较简单, 因为为了解决它, 只需在最后的分析中构造一种配置, 而第二个问题要求在某种意义下检查实现  $f$  的所有配置方案. 这在寻找求得具体函数的下界的方法时启发出了一种全新的方向。

在寻求按  $n$  为线性的下界中, 函数的变元数目 (或一般地, 输入信息的容积) 通常不会引起大的困难. 寻找更严格的下界则是一个相当复杂的问题. 在基底  $\{\&, V, -\}$  中实现  $n$  元线性函数 (按模 2 加法) 的公式的阶下界  $n^{1.5}$ , 以及用于字长  $n$  的 Марков 正规算法 (见正规算法 (normal algorithm)) 的阶下界  $n^2 / \log_2^2 n$ , 是这一类型的首批几个例子. 如果不计那些在控制系统类上加很强限制下 (例如元素 (部件) 的系统是不完全的) 或者对表示函数用很强的工具而实质上包括罗列所有函数才得到的下界, 则至今所得到的最好的阶的下界是  $n^2$ .

很多问题 (诸如整数乘法, 矩阵乘法, 以及关于多带 Turing 机代码的对称性的识别) 期望有相对高的下界, 实际上要比原先所设想的更简单, 这一事实也表明, 对于实现具体函数的复杂度的研究并非是平凡的。

在使配置方案其他参数达到最小, 如时滞, 破坏概率等别的参数取极小, 大体上也会发生同样的问题. 可以建立各参数之间的明确的关系, 而根据某些对象用别的对象的模拟, 这一点往往对于不同类中控制系统的参数是可以做到的. 因此, 综合问题中所得到的结果并不是孤立的, 而是紧密相关的, 并且往往



可以从一个领域转移到另一个领域。

上述大部分工作可对控制系统的无穷模型进行。然而，在综合问题的提法中（甚至在其解法中更是如此），情况则要复杂得多。

#### 参考文献

[1] Лупанов, О. Б., «Проблемы кибернетики», 14 (1965), 31 – 110.

[2] Яблонский, С. В., «Проблемы кибернетики», 2 (1959), 75 – 121. В. М. Храпченко 撰

【补注】 给定一离散或连续时间输入 - 输出动态系统 (input-output dynamical system) 或控制动态系统 (control dynamical system), 也简称动态系统 (dynamical system):

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), t), \dot{x} = f(x, u, t),$$

$$x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m,$$

$$y(t) = h(x(t)), y = h(x),$$

$$y \in \mathbf{R}^p,$$

和在时刻 0 的出发点  $x(0) \in \mathbf{R}^n$ , 这系统  $\Sigma$  确定一个从输入函数空间  $\mathcal{U}$  到输出函数空间  $\mathcal{Y}$  的函数  $b(\Sigma)$ , 有时把它叫做初始系统  $(\Sigma, x(0))$  的行为 (behaviour). 给定行为  $b$ , 就有一个综合问题, 即寻找一 (适当类的) 动态系统  $\Sigma$ , 使得  $b(\Sigma) = b$ . 于是称  $\Sigma$  实现 (realize)  $b$ . 由此综合问题往往也称实现问题 (realization problem), 并且常常谈及实现理论 (realization theory).

在定常线性动态输入 - 输出系统 (linear dynamical input-output system) 情况下:

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx,$$

$$A \in \mathbf{R}^{n \times n}, B \in \mathbf{R}^{m \times m}, C \in \mathbf{R}^{p \times n}$$

(或其离散形式), 它的行为完全由其传递函数 (transfer function)

$$\begin{aligned} T(s) &= C(sI - A)^{-1}B = \\ &= s^{-1}T_0 + s^{-2}T_1 + s^{-3}T_2 + \dots \end{aligned}$$

决定, 其中

$$T_i = CA^iB,$$

上式给出输入和输出函数的 Laplace 变换 (或在离散情形下的  $z$  变换). 在这种情形下, 就称实现严格真有理矩阵函数  $T(s)$ , 或者称实现 Марков 参数 (Markov parameters)  $T_0, T_1, \dots$  的级数. 于是  $T_0, T_1, \dots$  的实现是矩阵  $A, B, C$  的一个三元组, 使得  $T_i = CA^iB, i = 0, 1, \dots$ . 在  $A$  为  $(n \times n)$  矩阵情

形下, 使得存在实现的最小  $n$  是  $(T_0, T_1, \dots)$  或  $T(s)$  的 McMillan 度 (McMillan degree). 它等于无穷分块 Hankel 矩阵

$$\begin{bmatrix} T_0 & T_1 & T_2 & \dots \\ T_1 & T_2 & T_3 & \dots \\ T_2 & T_3 & T_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

的秩. 如果寻找  $A, B, C$  使得  $T_i = CA^iB, i = 0, \dots, k$ , 则可称为部分实现问题 (partial realization problem).

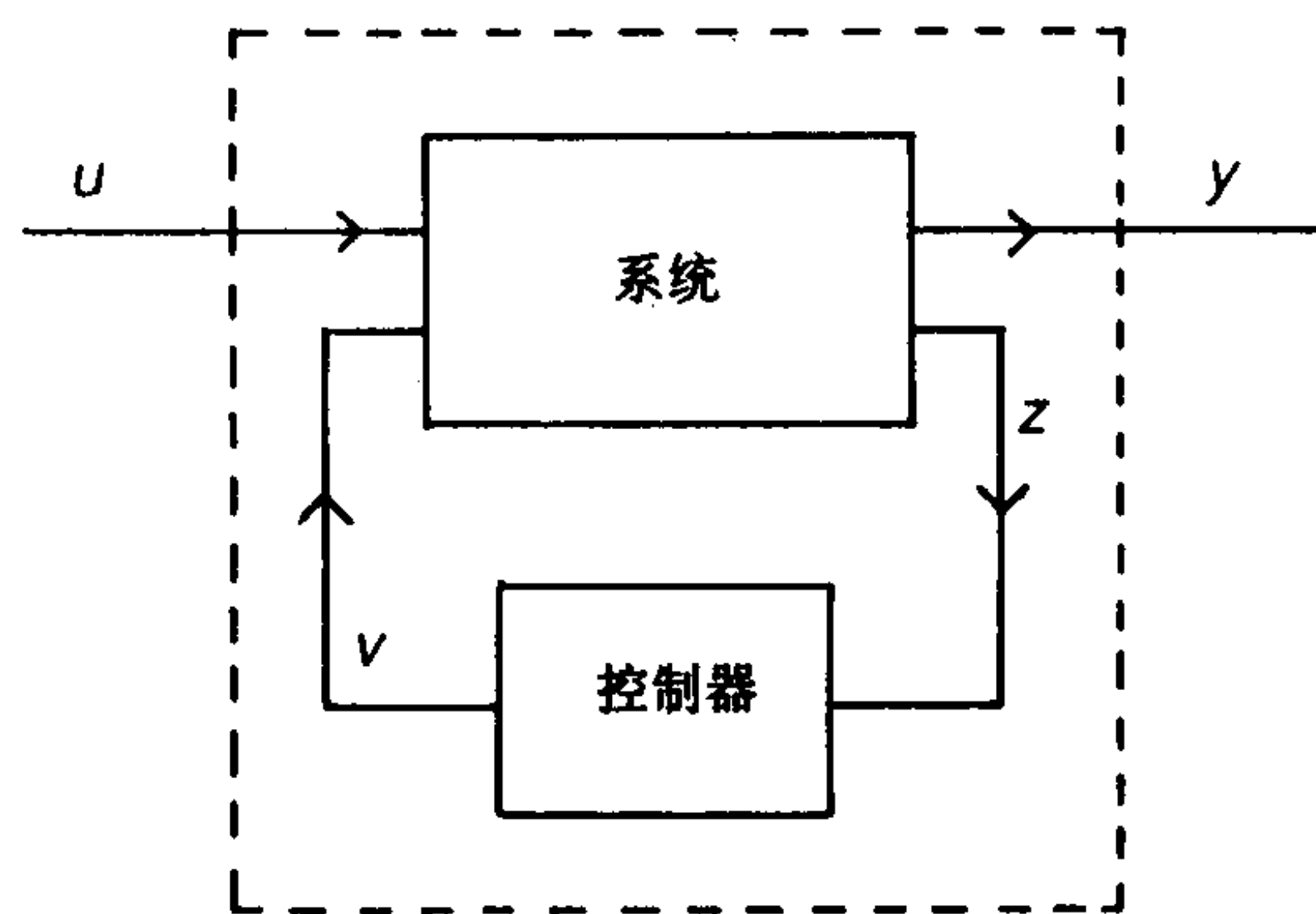
有些实现算法按参数  $T_0, T_1, \dots$  是局部连续的. 存在大范围连续的实现的充要条件是  $p = 1$  (单输出) 或者  $m = 1$  (单输入) (连续典范形式 (continuous canonical forms) 的不存在性).

已经证明, 矩阵函数或更一般地, 算子值函数的实现, 例如在矩阵和算子值函数的极小分解以及 Wiener-Hopf 分解中是十分有用的工具, 见 [A11] – [A13].

在随机动态系统中也发生相类似的实现问题; 例如见 [A5] 和 [A6] 讨论的两个随机实现问题 (Gauss 随机过程的状态空间模型, 实现给定协方差函数的传递线模型).

关于非线性确定性有限维实现理论的综述, 见 [A10].

在控制理论中, 相位“综合问题”大多是指对于给定的一个输入 - 输出动态系统  $\Sigma$ , 寻找一适当的反馈律  $v = k(z)$  的问题, 这里  $z$  为某 (被测量的) 输出. (或者更一般地, 带输入  $z$  和输出  $v$  的一个动态输入 - 输出系统, 使得所得到的闭环系统



具有某种所希望的性质. 例如, 某些干扰被抑制, 或者  $u \rightarrow y$  跟预先给定的行为相匹配.)

关于电力网这样特定的综合或实现问题, 见网络 (network) 的补注以及在那里给出的参考文献.

#### 参考文献

- [A1] Pippenger, N., The complexity of monotone Boolean functions, *Math. Syst. Theory*, **11** (1978), 289 – 316.
- [A2] Razborov, A. A., Lower bounds for the monotone complexity of some Boolean functions, *Soviet Math. Dokl.*, **31** (1985), 354 – 357. (译自 *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **281** (1985), 4, 798 – 801.)
- [A3] Savage, J., The complexity of computing, Wiley, 1976.
- [A4] Wegener, I., The complexity of Boolean functions, Wiley & Teubner, 1987.
- [A5] Lindquist, A. and Picci, G., State space models for Gaussian stochastic processes, in M. Hazewinkel and J. C. Willems (eds.): *Stochastic Systems: Math. of Filtering and Identification and Appl.*, Reidel, 1981, 169 – 204.
- [A6] DeWilde, P., Fokkema, J. T. and Widya, I., Inverse scattering and linear prediction, in M. Hazewinkel and J. C. Willems (eds.): *Stochastic Systems: Math. of Filtering and Identification and Appl.*, Reidel, 1981, 307 – 350.
- [A7] Hazewinkel, M., (Fine) moduli spaces for linear systems: what are they and what are they good for, in C. I. Byrnes and C. F. Martin (eds.): *Geometrical Methods for the Theory of Linear Systems*, Reidel, 1980, 125 – 193.
- [A8] Zemanian, A. H., Realizability theory for continuous linear systems, Acad. Press, 1972.
- [A9] Kalman, R. E., Falb, P. L. and Arbib, M. A., Topics in mathematical system theory, McGraw-Hill, 1969.
- [A10] Jakubczyk, B., Realization theory for nonlinear systems: three approaches, in M. Fliess and M. Hazewinkel (eds.): *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory*, Reidel, 1986, 3 – 32.
- [A11] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Minimal factorization of matrix and operator functions, Birkhäuser, 1979.
- [A12] Clancey, K. and Gohberg, I., Factorization of matrix functions and singular integral operators, Birkhäuser, 1981.
- [A13] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Explicit Wiener-Hopf bifurcation and realization, in I. Gohberg and M. A. Kaashoek (eds.): *Constructive Methods of Wiener-Hopf Factorization*, Birkhäuser, 1986, 235 – 316.
- [A14] Wonham, W. M., Linear multivariable control, Springer, 1974.
- [A15] Sontag, E. D., Mathematical control theory, Springer, 1990.

冯德兴 译

综合微分几何学 [synthetic differential geometry; синтетическая дифференциальная геометрия]

【补注】几何学家如 S. Lie, E. Cartan 以及其他同时代人等明确地使用无穷小实数, 无穷小曲线等, 并且 Lie 把基于无穷小的方法称为“综合的”, 以反衬于“分析的”方法 (见 [A1]). 在今天建立在集合论基础上的数学中, 这种无穷小实数并不存在, 并且综合方法也不可能用一个严密的方式来直接地作出.

综合微分几何学这一术语通常是指由 F. W. Lawvere 的 1967 年的讲义 (后来发表作为 [A2]) 所引起的一种发展. 这个发展与其说是基于集合论不如说是基于范畴论, 并且是与无穷小兼容的. 例如其基本公理之一 (常常称为 Kock-Lawvere 公理) 提出, 对于直线  $\mathbf{R}$  的子客体  $D = \{x: x^2 = 0\}$ , 将  $(a, b)$  送到无穷小直线  $ax + b$  的映射  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^D$  是一个同构映射. 因此函数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  在点  $t \in \mathbf{R}$  的导数可以用纯代数方法定义为唯一的数  $f'(t)$ , 对于它  $f(t+x) = f(t) + xf'(t)$  对于所有  $x \in D$  成立. 定义中没有用到极限. “无穷小”微分几何学的大部分内容譬如说联络、曲率等理论都可以类似地在纯代数的方式下明确地运用无穷小来发展. 尤其值得提出的是, 在综合微分几何学的背景下 Cartan 所作的无穷小论证都确实是有意义的, 也是数学上严密的.

正如在 [A3] 和 [A4] 中所呈现的那样, 通过适当的模型与普通微分几何学 (differential geometry) 的关系建立了. 这些模型是 Grothendieck 的拓扑伊 (topoi) (见拓扑斯 (topos)), 与代数几何的模型十分相像, 但是建立在流形上的光滑函数环以及这种环在通常理想下的商环的基础上.

随着 Lawvere 的用法, 每一个拓扑斯可以看成具有内在逻辑的集合的论域, 这种逻辑是直觉主义的. 这样, 可以在直觉主义的集合论的基础上, 而不是在范畴论的基础上, 建立综合微分几何学 (这一点在 [A5] 中完成了).

应该强调在综合微分几何学中所用到的无穷小通常是幂零的, 因此不能算作 Robinson 的非标准分析 (non-standard analysis). 非标准分析与综合微分几何学的兼容性在 [A4] 中有说明.

对综合微分几何学的各个方面的详尽展开见 [A5], [A7] 和 [A8].

#### 参考文献

- [A1] Lie, S., Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, *Math. Ann.*, **9** (1876), 245 – 296.
- [A2] Lawvere, F. W., Categorical dynamics, in A. Kock (ed.), *Topos Theoretic Methods in Geometry*, Aarhus Univ., 1979, 1 – 28.
- [A3] Dubuc, E.,  $C^\infty$ -schemes, *Amer. J. Math.*, **103**



(1981), 683 - 690.

[A4] Moerdijk, I. and Reyes, G. E., A smooth version of the Zariski topos, *Adv. Math.*, **65** (1987), 229 - 253.

[A5] Lavendhomme, R., *Leçons de la géométrie différentielle synthétique naïve*, Univ. Louvain, 1987.

[A6] Robinson, A., *Non-Standard analysis*, North-Holland, 1966 (中译本: A. 鲁滨逊, 非标准分析, 科学出版社, 1980).

[A7] Kock, A., *Synthetic differential geometry*, Cambridge Univ. Press, 1981.

[A8] Moerdijk, I. and Reyes, G. E., *Models for smooth infinitesimal analysis*, Springer, 1991.

I. Moerdijk 撰 罗里波 译 王世强 校

系统 (范畴中的) [system (in a category); спектр (в категории)]

范畴  $C$  中的正系统 (direct system)  $\{Y^\alpha, f_\alpha^\beta\}$  是由以有向集  $\Lambda = \{\alpha\}$  为指标集的对象集  $\{Y^\alpha\}$ , 以及  $C$  中的态射集  $\{f_\alpha^\beta: Y^\alpha \rightarrow Y^\beta\}$  组成的, 其中  $\alpha \leq \beta$ ,  $\alpha, \beta$  在  $\Lambda$  中, 使得

a)  $f_\alpha^\alpha = 1_{Y^\alpha}$ ,  $\alpha \in \Lambda$ ;

b)  $f_\alpha^\gamma = f_\beta^\gamma f_\alpha^\beta: Y^\alpha \rightarrow Y^\gamma$ ,  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  在  $\Lambda$  中.

存在一个范畴  $\text{dir}\{Y^\alpha, f_\alpha^\beta\}$ , 其对象以态射集  $\{g_\alpha: Y^\alpha \rightarrow Z\}_{\alpha \in \Lambda}$  为指标集, 若在  $\Lambda$  中  $\alpha \leq \beta$ , 则  $g_\alpha = g_\beta f_\alpha^\beta$ , 从  $\{g_\alpha: Y^\alpha \rightarrow Z\}$  到  $\{g'_\alpha: Y^\alpha \rightarrow Z'\}$  的态射是  $C$  的态射  $h: Z \rightarrow Z'$ , 满足  $h g_\alpha = g'_\alpha$ , 对  $\alpha \in \Lambda$ .  $\text{dir}\{Y^\alpha, f_\alpha^\beta\}$  的始对象叫作正系统  $\{Y^\alpha, f_\alpha^\beta\}$  的正极限 (direct limit). 集合、拓扑空间、群和  $R$  模的正向极限是在它们各自范畴中正极限的例子.

对偶地,  $C$  中的逆系统 (inverse system)  $\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$  是由以有向集  $\Lambda = \{\alpha\}$  为指标集的对象集  $\{Y_\alpha\}$ , 以及  $C$  中的态射集  $\{f_\alpha^\beta: Y_\beta \rightarrow Y_\alpha\}$  组成的, 其中  $\alpha \leq \beta$ ,  $\alpha, \beta$  在  $\Lambda$  中, 使得

a')  $f_\alpha^\alpha = 1_{Y_\alpha}$ ,  $\alpha \in \Lambda$ ;

b')  $f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\beta f_\beta^\gamma: Y_\gamma \rightarrow Y_\alpha$ , 在  $\Lambda$  中  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ .

存在一个范畴  $\text{inv}\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ , 其对象以态射集  $\{g_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  为指标集, 若在  $\Lambda$  中  $\alpha \leq \beta$ , 则  $g_\alpha = f_\alpha^\beta g_\beta$ , 从  $\{g_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha\}$  到  $\{g'_\alpha: X' \rightarrow Y_\alpha\}$  的态射是  $C$  的态射  $h: X \rightarrow X'$ , 满足  $g'_\alpha h = g_\alpha$ , 对  $\alpha \in \Lambda$ .  $\text{inv}\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$  的终对象叫作逆系统  $\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$  的反极限 (inverse limit). 集合、拓扑空间、群和  $R$  模的反极限是在它们各自的范畴中反极限的例子.

反极限的概念是投射极限 (projective limit) 这一拓扑概念的范畴一般化.

参考文献

[1] Spanier, E. H., *Algebraic topology*, McGraw-Hill, 1966. M. И. Войцеховский 撰

【补注】术语“正极限”可用“上极限”代替, “反极限”可用“极限”代替.

参考文献

[A1] Mitchell, B., *Theory of categories*, Acad. Press, 1965. 张英伯 译

闭类系统 [system of closed classes; замкнутых классов система]

一种在有关函数系统 (functional system) 的运算之下为闭的函数类的系统. 最重要的例子有逻辑代数的子代数系统, 有限值逻辑系统, 自动机映射系统, 递归函数代数系统, 等等. В. Б. Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Pöschel, R. and Kalužnin, L. A. [L. A. Kaluzhin], *Funktionen- und Relationenalgebren*, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1979 (译自俄文).

冯德兴 译

共同代表系 [system of common representatives; общих представителей система], 同时代表系 (system of simultaneous representatives).

基数为  $m$  的集合  $R$ , 它是给定集合  $S$  的  $t$  个子集族  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_t$  的每一个族的相异代表系 (system of different representatives), 其中每一个族有  $m$  个元素. 假设  $t = 2$  且  $m$  有限, 令  $\mathcal{S}_1 = \{F'_1, \dots, F'_m\}$ ,  $\mathcal{S}_2 = \{F''_1, \dots, F''_m\}$  并且  $S = \bigcup_{i=1}^m F'_i = \bigcup_{i=1}^m F''_i$ .  $\mathcal{S}_1$  和  $\mathcal{S}_2$  有共同代表系, 当且仅当  $\mathcal{S}_1$  的任何  $k$  个子集不含在  $\mathcal{S}_2$  的小于  $k$  个子集中,  $k = 1, \dots, m$ . 当族  $\mathcal{S}_1$  和  $\mathcal{S}_2$  的每个子集都有限时, 那么这个定理对无限的  $m$  也成立. 对  $t > 2$ , 共同代表系的存在性条件已得知, 但叙述较复杂.

参考文献

[1] Hall, M., *Combinatorial theory*, Wiley, 1986.

B. E. Тараканов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ryser, H. J., *Combinatorial mathematics*, Math. Assoc. Amer. 1963 (中译本: H. J. 赖瑟, 组合数学, 科学出版社, 1983).

[A2] Mirsky, L., *Transversal theory*, Acad. Press, 1971.

[A3] Aigner, M., *Combinatorial theory*, Springer, 1979. 刘振宏 译 李 乔 校

相异代表系 [system of different representatives 或 system of distinct representatives; различных представителей система], 对于集合  $S$  的一个给定子集, 族  $\mathcal{S} = \{F_i: i \in I\}$  的

由具有如下性质的一一映射  $\pi: I \rightarrow S$  所确定的

集合  $R = \{\pi(i): i \in I\}$ : 对任意  $i \in I$ , 有  $\pi(i) \in F(i)$  (这里  $I$  是指标集). 相异代表系  $R$  的另一个名字是族  $\mathcal{F}$  的横截 (transversal for the family). 人们也讨论族  $\mathcal{F}$  的部分横截 (partial transversal of a family), 即形如  $\{\pi(i): i \in I_0\}$  的集合, 其中  $I_0$  是  $I$  的子集, 并且  $\pi: I_0 \rightarrow S$  是一一映射.

相异代表系被用于纯组合数学研究以及线性规划、数理经济和控制论的应用. 在组合数学框架里, 相异代表系在选择问题和极值问题中起着重要作用. 特别是在拉丁方的研究、指派问题、各种极值问题和极小-极大定理、以及给定行和与列和限制的非负矩阵的研究中, 相异代表系都有应用.

对有限集  $I$ , 相异代表系存在的准则由 Phillip Hall 定理 (Phillip Hall theorem) 给出: 假设  $\mathcal{F} = \{F_i: i \in I\}$  是集合  $S$  上的一个子集族,  $|I| = n$  是有限数, 则  $\mathcal{F}$  有相异代表系, 当且仅当对每一个  $k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), 和每一个  $k$  元子集  $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq I$ , 有  $|F_{i_1} \cup \dots \cup F_{i_k}| \geq k$ . Hall 的定理等价于关于 0-1 矩阵的 König 的定理 (见选择定理 (selection theorem)). 当每一个  $F_i$  ( $i \in I$ ) 是有限时, 这个基本准则也适用  $I$  是无穷集的情况. 粗略地说, 一些例子表明, 这些情形穷尽了 Hall 准则的可应用性的范围, 但在其他一些情形它可作各种准则的出发点 (见 [3]). 例如: a) 当有子集  $I_0 \subseteq I$ , 使  $I - I_0$  有限, 并且对所有  $i \in I_0$ ,  $F_i$  都有限时; 或者 b) 当  $I$  是可数集时.

由于相异代表系有广泛的应用, 所以实际确定它们的算法 ([1]) 很有意义.

关于相异代表系的主要问题之一是有限集的有限族的相异代表系的个数问题; 它与 0-1 矩阵的积和式 (permanent) 的计算有关. 关于相异代表系的个数有一些下界. 设族  $\mathcal{F}$  是由  $n$  个子集  $F_1, \dots, F_n$  组成, 其基数大小的顺序为  $m = |F_1| \leq \dots \leq |F_n|$ . 若  $\mathcal{F}$  满足 Hall 准则, 则相异代表系的个数至少是

$$\prod_{k=1}^{\min(m, n)} (|F_k| - k + 1).$$

关于代表系问题在拟阵 (matroid) (也称为独立空间或组合几何 (combinatorial geometry)) 理论中也有讨论. Edmonds-Fulkerson 定理 (Edmonds-Fulkerson theorem) 给出了代表系理论和拟阵之间的联系: 给定一个有限集的子集族, 它的所有部分横截的总体是某个拟阵的所有独立子集的总体. 由族  $\mathcal{F}$  按上述方式得到的拟阵称为  $\mathcal{F}$  的横截拟阵 (transversal matroid). 许多拟阵能够表示为某个集族的横截拟阵.

相异代表系的概念可以在不同的方向上进行推广, 例如: a) 给定族  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$  和整数向量  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ ,  $\rho$  横截 ( $\rho$ -transversal) 是集合  $\{\pi(1), \dots, \pi(n)\}$ , 其中对  $i = 1, \dots, n$ ,  $\pi(i) \in F_i$  是  $S$  的

两两不交的子集且满足  $1 \leq |\pi(i)| \leq \rho_i$ ; b) 对  $\mathcal{F} = \{F_i: i \in I\}$  和整数  $k \geq 1$ ,  $k$  横截 ( $k$ -transversal) 是由映射  $\pi: I \rightarrow S$  所确定的子集  $R = \{\pi(i): i \in I\}$ , 其中  $\pi(i) \subseteq F_i$  且满足  $1 \leq |\pi^{-1}(\pi(i))| \leq k$ ,  $i \in I$ .

#### 参考文献

- [1] Hall, M., Combinatorial theory, Wiley, 1986.
- [2] Mirsky, L., Transversal theory, Acad. Press, 1971.
- [3] Тараканов, В. Е., Вопросы кибернетики, в. 16, 1975, 110 - 124. В. Е. Тараканов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, Math. Assoc. Amer. 1963 (中译本: H. J. 赖瑟, 组合数学, 科学出版社, 1983).
- [A2] Welsh, D. J. A., Matroid theory, Acad. Press, 1976.
- [A3] Aigner, M., Combinatorial theory, Springer, 1979. 刘振宏 译 李 乔 校

子簇系 [system of subvarieties; систем подмногообразий], 子流形系 (system of submanifolds)

【补注】 给出一个微分流形 (differential manifold) (或代数簇 (algebraic variety))  $M$ , 子流形系 (子簇系) 是子流形 (子簇) 的可微 (代数) 参数化族  $\{N_\lambda\}$ . 更一般地, 对于其他几何对象如复空间、拓扑流形、代数等, 这个概念仍然有意义并且是有用的. 这样的系出现在数学的许多部分中, 既是工具又是研究的对象. 常常再添加一些附加的要求.

1. 叶状结构. 微分流形  $M$  的一个余维数  $k$  的叶状结构 (codimension- $k$  foliation) 是  $n-k$  维子流形的  $k$  维系统, 使得在  $M$  内每个点的附近这个系局部地相似于  $\mathbb{R}^n$  内  $\mathbb{R}^{n-k}$  的平行移动系. 关于细节可参见叶状结构 (foliation).

2. 网. 微分几何里的网是  $n$  维流形  $M$  上  $n$  个光滑曲线的  $(n-1)$  参数系  $\{\sigma^1, \dots, \sigma^n\}$  的族, 使得对于每个点在每个系中恰有一条曲线通过此点并且过此点  $x$  的  $n$  条曲线横截地相交 (即它们在  $x$  的切向量张成整个切空间  $T_x M$ ). 见网 (微分几何学中的) (net (in differential geometry)). 因此, 网由  $n$  个横截地相交的余维数  $(n-1)$  的叶状结构所构成.

3. 罗. 更一般地, 可以考虑  $n$  维流形上  $m$  个“横截地相交的”余维数  $k$  的叶状结构, 这里  $k, m, n$  都是一般的. 这就导致罗的理论, 见罗的几何学 (webs, geometry of) 以及 [A13].

4. 线性系. 当子簇或子流形是  $\mathbb{C}^n$  或  $P^n(\mathbb{C})$  里由方程给出时, 谈论线性系是有意义的. 子簇的线性系 (linear system) 由一族方程

$$\lambda_0 F_1 + \dots + \lambda_m F_m = 0 \quad (*)$$



给出, 其中  $F_i$  是环绕流形上的函数. 亦见线性系 (linear system). 特别在解析、射影和代数几何里, 线性代数系的概念倍受重视, 譬如说被系 (\*) “截割” 而得的簇  $M \subset P^n(\mathbb{C})$  的子簇的 (线性) 系. 同一线性系里的簇往往有相同维数, 甚至有相同类型 (除去非泛的退化外).

5. (代数几何学中的) 罗 (web). 簇的 3 (或更多) 参数线性系, 即在 (\*) 内  $m=3$ . 有时也称为网 (net).

6. (代数几何学中的) 网 (net). 簇的双参数线性系, 即在 (\*) 里  $m=2$ . 更多的细节可见网 (net).

7. (几何学中的) 束 (pencil). 引起最多注意的是簇和流形的单参数系. 它们被称为束. 因此平面内由

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$$

确定的曲线族是一个束, 这里参数  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  取 (除去  $\lambda_1=0, \lambda_2=0$  外) 所有可能的值 (事实上束仅依赖于一个参数  $\lambda_1:\lambda_2$ ). 空间内曲面束的方程可类似被写出. 两个方程  $F_1=0$  和  $F_2=0$  给出了束的两个元素 (两条曲线或两个曲面), 它们确定了整个束. 束的任意两个元素相交于同一个点集——支集 (support). 束的支集可以包含实点及虚点. 如果束的原始曲线是  $m$  与  $n$  次的代数曲线, 则支集由  $mn$  个点构成 (实点或虚点, 通常点或例外点, 见 Bezout 定理 (Bezout theorem)).

直线束 (pencil of straight lines) 是位于同一平面且通过一个固定点 (寻常束 (ordinary pencil)) 或平行于一条固定直线 (例外束 (exceptional pencil)) 的所有直线的集合. 直线束的方程有以下形式:

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

平面束 (pencil of planes) 是通过一条固定直线 (寻常束 (ordinary pencil)) 或平行于某个固定平面 (例外束 (exceptional pencil)) 的所有平面的集合. 平面束的方程有以下形式:

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

圆束 (pencil of circles) 是线性依赖于参数的单参数圆族. 圆束包含圆及一条直线. (寻常) 圆束的支撑由两个虚圆点和两个通常点  $a$  和  $b$  构成. 如果  $a \neq b$ , 则圆束可被定义为通过点  $a$  和  $b$  的圆的集合 (把直线看成半径无穷大的圆); 如果  $a = b$ , 则还要求这些圆都在  $a$  点相切. 如果  $a$  和  $b$  是不同实点, 则称圆束为椭圆的 (elliptic) (图 1), 如果它们是重合的实点, 则称为抛物的 (parabolic) (图 2), 如果它们是不同的虚点, 则称为双曲的 (hyperbolic)

(图 3). 同心圆的集合 (图 4) 是例外束 (exceptional pencil).

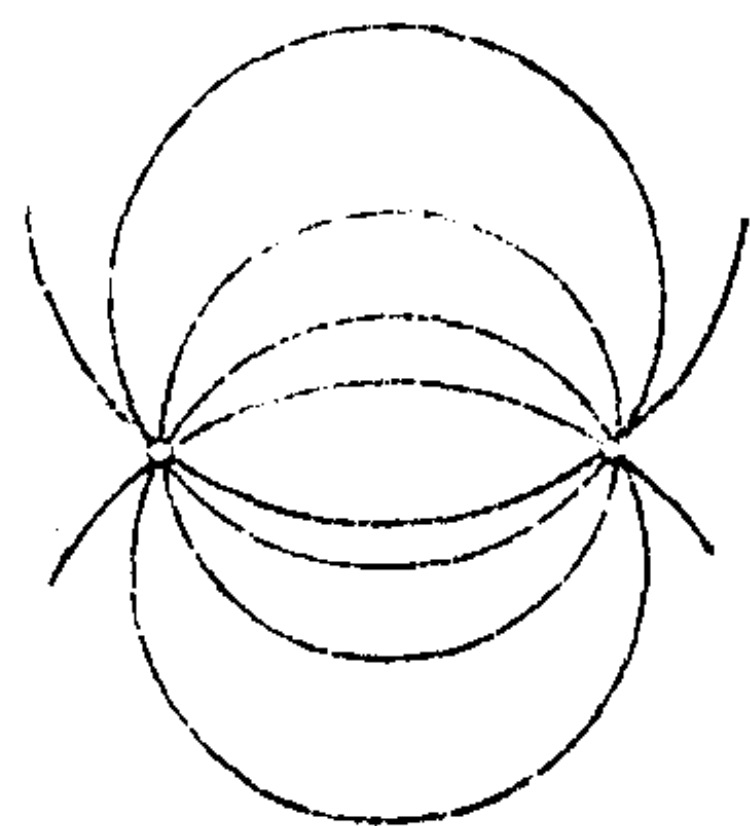


图 1

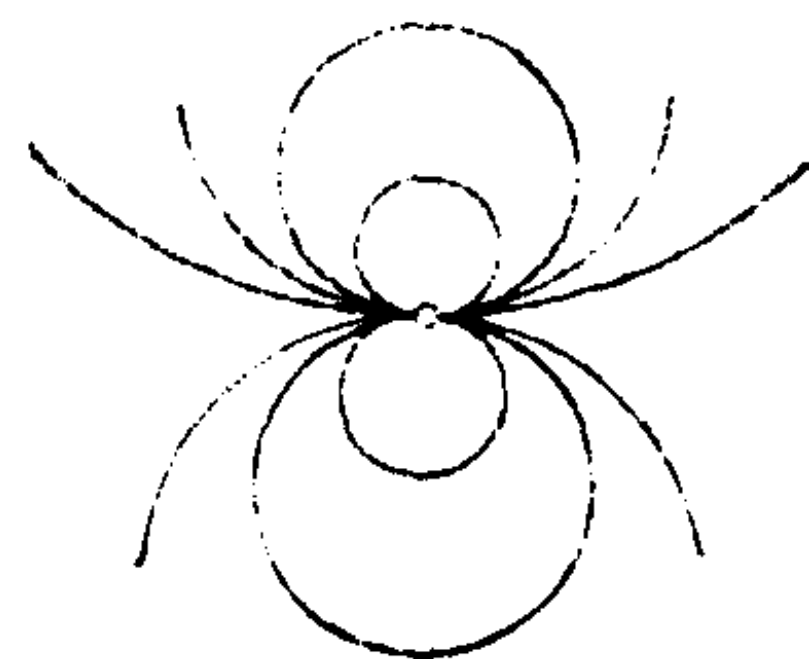


图 2

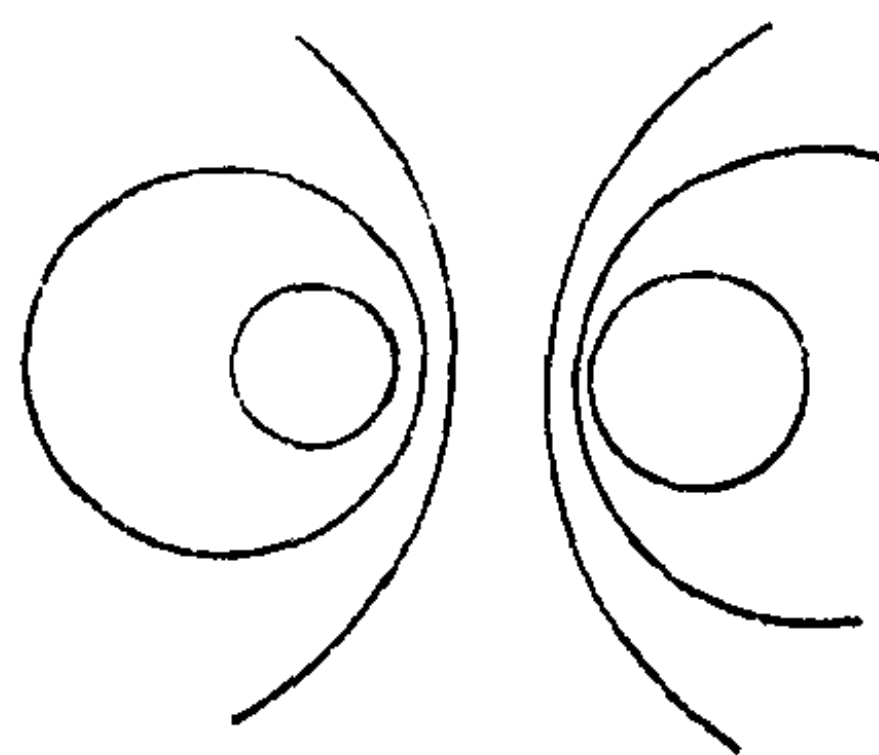


图 3

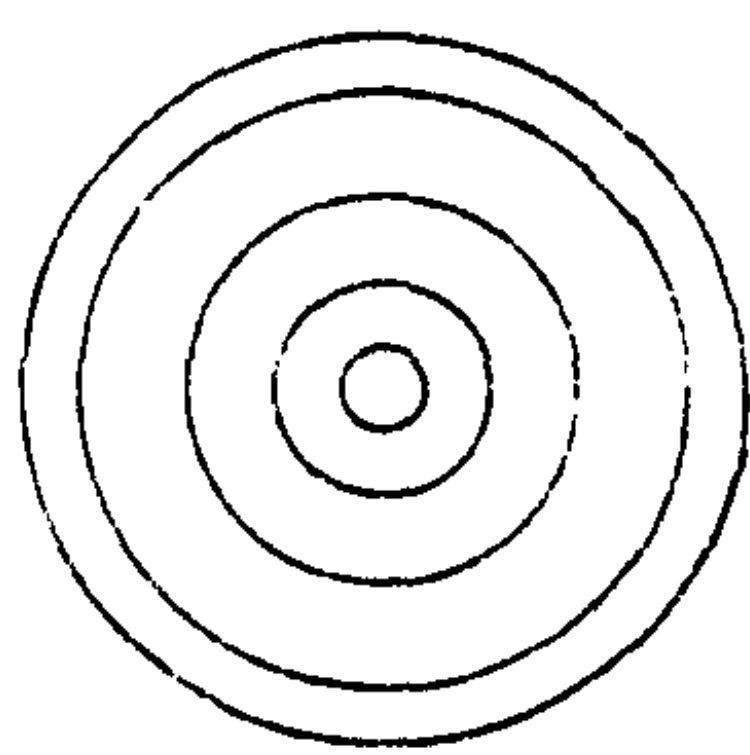


图 4

每个寻常图束有一个根轴 (radical axis), 这是一条直线, 其上每个点关于束中的所有的圆有相同的幂 (不同的点有不同的幂) (见点的度 (degree of a point)). 椭圆束的根轴通过圆的公共点; 抛物束的根轴就是它们的公切线; 双曲束的根轴就是两个与束内的圆都正交的圆的连心线. 束内圆的圆心都位于根轴的一条垂线上. 束的圆心连线与根轴的交点称为束的中心 (centre of the pencil). 束的中心关于束内圆的幂都相等称为束的幂 (power of the pencil). 如果  $x$  轴是束的连心线,  $y$  轴是束的根轴, 则束内任意一个圆的方程为:

$$x^2 + y^2 - 2xt + p = 0,$$

这里  $t$  是确定已知圆的参数,  $p$  是束的幂. 对于椭圆束  $p < 0$ , 对抛物束  $p = 0$ , 对双曲束  $p > 0$  (例外束的幂可被看作无穷大).

与已给束的所有的圆都正交的圆本身也构成一个束, 这个束称为与已给束共轭的 (conjugate). 椭圆束共轭于双曲束, 抛物束共轭于抛物束.

任何圆束都是两个圆网 (net) 的交.

球面束 (pencil of spheres) 是线性依赖于参数的单参数球面族. 束内任意两个球面相交于具有实、零或虚半径的圆. 第一种情形的球面束称为椭圆的 (elliptic), 它由通过已知圆的所有球面构成; 第二种情形称为抛物的 (parabolic), 它由互相切于此公共点的所

有球面构成; 第三种情形称为双曲的 (hyperbolic), 这个束由正交于三个交于两点的已知球面的所有球面构成. 球面束有一个根平面 (radical plane), 其上每个点关于束内球面都有相同的幂 (不同点有不同幂); 束内所有球面的中心都落在根平面的一条重线上.

球面束是中心在同一条直线上的三个球面网的交.

在射影几何里, 代数线束 (algebraic pencil of lines) 是射影平面内的坐标  $u_1, u_2, u_3$  满足下列方程的所有直线的集合:

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

这里  $F(u_1, u_2, u_3)$  是关于变量  $u_1, u_2$  和  $u_3$  为齐次的非恒等于 0 的多项式.  $F$  的次数称为线束的次数 (degree 或 order). 一次代数线束 (first-order algebraic pencil of lines) 由方程

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0$$

给出, 它是通过坐标为  $(a_1, a_2, a_3)$  的点的所有直线的集合.

二次代数线束 (second-order algebraic pencil of lines) 由方程

$$f_{11} u_1^2 + f_{22} u_2^2 + f_{33} u_3^2 + 2f_{12} u_1 u_2 + 2f_{13} u_1 u_3 + 2f_{23} u_2 u_3 = 0, f_{ij} = f_{ji}, i, j = 1, 2, 3$$

给出, 这里  $f_{ij}$  是实数而且至少一个不是零. 如果判别式  $\delta = |f_{ij}| (i, j = 1, 2, 3)$  非零, 则此二阶线束称为非退化的 (non-degenerate), 如果  $\delta = 0$ , 则是退化的 (degenerate). 非退化二阶束都是一个非退化二次曲线 (second-order curve) 的切线的集合; 非退化二次曲线都是某个非退化二阶束的包络 (envelope).

在下列条目中讨论了更复杂的代数与几何束: Лобачевский 几何学 (Lobachevskii geometry), Darboux 二次曲面 (Darboux quadric), Halphen 线束 (Halphen pencil), 三次曲线 (cubic), 单值变换 (monodromy transformation), 圆 (circle).

请注意在某些文献中把罗、网和束分别理解为  $\geq 3, 2$  或 1 维的族, 有时再附加要求对于每个点恰好有这个系中的给定个数的成员通过它, 而线性条件 (\*) 则被抛弃了. 可见 [A14].

8. 纤维化. 设  $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  是子流形或子簇的系, 使得对于环绕流形  $M$  的每个点恰有一个  $N_\lambda$  通过它. 从而得出映射  $M \rightarrow \Lambda$ . 这个映射甚至不一定连续. 但如果  $M \rightarrow \Lambda$  有合适的性质 (例如可微、全纯、代数, 根据被考虑对象的类型而定), 就可得到一个纤维化 (fibration). 反之, 一个满映射  $\pi: M \rightarrow B$  定

义了一个系  $\{\pi^{-1}(b)\}_{b \in B}$ . 如果纤维化是局部平凡的, 即在  $B$  内映射  $\pi$  局部地可看成  $U \times F \rightarrow U$ , 则常常用纤维丛 (fibre bundle) 的称呼代替纤维化.

9. 矩阵束. “束”这个词也被用于其他数学领域以表示对象的单参数 (线性) 族. 因此有算子束 (pencil of operators)  $\lambda A + \mu B$ , 特别地有矩阵束 (pencil of matrices)  $\lambda A + \mu B$ , 或写成非齐次形式  $A + \lambda B$ .  $A, B$  的元素取自域  $K$  内, 则束  $A + \lambda B$  也可被看成  $K[\lambda]$  上的矩阵.

设有两个多项式矩阵 (polynomial matrix)  $M_1(\lambda), M_2(\lambda)$ , 即元素在  $K[\lambda]$  里的矩阵. 如果存在可逆矩阵  $P(\lambda), Q(\lambda)$ , 使得  $P(\lambda)M_1(\lambda)Q(\lambda) = M_2(\lambda)$  (注意  $K[\lambda]$  上方阵  $P(\lambda)$  为可逆, 当且仅当它的行列式 (determinant) 是常数域  $K$  的非零元), 则称  $M_1(\lambda)$  和  $M_2(\lambda)$  是等价的 (equivalent). 如果存在  $K$  上可逆阵  $S, T$ , 使  $SM_1(\lambda)T = M_2(\lambda)$ , 则称多项式矩阵  $M_1(\lambda)$  和  $M_2(\lambda)$  是严格等价的 (strictly equivalent). 矩阵的等价性可用 Smith 典范形式 (Smith canonical form) 作精确的描述. 详情可见正规形式 (normal form).

考虑方阵束  $A + \lambda B$ , 其中  $\det(B) \neq 0$ . 对于这样的束, 严格等价性与等价性是相同的. 矩阵束称为正则的 (regular), 如果  $\det(A + \lambda B)$  不恒等于 0. 所有其他的束都称为奇异的 (singular).

矩阵束的不变量与标准型的理论是由 L. Kronecker 发展起来的 ([A10]); 关于完整的叙述和某些应用亦可见 [A9].

在 (自动) 线性控制理论中被研究的线性控制系统 (linear control system)

$$\dot{x} = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m,$$

由  $\mathbb{R}$  (或  $\mathbb{C}$ ) 上大小分别为  $n \times n$  和  $n \times m$  的一对矩阵  $(A, B)$  所确定. 所谓的反馈群 (feedback group) 由下列变换生成:

$$(A, B) \mapsto (A, BT), T \in GL_m(\mathbb{R})$$

(这对应于控制空间  $\mathbb{R}^m$  内的基变换);

$$(A, B) \mapsto (SAS^{-1}, SB), S \in GL_n(\mathbb{R})$$

(这对应于状态空间  $\mathbb{R}^n$  内的基变换);

$$(A, B) \mapsto (A + BF, B), F \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

(这对应于状态反馈 (state feedback):  $u \mapsto u + Fx$ ).

与线性控制系统  $(A, B)$  相伴的  $n \times (n + m)$  矩阵的奇异束为

$$(B, -\lambda I + A). \quad (**)$$



可以看出 ([A2]) 形如 (\*\*) 的两个束严格等价的充要条件是相应的控制系统在反馈群下等价。

如果  $A^i B (i = 0, 1, \dots)$  的列张成整个  $\mathbf{R}^n$ , 则控制系统  $(A, B)$  是完全可达的 (completely reachable). 对于完全可达控制系统的形如 (\*\*) 的束, 束的许多 Kronecker 不变量等于 0. 剩下的不等于 0 中最重要的是有限多个整值不变量. 它们可如下描述. 设  $\mu_i$  是由  $B, AB, \dots, A^{i-1}B (i = 1, 2, \dots)$  的列张成的空间的维数. 设  $v_i = \mu_i - \mu_{i-1} (i = 1, 2, \dots)$ ,  $\mu_0 = 0$ , 则  $v_1 \geq v_2 \geq \dots$ , 且  $v_i = 0$  对  $i > n$ . 现在设  $\kappa_1, \dots, \kappa_m$  是  $n$  的分划  $(v_1, \dots, v_n)$  的对偶分划 (dual partition), 即  $\kappa_i = \#\{j: v_j \geq i\}$ . (注意对  $i > m$  有  $\kappa_i = 0$ , 因为  $v_1 \leq m$ .) 这些  $\kappa_1, \dots, \kappa_m$  是 (\*\*) 的非零 Kronecker 不变量, 在控制论里被称为 Kronecker 指数 (Kronecker indices). 对于一个完全可达偶 (completely reachable pair)  $(A, B)$ , 存在状态反馈标准型 (state-feedback canonical form), 其中矩阵  $A$  是具有 Jordan 块  $J_{x_i}(0) (i = 1, \dots, m)$  的 Jordan 矩阵 (Jordan matrix),  $B$  由标准单位向量  $e_{r_i} (r_i = \kappa_1 + \dots + \kappa_i)$  以及可能有的其他向量组成. 这个典范形式称为 Brunovsky 典范形式 (Brunovsky canonical form). 见 [A12] 以及 [A11] 可得相关的材料.

10. (代数学、代数几何学、解析几何学与微分几何学中的) 形变. 另一种看待 (子) 流形或簇 (或其他结构) 的族的方法是作为另一种形变 (deformation).

术语附注. 在上面 5. - 7. 中的术语“罗”、“网”、“束”分别指  $\geq 3, 2$  或 1 维的 (线性) 系, 这并不完全是标准的. 有时可以发现用“网”代替“罗”的, 有时则用“丛”同时代表“网” (如在 6. 中) 和“束” (如在 7. 中或较罕见的 9. 中) 的意义.

上面 7. 里的材料基本上是本百科全书的俄文原版中“Пучок”条目下由 А. Б. Иванов 撰写的关于束的小节的翻译. 而本条目的其余部分对于这个经注释和扩充的译本来说则是新增的.

#### 参考文献

- [A1] Postnikov, M. M., Analytic geometry, Moscow (俄文).
- [A2] Coolidge, J. L., A treatise on the circle and the sphere, Chelsea, reprint, 1971.
- [A3] Hu, S.-T., Differentiable manifolds, Holt, Rinehart & Winston, 1969.
- [A4] Morrow, J. and Kodaira, K., Complex manifolds, Holt, Rinehart & Winston, 1971.
- [A5] Berger, M., Geometry, Springer, 1987 (译自法文).
- [A6] Coolidge, J., A history of the conic sections and quadratic surfaces, Dover, reprint, 1968.

- [A7] Coxeter, H., Introduction to geometry, Wiley, 1963.
- [A8] Griffiths, P. and Harris, S., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.
- [A9] Gantmacher, F. R., The theory of matrices, 2, Chelsea, reprint, 1959, Chapt. XII (译自俄文).
- [A10] Kronecker, L., Algebraische Reduktion der Schaaren bilinearer Formen, Sitzungsber. Akad. Berlin (1890), 763 - 776.
- [A11] Hazwinkel, M., A partial survey of the uses of algebraic geometry in system and control theory, in Symp. Math. INDAM, Rome 1979, Vol. 24, Acad. Press, 1981, 245 - 292.
- [A12] Kalman, R. E., Kronecker invariants and feedback, in L. Weiss (ed.): Ordinary Differential Equations, Acad. Press, 1972, 459 - 471.
- [A13] Goldberg, V. V., Theory of multicodimensional webs, Kluwer, 1988.
- [A14] Severi, F., Vorlesungen über algebraische Geometrie, Johnson, reprint, 1968.

陈志杰 译

系统程序设计 [system programming; системное программирование], 系统工程 (system engineering)

计算机系统的系统程序 (system program) 的设计和实现. 系统程序包括操作系统 (operating system) 和附加的程序, 诸如各种实用程序 (utility). 实用程序实现下列经常使用的功能: 帮助程序的创建, 文件和输入输出设备的管理. 应用程序员 (application programmer) 将使用这些来创建专门的应用. 典型地, 操作系统为下列几类任务提供机制: 程序创建, 程序执行, 程序和应用之间的通信, 访问输入输出设备, 对文件的控制访问 (数据的存储和检索), 在多用户计算系统情形中的系统访问, 等等.

系统程序总的复杂性通常是很大的, 这种复杂系统的产生包含相当多的困难. 各种工具, 包括程序变换 (transformations of programs), 程序验证 (program verification), 数学模型 (mathematical models) 和一般系统理论 (general system theory) 已被开发, 用于克服这种复杂性.

#### 参考文献

- [1] Brooks, F., The mythical man-month, essays on software engineering, Addison-Wesley, 1975.

А. П. Ершов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Tanenbaum, A. S., Structured computer organization, Prentice Hall, 1976.
- [A2] Stallings, W., Computer organization and architecture, Macmillan, 1990.

А. П. Ершов 撰 程 虎 译 刘椿年 校

合冲 [syzygy; сизигия]

天文学的术语, 表示三个天体位于一条直线上.

在代数学中用它来表示一种关系. 令  $M$  是左  $A$  模,  $(m_i)_{i \in I}$  是  $M$  的一组元素.  $(m_i)$  的一个关系, 或合冲, 是环  $A$  的一组元素  $(a_i)_{i \in I}$ , 使  $\sum a_i m_i = 0$ . 于是出现了合冲模, 合冲链复形, 等等. 见合冲的

Hilbert 定理 (Hilbert theory).

В. И. Данилов 撰

【补注】合冲出现在合冲理想 (syzygetic ideal) 的定义及正则代数 (regular algebras) 和正则序列 (regular sequence) 理论中. 见 Koszul 复形 (Koszul complex); 模的深度 (depth of a module).

裴定一 译



# T

$t$  分布 [ $t$ -distribution;  $t$ -распределение]

见 Student 分布 (Student distribution).

$T^2$  分布 [ $T^2$ -distribution;  $T^2$ -распределение]

见 Hotelling  $T^2$  分布 (Hotelling  $T^2$ -distribution).

$T$  理想 [ $T$ -ideal;  $T$ -идеал], 自由结合代数的

一个全不变理想, 即在所有自同态下不变的理想. 域  $F$  上任一结合代数簇 (见结合环与结合代数 (associative rings and algebras)) 的所有多项式恒等式的集合形成可数生成自由代数  $F[X]$  的一个  $T$  理想,  $X = \{x_1, \dots, x_k, \dots\}$ . 这样, 在  $F[X]$  的  $T$  理想和  $F$  上的结合代数簇之间存在一个一一对应. 如果  $F$  有特征 0, 则对每个  $T$  理想  $T \subseteq F[X]$ , 存在一个自然数  $n = n(T)$ , 使得  $M_n(F)$  的元素的某次幂是  $T$  的元素, 并且  $T$  仅有这些元素, 这里  $M_n(F)$  是  $F$  上全体  $(n \times n)$  矩阵的代数  $F_n$  的恒等式的理想. 在这种情况下,  $T$  理想也可以定义为自由代数的在所有微分下闭的 (双侧) 理想. 商代数  $F[X]/T$  是带有多项式恒等式集合  $T$  的 PI 代数 (PI-algebra). 这个代数称为带有恒等式  $T$  理想  $T$  的相对自由代数 (relatively free algebra) (或一般代数 (generic algebra)) (并且是由  $T$  中恒等式定义的代数簇中的自由代数). 代数  $F[X]/T$  没有零因子, 当且仅当对某个自然数  $n$ ,  $T = M_n(F)$ . 自由结合代数的每个  $T$  理想  $T$  是准素的.

特征为零的域上的无限多生成元的自由结合代数的  $T$  理想在理想的乘法运算下成为一个自由半群. 在这种情况下,  $T$  理想也可以定义为自由代数的在所有自同构下不变的理想.

关于  $F[X]$  的每个  $T$  理想是否都是有限多元的全不变闭包的问题 (Specht 问题 (Specht problem)),

亦见环簇 (variety of rings).

类似于结合代数的情形, 可以对非结合 (Lie, 交错和其他) 代数定义  $T$  理想.

参考文献

- [1] Procesi, C., Rings with polynomial identities, M. Dekker, 1973.
- [2] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.
- [3] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.
- [4] Amitsur, S., The  $T$ -ideals of the free ring, *J. London Math. Soc.*, 30 (1955), 470 – 475.
- [5] Specht, W., Gesetze in Ringen I, *Math. Z.*, 52 (1950), 557 – 589.
- [6] Bergman, G. and Lewin, J., The semigroup of ideals of a fir is (usually) free, *J. London Math. Soc.* (2), 11 (1975), 1, 21 – 31. B. H. Латышев 撰

【补注】 A. R. Kemer 正面解决了特征为零情况下的 Specht 问题, 见环簇 (varieties of rings). 他还引入了  $T$  素理想 ( $T$ -prime ideal) 的概念, 即对  $T$  理想  $P$ , 如果  $f[x_1, \dots, x_n]g[x_{n+1}, \dots, x_m] \equiv 0 \pmod{P}$ , 在  $f$  和  $g$  中带有不同的变量, 那么或者  $f[x_1, \dots, x_n] \in P$ , 或者  $g[x_{n+1}, \dots, x_m] \in P$ . 类似地, 有  $T$  幂零理想 ( $T$ -nilpotent ideal). 他证明了对每个  $T$  理想  $I$ , 存在一个  $T$  理想  $N(I) \supset I$ , 使得  $N(I)/I$  是  $T$  幂零的, 而  $N(I)$  是  $T$  素理想的有限积.

参考文献

- [A1] Kemer, A. R., Solution of the finite basis problem, *Soviet Math. Dokl.*, 37 (1988), 60 – 64. (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 298 (1988), 273 – 277).
- [A2] Kemer, A. R., Finite basis property of identities of associative algebras, *Algebra and Logic*, 26 (1987),

362 - 397. (*Algebra i Logika*, 26 (1987), 597 - 641).

[A3] Formanek, E., The polynomial identities and invariants of  $n \times n$  matrices, Amer. Math. Soc., 1991.

蔡传仁 译

$T_1$  空间 [ $T_1$ -space;  $T_1$ -пространство], 可达空间 (attainable space)

拓扑空间 (topological space)  $X$ , 它的任何单点集的闭包就是自身. 这等价于要求点  $x \in X$  的所有邻域的交集恒等于  $x$ , 或者对于任意两个不同的点  $x, y \in X$ , 存在它们的邻域  $U_x$  及  $U_y$ , 使得  $U_x \not\supset y$ , 且  $U_y \not\supset x$ , 即分离公理 (separation axiom)  $T_1$  成立.

可达性, 就是使  $T_1$  成立的性质, 是一种遗传性质:  $T_1$  空间的任意子空间是  $T_1$  空间, 强化  $T_1$  空间的拓扑而得的拓扑仍是  $T_1$  拓扑. 任意  $T_2$  空间 (见 Hausdorff 空间 (Hausdorff space)) 是  $T_1$  空间, 但是反之不成立: 存在不是  $T_2$  空间的  $T_1$  空间. 例如, 一个无穷集  $\beta$ , 其拓扑以具有有限余的集合为开集, 就是这种情形. М. И. Войцеховский 撰

【补注】通常,  $T_1$  而非  $T_2$  空间的很重要的一类是具有 Zariski 拓扑的环  $A$  的谱  $\text{Spec}(A)$ , 见仿射概形 (affine scheme).

#### 参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文). 罗嵩龄 译

策略构形 [tactical configuration; тактическая конфигурация], 亦称战术构形,  $t$  设计 ( $t$ -design),  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) 设计 ( $t$ -( $v, k, \lambda$ )-design),  $v$  集  $S$  上的

$t$  设计是集合  $S$  上的一个  $k$  子集 (区组) 系, 使得  $S$  的每一个  $t$  子集恰好出现在  $\lambda$  个区组里. 2 设计类与平衡不完全区组设计类相同 (见区组设计 (block design)). 策略构形的名字是对一个关联系统 (incidence system) 而言的, 在这里每一个集合关联于恰好  $k$  个元素, 而每一个元素关联于恰好  $r$  个集合.  $t = k$  的  $t$  设计称为平凡的 (trivial). 若一个  $t$  设计是非平凡的, 那么

$$t + 1 \leq k \leq v - 1 - t.$$

对任何  $s \leq t$ , 每个  $t$  设计也是  $s$  设计. 任意一个  $s$  子集在一个  $t$  设计区组里出现的次数  $\lambda_s$  由下式给出:

$$\lambda_s = \binom{k-s}{t-s}^{-1} \binom{v-s}{t-s} \lambda, \quad 0 < s \leq t.$$

存在一个  $t$  设计的必要条件为  $\lambda_s$  是整数. 特别对  $t \geq 2$ , 每个  $t$  设计是一个平衡不完全区组设计.

$t$  设计的主要问题是它们的存在性和构造问题.

长时间以来, 对  $t > 3$  仅知道几个孤立的  $t$  设计; 特别是分别与 5 重可迁 Mathieu 群  $M_{12}$  和  $M_{24}$  有关的 5-(12, 6, 1) 设计和 5-(24, 8, 1) 设计 (见 Mathieu 群 (Mathieu group)). 然而在 20 世纪 60 年代发现了  $t$  设计与编码理论 (见码 (code) 之间的联系 (见 [3], [4])), 并且从  $v$  个非零坐标的一些向量出发, 给出了构造一个属于线性  $(n, k)$  码的  $t$  设计的方法, 这个  $(n, k)$  码是一个有限域 (finite field) (见 [5], [7]) 上  $n$  维向量空间的一个  $k$  维向量子空间.

众所周知, 不是对称群和交错群的  $t$  重可迁群, 导出非平凡的  $t$  设计; 由此产生了 3 设计的几个无穷类. 借助群论和几何的思想 4 设计和 5 设计的无穷类也已构造出来 (见 [6]).

对一个  $t$  设计中的区组数  $b$  有不等式:

$$b \geq \begin{cases} \binom{v}{s}, & \text{若 } t = 2s, v \geq k + s, \\ 2 \binom{v-1}{s}, & \text{若 } t = 2s + 1, \\ & v - 1 \geq k + s. \end{cases} \quad (*)$$

它推广了关于平衡不完全区组设计的 Fisher 不等式 ( $b \geq v$ ). 在 (\*) 中等式成立的  $t$  设计称为紧密的 (tight). 紧密的  $t$  设计推广了对称 2 设计, 特别地, 当  $t = 2s$  时, 一个紧密的  $t$  设计中区组的相交数集合恰含有  $s$  个不同的元素.

紧密的 3 设计是 Hadamard 设计 (Hadamard designs), 即它们是 3-( $4n, 2n, n-1$ ) 设计, 而当  $s \geq 2$  时, 不存在非平凡的紧密  $(2s+1)$  设计. 由一个给定的  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) 设计, 可以得到另外 3 个  $t$  设计: a) 在  $S$  中取每一个区组的补; b) 去掉任一个元素及包含它的所有区组; c) 任选一个元素, 取出包含该元素的区组并从中去掉这个元素. 这样得到的诸  $t$  设计分别称为关于原来设计的补 (complementary)  $t$  设计、剩余 (residual)  $t$  设计和导出 (derived)  $t$  设计. 它们分别是  $t$ -( $v, v-k, \lambda^c$ ) 设计,  $(t-1)$ -( $v-1, k, \lambda^r$ ) 设计和  $(t-1)$ -( $v-1, k-1, \lambda$ ) 设计, 其中

$$\lambda^c = \binom{k}{t}^{-1} \binom{v-k}{t} \lambda,$$

$$\lambda^r = (v-k)(k-t+1)^{-1} \lambda.$$

#### 参考文献

- [1] Dembowski, P., Finite geometries, Springer, 1968.
- [2] Ray-Chaudhuri, D. K. and Wilson, R. M., On  $t$ -designs, *Osaka J. Math.*, 12 (1975), 737 - 744.
- [3] Assmus, E. F. and Mattson, H. F., Perfect codes



and the Mathieu groups, *Arch. Math. Basel*, 17 (1966), 121 – 135.

[4] Assmus, E. F. and Mattson, H. F., New 5-designs, *J. Comb. Theory*, 6 (1969), 122 – 151.

[5] Семаков, Н. В., Зиновьев, В. А., «Проблемы передачи информации», 5 (1969), 28 – 36.

[6] Alltop, W. O., An infinite class of 5-designs, *J. Comb. Theory*, 12 (1972), 390 – 395.

[7] Pless, V., Symmetry Codes over GF(3) and new five-designs, *J. Comb. Theory*, 12 (1972), 119 – 142.

В. Е. Тараканов 撰

【补注】  $\lambda = 1$  的  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) 设计也称为 Steiner 系 (Steiner system), 并记为  $S(t, k, v)$ ; 任一  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) 设计有时也记为  $S_\lambda(t, k, v)$ .

无重复区组的非平凡  $t$  设计的存在性具有特别的意义 (无重复区组是指任一  $k$  子集在列出的区组中不能出现两次); 这样的  $t$  设计称为简单的 (simple). L. Teirlinck ([A3]) 解决了一个长期未解决的猜想, 他证明了对  $t$  的每一个值都存在非平凡的简单  $t$  设计. [A4] 中列出了已知的  $t \geq 4$  的简单  $t$  设计的无穷族及  $v \leq 30$  的简单  $t$  设计的表.

仅有的非平凡的紧密 4 设计是关联于 Mathieu 群  $M_{23}$  的唯一 4-(23, 7, 1) 设计 (见 [A5] – [A7]), 并且对任一固定值  $s \geq 5$ , 只有有限多个紧密  $2s$  设计 (见 [A8]).

#### 参考文献

[A1] MacWilliams, F. J. and Sloane, N. J. A., The theory of error-correcting codes, North-Holland, 1978.

[A2] Beth, Th., Jungnickel, D. and Lenz, H., Design theory, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A3] Teirlinck, L., Non-trivial  $t$ -designs without repeated blocks exist for all  $t$ , *Disc. Math.*, 65 (1987), 301 – 311.

[A4] Chee, Y. M., Colbourn, C. J. and Kreher, D. L., Simple  $t$ -designs with  $v \leq 30$ , *Ars Comb.*, 29 (1990), 193 – 258.

[A5] Ito, N., Tight 4-designs, *Osaka J. Math.*, 12 (1975), 493 – 522.

[A6] Enomoto, H., Ito, N. and Noda, R., Tight 4-designs, *Osaka J. Math.*, 16 (1979), 353 – 356.

[A7] Bremner, A., A diophantine equation arising from tight 4-designs, *Osaka J. Math.*, 16 (1979), 353 – 356.

[A8] Bannai, E., On tight designs, *Quart. J. Math. (Oxford)*, 28 (1977), 433 – 448.

[A9] Hall, M., Combinatorial theory, Blaisdell, 1967.

刘振宏 译 李 乔 校

#### 玉河测度 [Tamagawa measure; Тамагавы мера]

定义在整体域  $K$  上的连通线性代数群 (linear algebraic group)  $G$  的阿代尔 (adèle) 群  $G_A$  上的测度  $\tau$ , 其构造如下: 设  $\omega$  是在  $K$  上定义的  $G$  上的最高阶非零微分形式. 对于  $K$  的赋值的等价类集合  $V$  中的赋值  $v$ , 以  $\omega_v$  表示由  $\omega$  得到的  $G_{K_v}$  上的 Haar 测度, 其中的  $G_{K_v}$  是  $G$  在完全化  $K_v$  上的点的局部紧群 (见 [1] 和 [2]). 如果当  $v$  遍历所有非 Archimedes 赋值时乘积  $\prod \omega_v(G_{O_v})$  绝对收敛, 其中  $G_{O_v}$  是  $v$  进整点群 (如果  $G$  是半单群或幂么群, 则这总是成立的), 则令  $\tau = \prod_{v \in V} \omega_v$ . (否则, 按某种非典范的方式定义  $\tau$  如下: 引进数集  $(\lambda_v)_{v \in V}$  (称为收敛因子) 使得乘积  $\prod_{v \in V} \lambda_v \omega_v(G_{O_v})$  绝对收敛, 然后令  $\tau = \prod_{v \in V} \lambda_v \omega_v$ , 见 [1], [3].) 这样定义的测度  $\tau$  不依赖于微分形式  $\omega$  的最初选择, 因而是  $G_A$  上典范的 Haar 测度. 这就可以确切地谈论与  $G_A$  相伴的齐性空间的体积 (见玉河数 (Tamagawa number)).

#### 参考文献

[1] Weil, A., Sur certaines groupes d'opérateurs unitaires, *Acta Math.*, 111 (1964), 143 – 211.

[2] Cassels, J. W. S. and Frohlich, A., Algebraic number theory, Acad. Press, 1986.

[3] Ono, T., On the Tamagawa number of algebraic tori, *Ann. of Math.*, 78 (1963), 47 – 73.

А. С. Рапинчук 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Weil, A., Adeles and algebraic groups, Birkhäuser, 1982.  
朱学贤 译 赵春来 校

#### 玉河数 [Tamagawa number; Тамагавы число]

与定义在整体域  $K$  上的连通线性代数群 (linear algebraic group)  $G$  的阿代尔 (adèle) 群相伴的齐性空间  $G_A^{(1)}/G_K$  在玉河测度 (Tamagawa measure) 意义下的体积. 这里,  $G_A^{(1)}$  是  $G_A$  的子群, 由使得

$$\prod_{v \in V} |\chi(g_v)|_v = 1$$

对在  $K$  上定义的  $G$  的任意特征标  $\chi$  成立的那些阿代尔  $g = (g_v)_{v \in V} \in G_A$  组成 (其中的乘积遍历  $K$  的正规化赋值集合  $V$  中的所有赋值  $v$ ). 玉河数的有限性来自约化理论 (见 [5]).

为方便起见, 下面分幂么群、代数环面和半单群这三种情形叙述  $\tau(G)$  的值. 对于幂么群, 玉河数永远等于 1. 如果  $T$  是代数  $K$  环面, 则

$$\tau(T) = \frac{[H^1(K, \hat{T})]}{[\text{Ш}(T)]},$$

其中的  $[H^1(K, \hat{T})]$  和  $[\text{Ш}(T)]$  分别是环面  $T$  的有理特征标模  $\hat{T}$  的一维 Galois 上同调群的阶和  $T$  的 Шафаревич-Tate 群的阶. 在这个公式的基础上, 构

造出了  $\tau(T)$  不是整数的环面  $T$  的例子 ([8]). 定义在数域上的半单群的玉河数的确定, 可以简化为单连通群的情形 ([9]): 设  $G$  是一个半单  $K$  群,  $\pi: \hat{G} \rightarrow G$  是定义在  $K$  上的万有覆盖, 又设  $F = \text{Ker } \pi$  是  $G$  的基本群及  $\hat{F}$  是  $F$  的特征标群, 则有

$$\tau(G) = \tau(\hat{G}) \frac{h^0(\hat{F})}{i^1(\hat{F})},$$

其中,  $h^0(\hat{F}) = [H^0(K, F)]$ ,  $i^1(\hat{F})$  是典范映射

$$H^1(K, \hat{F}) \rightarrow \prod_{v \in V} H^1(K_v, \hat{F})$$

的核的阶. 猜测对于所有的单连通群玉河数都等于 1 (Weil 猜想 (Weil conjecture)). 对于绝大多数类型的数域上的单群 ([3], [4], [7]), 对于数域上的 Chevalley 群 ([2]) 以及整体函数域上的 Chevalley 群 ([6]), 这一猜想已被证实.

#### 参考文献

- [1] Cassels, J. W. S. and Frohlich, A., Algebraic number theory, Acad. Press, 1986.
- [2] Арифметические группы и автоморфные функции, М., 1969 (译自英文和法文).
- [3] Weil, A., Sur certaines groupes d'opérateurs unitaires, *Acta Math.*, 111 (1964), 143 – 211.
- [4] Weil, A., Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques, *Acta Math.*, 113 (1965), 1 – 87.
- [5] Платонов, В. П., «Успехи матем. наук», 37 (1982), 3 – 54.
- [6] Harder, G., Chevalley groups over function fields and automorphic forms, *Ann. of Math.*, 100 (1974), 249 – 306.
- [7] Mars, J. G. M., The Tamagawa number of  ${}^2A_n$ , *Ann. of Math.*, 89 (1969), 557 – 574.
- [8] Ono, T., On the Tamagawa number of algebraic tori, *Ann. of Math.*, 78 (1963), 47 – 73.
- [9] Ono, T., On the relative theory of Tamagawa numbers, *Ann. of Math.*, 82 (1965), 88 – 111.

A. C. Рапунчук 撰

【补注】 Шафаревич-Tate 群 (Shafarevich-Tate group) 也称为 Tate-Шафаревич 群, 它的定义见 Galois 上调 (Galois cohomology).

$\tau(G)$  与  $\tau(\hat{G})$  之间的关系见 [A1].

Weil 猜想已被 R. Kottwitz ([A2]) 对数域的情形证实, 他假定了 Hasse 原理 (Hasse principle) 的适用性 (后者也已建立).

#### 参考文献

- [A1] Kottwitz, R. E., Stable trace formula: cuspidal tempered terms, *Duke Math. J.*, 51 (1984), 611 – 650.
- [A2] Kottwitz, R. E., Tamagawa numbers, *Ann. of Math.*, 127 (1988), 629 – 646. 朱学贤 译 赵春来 校

驯顺嵌入 [tame imbedding; ручное вложение]

拓扑多面体 (见抽象多面体 (polyhedron, abstract))  $P$  在空间  $\mathbf{R}^n$  中的一个嵌入, 它使得存在一个  $\mathbf{R}^n$  到它自身上的一个同胚 (homeomorphism), 这个同胚将  $P$  映入直角多面体 (polyhedron). 多面体  $P$  也称为驯顺的 (tame). 如果  $P$  不是驯顺的, 它就称为非驯顺的 (wild), 而相应的嵌入称为非驯顺嵌入 (wild imbedding).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

#### 参考文献

- [A1] Glaser, L. C., Geometrical combinatorial geometry, 1 – 2, v. Nostrand, 1972. 薛春华 译

切触 [tangency; касание]

意指两条曲线 (或一条曲线和一张曲面) 在某点有一条公共切线 (tangent line), 或者两张曲面在某点有一个公共切平面 (tangent plane) 的几何概念. 切触阶是两条曲线 (或曲线和曲面, 或两张曲面) 在它们的公共点的邻域内接近程度的表征. 见密切 (osculation).

A. B. Иванов 撰

【补注】 也见切向量 (tangent vector).

陈维桓 译

正切 [tangent; тангенс]

三角函数

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

另一记号是  $\text{tg}$ . 它的定义域是整个数轴除去点  $\pi/2 + n\pi$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . 正切是无界的、奇的且以  $\pi$  为周期的周期函数. 正切与余切 (cotangent) 的关系是

$$\tan x = \frac{1}{\cotan x}.$$

正切的反函数称为反正切 (arctangent).

正切的导数是

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

正切的不定积分是

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + c.$$

正切有级数展开式

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots, |x| < \frac{\pi}{2}.$$

复变数  $z$  的正切函数是具有零点  $z = k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  的亚纯函数.

Ю. А. Горьков 撰

【补注】 正切的级数展开式中的一项为

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n-1},$$

其中  $B_{2n}$  为 Bernoulli 数 (Bernoulli numbers).



亦见三角函数 (trigonometric functions)

正切的加法公式 (addition formula of the tangent) 为:

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

#### 参考文献

- [A1] Abramovitz, M. and Stegun, I. A., Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1965, p. 71 ff. 王斯雷 译

辐角正切 [tangent amplitude; тангенс амплитуды], 椭圆正切 (elliptic tangent)

两个基本的 Jacobi 椭圆函数 (Jacobi elliptic functions) 之比:

$$\operatorname{sc} u = \tan \operatorname{am} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

Е. Д. Соломенцев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, I, Springer, 1964.  
[A2] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.  
[A3] Tannery, J. and Molk, J., Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, Chelsea, reprint, 1972.

王斯雷 译

切丛 [tangent bundle; касательное расслоение], 微分流形  $M$  的

向量丛 (vector bundle)  $\tau: TM \rightarrow M$ , 也记作  $\tau(M)$ , 它的全空间  $TM$  由  $M$  在各点  $x \in M$  处的切空间  $TM|_x$  组成, 丛投影  $\tau$  将  $TM|_x$  映到点  $x$ . 切丛  $\tau(M)$  的一个截面也称为  $M$  上的一个向量场 (见流形上的向量场 (vector field on a manifold)). 作为流形  $TM$  上的一个图册, 可由流形  $M$  上的一个图册 (atlas of the manifold) 产生. 丛  $\tau(M)$  是局部平凡的. 切丛的转移函数, 可由原流形的图册的转移函数的 Jacobi 矩阵给出.

与切丛相配的主丛, 是流形  $M$  的标架丛. 切丛  $\tau(M)$  的对偶丛  $\tau^*(M)$ , 称为  $M$  的余切丛 (cotangent bundle), 它的全空间由  $M$  各点处的余切空间 (cotangent spaces) 构成. 它的截面是微分形式或 Pfaff 形式 (Pfaffian form).

流形间的可微映射  $h: M \rightarrow N$  诱导切丛间态射  $\tau(M) \rightarrow \tau(N)$ ; 全空间上相应的映射  $Th: TM \rightarrow TN$  称为  $h$  的切映射 (tangent mapping) (或  $h$  的微分 (differential)). 尤其是, 当  $i: M \rightarrow N$  为一个浸入 (见流形的浸入 (immersion of a manifold)) 时,  $\tau(M)$  是诱导向量丛  $i^*\tau(N)$  的一个子丛. 商丛  $v(i) =$

$i^*\tau(N)/\tau(M)$  称为该浸入的法丛 (normal bundle). 对偶地, 如果  $j: M \rightarrow N$  为一浸没 (submersion), 则商丛  $\tau(M)/j^*\tau(N)$  称为  $j$  的浸没丛 (submersion bundle). 如果分别取  $TM, M$  做为  $\dot{M}, N$ , 并且令  $h = \tau: TM \rightarrow M$ , 则  $\tau^*\tau(M)$  称为二阶切丛 (tangent bundle of second order).

如果  $\tau(M)$  平凡, 则称  $M$  是可平行化流形 (parallelizable manifold).

#### 参考文献

- [1] Godbillon, C., Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】可微映射  $\alpha: M \rightarrow N$  诱导的切映射 (又称微分) 可以用公式

$$T\alpha(m)(v)(g) = v(g\alpha)$$

给出, 其中  $g: N \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\alpha: M \rightarrow N$ ,  $v: F(M) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F(M)$  是  $M$  上全体光滑函数构成的代数, 并且切向量 (tangent vector) 被视为一类特殊的实线性映射  $F(M) \rightarrow \mathbf{R}$ .

如果采用局部坐标系以及 “ $\partial/\partial x_i$  记号” (见切向量 (tangent vector)),  $T\alpha(m)$  的矩阵可以用  $\alpha$  在局部坐标系中的表达式的 Jacobi 矩阵给出.

在实际应用中, 微分  $T\alpha: TM \rightarrow TN$  有许多其他记号. 常见的有  $T\alpha$ ,  $\alpha_*$ ,  $J(\alpha)$ ,  $D\alpha$ ,  $d\alpha$ . 最后一个记号, 当  $\alpha$  是一个函数  $\alpha: M \rightarrow \mathbf{R}$  时, 在记号或称呼上多少与  $d\alpha$  作为  $M$  上由  $\alpha$  定义的 1 次微分式相一致 (见微分 (differential); 微分形式 (differential form)). 采用  $\partial/\partial x_i$  以及  $dx_i$  记号 (见切向量 (tangent vector)), 1 次微分式  $d\alpha$  在局部坐标系中的表达式是

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} dx_n$$

(这里  $\partial \alpha / \partial x_i$  是切向量  $\partial/\partial x_i$  在  $\alpha$  上作用的结果). 用  $t$  表示  $\mathbf{R}$  中点的坐标, 则  $d\alpha: T_m M \rightarrow T_{\alpha(m)} \mathbf{R}$  的表达式是

$$d\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right] \frac{\partial}{\partial t} = \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} dx_n \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \frac{\partial}{\partial t},$$

由于  $dx_j(\partial/\partial x_k) = \delta_{jk}$ .

$M$  上的微分  $r$  标架丛 (differential  $r$ -frame bundle) 在点  $m$  上的纤维是  $T_m M$  中所有  $r$  标架的集合. ( $m \in M$  处的一个  $r$  标架 ( $r$ -frame) 是  $T_m M$  中  $r$  个线性无关的向量的集合. 标架丛 (frame bundle) 指的是微分  $n$  标架丛.  $M$  上的一个标架 (frame) 是标

架丛的一个截面, 而标架的流形 (framed manifold) 则指一个流形, 其上取定了一个标架.)

#### 参考文献

- [A1] Spivak, M., Calculus on manifolds, Benjamin Cummings, 1965 (中译本: M. 斯皮瓦克, 流形上的微积分, 科学出版社, 1980).
- [A2] Hirsch, M., Differential topology, Springer, 1976.
- [A3] Brickell, F. and Clark, R. S., Differentiable manifolds, v. Nostrand Reinhold, 1970.
- [A4] Auslander, L. and MacKenzie, R. E., Introduction to differentiable manifolds, Dover, reprint, 1977.
- [A5] Hermann, R., Geometry, physics, and systems, M. Dekker, 1973.
- [A6] Borisovich, Yu., Bliznyakov, N., Izrailevich, Ya. and Fomenko, T., Introduction to topology, Kluwer, Forthcoming (译自俄文).

段海豹 译 沈信耀 校

#### 切锥 [tangent cone; касательный конус]

1) 凸曲面  $S$  在点  $O$  的切锥是从  $O$  发出并和以  $S$  为界的凸体 (convex body) 至少相交于一个不同于  $O$  的点的半直线构成的锥的表面  $V(O)$ . (这个锥本身有时也称为立体切锥 (solid tangent cone).) 换言之,  $V(O)$  是所有包含  $S$  的半空间的交的边界且由  $S$  在  $O$  的支撑平面定义. 如果  $V(O)$  是一个平面, 则  $O$  称为  $S$  的光滑点 (smooth point); 如果  $V(O)$  是一个两面角, 则  $O$  称为脊点 (ridge point); 最后, 如果  $V(O)$  是一个非退化 (凸) 锥, 则  $O$  称为  $S$  的锥点 (conic point).

#### 参考文献

- [1] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969 (英译本: Pogorelov, A. V., Extrinsic geometry of convex surfaces, Amer. Math. Soc., 1972).

М. И. Войцеховский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in J. Tölke and J. M. Wills (eds.): Contributions to Geometry, Birkhäuser, 1979, 13 – 59.

2) 一个代数簇  $X$  在一点  $x$  的切锥是通过  $x$  的割线的极限位置的集合. 更确切地, 如果代数簇  $X$  是嵌入在仿射空间  $A^n$  中且由环  $k[T_1, \dots, T_n]$  的理想  $\mathfrak{A}$  所定义, 使得  $x \in X$  的坐标为  $(0, \dots, 0)$ , 则  $X$  在  $x$  的切锥  $C(X, x)$  由  $\mathfrak{A}$  中多项式的初始形式的理想给出. (如果  $F = F_k + F_{k+1} + \dots$  是  $F$  的齐次多项式展开且  $F_k \neq 0$ , 则称  $F_k$  为  $F$  的初始形式 (initial form).) 还有适合于 Noether 概形 (见 [1]) 的另一个定义: 设  $O_{x,x}$  是概形 (scheme)  $X$  在点  $x$  的局部环 (local ring), 且设  $\mathfrak{m}$  是它的极大理想, 则

分次环

$$\bigoplus_{n \geq 0} (\mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1})$$

的谱称为  $X$  在点  $x$  的切锥 (tangent cone).

在某种意义上, 簇  $X$  在一点  $x$  的邻域中与其切锥由同样的方式构造. 例如, 如果切锥是约化的、正规的或正则的, 则局部环  $\mathcal{O}_{X,x}$  也是如此.  $X$  在  $x$  的维数和重数等于切锥的维数和它在它的顶点处的重数. 切锥与 Zariski 切空间 (Zariski tangent space) 重合, 当且仅当  $x$  不是  $X$  的奇点. 簇之间的态射诱导出切锥间的映射.

#### 参考文献

- [1] Igusa, J. -I., Normal point and tangent cone of an algebraic variety, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 27 (1952), 189 – 201.
- [2] Samuel, P., Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, Springer, 1967.
- [3] Hironaka, J., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II, Ann. of Math., 79 (1964), 109 – 203; 205 – 326.
- [4] Whitney, H., Local properties of analytic varieties, in S. S. Cairns (ed.): Differential and Combinatorial Topology (Symp. in honor of M. Morse), Princeton Univ. Press, 1965, 205 – 244.

В. И. Данилов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977 (译自俄文).

陆珊年 译

#### 正切曲线 [tangent, curve of the; тангенс-конда]

函数  $g = \tan x$  的图形 (图 a). 正切 (tangent) 曲线是一具有周期  $T = \pi$  的周期曲线, 且其渐近线为  $x = (k + 1/2)\pi, k \in \mathbb{Z}$ . 当  $x$  从  $-\pi/2$  变化到  $\pi/2$  时,  $y$  从  $-\infty$  单调增加到  $+\infty$ ; 因此正切曲线由无穷多支分离的, 可通过沿  $x$  轴平移  $k\pi$  相合的曲线组成. 与  $x$  轴的交点是  $(k\pi, 0)$ . 这些点也是曲线的拐点, 它们与  $x$  轴的倾角为  $\pi/4$ .

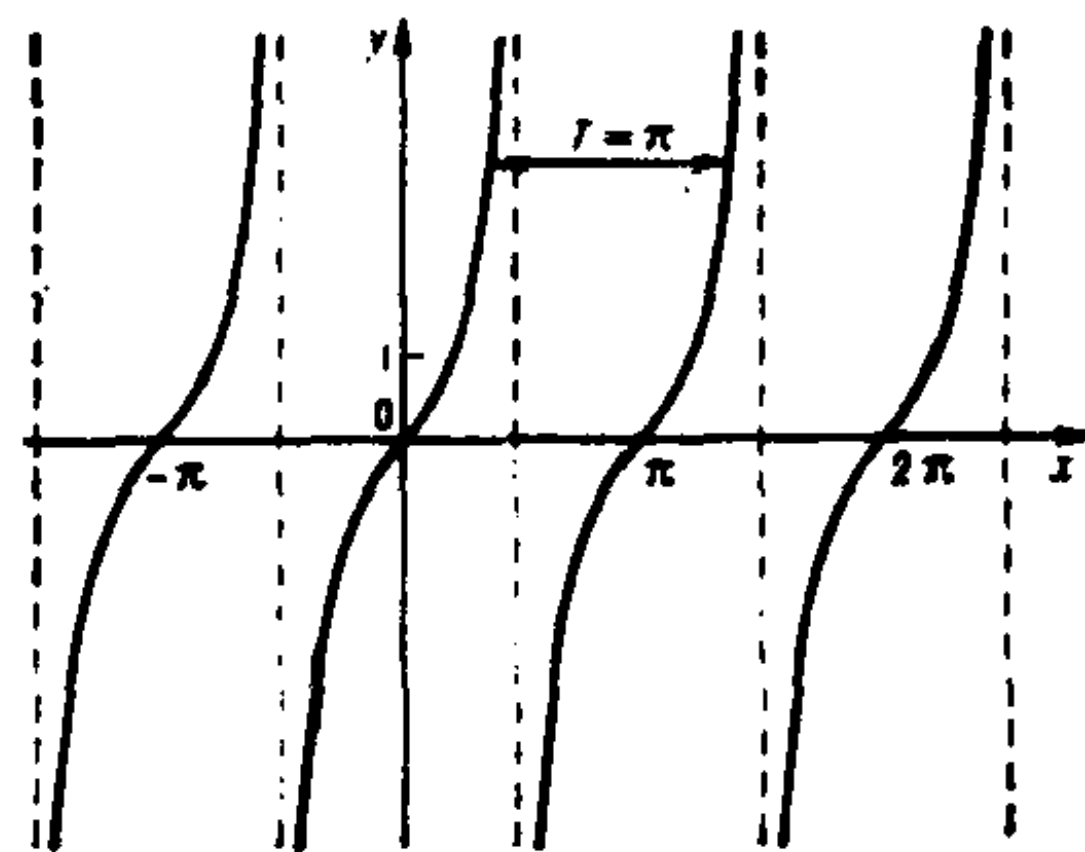


图 a



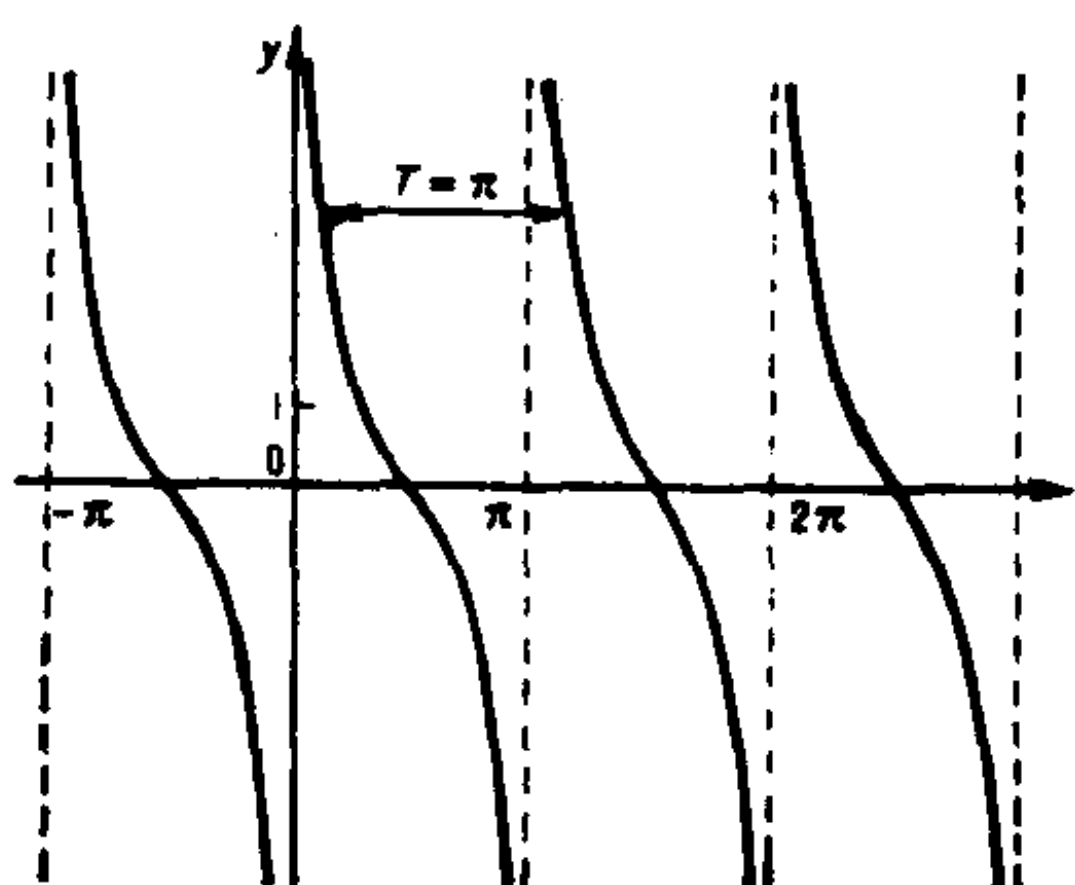


图 b

正切曲线关于  $x$  轴的镜像反射, 再左移  $\pi/2$  (图 b), 即成为函数  $y = \cotan x = -\tan(\pi/2 + x)$  的图形 (见余切 (cotangent)); 它的渐近线为  $x = k\pi$ ; 它与  $x$  轴的交点为  $((k + 1/2)\pi, 0)$ , 这些点也是曲线的拐点, 与  $x$  轴的倾角为  $3\pi/4$ .

Ю. А. Горьков 撰 王斯雷 译

#### 切流 [tangent flow; касательный поток]

$n$  维 Riemann 流形 (Riemannian manifold)  $M$  的规范正交  $k$  标架空间  $\Omega_k$  中具有以下性质的流. 令  $\omega(t)$  是流的任意轨道; 由空间  $\Omega_k$  的定义,  $\omega(t)$  就是在某点  $x(t) \in M$  处的某个  $k$  标架  $\xi_1(t), \dots, \xi_k(t)$  (即位于  $M$  在此点的切空间中). 要求  $dx(t)/dt = \xi_1(t)$  (一个变体是要求  $M$  中的参数化曲线  $x(t)$  上的活动标架的前  $k$  个向量恰好是  $\xi_1(t), \dots, \xi_k(t)$ ). 要想得到关于切流的有意义的结果, 就必须加上各种附加的条件. 所得到的结果推广了测地流 (geodesic flow) (它是切流当  $k=1$  而且共变导数  $D\xi_1/Dt=0$  的特例) 的某些性质. 见 [1], [2].

某流形  $M$  的切空间 (或当  $M$  上赋有 Riemann 度量或 Finsler 度量时, 则考虑单位切向量空间) 上的各种类型的流有时都称为切流. 例如,  $M$  上的一个喷射 (spray) (一般地, 一个二阶方程组) 和  $M$  上一个流的变分方程都叫做切流. 但是这个词并未得到广泛应用. 后来使用了一些较为习用的名词.

#### 参考文献

- [1] Арнольд, В. И., «Докл. АН СССР», 138 (1961), 2, 255 - 257.  
[2] Арнольд, В. И., «Сиб. матем. ж.», 2 (1961), 6, 807 - 813. Д. В. Аносов 撰 齐民友 译

#### 正切公式 [tangent formula; тангенсов формула]

确立一个平面三角形的两条边和它们所对的角之间的关系的一个公式. 设  $a, b$  是三角形的两条边,  $A, B$  是它们所对的角. 正切公式具有形式

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)}.$$

正切公式有时也称为 Regiomontanus 公式 (Regiomontanus formula), J. Regiomontanus 在 15 世纪后半叶建立了这个公式.

А. Б. Иванов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Berger, M., Geometry, 1 - 2, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一 - 五卷, 科学出版社, 1987 - 1991).  
[A2] Hobson, E. W., Plane trigonometry, Cambridge Univ. Press, 1925. 杜小杨 译

#### 双曲正切 [tangent, hyperbolic; тангенс гиперболический]

见双曲函数 (hyperbolic functions).

#### 切线 [tangent line; касательная], 曲线的

一条表示割线的极限位置的直线. 设  $M$  是曲线  $L$  上一点 (图 1),  $M_1$  为曲线  $L$  上另外一点,  $MM_1$  为连接  $M$  与  $M_1$  的一条直线. 固定点  $M$ , 让  $M_1$  沿着曲线  $L$  接近  $M$ . 如果当  $M_1$  趋向于  $M$  时, 直线  $MM_1$  趋向于极限直线  $MT$ , 则称  $MT$  为  $L$  在  $M$  处的切线 (tangent).

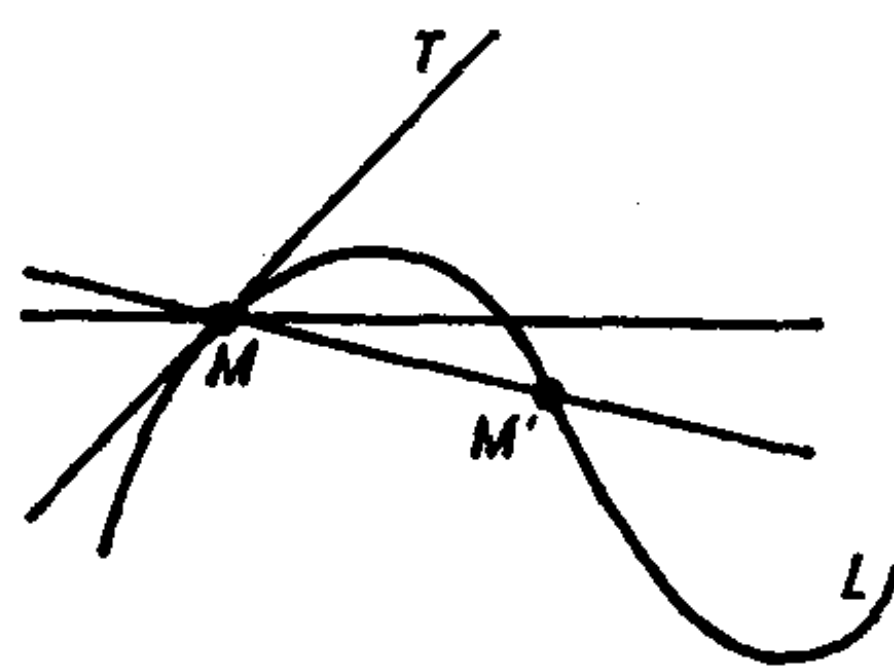


图 1

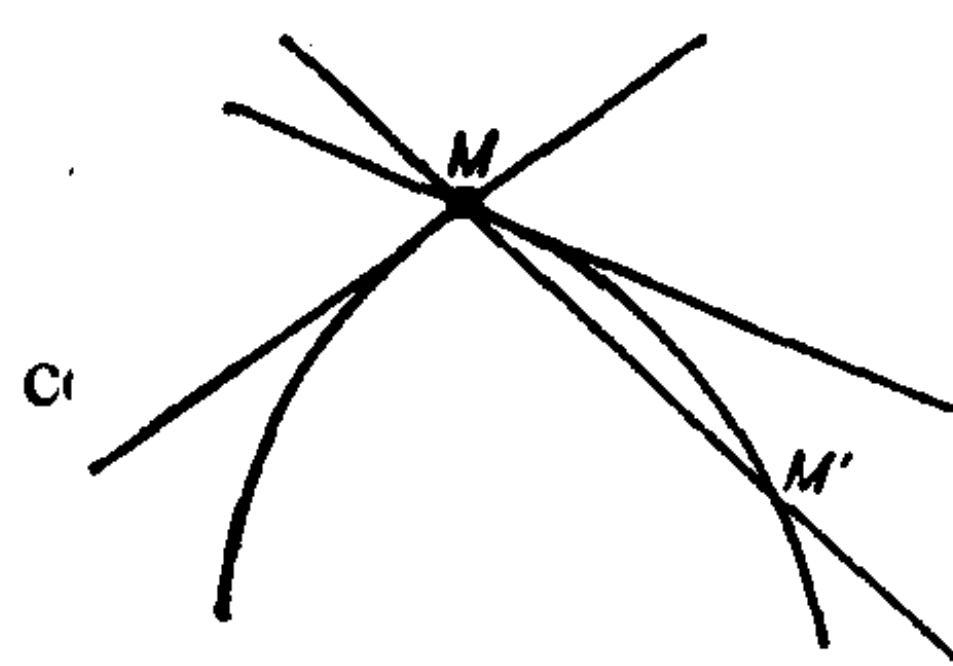


图 2

并非每条连续曲线都有切线. 当  $M_1$  从  $M$  点的不同侧趋于  $M$  时,  $MM_1$  不是总会趋于一个极限位置的, 或者它可能趋于两个不同的极限位置 (图 2). 若在带有直角坐标的平面中一条曲线由方程  $y = f(x)$  所确定, 且  $f$  在  $x_0$  点可微, 则在  $M$  处的切线的斜率等于在该点  $x_0$  的导数值  $f'(x_0)$ ; 在该点的切线方程具有形式

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

空间曲线  $r = r(t)$  的切线方程为

$$\tilde{r} = r + \lambda \frac{dr}{dt}, \quad -\infty < \lambda < +\infty.$$

曲面  $S$  在点  $M$  处的切线是指通过点  $M$  的, 且位于  $S$  在点  $M$  的切面 (tangent plane) 上的直线.

БСЭ - 3

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988 (译自法文).  
 [A2] Coxeter, H., Introduction to geometry, Wiley, 1963.  
 [A3] Guggenheimer, H., Differential geometry, McGraw-Hill, 1963.  
 [A4] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952 (译自德文).  
 [A5] O'Neill, B., Elementary differential geometry, Acad. Press, 1966. 沈纯理 译

**切面** [tangent plane; касательная плоскость], 曲面  $S$  在点  $M$  处的

通过点  $M(\in S)$  的由如下性质所刻画的平面: 设  $M_1$  为曲面  $S$  上的一个动点, 当  $M_1$  以任意方式接近  $M$  时,  $M_1$  到该平面的距离与距离  $MM_1$  比较起来是无穷小. 如果曲面  $S$  由方程  $z = f(x, y)$  给出, 则在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处 (这里  $z_0 = f(x_0, y_0)$ ) 的切面方程具有形式

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

的必要和充分条件是  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处具有全微分. 这时,  $A$  和  $B$  是偏导数  $\partial f / \partial x$ ,  $\partial f / \partial y$  在  $(x_0, y_0)$  处的值. BCЭ-3

【补注】关于参考文献, 见切线 (tangent line).

沈纯理 译

**切层** [tangent sheaf; касательный пучок], 代数几何学中的

域  $k$  上代数簇 (algebraic variety) 或概形 (scheme)  $X$  上的层  $\Theta_X$ , 它在仿射开子空间  $U = \text{Spec}(A)$  上的截面是环  $A$  的  $k$  微分的  $A$  模  $\text{Der}_k(A, A)$ . 一个等价定义是:  $\Theta_X$  是从微分层  $\Omega_{X/k}^1$  到结构层  $\mathcal{O}_X$  的同态层  $\text{Hom}(\Omega_{X/k}^1, \mathcal{O}_X)$  (见导子模 (derivations, module of)).

对于有理  $k$  点  $x \in X$ , 层  $\Theta_X$  的茎  $\Theta_X(x)$  等同于  $X$  在  $x$  的 Zariski 切空间 (Zariski tangent space)  $T_{X,x}$ , 即  $k$  向量空间  $\text{Hom}_k(\mathfrak{M}_x / \mathfrak{M}_x^2, k)$ , 这里  $\mathfrak{M}_x$  是局部环  $\mathcal{O}_{X,x}$  的极大理想. 切层  $\Theta_X$  可看作是与层  $\Omega_X^1$  对偶的向量丛  $V(\Omega_{X/k}^1)$  (概形  $X$  的切丛) 的截面的芽层. 当  $X$  是光滑连通  $k$  概形时,  $\Theta_X$  是  $X$  上局部自由层, 其秩等于  $X$  的维数.

#### 参考文献

- [1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

И. В. Долгачев 撰

【补注】

- [A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

**切向量** [tangent vector; тангенциальный вектор]

【补注】令  $M$  为一微分流形 (differentiable manifold),  $F(M)$  是其上的光滑实值函数的代数.  $M$  在  $m \in M$  的切向量就是一个  $\mathbf{R}$  线性映射  $v: F(M) \rightarrow \mathbf{R}$  使得

$$v(fg) = f(m)v(g) + g(m)v(f). \quad (\text{A1})$$

在定义中也可以使用  $M$  在  $m$  处的光滑函数芽的环  $F(M, m)$  (事实上更好).

$M$  在  $m \in M$  处的切向量构成一个  $\mathbf{R}$  上的  $n$  维向量空间, 这里  $n = \dim(M)$ , 此空间记为  $T_m M$ .

令  $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $m \mapsto (x_1(m), \dots, x_n(m))$ , 这里  $(x_1, \dots, x_n)$  是  $M$  在  $m$  附近的一个坐标系. 对于  $\varphi$  的第  $j$  个偏导数就是切向量

$$(D_{x_j})(m)(f) = \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j} \right|_{\varphi(m)},$$

右方即是  $x_1, \dots, x_n$  的函数  $f \circ \varphi^{-1}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  的在点  $\varphi(m) \in \mathbf{R}^n$  处的通常的偏导数. 我们有  $D_{x_i}(m)(x_j) = \delta_{ij}$  (Kronecker  $\delta$  函数), 而  $D_{x_i}(m)$  成为  $T_m M$  的一个基.

$T_m M$  的这个由坐标系  $(x_1, \dots, x_n)$  决定的基时常记作  $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\}$ .

$m \in M$  处的余切向量 (cotangent vector) 就是一个  $\mathbf{R}$  线性映射  $T_m^* M \rightarrow \mathbf{R}$  使得  $m \in M$  处的余切空间  $T_m^* M$  就是  $T_m M$  的对偶向量空间.  $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\}$  的对偶基记作  $dx_1, \dots, dx_n$ . 有

$$dx_i(v) = v(x_i), v \in T_m M.$$

切空间  $T_m M$  ( $m \in M$ ) 的不相交并  $TM$ , 连同投射  $\pi: TM \rightarrow M$ , 当  $v \in T_m M$  时  $\pi(v) = m$ , 可以赋予一个可微向量丛 (vector bundle) 的结构, 即切丛 (tangent bundle).

类似地, 余切空间  $T_m^* M$  构成一个对偶于  $TM$  的向量丛  $T^* M$ , 称为余切丛 (cotangent bundle).  $TM$  的截面即  $M$  上的向量场 (vector fields),  $T^* M$  的截面即  $M$  上的微分 1 形式 (differentiable 1-form).

令  $\alpha: M \rightarrow N$  是微分流形的映射, 而令  $\alpha: F(N) \rightarrow F(M)$  是诱导映射  $g \mapsto g\alpha$ . 对于  $m$  处的一个切向量  $v: F(M) \rightarrow \mathbf{R}$ , 与  $\alpha$  复合后即得一个  $\mathbf{R}$  线性映射  $v\alpha: F(N) \rightarrow \mathbf{R}$ , 它是  $N$  在  $\alpha(m)$  处的切向量. 这就定义了向量空间的同态  $T\alpha(m): T_m M \rightarrow T_{\alpha(m)} N$  以及向量丛的态射  $T\alpha: TM \rightarrow TN$ .

在  $M = \mathbf{R}^n$ ,  $N = \mathbf{R}^m$ , 并分别地有整体坐标  $x_1, \dots, x_n$  和  $y_1, \dots, y_m$  的情况下,  $\alpha: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  是由  $m$  个可微函数给出的, 而在每一点  $x \in \mathbf{R}^n$  处

$$T\alpha(x) \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial y_1}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots +$$



$$+ \frac{\partial y_m}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial y_m}$$

给出, 所以  $T\alpha(x): T_x \mathbf{R}^n \rightarrow T_{\alpha(x)} \mathbf{R}^m$  相对于  $T_x \mathbf{R}^n$  的基  $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$  和  $T_{\alpha(x)} \mathbf{R}^m$  的基  $\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_m$  的矩阵就是  $\alpha$  在  $x$  处的 **Jacobi 矩阵** (Jacobi matrix).

现令  $M \subset \mathbf{R}^r$  是一个嵌入流形. 令  $c: \mathbf{R} \rightarrow M \subset \mathbf{R}^r$ ,  $t \mapsto c(t) = (c_1(t), \dots, c_r(t))$  是  $M$  中的光滑曲线, 而且  $c(0) = m$ , 于是

$$Tc(0) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \right] = \frac{\partial c_1}{\partial t}(0) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial c_r}{\partial t}(0) \frac{\partial}{\partial y_r}. \quad (\text{A2})$$

$T_m M \subset T_m \mathbf{R}^r$  中所有的切向量都可以这样做出来. 把向量 (A2) 与  $r$  维向量  $((\partial c_1/\partial t)(0), \dots, (\partial c_r/\partial t)(0))$  等同起来, 并且看作由  $m \in M \subset \mathbf{R}^r$  点发出的有向线段, 这就会回到把切空间  $T_m M$  看成是  $\mathbf{R}^r$  中的在  $m$  点与  $M$  相切的  $n$  维平面这样一个直观的图象.

流形  $M$  上的向量场 (vector field) 可以定义为  $\mathbf{R}$  代数  $F(M)$  上的导子 (见环中的导子 (derivation in a ring)  $X: F(M) \rightarrow F(M)$ ). 把它与赋值映射  $f \mapsto f(m)$ ,  $m \in M$ , 复合起来, 就给出一族切向量  $X_m \in T_m M$ , 于是  $X$  “变成”了切丛 (tangent bundle) 的一个截面. 给出了局部坐标  $x_1, \dots, x_n$  以后,  $X$  就可以局部地写成

$$X = a_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n},$$

而若一个函数  $f$  在局部坐标中写为  $f(m) = \tilde{f}(x_1(m), \dots, x_n(m))$ , 则  $Xf$  就可在局部坐标中表示为函数

$$a_1(x) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} + \dots + a_n(x) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n},$$

这再一次表明以 “ $\partial/\partial x$ ” 为切向量记号的方便. (在实际运用中对于记号比较随便而将  $\tilde{f}$  写成  $f$ .)

令  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(m)$  为光滑函数在  $m \in M$  点的芽 (germ) 所成的  $\mathbf{R}$  代数. 令  $\mathfrak{m} \subset \mathcal{G}$  是在  $m$  点为零的芽所成的理想.  $\mathfrak{m}^2$  是所有乘积  $fg$ ,  $f, g \in \mathfrak{m}$ , 所成的理想. 若  $x_1, \dots, x_n$  是在  $m$  点的局部坐标使得  $x(m) = 0$ , 则  $\mathfrak{m}$  是  $\mathcal{G}$  中由  $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{m}$  所生成的理想, 而  $\mathfrak{m}^2$  则由  $x_i x_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) 生成. 事实上, 商环  $\mathcal{G}/\mathfrak{m}^\infty$  就是  $n$  个变量的  $\mathbf{R}$  幂级数环. 这里  $\mathfrak{m}^\infty = \bigcap_r \mathfrak{m}^r$  是平坦函数芽 (flat function germs) 的理想. (光滑函数在一点为平坦的 (flat), 即指它和它的一切导数均在该点为零 ( $\exp(-x^{-2})$  在  $0 \in \mathbf{R}$  就是一个例子); “Taylor 展开映射”  $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{R}[[x_1, \dots, x_n]]$  是满射, 这是 **Whitney 扩张定理** (Whitney extension theorem) 的一个特殊推论.

现令  $v \in T_m M$  是  $M$  在  $m$  处的一个切向量. 则由 (A1),  $v(\text{const}) = 0$  对  $\mathcal{G}$  中一切常值函数成立. 再由 (A1)  $v(\mathfrak{m}^2) = 0$ , 于是每一个  $v \in T_m M$  定义  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \mathbf{R})$  中的一个元素,  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \mathbf{R})$  的维数是  $n = \dim M$ , 因为  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  的维数是  $n$  (而且此元素唯一地决定了  $v$ ). 此外, 切向量  $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$  明显地定义  $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \mathbf{R})$  中的  $n$  个线性无关元 (因为  $(\partial/\partial x_i)(x_j) = \delta_{ij}$ ). 于是

$$T_m M \simeq \text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \mathbf{R})$$

即  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  的对偶空间. 这种观点应用更广泛而成为解析几何学和代数几何学中切空间的定义 (见解析空间, (analytic space); **Zariski 切空间** (Zariski tangent space)).

#### 参考文献

- [A1] Hermann, R., Geometry, physics, and systems, M. Dekker, 1973.
- [A2] Bishop, R. L. and Crittenden, R. J., Geometry of manifolds, Acad. Press, 1964.
- [A3] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.
- [A4] Novikov, S. P. and Fomenko, A. T., Basic elements of differential geometry and topology, Kluwer, 1991 (译自俄文).
- [A5] Borisovich, Yu., Bliznyakov, N., Izrailevich, Ya. and Fomenko, T., Introduction to topology, Kluwer (即将出版, 译自俄文). 齐民友 译

#### 切线坐标 [tangential coordinates; тангенциальные координаты]

被看作坐标的直线方程的系数. 在直线方程  $ux + vy + 1 = 0$  中, 系数  $u$  和  $v$  被称为 **非齐次切线坐标** (non-homogeneous-tangential coordinates). 在直线的齐次方程  $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$  里, 系数被称为 **齐次切线坐标** (homogeneous tangential coordinates). 对曲线联系它的切线的切线坐标的方程称为这条曲线的 **切线方程** (tangential equation). 代数曲线的切线方程是代数的. 曲线的切线方程对偶于点坐标的方程. 切线方程的次数称为曲线的类.

摘自 БСЭ-2 同名条目

【补注】这样的坐标也称为 **包络坐标** (envelope coordinates).

#### 参考文献

- [A1] Coolidge, J., Algebraic plane curves, Dover, reprint, 1959.
- [A2] Robson, A., An introduction to analytical geometry, 1, Cambridge Univ. Press, 1940, p. 59, 152, 165. 陈志杰 译

切线变换 [tangential transformation; касательное преобразование]

见邻近变换 (proximity transformation).

Tarski 问题 [Tarski problem; Тарского проблема], 关于化圆为方的

【补注】 这个问题是 A. Tarski 在 1925 年提出的, 问是否可能在平面内划分圆盘成为有限多个集合, 再用平面内的等距将它们重组成为正方形的一个划分. 一个肯定的结果已由 M. Laczkovich 宣布.

这个问题的三维类似比较容易处理 (因为等距群较丰富). 事实上, 有 Banach-Tarski 悖论 (Banach-Tarski paradox): 如果  $A$  与  $B$  是  $\mathbb{R}^3$  的任何两个具有非空内部的有界子集, 那么  $A$  与  $B$  是等度可分解的. 这里, 集合  $A$  与  $B$  称为等度可分解的 (equidecomposable) (关于  $\mathbb{R}^3$  的等距群), 如果对于某个  $n \in \mathbb{N}$ , 存在划分  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i, B = \bigcup_{i=1}^n B_i, A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j$  当  $i \neq j$ , 并且存在  $\mathbb{R}^3$  的等距 (运动)  $g_1, \dots, g_n$ , 使得  $g_i(A_i) = B_i$ . 证明利用选择公理 (axiom of choice). Banach-Tarski 悖论的一个雏形是 F. Hausdorff 的一个似非而是的例子, 这一结果也称为 Hausdorff-Banach-Tarski 定理 (Hausdorff-Banach-Tarski theorem).

在平面内等距群是可解的并且等度可分解的集合必须具有相同的测度. 平面内的两个多边形称为剖分合同的 (congruent by dissection), 如果其中的一个能够分解成为有限多个多边形片, 且可将它们用等距 (不计边界) 重组成为另一个多边形. Bolyai-Gerwien 定理 (Bolyai-Gerwien theorem) 指出两个面积相等的多边形是剖分合同的. 利用这个结果, Tarski 在 1924 年证明平面内的两个等面积多边形是等度可分解的, 并由此导致 Tarski 问题的提出.

亦见等容与等部件的图形 (equal content and equal shape, figures of).

#### 参考文献

- [A1] Wagon, S., The Banach-Tarski paradox, Cambridge Univ. Press, 1965.
- [A2] Banach, S. and Tarski, A., Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents, *Fund. Math.*, 6 (1924), 244 - 277.

林向岩 译 陆珊年 校

Tate 代数 [Tate algebra; Тейта алгебра]

【补注】 命  $K$  为一域, 它关于一超度量赋值 (ultrametric valuation)  $|\cdot|$  (即  $|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$ ) 是完全的. 赋值环  $R = \{a \in K: |a| \leq 1\}$  有唯一的极大理想,  $m = \{a \in K: |a| < 1\}$ . 域  $k = R/m$  称为  $K$  的剩余域.

这些域的例子是局部域: 即  $p$  进数域  $\mathbb{Q}_p$  的有限扩张, 或者是系数在有限域  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  的  $t$  的 Laurent 级数  $\mathbb{F}_p((t))$  的域 (亦见局部域 (local field)).

令  $z_1, \dots, z_n$  表示不定元. 那么  $T_n(K) = K\langle z_1, \dots, z_n \rangle$  表示所有幂级数  $\sum a_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$  的代数, 其中  $a_\alpha \in K (\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n))$  使得  $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} a_\alpha = 0$  ( $|\alpha| = \sum \alpha_i$ ).  $T_n = T_n(K)$  上的范数由  $\|\sum a_\alpha z^\alpha\| = \max |a_\alpha|$  给出. 环  $\{f \in T_n: \|f\| \leq 1\}$  记为  $T_n^0$ , 又  $T_n^{00} = \{f \in T_n: \|f\| < 1\}$  是  $T_n^0$  的一理想. 那么  $\tilde{T}_n = T_n^0/T_n^{00}$  容易看出是多项式  $k[z_1, \dots, z_n]$  的环.

$K$  代数  $T_n(K)$  称为自由 Tate 代数 (free Tate algebra). 一个仿射型代数 (affinoid algebra), 或 Tate 代数 (Tate algebra),  $A/K$  是某些  $T_n(K)$  的有限扩张 (即存在一  $K$  代数的同态  $T_n \rightarrow A$ , 使  $A$  到一有限生成  $T_n$  模之内). 一 Tate 代数  $A$  的所有极大理想的集合  $\text{Spm}(A)$  称为一仿射型空间 (affinoid space).

$K$  上的刚性解析空间 (rigid analytic space) 是由粘贴仿射型空间得到.  $K$  上的每一代数簇都有唯一的构造作为刚性解析空间. 刚性解析空间和仿射型代数是研究曲线和  $K$  上的 Abel 簇的退化由 J. Tate 引进的.

$R(K)$  (的赋值环) 上的形式概形的理论和刚体解析空间理论紧密相关. 这可由下述事实看出.

固定一元素  $\pi \in R$ , 且  $0 < |\pi| < 1$ .  $R_n = R\langle z_1, \dots, z_n \rangle$  关于由理想  $\{\pi^m R_n: m > 0\}$  给定的拓扑的完全化是  $R$  上的严格幂级数环 (ring of strict power series)  $R\langle z_1, \dots, z_n \rangle$ . 现在  $R\langle z_1, \dots, z_n \rangle = T_n^0$ , 又  $T_n(K)$  是  $R\langle z_1, \dots, z_n \rangle$  关于  $\pi$  的局部化. 所以可以把  $\text{Spm}(T_n(K))$  看成是  $R$  上形式概形  $\text{Spf}(R\langle z_1, \dots, z_n \rangle)$  的“一般纤维”. 更一般地,  $R$  上的任何形式概形都产生  $K$  上的一刚性解析空间, 它是  $X$  的“一般纤维”.  $R$  上的非同构形式概形可以有  $K$  上相同关联刚性解析空间, 再者,  $K$  上任何适当的刚性解析空间都关联于  $R$  上的某一形式概形.

仿射型空间和仿射型代数与仿射空间和  $K$  上的仿射环有许多共同性质. 一些最重要的是: Weierstrass 预备定理和除法定理对  $T_n(K)$  成立 (亦见 Weierstrass 定理 (Weierstrass theorem)); 仿射型代数是 Noether 环, 甚至是超越环, 如果域  $K$  是完满的; 对仿射型代数  $A$  的任何极大理想  $M$ , 商域  $R/M$  是  $K$  的一有限扩张; 许多有限性定理 (finiteness theorems); 仿射型空间  $\text{Spm}(A)$  上的任何凝聚层  $S$  都关联于一有限生成  $A$  模  $M = H^0(S)$  (更有:  $H^i(S) = 0$ , 对  $i \neq 0$ ).

$T_n(K)$  的另一解释是:  $T_n(K)$  由多圆盘  $\{(z_1, \dots,$



$z_n) \in K$ : 所有  $|z_i| \leq 1$  上所有的“全纯函数”组成. 这个解释对寻找更复杂的空间像 Drinfel'd 的对称空间  $\Omega^{(n)}$  上的全纯函数是有用的. 令  $K$  为一局部域具有代数闭包  $\bar{K}$ . 那么

$$\Omega^{(n)} = \{(x_0, \dots, x_n) \in P_K^n : \sum \lambda_i x_i \neq 0$$

$$\text{对所有 } (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in P^n(K)\}$$

是一-Дринфельд 对称空间 (Drinfel'd symmetric space).

这种类型的空间已经用来构造 Tate 的椭圆曲线, Mumford 曲线和曲面, Shimura 曲线和簇, 等等.

#### 参考文献

- [A1] Bosch, S., Güntzer, U. and Remmert, R., Non-Archimedean analysis, Springer, 1984.
- [A2] Drinfel'd, V. G., Coverings of  $p$ -adic symmetric regions, *Funct. Anal. Appl.*, **10** (1976), 2, 107 - 115 (*Funkts. Anal. Prilozhen.*, **10**, 2, 29 - 41).
- [A3] Faltings, G., Arithmetische Kompaktifizierung des Modulraums der abelschen Varietäten, Lecture notes in math., 1111, Springer, 1984.
- [A4] Fresnel, J. and Put, M. van der, Géométrie analytique rigide et applications, Birkhäuser, 1981.
- [A5] Gerritzen, L. and Put, M. van der, Schottky groups and Mumford curves, Lecture notes in math., 817, Springer, 1980.
- [A6] Mumford, D., An analytic construction of degenerating curves over complete local fields, *Compos. Math.*, **24** (1972), 129 - 174.
- [A7] Mumford, D., An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, *Compos. Math.*, **24** (1972), 239 - 272.
- [A8] Mumford, D., An algebraic surface with  $K$  ample,  $(K^2) = 9$ ,  $p_g = q = 0$ , *Amer. J. Math.*, **101** (1979), 233 - 244.
- [A9] Raynaud, M., Variétés abéliennes en géométrie rigide, in Proc. internat. Congress Math. (Nice, 1970), Gauthier-Villars, 1970, 473 - 477.
- [A10] Tate, J., Rigid analytic spaces, *Invent. Math.*, **12** (1971), 257 - 289.

M. van der Put 撰 钟同德 译

#### Tate 猜想 [Tate conjectures; Тейта гипотезы]

J. Tate 提出的猜想 (见 [1]), 它描述了代数簇 (algebraic variety) 的 Diophantus 性质与代数几何性质间的关系.

猜想 1. 如果域  $k$  在它的素子域上是有限生成的,  $V$  是  $k$  上光滑射影簇,  $l$  是异于域  $k$  的特征数的素数, 又若

$$\rho_l^{(i)}: \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbf{Q}_l} H_l^{2i}(V \otimes_k \bar{k})(i)$$

是自然  $l$  进表示,  $g_l^{(i)} = \text{Lie}(\text{Im}(\rho_l^{(i)}))$ , 则  $\mathbf{Q}_l$  空间

$[H_l^{2i}(V \otimes_k \bar{k})(i)]^{g_l^{(i)}}$ , 即  $H_l^{2i}(V \otimes_k \bar{k})(i)$  的被  $g_l^{(i)}$  零化的元素的空间, 可由  $V \otimes_k \bar{k}$  上余维数  $i$  的代数闭链的同调类所生成 (亦见代数闭链 (algebraic cycle)).

猜想 2.  $V$  上余维数  $i$  的代数闭链的同调等价类群的秩等于函数  $L_{2i}(V, s)$  在点  $s = \dim Y + i$  处的极点的阶.

这些猜想已对大量的特殊情况 (同时对域  $k$  和簇  $V$  加上限制) 得到了验证.

#### 参考文献

- [1] Tate, J., Algebraic cycles and poles of zeta functions, in D. F. G. Schilling (ed.): *Arithmetical Algebraic Geometry* (Purdue Univ., 1963), Harper & Row, 1965, 93 - 110. C. Г. Танкеев 撰

【补注】 在上面猜想 2 中  $L_i(V, s)$  是  $V$  的  $L$  级数 ( $L$ -series), 定义为

$$L_i(V, s) = \prod_p \{P_i(q^{-s})\}^{-1}.$$

这里的乘积取遍使  $V$  有好的约化的所有素数  $p$ ,  $P_i(q^{-s})$  是出现在  $k$  在  $p$  的剩余域  $F_q$  上的簇  $V \bmod p$  的  $\zeta$  函数 (zeta-function) 内的第  $i$  个多项式因子.

$$\zeta_{V \bmod p}(s) = \frac{P_1(q^{-s}) \cdots P_{2d-1}(q^{-s})}{P_0(q^{-s}) \cdots P_{2d}(q^{-s})}.$$

在  $V = A \times \hat{B}$  的情形下, 这里  $A$  和  $B$  是 Abel 簇, 猜想 1 对  $i = 1$  (即对除子) 取以下的形式: 自然同态

$$\text{Hom}_k(A, B) \otimes \mathbf{Z}_l \rightarrow \text{Hom}_{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(T_l(A), T_l(B))$$

是一个同构 (这里  $T_l(-)$  是 Abel 簇的 Tate 模 (Tate module)) (见 [1]). 这种情形的猜想已被证明的有: i)  $k$  是有限域时被 J. Tate ([A1]) 证明; ii)  $k$  是有限域上的函数域时, 被 Ю. Г. Зархин ([A2]) 证明; iii)  $k$  是数域时被 G. Faltings ([A3]) 证明.

Tate 猜想获证的特殊情形的例子可见: [A4] 对有限域上通常 K3 曲面, [A5] 对 Hilbert 模曲面.

#### 参考文献

- [A1] Tate, J., Endomorphisms of Abelian varieties over finite fields, *Invent. Math.*, **2** (1966), 104 - 145.
- [A2] Zarkhin, J. G., A remark on endomorphisms of Abelian varieties over function fields of finite characteristic, *Math. USSR Izv.*, **8** (1974), 477 - 480.
- [A3] Faltings, G., Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, *Invent. Math.*, **73** (1983), 349 - 366.
- [A4] Nygaard, N. O., The Tate conjecture for ordinary K3-surfaces over finite fields, *Invent. Math.*, **74** (1983), 213 - 237.
- [A5] Geer, G. van der, Hilbert modular surfaces, *Springer*

ger, 1987.

- [A6] Faltings, G. and Wüstholz, G. (eds.), Rational points, Vieweg, 1984.

陈志杰 译

### Tate 曲线 [Tate curve; Тейта кривая]

【补注】 Tate 曲线是借助于  $q$  参数化对具有稳定坏约化的椭圆曲线的单值化。

设  $K$  是局部域 (local field) (例如  $\mathbb{C}((t))$  或  $\mathbb{Q}_p$  的有限扩域). 设  $E$  是  $K$  上椭圆曲线 (elliptic curve) 使得它有稳定约化, 则它可能有好的约化 (即有整的  $j$  不变量) 或坏的约化 (即有非整的  $j$  不变量). 在稳定坏约化的情形下可以构造  $K$  上椭圆曲线  $E_q$ , 它解析地是  $K^*/q^{\mathbb{Z}}$  (这里  $q^{\mathbb{Z}}$  是  $K^* = K \setminus \{0\}$  的子群,  $K^*$  由  $q \in K^*$  生成), 使得  $E$  和  $E_q$  在  $K$  的有限扩域上同构. 这个定理使人惊讶之处是: 从  $E$  出发构造周期  $q$  以及  $E_q$  的  $j$  值的计算都可以在不出现分母的情况下实现 (因而可在任意特征数下进行). 周期  $q$  的 Tate 曲线的  $j$  值是系数在  $\mathbb{Z}$  内的  $q$  的幂级数:

$$j = q + 7444 + 196884q^2 + \cdots$$

这样的公式可在 [A4] 第 15 章和 [A8] 找到. 亦见 [A9], A. 1.1 及 [A10], 附录 C, Sect. 14. 在 [A2], VII 中给出了  $\mathbb{Z}$  上构造, 并应用于椭圆曲线的模概形的紧化. 到具有完全坏稳定约化的局部域上高维 Abel 簇的推广是由森田寿 ([A5], [A6]) 和 D. Mumford ([A7]) 给出的. 这也在 [A3] 和 [A1] 中被 G. Faltings 和 C.-L. Chai 推广到 Abel 簇的稳定约化的情形, 而且被使用于 Abel 簇的模概形的紧化理论.

亦见 [A11], [A12].

### 参考文献

- [A1] Chai, C.-L., Compactifications of Siegel moduli schemes, Cambridge Univ. Press, 1985.  
[A2] Deligne, P. and Rapoport, M., Les schémas de modules de courbes elliptiques, in P. Deligne and W. Kuyk (eds.): Modular Functions II, Lecture notes in math., Vol. 349, Springer, 1973, 143 - 316.  
[A3] Faltings, G., Arithmetische Kompaktifizierung des Modulraums der abelschen Varietäten, in F. Hirzebruch, J. Schwermer and S. Suter (eds.): Arbeitstagung Bonn 1984, Lecture notes in math., Vol. 1111, Springer, 1985, 321 - 383.  
[A4] Lang, S., Elliptic functions, Addison-Wesley, 1973.  
[A5] Morikawa, H., On theta functions and abelian varieties over valuation fields of rank one, Nagoya Math. J., 20 (1962), 1 - 27.  
[A6] Morikawa, H., On theta functions and abelian

varieties over valuation fields of rank one, Nagoya Math. J., 21 (1962), 231 - 250.

- [A7] Mumford, D., An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, Compos. Math., 24 (1972), 129 - 174; 239 - 272.  
[A8] Roquette, P., Analytic theory of elliptic functions over local fields, Vandenhoeck & Ruprecht, 1970.  
[A9] Serre, J.-P., Abelian  $l$ -adic representations and elliptic curves, Benjamin, 1986.  
[A10] Silverman, J. H., The arithmetic of elliptic curves, Springer, 1986.  
[A11] Chai, C.-L. and Faltings, G., Semiabelian degeneration and compactification, Forthcoming.  
[A12] Bosch, S., Lütkebohmert, W. and Raynaud, M., Néron models, Springer, Forthcoming.

F. Oort 撰 陈志杰 译

### Tate 模 [Tate module; Тейта модуль]

与一个  $p$  可除群 ( $p$ -divisible group)  $G$  相伴的自由  $\mathbb{Z}_p$  模  $T(G)$ , 这里  $G$  定义在特征数 0 的完全离散赋值环  $R$  上,  $R$  的剩余域  $k$  的特征数是  $p$ . 设  $G = \{G_v, i_v\}$  ( $v \geq 0$ ), 且  $T(G) = \varprojlim G_v(\bar{K})$ , 这里  $\bar{K}$  是环  $R$  的分式域  $K$  的代数闭包, 极限是关于映射  $j_v: G_{v+1} \rightarrow G_v$  取的, 且  $i_v \circ j_v = p$ , 则  $T(G) = \mathbb{Z}_p^h$ , 这里  $h$  是群  $G$  的高度,  $T(G)$  具有  $G(\bar{K}/K)$  模的自然结构. 函子  $G \rightarrow T(G)$  使得许多关于群  $G$  的问题能约化为关于  $G(\bar{K}/K)$  模的更简单的问题.

对于 Abel 簇 (Abelian variety) 可类似地定义 Tate 模. 设  $A$  是定义在  $k$  上的 Abel 簇,  $A_{p^n}$  是  $A(\bar{k})$  内  $p^n$  阶点的群, 则  $T(A)$  定义为  $\varprojlim A_{p^n}$ . 曲线  $X$  的 Tate 模 (Tate module of a curve) 是它的 Jacobi 簇 (Jacobi variety) 的 Tate 模.

模  $T_p(X)$  的构造可被推广到数域. 设  $K$  是代数数域且  $k_\infty$  是域  $k$  的  $\mathbb{Z}_p$  扩张 (Galois 群同构于  $\mathbb{Z}_p$  的扩张). 对于  $k$  上  $p^n$  次中间域  $k_n$ , 设  $\text{Cl}(k_n)_p$  是域  $k_n$  的理想类群的  $p$  分支, 则  $T_p(k_\infty) = \varprojlim \text{Cl}(k_n)_p$ , 这里的极限是关于范映射  $\text{Cl}(k_m)_p \rightarrow \text{Cl}(k_n)_p$  ( $m > n$ ) 取的. 模  $T_p(k_\infty)$  是以它的岩泽不变量 (Iwasawa invariants)  $\lambda$ ,  $\mu$  和  $\nu$  来刻画的, 这些不变量定义为

$$|\text{Cl}(k_n)_p| = p^{e_n}.$$

这里  $e_n = \lambda n + \mu p^{n+\nu}$  对所有充分大的  $n$ . 对于分圆  $\mathbb{Z}_p$  扩张, 不变量  $\mu$  等于 0. 对 Abel 域这也被证明 ([4]). 具有  $\mu > 0$  的非分圆  $\mathbb{Z}_p$  扩张的例子已经知道 (见 [3]). 甚至在  $\mu = 0$  的情形下,  $T_p(k_\infty)$  也不必是自由  $\mathbb{Z}_p$  模.

### 参考文献

- [1] Tate, J.,  $p$ -divisible groups, in T. A. Springer



(ed.): Proc. Conf. Local Fields, Springer, 1967, 158 – 183.

[2] Шафаревич, И. Р.,  $\zeta$ -функция, М., 1969.

[3] Iwasawa, K., On the  $\mu$ -invariants of  $Z_1$ -extensions, in Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Kinikuniya, 1973, 1 – 11.

[4] Ferrero, B. and Washington, L. C., The Iwasawa invariant  $\mu_p$  vanishes for abelian number fields, *Ann. of Math.*, **109** (1979), 377 – 395.

Л. В. Кузьмин 撰 陈志杰 译

**Tauber 定理** [Tauberian theorems; Тауберовы теоремы], Tauber 型定理 (theorems of Tauberian type)

寻求在级数 (或序列) 集合中, 两种给定的求和法 (summation methods)  $A, B$ , 满足包含关系  $A \subset B$  所需条件的定理. 在求和理论中, 最经常遇到的情形是研究方法  $B$  与收敛的等价. Tauber 定理就涉及这类情形, 对于级数 (序列) 建立了条件, 在此条件下利用给定的方法从可和性得到收敛. 这些定理的名称都追溯到 A. Tauber ([1]), 他首先证明了关于 Abel 求和法 (Abel summation method) 两个这种类型的定理:

1) 若级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (*)$$

依 Abel 方法可和于和  $S$ , 且  $a_n = o(1/n)$ , 则级数收敛于  $S$ .

2) 为了级数 (\*) 依 Abel 方法可和于和  $S$  蕴涵该级数收敛于和  $S$ , 充要条件是

$$\sum_{k=0}^n k a_k = o(n),$$

定理 1) 是后者的深化; 也就是说, 可以将条件  $a_n = o(1/n)$  换成  $a_n = O(1/n)$  而予以证明. 这时就将关于级数的不同于可和性的条件称为 Tauber 条件 (Tauberian conditions). 这类条件可以用多种形式加以叙述. 对于级数 (\*), 最宽泛的条件类型为

$$a_n = o\left[\frac{1}{n}\right], a_n = O\left[\frac{1}{n}\right], a_n > -\frac{H}{n},$$

$$a_n < \frac{H}{n},$$

其中  $H$  为常数,

$$\sum_{k=0}^n k a_k = o(n),$$

及其推广, 这时自然参数  $n$  被变量  $\tau_n$  代替. 在 Tauber 定理中, 除了上面提到的条件之外, 还包括下述条件, 例如: 若级数 (\*) 依 Borel 方法 (见 Borel 求和法 (Borel summation method)) 可和于和  $S$  且  $a_n = O(1/\sqrt{n})$ , 则级数收敛于  $S$ .

对任何正则矩阵求和法 (matrix summation method) (亦见正则求和法 (regular summation methods)), 存在数  $\tau_n \geq 0$ , 使  $\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = \infty$ , 并且对于这个方法条件  $a_n = o(\tau_n)$  是 Tauber 的 (即依这个方法及条件  $a_n = o(\tau_n)$ , 级数的可和性蕴涵级数的收敛性).

Tauber 条件可以用级数部分和  $S_n$  的赋值或  $n$  与  $m$  之间良定关系的差  $S_n - S_m$  的赋值来表述. 满足这种条件的 Tauber 定理有下面一些例子: 若以  $S_n$  为部分和的级数 (\*) 依 Borel 方法可和于和  $S$ , 且当  $(n-m)/\sqrt{m} \rightarrow 0$  时

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (S_n - S_m) \geq 0, n > m,$$

则级数收敛于  $S$ ; 若级数 (\*) 依 Abel 方法可和于和  $S$ , 且部分和  $S_n$  满足条件  $S_n = O(1)$ , 则它依 Cesàro 法 ( $C, 1$ ) (见 Cesàro 求和法 (Cesàro summation methods)) 可和于  $S$ .

对  $n = n_k$  时  $a_n = 0$ , 级数的缺项见缺项级数 (lacunary series), 可以用作 Tauber 条件; 这时, 条件用序列  $\{n_k\}$  的性质有关的术语表达.

除去通常的可和性, Tauber 定理是研究求和理论中一些特殊类型的可和性 (绝对可和性, 强可和性, 加权可和性等) 的.

#### 参考文献

- [1] Tauber, A., Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, *Monatsch. für Math.*, **8** (1897), 273 – 277.
- [2] Hardy, G. H., *Divergent series*, Clarendon, 1949.
- [3] Widder, D. V., *The Laplace transform*, Princeton Univ. Press, 1941.
- [4] Pitt, H., *Tauberian theorems*, Oxford Univ. Press, 1958.
- [5] Peyerimhoff, A., *Lectures on summability*, Springer, 1969 (译自德文).
- [6] Zeller, K. and Beekmann, W., *Theorie der Limitierungsverfahren*, Springer, 1976.
- [7] Кангро, Г. Ф., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5 – 70 (英译本: Kangro, G. F., *Theory of summability of sequences and series*, *J. Soviet Math.*, **5** (1976), 1, 1 – 45).

И. И. Волков 撰

【补注】有许多从表面上看与之没有关系的结果被称为 Tauber 的, 还有一些虽然与上述断言的意义有关但说法不同的, 也用“Tauber 定理”这个词. 在 [A1] 的第 195 页这样写道: “一个定理是 Abel 的, 如果由其通常极限的假设, 能对序列的均值说些什么; 一个定理是 Tauber 的, 如果收敛能从均值有极限推出来.” 设

$$a_0, a_1, a_2, \dots \quad (A1)$$

是一个数列, 而

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \quad (\text{A2})$$

为其生成幂级数. 在 [2] 中引进了下面的说法. “一个定理是 Abel 的, 如果生成函数 (A2) 的性质可由其系数 (A1) 的性质得出. 一个定理是 Tauber 的, 如果系数的性质可由生成函数的性质得出.”

在 (A2) 中以  $e^{-s}$  代替  $z$ , 且广义和为整数, 那么对于 Laplace-Stieltjes 变换

$$\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-su} d\alpha(u), \quad (\text{A3})$$

Abel 定理从原来的性质可得出 (变换下) 象的性质, 但 Tauber 定理不成立. 将这种说法加以推广, 用现代观点就是说, Tauber 定理与 (广义) 函数对其 Fourier 变换, Laplace 变换或某种其他积分变换, 从 0 的邻域到无穷大时的 (渐近) 行为有关. Abel 定理不成立. (见 [A5], p. xiii).

上述带有  $a_n = O(1/n)$  的定理 1) 的强有力的形式是 Littlewood Tauber 定理 (Littlewood Tauberian theorem).

Hardy-Littlewood Tauber 定理 (Hardy-Littlewood Tauberian theorem) 如下: 设幂级数 (A2) 在  $|z| < 1$  收敛, 并存在  $\gamma > 0$  使

$$\lim_{x \uparrow 1} (1-x)^\gamma \sum_{n=0}^\infty a_n z^n = A, \quad (\text{A4})$$

其中系数  $a_n$  假定非负, 那么当  $N \rightarrow \infty$  时

$$\sum_{n \leq N} a_n \sim \frac{A}{\Gamma(1+\gamma)} N^\gamma, \quad (\text{A5})$$

其中  $\Gamma$  是  $\Gamma$  函数.

下面结果讲述 Hardy-Littlewood Tauber 定理中关于余项的一些事情. 仍设  $a_n \geq 0$  且用 Laplace-Stieltjes 变换

$$F(s) = \sum_{n=0}^\infty a_n e^{-ns} \quad (\text{A6})$$

代替 (A2) 来研究. 假设  $s \downarrow 0$  时, 对于给定的  $\alpha > 0$  有

$$F(s) = A s^{-\alpha} (1 + R(s)), \quad (\text{A7})$$

其中  $|R(s)| \leq C s^\varepsilon$  ( $A, C, \varepsilon$  为正数). 那么

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{A x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} (1 + O(1/\ln x)). \quad (\text{A8})$$

这类 Tauber 定理称为带余项的 Tauber 定理 (Tauberian theorems with remainder) 或定量的 Tauber 定理 (quantitative Tauberian theorems).

Wiener 广义 Tauber 定理 (Wiener generalized Tauberian theorem) 指出: 设  $K_1 \in L_1(-\infty, \infty)$ , 它的 Fourier 变换没有实零;  $K_2$  为  $L_1(-\infty, \infty)$  的另一元素,  $f(x)$  在  $(-\infty, \infty)$  上有界, 设

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty K_1(x-y) f(y) dy = A \int_{-\infty}^\infty K_1(x) dx, \quad (\text{A9})$$

则有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty K_2(x-y) f(y) dy = A \int_{-\infty}^\infty K_2(x) dx \quad (\text{A10})$$

(若  $K_1$  的 Fourier 变换有实零, 则存在  $f$  及  $K_2$ , 使 (9) 成立, 但 (10) 不成立). 这种类型的定理还有不少. 由 Wiener 广义 Tauber 定理, Tauber 定理就像诸如 Littlewood Tauber 定理那样可以导出, 这主要是恰当地选择  $K_1$  和  $K_2$ , 比如见 [A4], §16.

#### 参考文献

- [A1] Widder, D. V., An introduction to transform theory, Acad. Press, 1971.
- [A2] Postnikov, A. G., Tauberian theory and its application, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **144** (1980) (*Trudy Mat. Inst. Steklov*, **144** (1980)).
- [A3] Wiener, N., Tauberian theorems, *Ann. of Math.*, **33** (1932), 1-100 (Reprinted in: N. Wiener, Generalized analysis and Tauberian theorems, MIT Press, 1965).
- [A4] Wiener, N., The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge Univ. Press, 1933.
- [A5] Vladimirov, V. S., Drozzinov, Yu. N. and Zavalov, B. I., Tauberian theorems for generalized functions, Kluwer, 1988 (译自俄文).
- [A6] Bruijn, N. G. de, Asymptotic methods in analysis, North-Holland & Noordhoff & Interscience, 1958.
- [A7] Ganelius, T. H., Tauberian remainder theorems, Springer, 1971.
- [A8] Subhankulov, M. H., Tauberian theorems with remainder, Moscow, 1976 (俄文). 罗嵩龄 译

#### 重言式 [tautology; тавтология]

一个真假值 (truth value) 恒为真的命题演算公式, 它的真假值不依赖于它的命题变元的真假值是“真”或者“假”. 例如:  $A \supset A$ ,  $A \vee \neg A$ ,  $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ .

一般地, 通过验证所有命题变元真假值的有限个组合, 就可以判定一个命题演算的公式是不是重言式.

В. Н. Гришин 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Manin, Yu. I., A course in mathematical logic, Springer, 1977, 31, 54 (译自俄文).

何青译 罗里波校

#### Taylor 公式 [Taylor formula; Тейлора формула]



函数表示为它的  $n$  次 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) **Taylor 多项式** (Taylor polynomial) 与一个余项之和的表达式. 假如一元实值函数  $f$  在点  $x_0$  为  $n$  阶可微, 它的 Taylor 公式为

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x),$$

其中

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

是它的 **Taylor 多项式** (Taylor polynomial), 而余项  $r_n(x)$  可以写成 **Peano 形式** (Peano form):

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

若函数  $f$  在点  $x_0$  的某个邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  ( $\delta > 0$ ) 内为  $(n+1)$  阶可微, 那么在此邻域内, 余项可以写成 **Schlömilch-Roch 形式** (Schlömilch-Roch form)

$$r_n(x) =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!p} (1 - \theta)^{n-p+1} (x - x_0)^{n+1},$$

其中  $p = 1, \dots, n+1, 0 < \theta < 1$ ; 作为特殊情形, 有 **Lagrange 形式** (Lagrange form):

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

和 **Cauchy 形式** (Cauchy form)

$$r_n(x) =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} (1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta);$$

数  $\theta$  依赖于  $x, p$  及  $n$ .

若函数  $f$  的  $n+1$  阶导数在以  $x$  和  $x_0$  为端点的区间上可积, 那么余项可以写成 **积分形式** (integral form):

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x - t)^n dt.$$

上述具有各种形式的余项的 Taylor 公式可以推广到多元函数的情形. Taylor 公式对于线性赋范空间中将子集映入类似空间的映射也是成立的, 此时, 余项可写成 Peano 形式或积分形式.

Taylor 公式将一定阶数可微函数的某些性质的研究, 归结为相应的 Taylor 多项式性质的研究, 而后者实质上要简单得多. 这是 Taylor 多项式各种应用以及数值应用的基础, 例如应用于函数极限的计算, 极值点、拐点、凹凸性区间的研究, 级数与积分的收敛性以及它们收敛或发散的速度估计等.

#### 参考文献

- [1] Ильин, В. А., Садовничий, В. А., Сендов, Б.

Х., Математический анализ, М., 1979.

- [2] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1983 (中译本: С. М. 尼科尔斯基, 数学分析教程, 第一卷, 一、二分册, 人民教育出版社, 1980). Л. Д. Кудрявцев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Apostol, T., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1957.  
[A2] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1974 (中译本: W. 卢丁, 实分析与复分析, 人民教育出版社, 1981).  
[A3] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976 (中译本: W. 卢丁, 数学分析原理, 人民教育出版社, 1979).  
[A4] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981. 王斯雷 译

**Taylor 多项式** [Taylor polynomial; Тейлора многочлен], 关于  $n$  次可微的函数  $f$  在  $x = x_0$  点的  $n$  次的多项式

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Taylor 多项式及其所有直至  $n$  阶的导数在点  $x = x_0$  的值同该函数及其各阶导数在同一点的值重合:

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0), \quad k = 0, \dots, n.$$

Taylor 多项式是函数  $f$  当  $x \rightarrow x_0$  时的最佳多项式逼近, 其含义为:

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0, \quad (*)$$

且若某个次数不超过  $n$  的多项式  $Q_n(x)$  具有性质

$$f(x) - Q_n(x) = o((x - x_0)^m), \quad x \rightarrow x_0,$$

其中  $m \geq n$ , 则必与 Taylor 多项式  $P_n(x)$  重合. 换言之, 具有性质 (\*) 的多项式唯一.

若至少有一个导数  $f^{(k)}(x)$ ,  $k = 0, \dots, n$ , 在点  $x = x_0$  不为 0, 则 Taylor 多项式是 **Taylor 公式** (Taylor formula) 的主部.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】关于参考文献可见 **Taylor 公式** (Taylor formula). 杨维奇 译

**Taylor 级数** [Taylor series; Тейлора ряд]

幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad (1)$$

其中数值函数  $f$  定义在点  $x_0$  的某邻域, 且在该点有各阶导数. Taylor 级数的部分和是 **Taylor 多项式**

(Taylor polynomial).

如果  $x_0$  是复数, 而函数  $f$  定义在  $x_0$  的复数邻域内且在  $x_0$  有各阶导数, 那么存在  $x_0$  的邻域, 使得  $f$  在其中是它的 Taylor 级数 (1) 之和 (见幂级数 (power series)). 但是, 如果  $x_0$  是实数,  $f$  是定义在  $x_0$  的某实数邻域内且在  $x_0$  点有各阶导数, 那么可能不存在  $x_0$  的邻域, 使得  $f$  在此邻域内是它的 Taylor 级数之和. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

在整个实轴上是无穷次可微的, 且仅在  $x = 0$  处等于 0, 但它的 Taylor 级数的一切系数在该点均为 0.

如果某函数在一点的对称邻域内是一幂级数之和, 那么这样的级数是唯一的, 而且一定是这函数在该点的 Taylor 级数. 然而, 同一个幂级数可以是不同实函数的 Taylor 级数. 事实上, 系数全为 0 的幂级数既是全实轴上恒为 0 的函数的 Taylor 级数, 也是函数 (2) 在点 0 的 Taylor 级数.

Taylor 级数 (1) 在区间  $(x_0 - h, x_0 + h)$  上收敛于实值函数  $f$  的一个充分条件是,  $f$  在该区间上的一切导数均有公共的界.

Taylor 级数可以推广到线性赋范空间中将子集映为类似空间的映射上去, 特别是可推广到多元数值函数以及以矩阵为变量的函数上去.

B. Taylor 于 1715 年发表了级数 (1), 而经过简单变换可以转化为级数 (1) 的一级数, 是由 Johann I. Bernoulli 于 1694 年发表的.

#### 参考文献

- [1] Ильин, В. А., Садовничий, В. А., Сендов, Б. Х., Математический анализ, М., 1979.
- [2] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1983 (中译本: С. М. 尼科尔斯基, 数学分析教程, 第一卷, 一、二分册, 人民教育出版社, 1980 - 1981).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】关于参考文献, 亦见 Taylor 公式 (Taylor formula).

#### 参考文献

- [A1] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.
  - [A2] Dieudonné, J., Foundations of modern analysis, Acad. Press, 1960 (译自法文) (中译本: J. 迪厄多内, 现代分析基础, 第一、二卷, 科学出版社, 1982, 1986).
- 王斯雷 译

Teichmüller 空间 [Teichmüller space; Тайхмюллера

пространство]

一个度量空间  $(M_g, d)$ , 它的点是抽象 Riemann 曲面 (abstract Riemann surfaces), 即具有选出基本群  $\pi_1(X)$  生成元的等价 (关于恒等映射) 系统  $\Sigma$  的亏格是  $g$  的 Riemann 曲面  $X$  的共形等价类  $\bar{X}$  (见 Riemann 曲面的共形类 (Riemann surfaces, conformal classes of)), 又其中  $\bar{X}$  和  $\bar{X}'$  之间的距离  $d$  等于  $\ln K$ , 在此  $K$  是 Teichmüller 映射 (Teichmüller mapping) 的膨胀 (拟保角映射  $\bar{X} \rightarrow \bar{X}'$  给出所有这种映射中的极大最小膨胀). 由 O. Teichmüller 所引进 ([1]).

#### 参考文献

- [1] Teichmüller, O., Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentialen, Abhandl. Preuss. Akad. Wissenschaft. Math.-Nat. Kl., 22 (1939), 3 - 197.
- [2A] Bers, L., Quasi-conformal mappings and Teichmüller's theorem, in Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 1960, 89 - 119.
- [2B] Ahlfors, L., The complex analytic structure of the space of Riemann surfaces, in Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 1960, 45 - 66.
- [2C] Bers, L., Spaces of Riemann surfaces, in Proc. Intern. Congress Mathematicians. Edinburgh, 1958, Cambridge Univ. Press, 1959, 349 - 361.
- [2D] Bers, L., Simultaneous uniformization, Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), 94 - 97.
- [2E] Bers, L., Holomorphic differentials as functions of moduli, Bull. Amer. Math. Soc., 67 (1961), 206 - 210.
- [2F] Ahlfors, L., On quasiconformal mappings, J. d'Anal. Math., 3 (1954), 1 - 58; 207 - 208.
- [3] Крушкаль, С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975 (英译本: Krushkal, S. L., Quasi-conformal mappings and Riemann surfaces, Halsted, 1979).

М. И. Воицеховский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Gardiner, F. P., Teichmüller theory and quadratic differentials, Wiley, 1987.
  - [A2] Lehto, O., Univalent functions and Teichmüller spaces, Springer, 1987.
  - [A3] Nag, S., The complex analytic theory of Teichmüller spaces, Wiley, 1988.
- 钟同德 译

电报方程 [telegraph equation; телеграфное уравнение]

偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \beta u = 0. (1)$$



这个方程为导体中的电流强度所满足, 后者是时间  $t$  和从导体的任一定点的距离  $s$  的函数. 这里,  $c$  是光速,  $\alpha$  是容量系数,  $\beta$  是感应系数.

用变换

$$e^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)t} u(s, t) = v(x, y), \quad x = s + ct, \quad y = s - ct,$$

可将方程 (1) 化成形式

$$v_{xy} + \lambda v = 0, \quad \lambda = \left( \frac{\alpha - \beta}{4c} \right)^2. \quad (2)$$

这个方程属于二阶双曲型方程 (见 **双曲型偏微分方程** (hyperbolic partial differential equation))

$$v_{xy} + av_x + bv_y + cv = f$$

的类, 在它的理论中 **Riemann 函数** (Riemann function)  $R(x, y; \xi, \eta)$  起着重要的作用. 对方程 (2) 这个函数可以显式地写为

$$R(x, y; \xi, \eta) = J_0(\sqrt{4\lambda(x-\xi)(y-\eta)}),$$

其中  $J_0(x)$  是见 **Bessel 函数** (Bessel functions).

参考文献

- [1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文) (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特著, 数学物理方法 II, 科学出版社, 1977).

A. П. Солдатов 撰

【补注】在 [A1] 中处理了  $\alpha = -\beta$  的特殊情形.

参考文献

- [A1] John, F., Partial differential equations, Springer, 1978 (中译本: F. 约翰著, 偏微分方程, 科学出版社, 1986). 孙和生译 陆柱家校

### 张量代数 [tensor algebra; тензорная алгебра]

1) **张量演算** (tensor calculus) 的一部分, 在其中研究张量上的代数运算 (见 **向量空间上的张量** (tensor on a vector space)).

2) 一个有单位元的交换结合环  $A$  上西模  $V$  的张量代数是  $A$  上代数  $T(V)$ , 它的底模有形状

$$T(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^{p,0}(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigotimes^p V,$$

并且藉助于张量乘法在其中定义乘法 (见 **向量空间上的张量**). 除反变张量代数外, 也考虑共变张量代数

$$T(V^*) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^{0,p}(V)$$

以及混合张量代数

$$\hat{T}(V) = \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} T^{p,q}(V).$$

如果  $V$  是有限生成的自由模, 那么  $T(V^*)$  自然地同

构于  $V$  上一切 **多重线性型** (multilinear form) 的代数. 任意  $A$  模的同态  $V \rightarrow W$  自然地定义一个张量代数的同态  $T(V) \rightarrow T(W)$ .

张量代数是结合的, 然而一般不是交换的. 它的单位元就是环  $A = T^0(V)$  的单位元. 模  $V$  到一个有单位元的结合  $A$  代数  $B$  内的任意一个线性映射可以自然地开拓为一个代数同态  $T(V) \rightarrow B$ , 将单位元映到单位元. 如果  $V$  是一个自由模,  $(v_i)_{i \in I}$  是它的一个基, 则  $T(V)$  是一个具有生成元系  $(v_i)_{i \in I}$  的 **自由结合代数** (free associative algebra).

参考文献

- [1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra. 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).  
[2] Кострикин, А. Н., Манин, Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980 (英译本: Kostrikin, A. I. and Manin, Yu. I., Linear algebra and geometry, Gordon & Breach, 1989).

A. Л. Онищик 撰 郝钢新 译

### 张量分析 [tensor analysis; тензорный анализ]

**向量分析** (vector analysis) 的一种推广, 研究微分流形  $M$  上可微张量场的代数  $D(M)$  上的微分 (和积分) 算子的 **张量演算** (tensor calculus) 的一部分. 将此理论推广到比张量场更一般的几何对象, 诸如张量密度、向量值的微分形式等等, 也被视为张量分析的一部分.

参考文献

- [1] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.  
[2] Schouten, J. A., Tensor analysis for physicists, Cambridge Univ. Press, 1951.  
[3] MacConnell, A. J., Applications of tensor analysis, Dover, reprint, 1957.  
[4] Sokolnikoff, I. S., Tensor analysis, Wiley, 1964.

K. М. Белов 撰

【补注】张量分析的最重要的算子把张量场映至张量场, 但可能改变场的类型.

1) 在向量场  $X \in D^{(1,0)}(M)$  方向上的共变导数 (covariant derivative) 是一个线性映射  $\nabla_X$ , 它把向量空间  $D^{(0,1)}(M)$  映至其自身之中, 并满足下述条件:

$$\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z,$$

$$\nabla_X(fZ) = f \nabla_X Z + X(f)Z,$$

这里  $X, Y, Z \in D^{(1,0)}(M)$ ,  $f$  和  $g$  是  $M$  上的光滑函数. 其中向量场  $X$  被视为关于函数的导数, 即在局部坐标系  $u^1, \dots, u^n$  下,  $X = \sum_{i=1}^n \xi^i (\partial/\partial u^i)$ , 对于函数  $f$  的导数有  $X(f) = \sum_{i=1}^n \xi^i (\partial f/\partial u^i)$ . 由对算子  $\nabla: D^{(1,0)}(M) \times D^{(1,0)}(M) \rightarrow D^{(1,0)}(M)$

这样的规定, 可以定义一个线性联络 (linear connection) 以及沿  $M$  上曲线的一个平行移动 (parallel displacement).

共变导数对流形  $M$  上任意张量场的推广能用下面的性质来刻画: 它是一个保持张量场类型不变的, 且与缩并可交换的算子. 可将一个  $(s, r)$  型张量场视为定义在  $r$  重相应的切空间及  $s$  重余切空间上的一个多重线性映射的场, 对于  $T \in D^{(s, r)}$ , 此推广可定义如下:

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) &= \\ &= \nabla_X(T(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s)) + \\ &- \sum_{i=1}^r T(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) + \\ &- \sum_{j=1}^s T(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^s), \end{aligned}$$

其中  $(\nabla_X \omega)(Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$ ,  $X, Y, X_1, \dots, X_r \in D^{(1,0)}(M)$ , 且  $\omega, \omega^1, \dots, \omega^s \in D^{(0,1)}(M)$ . 在局部坐标系下, 利用上面所导入的概念以及由  $\nabla_{\partial/\partial u^k} \partial/\partial u^j = \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial/\partial u^i$  所给出的联络系数 (connection coefficients)  $\Gamma_{ij}^k$ , 借助于  $T$  的分量  $T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ , 有下列公式:

$$\begin{aligned} (\nabla_X T)_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} &= \sum_{k=1}^n \xi^k \left[ \frac{\partial}{\partial u^k} (T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}) + \right. \\ &- \sum_{v=1}^r \sum_{l=1}^n \Gamma_{k i_v}^l T_{i_1 \dots i_{v-1} i_{v+1} \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} + \\ &\left. + \sum_{\mu=1}^s \sum_{l=1}^n \Gamma_{k j_\mu}^l T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{\mu-1} j_{\mu+1} \dots j_s} \right]. \end{aligned}$$

由此定义容易得出张量场  $T \in D^{(r, s)}(M)$  的共变微分 (covariant differential)  $\nabla T \in D^{(s, r+1)}$  为

$$\begin{aligned} (\nabla T)(X_0, X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) &= \\ &= (\nabla_{X_0} T)(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s), \end{aligned}$$

其中关于第一项的张量特性可从上述关于  $\nabla$  的法则中看出. 在  $M$  上 Riemann 度量的 Levi-Civita 联络的情形,  $T$  的共变微分关于第一个和某一个另外的共变项的迹给出了散度 (divergence) 在张量场上的推广.

2) 沿向量场  $X$  的 Lie 导数 (Lie derivative) 是由  $L_X Y = [X, Y]$  所定义的映射  $L_X: D^{(1,0)}(M) \rightarrow D^{(1,0)}(M)$ , 其中对  $M$  上的任意光滑函数  $f, [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ . 可按照与共变导数同样的方式将 Lie 导数推广到任意的张量场  $T \in D^{(s, r)}(M)$ :

$$\begin{aligned} (L_X T)(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) &= \\ &= \nabla_X(T(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \sum_{i=1}^r T(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_r, \omega^1, \dots, \omega^s) + \\ &- \sum_{j=1}^s T(X_1, \dots, X_r, \omega^1, \dots, L_X \omega^j, \dots, \omega^s), \end{aligned}$$

其中  $(L_X \omega)(Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(L_X Y)$ ,  $X, Y, X_1, \dots, X_r \in D^{(1,0)}(M)$ , 且  $\omega, \omega^1, \dots, \omega^s \in D^{(0,1)}(M)$ . 这意味着在局部坐标系下,

$$\begin{aligned} (L_X T)_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} &= \sum_{k=1}^n \xi^k \frac{\partial}{\partial u^k} (T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{v=1}^r \frac{\partial \xi^k}{\partial u^{i_v}} T_{i_1 \dots i_{v-1} k i_{v+1} \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} + \\ &- \sum_{k=1}^n \sum_{\mu=1}^s \frac{\partial \xi^{j_\mu}}{\partial u^k} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{\mu-1} k j_{\mu+1} \dots j_s}. \end{aligned}$$

3) 所谓外微分 (exterior differential) 或外导数 (exterior derivative) 是一个将  $p$  阶 (外) 微分形式  $\omega \in F^p(M)$  映至  $p+1$  阶微分形式  $d\omega$  的线性算子  $d$ , 满足下述与微分形式楔积 (wedge product) (外积 (exterior product)) 的相容性:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2,$$

其中  $\omega_1 \in F^p(M)$ . 进而, 又假设对于光滑函数  $f$  (即 0 阶微分形式),  $df$  是  $f$  的通常的微分, 且  $ddf = 0$ . 这蕴含了一般地有  $dd\omega = 0$ . 对于  $\omega \in F^p(M)$ , 外微分可描述为:

$$\begin{aligned} (d\omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \\ &= \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} X_j \omega(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{p+1}) + \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, X_{i-1}, \\ &X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{p+1}). \end{aligned}$$

如果在局部坐标系下  $\omega = \sum_{i_1 \dots i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}$ , 则

$$d\omega = \sum_{i_1 \dots i_p} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial u^k} du^k \wedge du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}.$$

经典向量分析中的基本算子可以用形式和外微分来描述. 例如, 作用在  $\mathbf{R}^3$  中的 2 阶微分形式上的算子  $d$ , 相应于算子  $\text{rot}(\text{curl})$ . 微分形式亦是流形上的积分 (integration on manifolds) 理论中适当的对象. 利用外导数, 可给出 Stokes 定理 (Stokes theorem) 的一般形式.

4) 作为张量分析在微分几何中应用的一个例子, 应该提及线性联络的曲率张量 (curvature tensor)  $R$ . 此张量是  $(3, 1)$  型的. 利用相应的共变导数  $\nabla$  及向量场  $X, Y, Z \in D^{(1,0)}(M)$ ,  $R$  可给出如下:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$



这里和通常一样, 可将反变项视为一个向量值的多重线性映射. 在 Riemann 度量  $g$  的 Levi-Civita 联络下, 可得出  $R$  的分量  $R^i_{jk}$  为

$$R^i_{jk} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma^i_{ij}}{\partial u^k} + \sum_{v=1}^n \Gamma^v_{ik} \Gamma^i_{vj} - \sum_{v=1}^n \Gamma^v_{ij} \Gamma^i_{vk},$$

其中联络系数可由度量得出:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n g^{iv} \left[ \frac{\partial g_{jv}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^v} + \frac{\partial g_{vk}}{\partial u^j} \right].$$

#### 参考文献

- [A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982.  
[A2] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965.  
[A3] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1-2, Interscience, 1963.

沈纯理 译

张量丛 [tensor bundle; тензорное расслоение], 微分流形  $M$  上  $(p, q)$  型的

流形  $M$  上与切标架丛相联系的向量丛 (vector bundle)  $T^{p,q}(M)$ , 其标准纤维为  $\mathbf{R}^n$  上的  $(p, q)$  型张量空间  $T^{p,q}(\mathbf{R}^n)$  (见向量空间上的张量 (tensor on a vector space)), 群  $GL(n, \mathbf{R})$  以张量表示的方式作用在  $T^{p,q}(\mathbf{R}^n)$  上. 例如,  $T^{1,0}(M)$  即为  $M$  上的切丛 (tangent bundle)  $TM$ , 而  $T^{0,1}(M)$  则为  $M$  的余切丛  $T^*M$ . 一般地, 张量丛同构于切丛和余切丛的张量积:

$$T^{p,q}(M) \cong \bigotimes^p TM \otimes \bigotimes^q T^*M.$$

$(p, q)$  型张量丛的截面称为  $(p, q)$  型张量场 (tensor field), 它是微分几何学中的基本研究对象. 例如,  $M$  上的一个 Riemann 结构是丛  $T^{0,2}(M)$  的光滑截面, 其值为正定对称形式. 丛  $T^{p,q}(M)$  的光滑截面构成了  $M$  上光滑函数代数  $F^\infty(M) = D^{0,0}(M)$  上的模  $D^{p,q}(M)$ . 若  $M$  是仿紧的 Hausdorff 流形, 则

$$D^{p,q}(M) \cong \bigotimes^p D^1(M) \otimes \bigotimes^q D^1(M)^*,$$

其中  $D^1(M) = D^{1,0}(M)$  是光滑向量场模,  $D^1(M)^* = D^{0,1}(M)$  是 Pfaff 微分形式模 (亦见 Pfaff 形式 (Pfaffian form)), 而张量积取在  $F^\infty(M)$  上. 在经典微分几何学中, 张量场有时被简称为  $M$  上的张量 (tensor).

#### 参考文献

- [1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1, Interscience, 1963.

- [2] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 向量场空间  $D^1(M)$  通常记为  $X(M)$ , Pfaff 形式空间  $D^1(M)^*$  记为  $\Omega^1(M)$ .

#### 参考文献

- [A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982.

沈纯理 译

#### 张量演算 [tensor calculus; тензорное исчисление]

研究张量和张量场的数学分支的传统的名称 (见向量空间上的张量 (tensor on a vector space); 张量丛 (tensor bundle)). 张量演算分为张量代数 (tensor algebra) (多重线性代数 (multilinear algebra) 的本质部分) 和张量分析 (tensor analysis) (研究张量场代数上的微分算子) 两部分.

张量演算是微分几何的重要组成部分. 这方面首先是由 G. Ricci 和 T. Levi-Civita 系统地发展的 (见 [1]); 通常被称为 “Ricci 演算”.

“张量”一词在 19 世纪中期已被用来描述物体的弹性形变 (见形变张量 (deformation tensor); 应力张量 (stress tensor)). 从 20 世纪初往后, 张量演算作为一种工具, 已在相对论中得以应用.

#### 参考文献

- [1] Ricci, G. and Levi-Civita, T., Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, Math. Ann., 54 (1901), 125-201.  
[2] Einstein, A. and Grossmann, M., Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation, Z. Math. Physik, 62 (1914), 225-261.

А. Л. Онищик 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Schouten, J. A., Ricci calculus, Springer, 1954 (译自德文).

沈纯理 译

#### 张量密度 [tensor density; тензорная плотность], 伪张量 (pseudo-tensor)

在一个坐标系  $x = (x^1, \dots, x^n)$  中被  $n^{p+q}$  个分量  $a^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$  所描述的一个几何对象,  $1 \leq i_\nu, j_\mu \leq n$ , 在坐标变换  $x \mapsto y = (y^1, \dots, y^n)$  之下根据公式

$$a^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \Delta^{-\kappa} a^{a_1 \dots a_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{a_1}} \dots \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{a_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial y^{j_q}}$$

变换, 这里  $\Delta = \det(\partial y^i / \partial x^k)$ . 数  $\kappa$  称为张量密度的权 (weight of the tensor density). 当  $\kappa = 0$  时, 张量密度就是张量 (见向量空间上的张量 (tensor on a vector space)). 像是型, 价, 共变, 反变等概念均可

类似于对应的张量的概念被引入.  $(1, 0)$  型和  $(0, 1)$  型的张量密度称为向量密度 (vector density).  $(0, 0)$  型的张量密度称为标量密度 (scalar density).

Л. П. Купцов 撰

【补注】如上定义的张量密度也称为相对张量 (relative tensor). 区别权为  $\kappa$  的奇相对张量 (odd relative tensor), 它按上面的公式变换, 和偶相对张量 (even relative tensors), 它按同样的公式变换, 只是把  $\Delta$  换成它的绝对值  $|\Delta|$ . 在 [A2] 里, 偶张量密度就简称为“张量密度”, 而奇张量密度则称为张量  $\Delta$  密度.

参考文献

[A1] Spivak, M., Differential geometry, 1, Publish or Perish, 1970, p. 437 ff.

[A2] Schouten, J. A., Ricci calculus, Springer, 1954, p. 12 (译自德文). 郝钢新 译

向量空间上的张量 [tensor on a vector space; тензор на векторном пространстве], 域  $k$  上向量空间  $V$  上的

向量空间

$$T^{p,q}(V) = [\otimes^p V] \otimes [\otimes^q V^*]$$

的一个元素  $t$ , 这里  $V^* = \text{Hom}(V, k)$  是  $V$  的对偶空间. 张量  $t$  称为  $p$  次反变和  $q$  次共变的, 或者称为  $(p, q)$  型的. 数  $p$  称为张量  $t$  的反变价 (contravariant valency),  $q$  称为共变价 (covariant valency), 而  $p+q$  称为一般价 (general valency). 空间  $T^{0,0}(V)$  与  $k$  等同,  $(p, 0)$  型张量称为反变的 (contravariant),  $(0, q)$  型张量称为共变的 (covariant), 余下的称为混合的 (mixed).

张量的例子.

- 1) 空间  $V$  的向量 ( $(1, 0)$  型张量).
- 2) 空间  $V$  的余向量 ( $(0, 1)$  型张量).
- 3) 任意共变张量

$$t = \sum_{i=1}^s h_{i_1} \otimes \cdots \otimes h_{i_q},$$

这里  $h_{i_j} \in V^*$ , 由公式

$$\hat{t}(x_1, \dots, x_q) = \sum_{i=1}^s h_{i_1}(x_1) \cdots h_{i_q}(x_q)$$

定义  $V$  上一个  $q$  线性型  $\hat{t}$ ; 由空间  $T^{0,q}$  到  $V$  上一切  $q$  线性型的空间  $L^q(V)$  内的映射  $t \mapsto \hat{t}$  是线性单射; 如果  $\dim V < \infty$ , 则这个映射是同构映射, 因为任意  $q$  线性型都对应于某个  $(0, q)$  型张量.

4) 类似地,  $T^{p,0}(V)$  的一个反变张量定义  $V^*$  上一个  $p$  线性型, 如果  $V$  是有限维的, 则反过来也对.

5) 每一个张量

$$t = \sum_{i=1}^s x_i \otimes h_i \in T^{1,1}(V),$$

这里  $x_i \in V, h_i \in V^*$ , 由公式

$$\hat{t}(y) = \sum_{i=1}^s h_i(y) x_i$$

定义空间  $V$  的一个线性变换  $\hat{t}$ ; 如果  $\dim V < \infty$ , 则  $V$  的任意线性变换都由一个  $(1, 1)$  型张量定义.

6) 类似地, 任意  $(1, 2)$  型张量在  $V$  内定义一个双线性运算, 即一个  $k$  代数结构. 而且, 如果  $\dim V < \infty$ , 则在  $V$  内任意一个  $k$  代数结构都由一个  $(1, 2)$  型张量所定义, 称为这个代数的结构张量 (structure tensor).

令  $V$  是有限维的,  $v_1, \dots, v_n$  是它的一个基, 又令  $v^1, \dots, v^n$  是空间  $V^*$  的对偶基. 则张量

$$v_{i_1}^{j_1} \cdots v_{i_p}^{j_p} = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p} \otimes v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_q}$$

做成空间  $T^{p,q}(V)$  的一个基. 一个张量  $t \in T^{p,q}(V)$  关于这个基的分量  $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  也称为张量  $t$  关于空间  $V$  的基  $v_1, \dots, v_n$  的分量 (components). 例如, 向量和余向量的分量与它们关于基  $(v_i)$  和  $(v^i)$  的坐标一样;  $(0, 2)$  型张量的分量与对应于这个双线性型的矩阵的元素一样;  $(1, 1)$  型张量的分量与对应的线性变换的矩阵的元素一样; 代数的结构张量的分量与它的结构常数一样. 如果  $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n$  是  $V$  的另一个基,  $\tilde{v}_j = a_j^i v_i$ , 而  $\|b_j^i\| = (\|a_j^i\|^T)^{-1}$ , 则张量  $t$  在这个基内的分量  $\tilde{t}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  由公式

$$\tilde{t}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = b_{k_1}^{i_1} \cdots b_{k_p}^{i_p} a_{j_1}^{k_1} \cdots a_{j_q}^{k_q} t_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p} \quad (1)$$

定义. 在这里, 正如在张量计算中经常发生的那样, 应用了 Einstein 的求和约定 (Einstein summation convention): 对于每一对相同的指标, 其中一个在上面, 一个在下面, 则理解为从 1 到  $n$  求和. 反过来, 如果域  $k$  的一组依赖于空间  $V$  的基的  $n^{p+q}$  个元素在一个基过渡到另一个基按照公式 (1) 而转换, 那么这组元素是某一个  $(p, q)$  型张量的分量的集合.

在向量空间  $T^{p,q}(V)$  中, 张量的加法和用  $k$  中一个标量去乘张量的运算被定义. 在这些运算下对应的分量相加或用这个标量去乘. 不同型的张量的乘法运算也被定义; 现介绍如下. 存在向量空间的自然同构

$$T^{p,q}(V) \otimes T^{r,s}(V) \cong T^{p+r,q+s}(V),$$

将

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_q) \otimes$$

$$\otimes (x'_1 \otimes \cdots \otimes x'_r \otimes h'_1 \otimes \cdots \otimes h'_s)$$

映射成

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes x'_1 \otimes \cdots \otimes x'_r \otimes$$



$$\otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_q \otimes h'_1 \otimes \cdots \otimes h'_s.$$

于是, 对于任意  $t \in T^{p,q}(V)$  和  $u \in T^{r,s}(V)$ , 元素  $v = t \otimes u$  可以看成是一个  $(p+r, q+s)$  型张量, 称为  $t$  与  $u$  的张量积 (tensor product). 积的分量按照公式

$$v_{j_1 \dots j_{q+s}}^{i_1 \dots i_{p+r}} = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} u_{j_{q+1} \dots j_{q+s}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}}$$

计算.

令  $p > 0, q > 0$ , 并且固定数  $\alpha, \beta, 1 \leq \alpha \leq p, 1 \leq \beta \leq q$ . 则存在一个良定义的映射  $Y_\beta^\alpha: T^{p,q}(V) \rightarrow T^{p-1,q-1}(V)$  使得

$$\begin{aligned} Y_\beta^\alpha(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_q) &= \\ &= h_\beta(x_\alpha) x_1 \otimes \cdots \otimes x_{\alpha-1} \otimes x_{\alpha+1} \otimes \cdots \otimes x_p \otimes \\ &\otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_{\beta-1} \otimes h_{\beta+1} \otimes \cdots \otimes h_q. \end{aligned}$$

称为关于第  $\alpha$  个反变指标和第  $\beta$  个共变指标的缩并 (contraction). 在分量里, 缩并写成以下形式

$$(Y_\beta^\alpha t)_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} = t_{j_1 \dots j_{\beta-1} j_{\beta+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_p}.$$

例如, 一个  $(1, 1)$  型张量的缩并  $Y_1^1 t$  就是对应的线性变换的迹.

在一个有单位元的结合交换环上任意么模  $V$  上的张量可类似地定义. 所述的张量的例子和性质, 作相应的改变, 都转移到这个情形, 有时需要假设  $V$  是一个自由模或有限生成的自由模.

设在域  $k$  上有限维向量空间  $V$  内给定了一个非退化双线性型  $g$  (例如,  $V$  是  $\mathbb{R}$  上一个 Euclid 空间或伪 Euclid 空间); 在这一情形,  $g$  称为一个度量张量 (metric tensor). 一个度量张量根据以下公式定义一个同构  $\gamma: V \rightarrow V^*$ :

$$\gamma(x)(y) = g(x, y), \quad x, y \in V.$$

令  $p > 0$ , 并且固定一个指标  $\alpha, 1 \leq \alpha \leq p$ , 则公式

$$\begin{aligned} x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_q &\mapsto \\ &\mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_{\alpha-1} \otimes x_{\alpha+1} \otimes \cdots \otimes x_p \otimes \gamma(x_\alpha) \otimes \\ &\otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_q \end{aligned}$$

定义一个同构  $\gamma^\alpha: T^{p,q}(V) \rightarrow T^{p-1,q+1}(V)$ , 称为第  $\alpha$  个反变指标的下移 (lowering). 换句话说,

$$\gamma^\alpha(t) = Y_1^\alpha(g \otimes t).$$

在分量里, 下移一个指标有以下形式:

$$\gamma^\alpha(t)_{j_1 \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} = g_{ij_1} t_{j_2 \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_{p-1}}.$$

类似地, 可以定义上移 (raising) 第  $\beta$  个共变指标的

同构 ( $1 \leq \beta \leq q$ ):

$$\begin{aligned} \gamma_\beta: x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_q &\mapsto \\ &\mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes \gamma^{-1}(h_\beta) \otimes \\ &\otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_{\beta-1} \otimes h_{\beta+1} \otimes \cdots \otimes h_q, \end{aligned}$$

它将  $T^{p,q}(V)$  映到  $T^{p+1,q-1}(V)$  上. 在分量里, 上移一个指标被写成以下形式:

$$\gamma_\beta(t)_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{p+1}} = g^{j\beta+1} t_{j_1 \dots j_{\beta-1} j_{\beta+1} \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_p}.$$

这里  $\|g^{kl}\| = (\|g_{ij}\|^{-1})$ . 特别, 首先上移度量张量  $g$  的第一个指标, 然后再上移其余的共变指标, 就得到一个  $(2, 0)$  型张量, 其分量为  $g^{kl}$  (一个反变度量张量 (contravariant metric tensor)). 有时下移的 (上移的) 指标并不移到第一个 (最后一个) 位置, 而是写在下 (上) 一组指标中同一位置, 出现空位的地方点一个点. 例如, 对于  $t \in T^{2,0}(V)$ , 张量  $\gamma^2(t)$  的分量写成  $t_j^i = g_{kj} t^{ik}$  的形式.

域  $k$  上向量空间的任意线性映射  $f: V \rightarrow W$  以自然方式定义线性映射

$$T^{p,0}(f) = \bigotimes^p f: T^{p,0}(V) \rightarrow T^{p,0}(W)$$

和

$$T^{q,0}(f^*) = \bigotimes^q f^*: T^{q,0}(W) \rightarrow T^{q,0}(V).$$

如果  $f$  是同构, 则线性映射

$$T^{p,q}(f): T^{p,q}(V) \rightarrow T^{p,q}(W)$$

也被定义并且  $T^{0,q}(f) = T^{q,0}(f^*)^{-1}$ . 对应  $f \mapsto T^{p,q}(f)$  具有函子性质. 特别, 它定义群  $GL(V)$  在空间  $T^{p,q}(V)$  里的一个线性表示  $a \mapsto T^{p,q}(a)$  (张量表示 (tensor representation)).

#### 参考文献

- [1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, I, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).
- [2] Гельфанд, И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971 (中译本: И. М. 盖尔冯得, 线性代数学, 高等教育出版社, 1957).
- [3] Кострикин, А. И., Манин, Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980 (英译本: Kostrikin, A. I. and Manin, Yu. I., Linear algebra and geometry, Gordon & Breach, 1989).
- [4] Постников, М. М., Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, М., 1979.
- [5] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

А. Л. Онищик 撰 郝钢新 译

张量积 [tensor product; тензорное произведение]

1) 含单位元的结合交换环  $A$  上两个左模  $V_1$  与  $V_2$  的张量积 (tensor product of two unitary modules) 是  $A$  模  $V_1 \otimes_A V_2$  连同由  $A$  双线性映射

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 \otimes x_2 \in V_1 \otimes_A V_2,$$

该映射在以下意义上是泛的: 对于任意  $A$  双线性映射  $\beta: V_1 \times V_2 \rightarrow W$ , 这里  $W$  是任意  $A$  模, 存在一个唯一的  $A$  线性映射  $b: V_1 \otimes_A V_2 \rightarrow W$ , 使得

$$\beta(x_1, x_2) = b(x_1 \otimes x_2), \quad x_1 \in V_1, x_2 \in V_2.$$

不计自然同构, 该张量积是唯一确定的. 张量积总是存在的, 且可以这样构造: 设  $F$  是由集合  $V_1 \times V_2$  生成的自由  $A$  模, 其  $A$  子模  $R$  由形如

$$(x_1 + y, x_2) - (x_1, x_2) - (y, x_2),$$

$$(x_1, x_2 + z) - (x_1, x_2) - (x_1, z),$$

$$(cx_1, x_2) - c(x_1, x_2),$$

$$(x_1, cx_2) - c(x_1, x_2)$$

的元素生成, 其中  $x_1, y \in V_1, x_2, z \in V_2, c \in A$ ; 作  $F$  模  $R$  的商模, 则  $x_1 \otimes x_2 = (x_1, x_2) + R$ . 如果去掉  $A$  的交换性这一要求, 那么类似于上面所描述的构造能够从一个右  $A$  模  $V_1$  与一个左  $A$  模  $V_2$  产生一个 Abel 群  $V_1 \otimes_A V_2$ , 亦称为这两个模的张量积 ([1]).

在下文中总设定  $A$  是交换的.

张量积具有以下性质:

$$A \otimes_A V \cong V,$$

$$V_1 \otimes_A V_2 \cong V_2 \otimes_A V_1,$$

$$(V_1 \otimes_A V_2) \otimes_A V_3 \cong V_1 \otimes_A (V_2 \otimes_A V_3),$$

$$\left[ \bigoplus_{i \in I} V_i \right] \otimes_A W \cong \bigoplus_{i \in I} (V_i \otimes_A W),$$

对于  $A$  上任意模  $V, V_i, W$ .

如果  $V_1$  与  $V_2$  是自由  $A$  模,  $(x_i)_{i \in I}$  与  $(y_j)_{j \in J}$  是  $V_1$  与  $V_2$  的基, 那么  $(x_i \otimes y_j)_{(i, j) \in I \times J}$  是模  $V_1 \otimes_A V_2$  的一个基. 尤其, 如果  $V_i$  都是有限生成自由模 (例如, 一个域  $A$  上的有限维向量空间), 则

$$\dim(V_1 \otimes_A V_2) = \dim V_1 \cdot \dim V_2.$$

循环  $A$  模的张量积利用公式

$$(A/I) \otimes_A (A/J) \cong A/(I+J)$$

计算, 其中  $I$  和  $J$  是  $A$  的理想.

同样可以定义任意  $A$  模族 (未必有限个) 的张量积. 张量积

$$\bigotimes_A^p V = V \otimes_A \cdots \otimes_A V \quad (p \text{ 个因子})$$

称为  $A$  模  $V$  的  $p$  次张量幂 ( $p$ -th tensor power); 它的元素是  $V$  上的  $p$  次反变张量 (见向量空间上的张量 (tensor on a vector space)).

对于任意的  $A$  模同态  $\alpha_i: V_i \rightarrow W_i (i=1, 2)$  对应于它们的张量积  $\alpha_1 \otimes \alpha_2$  是一个  $A$  模同态:  $V_1 \otimes_A V_2 \rightarrow W_1 \otimes_A W_2$ , 且由公式

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2)(x_1 \otimes x_2) = \alpha_1(x_1) \otimes \alpha_2(x_2),$$

$$x_i \in V_i$$

来确定. 这种运算还可以扩张到任意同态族的情形, 并且它具有函子性质 (见模 (module)). 它定义了一个  $A$  模同态

$$\text{Hom}_A(V_1, W_1) \otimes_A \text{Hom}_A(V_2, W_2)$$

$$\rightarrow \text{Hom}_A(V_1 \otimes_A V_2, W_1 \otimes_A W_2),$$

如果所有的  $V_i$  与  $W_i$  都是自由模且有限生成, 那么这是一个同构.

#### 参考文献

- [1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).
- [2] Kasch, F., Modules and rings, Acad. Press, 1982 (译自德文).
- [3] Кострикин, А. И., Манин, Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980 (英译本: Kostrikin, A. I. and Manin, Yu. I., Linear algebra and geometry, Gordon & Breach, 1989).

А. Л. Онищук 撰

【补注】 张量积在 (理论) 物理里的一个重要解释如下. 一个物体, 譬如说一个质点, 通常它的各种状态定义为  $C$  上向量空间  $V$ ,  $V$  是纯态  $e_i (i \in I)$  的集合的所有复线性组合. 令第二个类似物体的纯态是  $f_j (j \in J)$  产生第二个向量空间  $W$ . 那么两物体的有序对的纯态是一切偶  $(e_i, f_j)$ , 并且这个有序对的状态空间是张量积  $V \otimes_C W$ .

2) 含单位元的结合交换环  $A$  上的两个代数  $C_1$  与  $C_2$  的张量积 (tensor product of two algebras) 是  $A$  上代数  $C_1 \otimes_A C_2$ , 它是在  $A$  模的张量积  $C_1 \otimes_A C_2$  上按下述公式引进一个乘法而得到的,

$$(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = (x_1 y_1) \otimes (x_2 y_2),$$

$$x_i, y_i \in C_i.$$

这个定义可以扩张到任意一族因子的情形. 张量积  $C_1 \otimes_A C_2$  是结合的和交换的, 如果两个代数  $C_i$  均有单位元, 那么它也含有单位元. 如果  $C_1$  与  $C_2$  是



域  $A$  上含单位元的两代数, 那么  $\widetilde{C}_1 = C_1 \otimes 1$  与  $\widetilde{C}_2 = 1 \otimes C_2$  均为  $C_1 \otimes C_2$  的子代数, 它们分别同构于  $C_1$  与  $C_2$ , 而且彼此元素间的乘法可交换. 反之, 设  $C$  是域  $A$  上一个含单位元的代数,  $C_1$  与  $C_2$  是它的子代数且含有它的单位元, 并且  $x_1 x_2 = x_2 x_1$  对任意  $x_i \in C_i$ . 那么存在一个  $A$  代数同态  $\varphi: C_1 \otimes C_2 \rightarrow C$ , 使得  $\varphi(x_1 \otimes x_2) = x_1 x_2$ ,  $x_i \in C_i$ . 而  $\varphi$  为一个同构的充分必要条件是在  $C_1$  中存在一个  $A$  上的基, 它也是右  $C_2$  模  $C$  的一个基.

## 参考文献

- [1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).

A. Л. ОНИЩИК 撰

3) 两个矩阵  $A = \|a_{ij}\|$  与  $B$  的张量积 (tensor product of two matrices) 或 Kronecker 积 (Kronecker product) 是矩阵

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix},$$

这里,  $A$  是含单位元的结合交换环  $k$  上的一个  $(m \times n)$  矩阵,  $B$  是  $k$  上的一个  $(p \times q)$  矩阵, 而  $A \otimes B$  是  $k$  上的  $(mp \times nq)$  矩阵.

矩阵的张量积的性质是:

$$(A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B,$$

$$A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2,$$

$$\alpha(A \otimes B) = \alpha A \otimes B = A \otimes \alpha B,$$

其中  $\alpha \in k$ ,

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

如果  $m = n$  且  $p = q$ , 则

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^p (\det B)^n.$$

令  $k$  是一个域,  $m = n$  且  $p = q$ . 则  $A \otimes B$  相似于  $B \otimes A$ , 且  $\det(A \otimes E_p - E_n \otimes B)$ , 其中  $E_n$  是单位矩阵, 等同于  $A$  与  $B$  的特征多项式的结式.

如果  $\alpha: V \rightarrow V'$  与  $\beta: W \rightarrow W'$  均为有限生成自由  $k$  模的同态,  $A$  与  $B$  是它们在特定基下的矩阵, 那么  $A \otimes B$  是同态  $\alpha \otimes \beta: V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$  在由基向量的张量积所组成的基下的矩阵.

## 参考文献

- [1] Halmos, P. R., Finite-dimensional vector spaces, v. Nostrand, 1958.  
[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, 1, Addison-Wes-

ley, 1974, Chapt. 1; 2 (译自法文).

Д. А. Супруненко 撰

4) 设  $\pi_1$  与  $\pi_2$  分别是一个群  $G$  在两向量空间  $E_1, E_2$  里的两个表示. 这两个表示的张量积 (tensor product of two representations) 是  $G$  在  $E_1 \otimes E_2$  里的表示  $\pi_1 \otimes \pi_2$ , 由条件

$$\begin{aligned} (\pi_1 \otimes \pi_2)(g)(\xi_1 \otimes \xi_2) &= \\ &= \pi_1(g)\xi_1 \otimes \pi_2(g)\xi_2 \end{aligned} \quad (*)$$

唯一确定, 对一切  $\xi_1 \in E_1, \xi_2 \in E_2$  和  $g \in G$ . 如果  $\pi_1$  与  $\pi_2$  分别是一个拓扑群  $G$  在两个 Hilbert 空间  $E_1, E_2$  里的连续的酉表示, 那么由连续性, 向量空间  $E_1 \otimes E_2$  里的算子  $(\pi_1 \otimes \pi_2)(g)$ ,  $g \in G$ , 允许唯一地扩张成为 Hilbert 空间  $E_1 \bar{\otimes} E_2$  里的连续线性算子  $(\pi_1 \bar{\otimes} \pi_2)g$ ,  $g \in G$  (是空间  $E_1 \bar{\otimes} E_2$  关于以公式  $(\xi_1 \otimes \xi_2, \eta_1 \otimes \eta_2) = (\xi_1, \eta_1)(\xi_2, \eta_2)$  所定义的标量积的完全化), 并且映射  $\pi_1 \otimes \pi_2: g \rightarrow (\pi_1 \bar{\otimes} \pi_2)g$ ,  $g \in G$ , 是群  $G$  在 Hilbert 空间  $E_1 \bar{\otimes} E_2$  里的一个连续的酉表示 (unitary representation), 称为酉表示  $\pi_1$  与  $\pi_2$  的张量积 (tensor product of the unitary representations). 表示  $\pi_1 \otimes \pi_2$  与表示  $\pi_2 \otimes \pi_1$  是等价的 (酉等价的, 如果  $\pi_1$  和  $\pi_2$  都是酉的). 也可以定义一个拓扑群在一般形式的拓扑向量空间里的连续表示的张量乘法运算.

A. Л. Штерн 撰

【补注】 如果  $\pi_i$  是代数  $A_i$  在向量空间  $E_i$  里的一个表示,  $i = 1, 2$ , 利用

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(a_1 \otimes a_2) = \pi_1(a_1) \otimes \pi_2(a_2)$$

定义张量积  $\pi_1 \otimes \pi_2$ , 它是  $A_1 \otimes A_2$  在  $E_1 \otimes E_2$  里的一个表示. 假如  $A = A_1 = A_2$  是一个双代数 (见 Hopf 代数 (Hopf algebra)), 则这个表示与上乘法  $A \rightarrow A \otimes A$  (这是一个代数同态) 的合成就产生  $A$  的一个新的表示, (亦) 称为张量积.

假如  $G$  是一个群,  $G$  的一个表示等同于  $G$  的群代数 (group algebra)  $k[G]$  的一个表示,  $k[G]$  是一个双代数, 所以先前的结构给出了与上述 (\*) 同样的定义 ( $k[G]$  的上乘法由  $g \mapsto g \otimes g$  给出).

假如  $\mathfrak{g}$  是一个 Lie 代数,  $\mathfrak{g}$  的一个表示等同于它的泛包络代数 (universal enveloping algebra)  $U\mathfrak{g}$  的一个表示,  $U\mathfrak{g}$  同样是一个双代数 (由  $x \mapsto 1 \otimes x + x \otimes 1$ ,  $x \in \mathfrak{g}$  确定其上乘法). 由此可以定义一个 Lie 代数的两个表示的张量积:

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(x) = 1 \otimes \pi_2(x) + \pi_1(x) \otimes 1.$$

5) 拓扑空间  $X$  上的两个向量丛  $E$  与  $F$  的张量积 (tensor product of two vector bundles) 是  $X$  上向量丛  $E \otimes F$ , 它在点  $x \in X$  的纤维是纤维的张量积

$E_x \otimes F_x$ . 该张量积可以定义为这样的丛, 它的转移函数是从  $E$  与从  $F$  在相同的平凡覆盖的转移函数的张量积 (见上面矩阵的张量积 (tensor product of matrices)).

#### 参考文献

[1] Atiyah, M. F., *K-theory: lectures*, Benjamin, 1967.

A. Л. Онищук 撰

【补注】 对于空间  $X$  上的一个向量丛  $E$  与空间  $Y$  上的一个向量丛  $F$ , 定义  $X \times Y$  上的向量丛  $E \times F$  (有时记作  $E \otimes F$ ) 为  $X \times Y$  上在  $(x, y)$  具有纤维  $E_x \otimes F_y$  的向量丛. 通过对角映射  $x \mapsto (x, x)$  拉回这个丛即为上面所定义的张量积. 蒋滋梅 译

#### 项 [term; терм]

用来表示对象的一个语言表示式. 例如, 表示式  $1$ ,  $0 + 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) / x$  是表示同一对象的不同项. 一个项可以含有自由变元 (free variable) (参数). 依照语言的语义法则, 一个项的自由变元的取值确定后, 这个项的取值便唯一确定为某个对象. 例如, 如果  $f$  是一个变元, 其值是可积实函数,  $x, a, b$  是三个变元, 其值都是实数, 则表示式  $\int_a^b f(x) dx$  是含有三个参数的一个项, 对参数的每一组值, 这个项取值为一个确定的实数 ( $x$  在这个项中是约束变元). 从语法角度来看, 项的特点是它们可以替换该语言的其他表示式 (项和公式) 中的变元, 分别得到新的项和公式.

在形式化语言 (formalized language) 中, 存在一些与这个语言的语义无关的形式规则, 以构造项并指明项中的自由变元. 在许多种类的语言中, 还存在一些规则用来确定所出现的项的种类.

B. H. Гришин 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[1] Schoenfield, J. R., *Mathematical logic*, Addison-Wesley, 1967.

沈复兴 译 罗里波 校

三元域 [ternary field; тернарное поле], 平面三元环 (planar ternary ring)

【补注】 一个集合  $R$ , 包括两个特殊元素  $0$  与  $1$ , 并且具有一个三元运算  $T$  满足:

A) 对于所有的  $a, b, c \in R$ ,  $T(a, 0, c) = T(0, b, c) = c$ ;

B) 对于所有的  $a \in R$ ,  $T(a, 1, 0) = T(1, a, 0) = a$ ;

C) 如果  $a, b, c, d \in R$ ,  $a \neq c$ , 那么存在唯一  $x \in R$ , 使得  $T(x, a, b) = T(x, c, d)$ ;

D) 如果  $a, b, c \in R$ , 则存在唯一的  $x \in R$ , 使得  $T(a, b, x) = c$ ;

E) 如果  $a, b, c, d \in R$ ,  $a \neq c$ , 那么存在唯一  $x, y \in R$ , 使得  $T(a, x, y) = b$  且  $T(c, x, y) = d$ .

为了坐标化任意的——不必是 Desargues 的——射影平面 (见 Desargues 假定 (Desargues assumption); Desargues 几何学 (Desarguesian geometry); 射影平面 (projective plane)), [A1] 中引进了三元域. [A2] 与 [A3] 中对原始定义有如下细微变动. 给定一个射影平面, 固定一般位置 (general position) 的四个点:  $O, X, Y, I$ , 且令  $A = YI \cap OX$ ,  $B = XI \cap OY$  与  $J = AB \cap XY$ . 对于  $OY$  上的  $\neq Y$  的点选取坐标  $(0, y)$ , 这里  $y$  跑遍一个集合  $R$  并且  $0 \in R$ , 指定  $(0, 0)$  为  $O$  的坐标,  $(0, 1)$  为  $B$  的坐标.  $(0, x)$  的从  $J$  到  $OX$  上的射影给出坐标  $(x, 0)$ , 并且有  $Y(x, 0) \cap X(0, y) = (x, y)$  (见图 A1).  $XY$  上的点得到一个坐标  $(m)$  ( $m \in R$ ) 或  $(\infty)$ , 这里  $\infty$  是一个  $\notin R$  的另外的符号, 并且直线由  $[m, k]$ ,  $[b]$  或  $[\infty]$  坐标化, 如图 A2 所示.

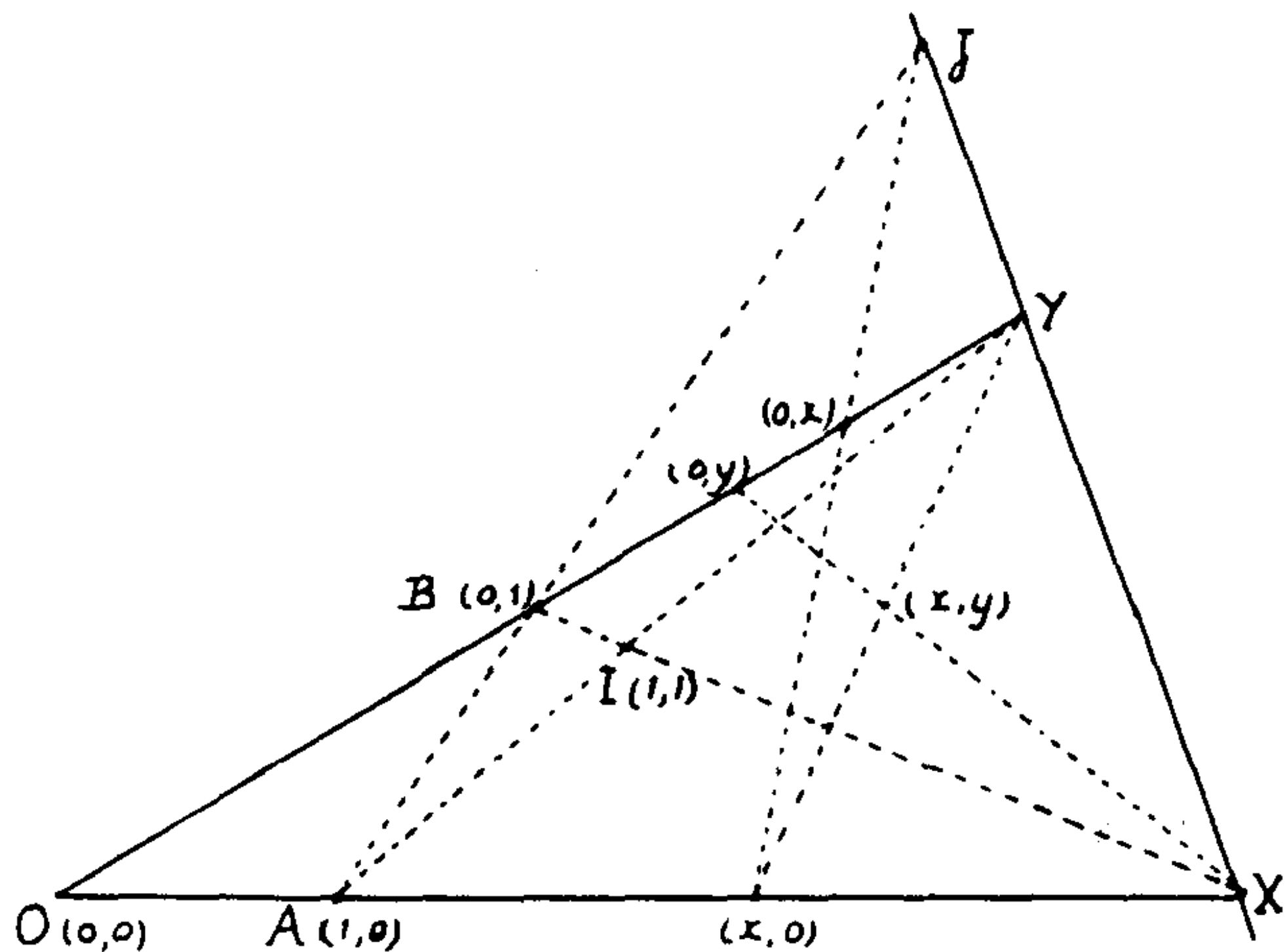


图 A1

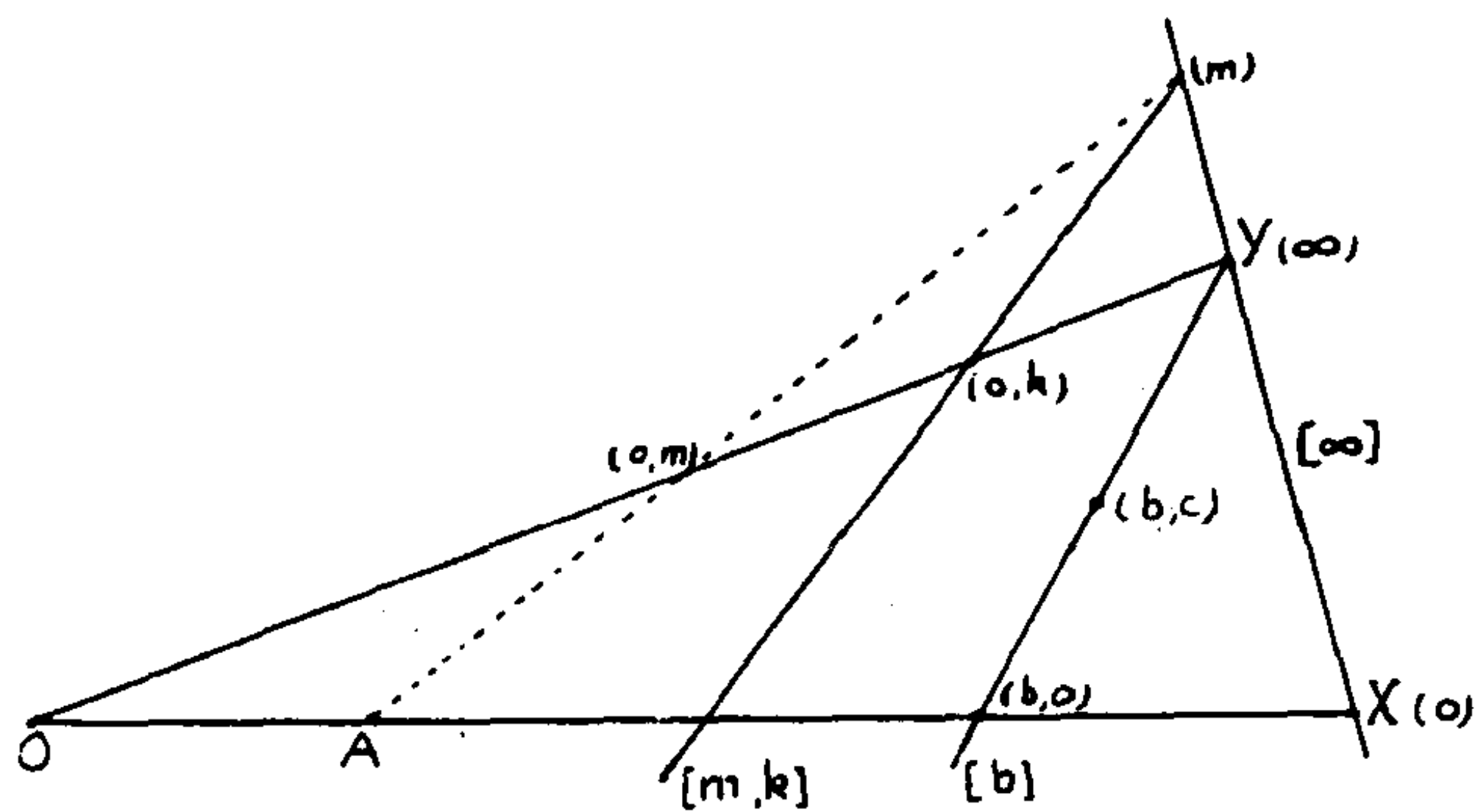


图 A2

$R$  上的三元运算  $T$  由  $T(a, b, c) = k$  定义, 当且仅当  $(b, c)$  位于  $[a, k]$  上. 关于  $T$  的性质 A) —



E) 则是射影平面的公理的推论. 反之, 任何三元域坐标化一个射影平面. 对于基点  $O, X, Y, I$  的不同的选取, 不同的三元域可以坐标化同一平面.

在  $R$  是有限的形式, C) 与 D) 等价于 D) 与 E); 进一步, C) 是 D) 与“最多只有一个如 C) 中的  $x$  的存在性”的推论.

在一个三元域  $(R, T)$  上, 加法 (addition) 由  $a + b = T(1, a, b)$  定义; 在这个运算下,  $R$  是以 0 为中性元的一个么拟群 (loop). 乘法 (multiplication) 由  $ab = T(a, b, 0)$  定义; 这使得  $R \setminus \{0\}$  成为以 1 为中性元的一个么拟群. 如果对于所有的  $a, b, c, T(a, b, c) = ab + c$ , 则称  $(R, T)$  是线性的 (linear). 线性等价于一个很弱的关于处于从点  $(\infty)$  透视的三角形的 Desargues 型条件 (见构形 (configuration), 特别是 Desargues 构形 (Desarguesian configuration), 亦见 Desargues 假定 (Desargues assumption)).  $(R, T)$  的其他代数性质, 诸如加法与乘法的结合律与左或右的分配律, 也可转化为某些 Desargues 型条件. 特别地, 一个以  $XY$  作为平移线的平移平面 (translation plane), 即  $XY$  平移的群对不在  $XY$  上的点是传递的平面, 由一个 (左) 拟域 (quasi-field) 坐标化, 这是一个具有结合加法并满足左分配律  $a(b + c) = ab + ac$  的线性三元域.

#### 参考文献

- [A1] Hall, M., Projective planes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), 229 – 277.
- [A2] Pickert, G., *Projektive Ebenen*, Springer, 1975.
- [A3] Hughes, D. R. and Piper, F. C., *Projective planes*, Springer, 1973.

F. D. Veldkamp 撰 林向岩 译 陆珊年 校

**第三理想** [tertiary ideal; терциарный идеал], 亦称叔理想

环  $R$  的理想  $I$ , 该理想不能表示成右分式理想 (fractional ideal)  $r(I, A)$  和任一严格大于  $I$  的理想  $B$  的交. 所有不可约理想都是第三理想. 在 Noether 环中, 第三理想与准素理想相同. 见理想的加性理论 (additive theory of ideals); 准素理想 (primary ideal); 准素分解 (primary decomposition).

假设环  $R$  满足对左和右分式理想的极大条件, 并且每个理想分解成有限多个不可分解理想的交. 则对每个理想  $Q$ , 存在一个第三根 (tertiary radical),  $\text{ter}(Q)$ , 即  $R$  的最大理想  $T$ , 使得对任何理想  $B$ ,

$$r(Q, T) \cap B = Q \Rightarrow B = Q.$$

同对准素理想一样, 交定理, 存在性定理和唯一性定理对第三理想是正确的.

分析了 (环的理想的, 模的子模的和其他的) 左和右分式性质, 导致带有分式的系统,  $S$  准素性和  $S$  准素根的一般概念在其中自然出现. 这就允许将“交”, “存在”和“唯一性定理”形式化为公理. 在这种逼近下, 第三性是使得这三个定理成立的相对于准素性的唯一的概念, 即是经典准素性概念的唯一“好”的推广 (见 [1], [2]).

#### 参考文献

- [1] Андрунакиевич, В. А., Рябухин, Ю. М., «Изв. АН СССР. Сер. Матем.», **31** (1967), 5, 1057 – 1090.
- [2] Riley, J. A., Axiomatic primary and tertiary decomposition theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **105** (1962), 117 – 201.

В. А. Андрунакиевич 撰 蔡传仁 译

**检验统计学** [test statistics; статистика, лежащая в основе критерия]

基于统计检验 (statistical test) 的统计学.

**试验** [testing; испытание]

经典统计学与概率论 (probability theory) 中的一个基本术语. 在公理化处理中, 它的定义是把基本事件空间任意分解为两两不交的事件. 称之为“原始试验”, 而由它们生成的  $\sigma$  域的元则称为“与给定试验相关的事件”. “试验”一词基本上是用在组合词中, 如“重复试验”, “独立试验”, “Марков 链中的试验”.

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】在西方, 很少采用如此简单概念的术语.

潘一民 译

**测试** [tests; тест], 控制论中的

信息逻辑分析的最重要的手段之一. 测试最初用于电路功能的控制问题. 此后, 在测试的基础上, 模式识别 (pattern recognition) 算法得到了发展. 在数学的许多领域中都可成功地采用测试这一手段. 有关测试的基本问题可按以下方式简明陈述.

1. 给定一个  $s$  行  $m$  列的矩形表, 其行代表问题 (标记) 集  $E$  中的元素  $e_1, \dots, e_s$ ; 而其列代表某一对象 (模式) 集  $F$  中的元素  $f_1, \dots, f_m$ .

	$f_1$			$f_m$
$e_1$				
$e_s$				

表的  $i$  行  $j$  列的交点的那一格填入答案  $f_j(e_i)$  (对第  $j$  个模式, 第  $i$  个标记的取值),  $f_j(e_i)$  在某一集合  $G$

中. 这样, 只要对  $i_1 \neq i_2$  有  $e_{i_1} \neq e_{i_2}$ , 可以把第  $j$  列 ( $1 \leq j \leq m$ ) 看作一个问题集上的函数  $f_j(x)$ . 自然地认为任意不同的两列都有区别. 由于集合  $E$  与  $G$  的各自特性在测试中无关紧要, 此后不妨认为  $E = \{0, 1, \dots, s-1\}$ ,  $G = \{0, \dots, k-1\}$ , 在某些情况下, 在  $E$  与  $G$  上有一个偏序  $\leq$  有时, 各列也可写成概率  $p_1, \dots, p_m$  ( $\sum_i p_i = 1$ ).

2. 定义表的逻辑分析目标. 为此, 固定一个列号对  $(i, j)$  ( $i \neq j$ ) 的子集  $\mathfrak{N}$ . 特别地,  $\mathfrak{N}$  给出划分集合  $F$  为子集的规则:  $f_i$  与  $f_j$  不属于同一子集, 当且仅当  $(i, j) \notin \mathfrak{N}$ . 子集  $\mathfrak{N}$  可解释为一个关系, 或某种性质.

有两种特殊情形: 1)  $\mathfrak{N} = \{(1, j), j = 2, \dots, m\}$ , 而  $f_1$  是一个区别函数 (此情形是与验证问题相联系的); 2)  $\mathfrak{N} = \{(i, j): i, j = 1, \dots, m, i \neq j\}$ , 它关系到诊断问题 (完全识别).

逻辑分析的目标可简述如下: 要得到一个程式, 对任意的  $i$  与  $j$ , 只要  $(i, j) \in \mathfrak{N}$  此程式就可将  $f_i$  与  $f_j$  区别开. 如果  $\mathfrak{N}$  对应于一个  $F$  的划分 (将  $F$  分为若干类), 则问题就等价于将  $F$  中每一给定的函数  $f$  归入适当的类别.

以下将主要讨论这一问题. 若给出了关于上表以及函数  $f$  的完全的知识, 经上面阐述的问题就有一个平凡解. 在实际问题中, 只能有代价地获得关于  $f$  的知识. 此外, 对于很大一类问题, 完全的表或者不知道, 或者表太大了, 无法全部用它. 因而, 人们总是限于用它的某一部分, 即所谓代表样本 (representative sample), 而问题以直观的形式出现.

3. 结果应是解该问题的一种允许方式. 设  $F$  中某函数  $f$  未知. 这就需要以指定某些行  $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}$  来提问的方式, 使得答案  $f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_r})$  能决定  $f$  属于那一类. 给定的提问既可按所谓绝对实验 (absolute experiment) (见自动机的实验 (automata, experiment with)) 来实现, 即同时提出问题  $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}$ , 并分析其答案  $f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_r})$ ; 也可按更一般的过程, 即借助于所谓条件实验 (conditional experiment) 来实现, 即逐个依次提出问题, 下一个提问的内容依赖于前面的问题和答案 (并在其有偏序  $\leq$  存在时, 考虑  $\leq$ ). 一个条件实验可以用一个有向树来表达, 其中顶点代表问题, 边代表答案, 分支代表实验结果. 图 1 表出了  $E_1, E_2, E_3$  三个实验的结果.

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$e_1$	0	0	1	1
$e_2$	0	1	0	0
$e_3$	0	0	0	1

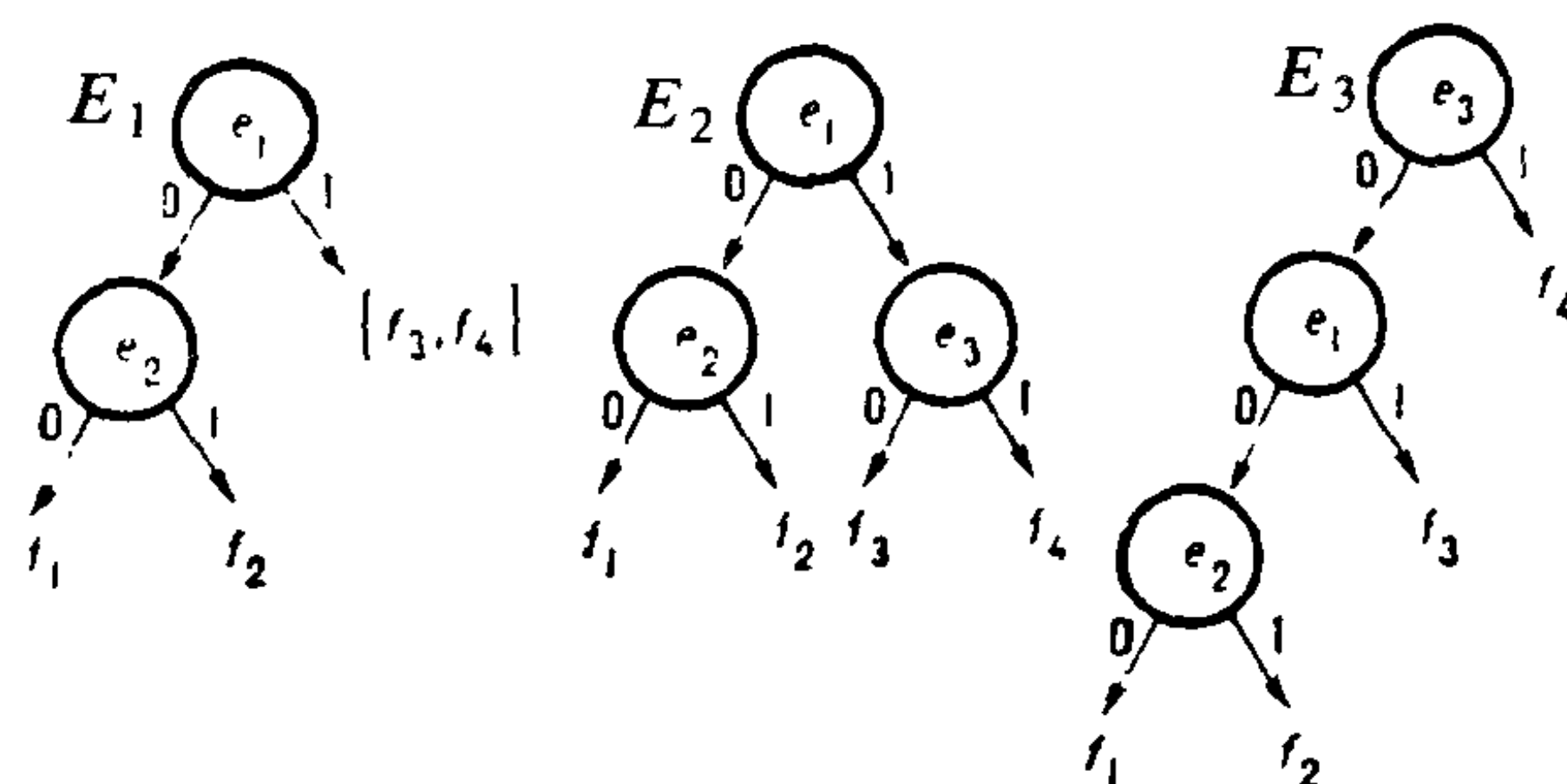


图 1

一组问题  $T$  以及有关它 (答案) 的必要信息若能按性质  $\mathfrak{N}$  去区分对象, 就称之为一个初始表的测试.

在绝对实验的情形, 通常一个测试理解为一组问题  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\}$ , 对任何  $\mathfrak{N}$  中的  $(i, j)$ ,  $T$  中一定有  $e$  使  $f_i(e) \neq f_j(e)$  (识别  $\mathfrak{N}$  的条件). 对多值 (与非处处定义) 的表, 可用其他谓词来代替谓词  $\neq$ .

在条件实验的情形, 一个测试  $T$  是一个有向树, 以识别性质  $\mathfrak{N}$ , 它是由在条件实验  $E$  中抹去最后的边而得到的. 这样, 在上面给出的诊断问题的例子中,  $\{e_1, e_2, e_3\}$  是它的绝对测试; 而实验  $E_2$  与  $E_3$  导出条件测试  $T_2$  与  $T_3$ ; 但实验  $E_1$  却不能导出一个条件测试.

对任何  $\mathfrak{N}$ , 集合  $T_0 = \{e_1, \dots, e_s\}$  总是一个绝对测试 (平凡测试 (trivial test)). 如果一个表的行列数很大, 则平凡测试导致一个十分费功夫的逻辑分析过程. 从而就发生了构造简化测试的问题. 为此, 先定义测试  $T$  的复杂性 (complexity)  $l(T)$  的概念. 下面给出几种不同的绝对测试复杂性的定义:

$$l_1(T) = r,$$

这里  $l_1(T)$  表示测试的“重数”, 即测试中元素的个数;

$$l_2(T) = \sum_{j=1}^r l(e_{i_j}),$$

其中  $l(e_{i_j})$  为完成提问  $e_{i_j}$  所需的时间,  $l_2(T)$  则是作序贯提问 (元素的样本) 所需测试时间的度量;

$$l_3(T) = \max l(e_{i_j}),$$

它表示并行提问 (元素的样本) 所需的测试时间.

对条件测试也可引入类似的复杂性表征, 即从对应树出发, 将树的顶点数、全树长 (即树的总边数) 以及一个分支的最大长度都表示出来. 如果表中各列出现的概率为  $p_1, \dots, p_m$ , 则量  $\sum_{i=1}^m l_i p_i$  (其中  $l_i$  是指向  $f_i$  的树的分支长度) 也是一个自然的复杂性度量. 对给定的表, 以  $\mathfrak{N}$  为控制目标, 在上述控制方法与复杂性度量下, 一个测试称为最小的 (minimal), 如果它具有最小的复杂性. 最小测试的构造是测试理论的中心问题之一. 其原因可由一个绝对测试的例来表明 (这里集合  $E$  与  $G$  不是偏序集). 对每一个



表, 存在一个测试  $T$  使得  $l_1(T) \leq \min(s, m-1)$ , 而且还可以描绘出全部以  $\min(s, m-1)$  为最优上界的表. 同时, 对  $m = m(s)$ ,  $s \rightarrow +\infty$ , 对几乎全部的表

$$\log_2 m \leq l_1(T_{\min}) \leq 2\log_2 m,$$

换句话说, 对很广一类参数值, 最小测试  $T_{\min}$  比上述测试都简单.

有许许多多构造最小测试的算法, 例如, 去检查集合  $\{e_1, \dots, e_s\}$  的子集的绝对测试, 以及去检查分枝数与顶点数均有界的树的条件测试等. 然而无论哪种算法都是极其费功夫的. 最小测试的构造是与所谓极端测试的构造相联系的. 极端测试的概念使得可以从全部测试的集合中挑选那些在某种意义下无冗余的测试. 对一个原始表及  $\mathfrak{N}$ , 一个绝对测试 (无偏序  $\leq$ )  $T$  称为极端的 (extremal), 如果它没有真子集  $T' \subseteq T$ , 使得对  $\mathfrak{N}$ ,  $T'$  也是一个测试. 极端测试的概念可借助于集合  $\{f_1, \dots, f_m\}$  的划分来表达, 令  $R_T$  是表的列的这样一个划分: 它使该表的任何两列属于同类当且仅当它们对  $T$  中的全部问题都有相同的答案. 测试  $T$  是极端的, 当且仅当对任何两个  $T$  的不同子集  $T'$  与  $T''$ , 如  $T'' \subseteq T'$  且  $T' \neq T''$ , 则必存在一对  $(i, j) \in \mathfrak{N}$  使得在  $T''$  中,  $f_i \equiv f_j$ , 而在  $T'$  中则不然. 这等价于: 对于  $\mathfrak{N}$ , 划分  $R_{T'}$  是划分  $R_T$  的细分. 对极端测试  $T$ , 有  $l_1(T) \leq m-1$ . 另一方面, 对任一测试, 一定可以删去其中部分元素而得到一个极端测试.

对条件测试 (无  $\leq$ ), 极端性意味着每一个序贯提问  $e$  是这样选取的, 使得至少  $\mathfrak{N}$  中一个对  $(i, j)$ , 在提问  $e$  前是属于划分的同一子块, 而  $f_i(e) \neq f_j(e)$ , 因而经提问  $e$  将它们归入划分的不同子块.

在前面的例子中, 测试  $T = (e_1, e_2, e_3)$  是一极端绝对测试, 而  $T_2$  与  $T_3$  是极端条件测试. 测试  $T_2$  肯定比绝对测试  $T$  在时间上较为经济, 因为  $T$  中各诊断情况均需提问 3 次, 而在  $T_2$  中每种诊断情况只需提问 2 次. 将上述例子一般化, 容易构造一个表, 使得它的最小绝对测试长度为  $m-1$ , 但在某个条件测试中分支的最大长度只有  $\log_2 m$ . 这是条件测试相对于绝对测试最大的优点.

在集合  $E$  与  $G$  中有偏序  $\leq$  的情况下, 极端性的定义变得远为复杂. 有关自动机诊断的自动机函数  $\{f_1, \dots, f_m\}$  的表的复杂性已有定义 (见自动机的实验 (automata, experiments with)). 这里  $E$  与  $G$  中的元素是由字母表  $A$  与  $B$  组成的字; 而关系  $x \leq y$  是指字  $x$  是字  $y$  的前面部分. 当一个字  $e = a_1 \dots a_t$  输入自动机, 则所有  $e' = a_1 \dots a_{t'}$ ,  $t' \leq t$  (字  $e$  的所有前面部分) 也输入了自动机. 从而冗余可能是由这元

素  $e$  产生的. 更确切地说, 一个提问  $e = a_1 \dots a_t$  称为不可约的 (irreducible), 如果对任意的  $v = 1, \dots, t-2$ , 以下二者必居其一: (1) 从字  $a_1 \dots a_v$  到字  $a_1 \dots a_{v+1}$  的转移涉及一个对  $(i, j) \in \mathfrak{N}$ , 其中  $i$  与  $j$  同属于划分  $R(a_1 \dots a_v)$  的一个子块; (2) 能以向  $(f_1, \dots, f_m)$  中的一个新状态的转移来向前进一步. 对于  $v = t-1$ , 转移肯定使上述划分发生. 事实上, 只要从字中抹去一些片断使原字所引起的划分仍全部保持, 就可以使每一个字都变为不可约的. 现在, 如附加所有  $T$  的元素均为不可约的条件, 就使绝对极端测试的概念得到推广. 条件极端测试的概念有两个追加条件: 1) 若在某一阶段选择了提问  $e_v$ , 则在下一步必须跟着选择  $e_{v+1}$ ; 2) 对应于树  $T$  上极端顶点的提问必须均不可约.

在测试的理论中有以下问题: 构造寻找不同类型测试的有效算法; 极端测试总数的估计; 测试与表的分类; 关于表结构的进一步信息对于测试的复杂性及其构造的有效性的影响的研究.

诊断问题的全部系列归结为表的形式.

1) 电路错误的寻觅 (见控制系统的可靠性和检验 (reliability and inspection of control systems)) 这里, 一个待测试的电路  $\Sigma$  是由一个 Boole 函数  $f(x_1, \dots, x_n)$  来实现的. 集合  $E$  由全部  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  组成,  $s = 2^n$ ,  $G = \{0, 1\}$ , 而  $F$  由 Boole 函数  $\{f_1, \dots, f_m\}$  组成, 它们表征线路的状态是否正确.

2) 自动机控制. 这里, 表中通常有无穷多行 (输入字集是无限的). 然而, 为了控制, 只需要那些不可约字的初始片断构成的字, 其字长有一个常数上界, 而此上界仅依赖于  $m$  与  $f_1, \dots, f_m$  的状态数. 因而结果表是有限的.

3) 医学中的诊断问题. 为诊断某类疾病, 设置一个表, 其列对应于症状, 而行对应于这类疾病有意义的征兆的表征集. 如果征兆是以离散形式表达的 (例如体温正常与否, 血压正常与否等), 于是就得到一个上述类型的表, 于是如果征兆集充分大, 则每两列均不同.

4) 几何形状识别. 假设离散表中每格可有 0, 1 两种符号, 它们各自有其特定的实现, 而以它们的大小和位置加以区别 (见图 2). 要对表中每一格上的状态来提问 (是否有阴影), 并由此发现写入的记号是什么. 这里  $e_1, \dots, e_s$  是格中数字,  $G = \{0, 1\}$ ,  $f_1, \dots, f_m$  均取值为 0 或 1. 如果格  $e$  中为阴影的, 则  $f_i(e) = 1$ , 否则为 0.

5) 博弈论问题. 著名的“战舰问题”实际上是去相继选择一系列方格, 由合作人宣读每个选择的考查结果, 并由此判断敌方战舰的布置的问题. 这里, 可以造一个表, 其列表征所布置的不同战舰 (如识别问

题, 由若干“0”与“1”构成). 条件测试是解决此问题的一种方法.

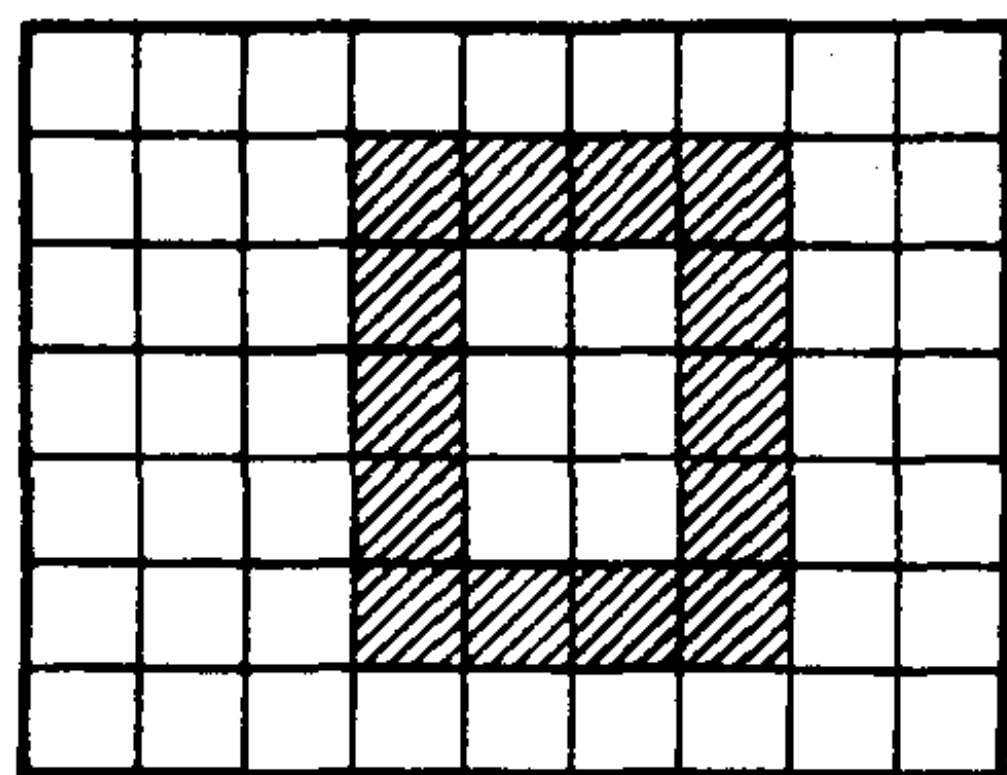


图 2

6) Boole 函数的最小化. 它归结为测试问题的特殊情况, 其中表描述了集合  $N_f$  (使  $f=1$  的点集) 由所谓最大面 (对应于  $f$  的简单内涵) 的覆盖情况.

许多经典组合问题 (classical combinatorial problems) 可以看作测试问题. 例如推销员旅行问题, 背包问题, 以及多种求极值问题.

测试问题使得可以去分析标记之间的逻辑关系, 并引入标记的重要性的度量. 例如, 可以说一个标记的重要性定义为所有极端测试总数之比. 在应用问题求解中, 对于构造启发性算法, 建立标记的重要性的度量是很有用的. 在地质学, 经济学, 医学等领域的诊断问题中, 这个思路都有很成功的应用.

#### 参考文献

- [1] Яблонский, С. В., Чегис, И. А., «Успехи матем. наук», 10 (1955), 4, 182 – 184.
  - [2] Соловьев, Н. А., Тесты, Новосиб., 1978.
  - [3] Дмитриев, А. Н., Журавлев, Ю. И., Кренделев, Ф. П., «Дискретный анализ», 1966, 7, 3 – 5.
- С. В. Яблонский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Batchelor, B. G., Pattern recognition, Plenum, 1978.
- [A2] Clark, K. L. and Cowell, D. F., Programs. machines. and computation, McGraw-Hill, 1976.
- [A3] Duda, O. and Hart, P. E., Pattern classification and scene analysis, Wiley, 1973.
- [A4] Nelson, R. J., Introduction to automata, Wiley, 1968.
- [A5] Trakhtenbrot, B. A. and Bardzdin, Ya. M., Finite automata, North-Holland, 1973.
- [A6] Weihrauch, K., Computability, Springer, 1987.

钱敏平 译

四圆坐标 [tetracyclic coordinates; тетрациклические координаты], 平面中一点的

复反演平面中一点  $(x)$  的一种齐次坐标  $x_0: x_1:$

$x_2: x_3$ . 不全为零的数  $x_i$  由关系

$$(x, x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

联系. 满足线性方程

$$(y, x) \equiv y_0 x_0 + y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 = 0$$

的所有点  $(x)$  称为构成一个具有“坐标”  $(y)$  的圆 (circle). 两个圆  $(y)$  和  $(z)$  是正交的 (orthogonal), 如果  $(y, z) = 0$ ; 是相切的 (tangent), 如果

$$(y, y)(z, z) - (y, z)^2 = 0.$$

如果两个圆  $(y)$  和  $(z)$  相交, 则表达式

$$\frac{(y, z)}{\sqrt{(y, y)} \sqrt{(z, z)}}$$

度量了它们夹角的余弦 (或它们的反演距离的双曲余弦).

在三维情形, 连同附加坐标  $x_4$ , 得到类似的五球坐标 (pentaspherical coordinates), 它以球面代替圆.

根据另一种只包含实数的定义, 平面内的点与圆的四圆坐标可利用球极平面投影 (stereographic projection) 引入. 这里平面内一点的四圆坐标是在球极平面投影下, 球面上对应于它的点的齐次坐标. 平面中一个圆的四圆坐标是空间中球面上圆的平面的极点的齐次坐标, 该点在关于这个球面的球极平面投影下与平面中的这个圆对应.

#### 参考文献

- [1] Клейн, Ф., Высшая геометрия, М.-Л., 1939 (译自德文).
- [2] Бушманова, Г. В., Норден, А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972.

Г. В. Бушманова 撰

【补注】反演平面 (inversive plane), 也称为共形平面 (conformal plane), 是由平面的无穷远处添加一个理想点“ $\infty$ ”而得到. 名称的由来是由这样的事实: 有了这个添加的点, 对一个圆的反演 (inversion in a circle) 成为一个处处确切定义的周期为 2 的“自同构”. (给定一个半径为  $r$  且中心为  $O$  的圆, 在关于这个圆的反演下, 两点  $P$  与  $P'$  相对应, 当且仅当  $(OP)(OP') = r^2$ .) 在反演平面中所有直线通过  $\infty$  并且 (原平面的) 一直线是一个中心在  $\infty$  的圆. 于是所有的圆 (直线) 或者相切或者有两个交点.

反演空间 (inversive space) (共形空间 (conformal space)) 是由 3 空间的无穷远处添加一个理想点而得到 (使得对一个球面的反演处处确切定义且周期为 2).

任何角变为一个相等的角, 从而对于反演空间与反演平面使用术语共形空间与共形平面.

#### 参考文献



- [A1] Clifford, W. K., On the powers of spheres, in Mathematical Papers, Macmillan, 1882, 332 – 336.
- [A2] Darboux, G., Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace, *Ann. Ecole Norm. Sup.*, 1 (1872), 323 – 392.
- [A3] Klein, F., Vorlesungen über höhere Geometrie, Chelsea, reprint, 1949.
- [A4] Lachlan, R., On systems of circles and spheres, *Philos. Trans. Royal Soc. London A*, 177 (1886), 481 – 625.
- [A5] Coolidge, J. L., A treatise on the circle and the sphere, Clarendon Press, 1916.
- [A6] Woods, F. G., Higher geometry, Ginn, 1922.
- [A7] Wilker, J. B., Inversive geometry, in C. Davis, B. Grünbaum and F. A. Sherk (eds.): The Geometric Vein, Springer, 1980, 374 – 442.
- [A8] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969, § 6.4, § 6.8. 林向岩 译 陆珊年 校

**四面体坐标** [tetrahedral coordinates; тетраэдральные координаты], 三维空间中点  $P$  的

四个数  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 它们与从点  $P$  到一个固定的 (不一定是正的) 四面体 (tetrahedron) 的四个面的距离成比例 (具有给定的比例系数). 类似地, 可以引入任何维的一般正规坐标. 四面体坐标对应的二维情况是所谓的 三线坐标 (trilinear coordinates). 亦见 重心坐标 (barycentric coordinates).

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Coxeter, H. S. M., Regular polytopes, Dover, reprint, 1973. 杜小杨 译

**四面体空间** [tetrahedral space; тетраэдра пространство]

作为二元四面体群在三维球面上作用的轨道空间的三维空间. 该群由生成元  $R, S$  和关系  $R^3 = S^3 = (RS)^2$  所表现. М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Coxeter, H. S. M., Regular complex polytopes, Cambridge Univ. Press, 1991, p. 76.

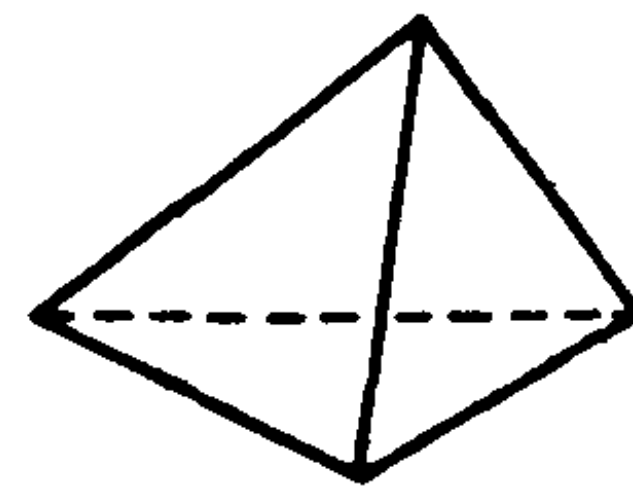
石生明 译 王杰 校

**四面体** [tetrahedron; тетраэдр]

不全在同一平面上的四个点的集合构成的凸包, 也可以说是这样一个立体图形, 它具有四个三角形面, 6条棱, 6个顶点 (在每个顶点上有三个棱相交). 特别是, 当 6 条棱相等时, 为 正四面体 (regular tetrahedron)——五种 **Plato 立体** (Platonic solids) 之一. 如果正四面体的边长是  $a$ , 则它的体积是

$$\frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \approx 0.1179 a^3.$$

一个四面体是一个三棱锥.



BC9-3

【补注】四面体也称为 3 单形 (3-simplex). 四面体的 Schläfli 符号 (Schläfli symbol of a tetrahedron) 是  $(3, 3)$ .

参考文献

- [A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969.
- [A2] Senechal, M. and Fleck, G., Shaping space, Birkhäuser, 1988. 杜小杨 译

**定理** [theorem; теорема]

真实性得到证明 (proof) 的数学命题.

定理概念是与数学证明概念一起发展并且变得更加精确的. 就公理方法 (axiomatic method) 来说, 所考虑的理论中的定理是由事先选定的称为公理 (axiom) 的命题, 用纯逻辑的方法导出的命题. 由于假定公理是真的, 定理也应该是真的. 定理概念和证明概念的进一步精确与数理逻辑中对逻辑结果 (logical consequence) 概念的研究分不开, 因此对于广泛的一类数学理论, 就有可能把逻辑演绎过程归约为公式变换; 所谓公式无非就是在一个适当的形式化语言 (formalized language) 中用确切的表述法则 (演绎法则, 见推导法则 (derivation rule)) 写成的数学命题, 演绎法则只考虑命题形式 (不考虑内容). 在用如此方式产生的形式理论中, 证明 (proof) 就是给出公式的一个有限序列: 序列中的每一个公式或是一条公理, 或是由序列的前面的公式根据演绎法则而得. 一个公式称为一个定理, 如果它是一个证明中的最后的公式.

定理概念的如此精细改进, 提供了用严格数学方法得到数学理论的一系列重要结果的可能性. 特别地, 已经证明, 表达数学实质章节的公理化理论 (如算术) 是不完全的, 也就是说, 存在一些命题, 它的真或假是不能根据公理用纯逻辑的方法加以证明的. 通常这些理论是不可判定的. 也就是说, 不存在一个统一的方法 (算法) 以便可以判定一个任意给定的命题是不是一个定理. В. Е. Плиско 撰

## 【补注】

## 参考文献

[A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).

[A2] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967. 卢景波 译 罗里波 校

理论程序设计 [theoretical programming; программирование теоретическое], 程序设计理论 (theory of programming)

研究程序的数学抽象的数学原理, 把程序看作用形式语言表达的对象, 该对象有某种非形式和逻辑结构并可在自动装置上执行. 基本上, 理论程序设计可以在两种计算模型的基础上公式化: 具有存储的顺序程序或操作符程序和递归程序. 两种模型都是在抽象代数系统  $\langle D, \Phi, \Pi \rangle$  上构造的, 这个代数系统是由对象定义域  $D$ , 函数的有限集合 (基调, signature)  $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  和谓词  $\Pi = \{\pi_1, \dots, \pi_n\}$  构成的, 具有对每个符号给定的变元数目 (它的元数 (arity)).

程序类的定义由三部分组成: 程序的模式 (即它的语法), 解释和语义. 程序的模式 (scheme of a program) 是一个构造性对象, 它指出程序如何用基调和其他形式符号来构造. 解释 (interpretation) 是具体对象定义域的规格说明和对基调符号的赋值, 赋给它们与对象定义域和符号元数相容的具体函数和谓词 (基本操作). 语义 (semantics) 是把执行结果赋予每个程序的一种方式. 通常, 程序可计算的函数与程序有关. 解释作为语义中的参数出现, 因此, 程序的模式就定义一组程序和由它们计算的函数, 它们能在基本操作族上变化解释时得到.

带存储的程序模式 (scheme of a program with memory), 也称为类 Algol 的 (Algol-like) 或操作符模式 (operator scheme), 能给出一个面向有限自动机的转换图 (transition graph), 通常有一个输入和一个输出顶点, 并有一个 (对于变换器) 和两个 (对于识别器) 输出弧. 使用基调符号和用于变量和常数的可数符号集, 人们用通常的方法构造函数和谓词项的集合. 每个识别器匹配到一些谓词项, 而每个变换器匹配到一个赋值操作符, 形式是  $y := \tau$ , 其中  $y$  是变量,  $\tau$  是函数项. 在模式中变量的有限集形成它的存储 (memory). 解释补充基本操作的具体化, 把它的扩充定义域归于每个变量, 值归于每个常数. 所谓操作语义 (operational semantics) 对带有存储的程序是最普通的. 它由在存储的给定状态上程序的执行算法所组成. 程序可通过在转换图上移动而执行. 当遇到识别器时, 计算谓词项, 沿着对应于谓词值的弧走下去. 当遇到带有操作符  $y := \tau$  的变换器时, 计算  $\tau$

的值, 并归它到  $y$ . 当遇到输出点时, 得到程序的执行结果, 它是当前存储的状态.

递归程序的模式 (scheme of a recursive program) 或递归模式 (recursive scheme), 除了函数项以外, 还使用其他的项, 即所谓条件项 (conditional terms), 它和函数项一起形成可计算项的集合. 条件项通过分情形的方法给出计算, 有形式  $(\pi | \tau_1 | \tau_2)$ , 其中  $\pi$  是谓词,  $\tau_1, \tau_2$  是可计算项; 它在 Algol 语言 (Algol) 中对应到条件语句

IF  $\pi$  THEN  $\tau_1$  ELSE  $\tau_2$ .

项在初始和形式变量, 常数和定义函数的符号的有限集上构造. 递归模式由一个带有输入变量的主要可计算项和  $f(x_1, \dots, x_n) = \tau$  类的递归方程有限族组成, 其中  $f$  是要确定的函数的符号,  $x_1, \dots, x_n$  是形式变量,  $\tau$  是带有集合  $\{x_1, \dots, x_n\}$  中变量的项, 而要被确定的函数是属于一个方程族. 在基本操作解释的自然假定下, 要被确定的函数中的方程系统常常有一个所谓最小不动点 (least fixed point) (满足这些方程的一组函数, 具有图, 属于这些方程的任何其他解的图). 在主要项中对要被确定的函数代入最小不动点的对应分量, 人们得到一个函数项, 给出输入变量的一个函数, 它也是递归程序可计算的函数. 因为这种方法赋给一个程序以一个可计算函数而并没有给出具体计算算法, 因此定义的语义称为指称的 (denotational).

上述形式化方法指出了程序设计语言的表达工具的层次范围的轮廓: 如果操作符模式接近机器程序的结构, 那么递归模式是接近于要编程的问题的初始语句.

理论程序设计研究具有研究程序模型中使用的一般数学工具的特征. 形式组合方法形成程序模式理论, 它研究在基本操作解释的选择下程序的不变性质. 通过逻辑方法, 人们研究定义程序语义的方法, 也寻找构造程序过程中的规律. 在代数方法中, 从具体程序结构的抽象, 人们注意在考虑程序或程序类时所产生的集合.

理论程序设计的显著分支基本上包括由活动装置执行的顺序计算的模型. 有关组织一组计算机联合动作以解决一个问题或者通过信号传输和信息交换合作的研究, 是属于一个新的学科——所谓并行程序设计 (parallel programming).

程序模式理论. 这个理论的基本概念是功能等价性. 两个模式称为功能上等价的 (functionally equivalent), 如果对于任何解释, 对应的程序计算出恒等的函数. 程序的每次执行可被指派为它的协议 (protocol)——在影响执行程序次序的基本操作



基调中的一个专门类术语。如果参加在程序中的谓词的真值是已知的，那么协议能从这些值唯一地构造，并且在这个构造中，人们现在不需要对基本操作的解释。如果谓词的真值是任意选择的，那么作为结果，对程序模式 (program scheme) 创建一组形式协议，称为它的行列式 (determinant)。模式是形式上等价的，如果它们的行列式重合。形式等价是正确的，如果它包含功能的等价。因为行列式是在任意选择一组有限集合基础上用纯组合的方法构造的，它形成由某个自动机接受的形式语言。导致可解行列式的程序模式协议的定义是特别令人感兴趣的。对这种行列式，人们可以提出寻找程序模式的完全的变换系统的问题，变换系统是完全的，如果任何两个形式上等价的模式能由这些变换互相翻译。

程序模式的结构理论可以在 A. A. Лапунов 和 Ю. И. Янов ([5], [10]) 的奠基性工作的基础上发展。后者透彻地研究了具有一位 (one-place) 操作、只有一个变量进入程序 (Янов 模式 (Yanov schemes)) 的操作符模式的最简单模型。Янов 模式的协议是由谓词的值选择的一系列可执行的操作符。人们可以取有限自动机作为接受其行列式的自动机；形式等价性是可解的，进一步，它和功能等价重合。用于 Янов 模式的完全变换系统已经找到。

对于操作符模式的一般模型，功能等价性已被证明是不可解的，但人们已经成功找到一种协议形式——所谓逻辑终结历史 (logical-terminal history)——它导致可解的行列式。这个协议固定执行序列和模式的谓词的值，对谓词的每个变元它定义一个函数项，在程序执行时，计算给定变元的值。人们可以取两带 (two-tape) 有限自动机作为接受其行列式的自动机。用于逻辑终结的形式等价的完全变换系统也已经找到。

把程序模式从一个计算模型翻译到另一个的问题在程序模式理论中占有重要位置。操作符模式能有效地翻译成具有相同基调的递归模式，但是逆翻译是不可能的，因为一般来说，递归程序的执行要求任意多的存储单元。

递归模式的行列式可以描述为上下文无关语言 (见上下文无关文法 (grammar, context-free))，但是对应的形式等价的可解性问题还是未解决的 (1983)。

程序模式理论也致力于各类程序模式的研究以帮助选出可解等价的情况；它也通过附加的程序设计语言的结构丰富基本计算模型，并进一步研究这种充实的表达能力和可归约性问题。

程序的逻辑理论。程序  $A$  对输入条件  $P$  和输出条件  $Q$  是部分正确的 (记作  $P\{A\}Q$ )，如果当  $P$

对变量的输入值为真， $A$  终止操作后， $Q$  对变量的输出值为真。这里， $P$  称为  $A$  的前条件 (pre-condition)， $Q$  称为  $A$  的后条件 (post-condition)。程序  $A$  称为完全正确的 (totally correct)，(记作  $P\langle A \rangle Q$ )，如果  $A$  对  $P$  和  $Q$  是部分正确的，并且对满足  $P$  的变量的输入值， $A$  终止操作。为了证明一个顺序程序是部分正确的，人们常常使用 Floyd 方法 (Floyd method)，它组成如下。在程序模式中，人们选择控制点，使得循环路径至少通过一点。模式中的输入与输出也看作控制点。每个控制点有一个特定的条件 (称为归纳语句 (inductive statement) 或循环不变量 (cycle invariant))，它对通过此点的每个转移都真。与每个输入和输出点有一个相联的输入和输出条件。现在对两个相邻控制点之间的程序路径给一个所谓正确性条件。如果所有这些条件成立，程序必定是部分地正确。在证明部分正确性的过程中，证明程序终止操作的方法在于在程序中引入附加的计数器并对程序的输出建立这些计数器的有界性。

已经建议用有限公理系统 (称为 Hoare 逻辑 (Hoare logic)) 来公理地指明程序设计语言的语义，它由公理和推理规则组成，程序中的语句的部分正确性，可作为定理推导。例如，对于赋值操作符，公理模式有形式

$$P(x \leftarrow e) \{x := e\} P,$$

其中  $P(x \leftarrow e)$  表示在  $P$  中对所有变量  $x$  的出现用表达式  $e$  替换，对于循环类型的操作符 WHILE 的推理规则有形式

$$(P \wedge R) \{A\} P \vdash P \{ \text{WHILE } R \text{ DO } A \} (P \wedge \neg R) \\ (P \text{ 是一个循环不变量}).$$

假定人们考虑 Hoare 逻辑，其中一阶算术语言取为写出条件的语言。程序的部分正确性称为可推导的，如果它能由增加有关算术的真值公式进行推广的 Hoare 逻辑所推导，并且称为真的，如果它关于程序的操作 (或指称) 语义是真的。Hoare 逻辑称为相容的 (consistent)，如果用它可推导的每个语句也是真的，它称为完全的 (complete) (关于算术的)，如果每个真语句用它是可推导的。一个相容的和完全的 Hoare 逻辑已被构造，特别是对于这种程序设计语言，它们包括简单变量，赋值操作符、复合和条件操作符，循环和过程 (可能是递归的，但有许多限制)。

Hoare 逻辑的一个重要推广称为算法的 (algorithmic) (或动态的 (dynamic)) 逻辑。假定  $P\{A\}Q$  能表示为  $P \supset [A]Q$ ，其中  $[A]Q$  是最弱前条件，则“程序  $A$  对后条件  $Q$  是部分正确的”这一断言是正确



的。类似地，在完全正确性的情况，假定  $P \langle A \rangle Q$  能表示为  $P \supset \langle A \rangle Q$ 。算法逻辑的公式中基本逻辑语言（用于写条件）的公式和程序用 Boole 操作，量词和形如  $[A]Q$ ,  $\langle A \rangle Q$  的操作构成。有关程序的各种断言，例如它们的等价性，可以用算法逻辑表达。类似于 Hoare 逻辑，人们已经为算法逻辑构造了相容的和完全的有限公理系统，用于也允许不确定程序的程序设计语言。

为了证明有关递归程序的陈述，人们常常使用有关最小不动点的定义的特殊归纳法。为简单起见，假定递归程序由方式  $f = \tau(f)$  给出，它的指称语义是最小不动点  $f_{fix}$ 。在有关条件  $P$  的自然假定下，下列归纳原理成立：若公式  $P(\Omega)$  真且  $P(\tau^i(\Omega))$  蕴涵  $P(\tau^{i+1}(\Omega))$ ，则  $P(f_{fix})$  是满足的（这里， $\Omega$  是无处定义的函数）。为了描述高级程序设计语言的指称语义，人们使用数据的定义域的规格说明为所谓完全 Scott 格（complete Scott lattice）。

程序综合的问题可以形式化为构造定理  $\forall x \exists y \Pi(x, y)$  的证明的问题，以及从这个证明中程序的抽取。人们已经构造了一个算法，从直觉主义逻辑证明，给出一个用 Algol-68 语言编写的程序。如果证明使用归纳规则，则形如 FOR ... TO ... DO ... OD 的循环在程序中对应用于它。抽取的问题具有可容许复杂性，如果假定人们使用标准（给定的）函数和谓词去构造它，标准函数和谓词的性质用特定形式的公理来描述。

**程序设计的代数理论。** 可以取 Глушков 的离散变换等价问题作为代数方法在理论程序设计中的应用的一个例子，其中能自然地包括操作符程序模式。设  $\mathfrak{A}$  是具有输入字母表  $X$  和输出字母表  $Y$ 、并具有给定的初始状态和终止状态的 Mealey 自动机（见有限自动机（automaton, finite））。设  $G$  是具有生成元集  $Y$  和幺元  $e$  的半群。考虑具有状态集  $G$ 、输入集  $Y$ 、输出集  $X$ 、初始状态  $e$ 、输出函数  $\mu(g)$  和转移函数  $q(g, y) = gy$  的（可能是无限的）Moor 自动机  $G_\mu$ 。功能上与  $G_\mu$  相容的自动机  $\mathfrak{A}$  称为离散变换器（discrete transformer），如果  $\mathfrak{A}$  接受  $G_\mu$  的输出作为输入， $G_\mu$  接受  $\mathfrak{A}$  的输出作为输入。这里， $\mathfrak{A}$  的输出是  $G_\mu$  在  $\mathfrak{A}$  暂停时的状态。各离散变换器关于半群  $G$  是等价的，如果对于每个映射  $\mu: G \rightarrow X$ ，它们都不和  $G_\mu$  一起暂停，或者它们以相同的输出一起暂停。人们已经建立关于左消去半群的离散变换器等价问题的可解性，在左消去半群中幺元是不可分解的，且字（幺元）问题是可解的。人们也描述了关于交换半群的离散变换器等价性的一切可解和不可解情况。

理论程序设计在实践中主要是作为程序设计研究的概念框架，而在技术方面，则是通过形式程序设计

语言的理论来表现自己的影响。这里，抽象计算模型的性质用于精化程序设计语言的语义，并为各种程序处理提供基础（见程序的翻译（translation of programs）；程序最优化变换（program-optimizing transformations））。

#### 参考文献

- [1] Glushkov, V. M. and Letichevskii, A. A., Theory of algorithms and discrete processors, *Advances Inform. Systems Sci.*, 1 (1969), 1 - 58.
- [2] Ершов, А. П., Введение в теоретическое программирование, М., 1977 (英译本: Ershov, A. P., *Origins of programming: discourses on methodology*, Springer, 1990).
- [3] Котов, В. Е., Введение в теорию схем программ, Новосиб., 1978.
- [4] Gordon, M. J. C., *The denotational description of programming languages*, Springer, 1979.
- [5] Ляпунов, А. А., «Проблемы кибернетики», 1958, в. 1, 46 - 74.
- [6] Hayashi, S. and Nakano, H., *PX: a computational logic*, Cambridge Univ. Press, 1988.
- [7] Harel, D., *First-order dynamic logic*, Lecture notes comp. sc., 68, Springer, 1979.
- [8] Donahue, J. E., *Complementary definitions of programming language semantics*, Lecture notes comp. sc., 42, Springer, 1976.
- [9] Scott, D. S., Outline of a mathematical theory of computations, in *Proc. 4th Annual Princeton Conf. Information Sc. and Systems*, Princeton Univ. Press, 1971, 169 - 176.
- [10] Янов, Ю. И., «Проблемы кибернетики», 1958, в. 1, 75 - 127.
- [11] Manna, Z., *Mathematical theory of computation*, McGraw-Hill, 1974.

А. П. Ершов, В. А. Непомнящий 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Apt, K. R., Ten years of Hoare's logic, a survey, part I, *ACM TOPLAS*, 3 (1981), 431 - 483.
- [A2] Apt, K. R., Ten years of Hoare's logic, a survey, part II: non-determinism, *Theor. Computer Science*, 28 (1984), 83 - 109.
- [A3] Bakker, J. W. de, *Mathematical proof of program correctness*, Princeton-Hall, 1980.
- [A4] Harel, D., Dynamic logic, in D. Gabbay and F. Guenther (eds.): *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. II, Reidel, 1984, 497 - 604.
- [A5] Stoy, J. E., *Denotational semantics: the Scott-Strachey approach to programming language theory*, M. I. T. 1977.

程 虎 译 刘椿年 校

形式理论 [theory, formal; теория формальная]



同形式系统 (formal system). 亦见公理方法 (axiomatic method).

曲面理论 [theory of surfaces; поверхностей теория]

微分几何学 (differential geometry) 中处理曲面的一个分支. 在曲面理论中人们观察曲面的形状、曲率, 曲面上各种类型曲线的性质、变形, 以及具有给定的内在和外特性的曲面的存在性等.

曲面理论中有两种观点: 曲面可看作具有其自身内蕴度量的度量空间 (称为内蕴几何学) 或看作空间中的图形 (称为外在几何学). 曲面理论中 (如等距浸入 (isometric immersion) 问题, 等距形变 (deformation, isometric) 问题等) 大多倾向于研究内蕴与外在几何学之间的联系, 对于  $C^2$  类正则曲面这种联系的研究已相当完善. 见浸入流形的几何学 (geometry of immersed manifolds).

对曲面上曲线 (渐近线 (asymptotic line)、测地线 (geodesic line) 等) 的行为及它们的单参数族的对 (称为网, 见网 (微分几何学中的) (net (in differential geometry))) 的研究导致了一些特殊的曲面类. 例如, 平移曲面 (translation surface)——存在平移网的曲面, Voss 曲面 (Voss surface)——存在 Voss 网的曲面, 直纹曲面 (ruled surface)——存在半测地渐近网的曲面, 等等. 网论与曲面到曲面的映射紧密相关. 下面是一些最重要的映射类: 等距映射 (isometric mapping), 它保持弧长、面积及从一点射出的两个方向之间的夹角不变; 共形映射 (conformal mapping), 它保持从一点射出的任意两个方向之间的夹角不变 (例如球极平面投影 (stereographic projection)); 球面映射 (spherical map), 该映射将曲面上任一点映为该点的单位法向量在平行移动下对应的单位球面上的点; 测地映射 (geodesic mapping), 它将一个曲面上的测地线映为另一个曲面上的测地线; 等积映射, 它使对应图形的面积之比为常数.

曲面理论还包括研究各种曲面类, 例如二次曲面 (surface of the second order), 螺旋运动曲面 (surface of screw motion), 螺旋面 (helicoid), Catalan 曲面 (Catalan surface), 劈锥曲面 (conoid), 回归面 (regression surface), 管道曲面 (canal surface), Dupin 圆纹曲面 (Dupin cyclide), Enneper 曲面 (Enneper surface), Weingarten 曲面 (Weingarten surface), 等等. 其中极小曲面 (minimal surface) 特别引人注目. 涉及到应用方面, 大多关注于三重正交曲面系 (triorthogonal system of surfaces), 如共焦二阶曲面.

除了研究曲面在全空间的等距变换下的不变性质 (相关于所谓曲面的度量理论 (metric theory of surfaces) 外, 还研究曲面在其他变换群, 如仿射群或射

影变换群下的不变性质. 仿射曲面论考虑曲面在等仿射变换 (即保体积的仿射变换) 下的不变性, 而射影曲面论则研究曲面的射影不变性. 亦见仿射微分几何学 (affine differential geometry); 共形微分几何学 (conformal differential geometry); 射影微分几何学 (projective differential geometry).

曲面论及与曲面相关的几何对象的研究促进了许多方法的发展 (如张量分析 (tensor analysis), Cartan 外形式法 (Cartan method of exterior forms)), 这些方法在数学的其他分支、物理学及力学中有广泛的应用.

19 世纪末的曲面论仅研究具备足够正则性的曲面 (或其部分), 以便能对它进行微分运算. 到 20 世纪初, 对可微性的要求不再强求, 取而代之以其他条件, 如凸性 (见凸曲面 (convex surface)) 及测地线的局部唯一性, 来保证得到有意义的几何结果. 同时研究不再限于经典微分几何学中的相当小的部分, 而着眼于曲面的整体 (称为大范围几何学 (geometry in the large)). 在这里, 结合曲面的拓扑结构 (如曲面的亏格), (某种意义下的) 完全性及这些特性和曲率分布间的关系是十分重要的.

多维空间、椭圆空间、Лобачевский 空间的微分几何学研究已经得到了与这些空间中的曲面论有关的许多几何结果.

#### 参考文献

- [1] Рашевский, П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.
- [2] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, Elementare Differentialgeometrie, 1, Springer, 1921.
- [3] Норден, А. П., Теория поверхностей, М., 1956.
- [4] Каган, В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, г. 1 – 2, М.-Л., 1947 – 1948.
- [5] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.
- [6] Александров, А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., 1948.
- [7] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.
- [8] Darboux, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces et ses applications géométriques du calcul infinitesimal, 1, Gauthier-Villars, 1887.
- [9] Bianchi, L., Lezioni di geometria differenziale, 1 – 2, Zanichelli, Bologna, 1923 – 1927.

Ю. А. АМИНОВ 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Pogorelov, A. V., Intrinsic geometry of surfaces,

Amer. Math. Soc., 1973 (译自俄文)。

- [A2] O'Neill, B., Elementary differential geometry, Acad. Press, 1966.
- [A3] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952 (译自德文)。
- [A4] Guggenheimer, H., Differential geometry, McGraw-Hill, 1963.
- [A5] Busemann, H., The geometry of geodesics, Acad. Press, 1955.
- [A6] Coxeter, H., Introduction to geometry, Wiley, 1963.
- [A7] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976.
- [A8] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry: manifold, curves, and surfaces, Springer, 1987 (译自法文)。
- [A9] Spivak, M., Differential geometry, I - V, Publish or Perish, 1970.
- [A10] Chen, B. Y., Geometry of submanifolds, M. Dekker, 1973.
- [A11] Klingenberg, W., A course in differential geometry, Springer, 1983 (译自德文)。 沈纯理 译

热传导方程 [thermal-conductance equation 或 heat equation; теплопроводности уравнение]

齐次偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

这个方程是抛物型偏微分方程 (parabolic partial differential equation) 的最简单的例子。当  $n=3$  时, 它描述固体中热扩散过程。第一边值问题 (圆柱区域中的) 和 Cauchy-Dirichlet 问题 (半平面上的) 是热传导方程的基本适定问题。特征 (Cauchy) 问题的解可以用显式给出:

$$u(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right] \varphi(\xi) d\xi, \\ t > 0,$$

其中  $\varphi(\xi)$  是  $\mathbb{R}^n$  上的一个给定的连续一致有界函数。

参考文献

- [1] Бицадзе, А. В., Уравнения математической физики, М., 1976 (英译本: Bitsadze, A. V. The equations of mathematical physics, Mir, 1980)。
- [2] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981 (英译本: Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984)。

А. П. Солдатов 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Cannon, J. R., The one-dimensional heat equation,

Addison-Wesley, 1984.

- [A2] Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., Conduction of heat in solids, Clarendon Press, 1945.
- [A3] Crank, J., The mathematics of diffusion, Clarendon Press, 1975.
- [A4] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964 (中译本: A. 弗里德曼, 抛物型偏微分方程, 科学出版社, 1984)。
- [A5] Jakob, M., Heat transfer, 1-2, Wiley, 1975.
- [A6] Ozisik, M. N., Basic heat transfer, McGraw-Hill, 1977.
- [A7] Widder, D. V., The heat equation, Acad. Press, 1975.

杜小杨 张鸿林 译

热力学势 [thermodynamic potential; термодинамический потенциал]

宏观 (热力学) 系统状态集合上所定义的下列四个函数: 内能、焓 (或热函)、Helmholtz 自由能和 Gibbs 自由能当中的任一个 (有时狭义上将 Gibbs 自由能称为热力学势)。

为了形式地构造 (单组分) 热力学系统的热力学态, 人们用下列热力学参量对  $(S, V)$ ,  $(S, p)$ ,  $(T, V)$ ,  $(T, p)$  当中的任一对来描述; 其中  $S$  是系统的熵,  $T$  是其绝对温度,  $p$  是压强,  $V$  是体积。对这里的每对参量, 方便的是联系一个热力学势: 联系于  $(S, V)$  的是内能  $U = U(S, V)$ , 联系于  $(S, p)$  的是焓  $H = H(S, p)$ , 联系于  $(T, V)$  的是 Helmholtz 自由能  $F = F(T, V)$ , 联系于  $(T, p)$  的是 Gibbs 自由能  $G = G(T, p)$ 。

这时, 如果选择某对参量来描述系统, 则另外两个参量可以表达为相应热力学势的偏导数 (因而得名)。参量  $S$ ,  $T$  和  $p$ ,  $V$  在下述意义上是共轭量, 它们每个可用相对于另一个的偏导数来表达; 例如, 选择参量对  $(S, V)$ , 相应热力学势为  $U(S, V)$ , 则参量  $T$  和  $p$  可分别表达为:

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad p = -\frac{\partial U}{\partial V}. \quad (1)$$

从一对参量与其势向另一对参量与其对应势的转换通过应用 Legendre 变换 (Legendre transform) 来完成。例如, 从对  $(S, V)$  和势  $U(S, V)$  转换到对  $(T, V)$  和势  $F(T, V)$ , 这时有

$$F(T, V) = U(S(T, V), V) - S(T, V)T,$$

其中  $S(T, V)$  是由方程 (1) 获得的, 即  $F(T, V)$  与看作  $S$  的函数的函数  $U(S, V)$  的 Legendre 变换一致, 只相差符号。

为了应用平衡 Gibbs 系综作出富有意义的热力学诠释, 总可将热力学势表达为某个 Gibbs 系综配分



函数的对数除以体积 (及其导数) 的热力学极限 (thermodynamic limit). 例如, Helmholtz 自由能密度由

$$f(T, v) = -v k T \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty \\ V/N \rightarrow v}} \frac{1}{V} \ln Z(T, V, N)$$

表达, 其中  $k$  是 Boltzmann 常数,  $v$  是每粒子的体积 ( $1/v$  是数密度), 而  $Z(T, V, N)$  是正则系综配分函数 (见统计和 (statistical sum)); 正则系综对应于处于固定温度  $T$  并封闭于体积为  $V$  的区域内的  $N$  粒子系统 (见 [3]).

#### 参考文献

- [1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Статистическая физика, часть 1, 3 изд. М., 1976 (Теоретическая физика, т. 5) (中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席兹, 统计物理学, 人民教育出版社, 1964).
- [2] Гельфанд, И. М., Фомин, В. С., Вариационное исчисление, М., 1961 (英译本: Gel'fand, I. M. and Fomin, V. S., Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963).
- [3] Ruelle, D., Statistical mechanics: rigorous results, Benjamin, 1974. Р. А. Минлос 撰 徐锡申 译

#### 热力学极限 [thermodynamical limit; термодинамический предельный переход]

统计物理学中的一个基本方法, 在于将大 (而有限的) 系统用某种无限的理想化系统来近似而进行研究. 例如, 由  $N$  个粒子 (分子) 组成的系统充满  $R^3$  中有界域  $V$ , 对于大数  $N$  和大区域  $V$  (与分子的大小相比较而言), 可以用充满整个空间的无穷多个这种分子的系统来代替, 使得有限系统的性质和特征 (动态特性, 系综的平衡性质, 等等) 接近于极限系统的类似性质和特征.

#### 参考文献

- [1] Ruelle, D., Statistical mechanics; rigorous results, Benjamin, 1974.
- [2] Gibbs states in statistical physics, Moscow, 1978.
- [3] Минлос, Р. А., «Успехи матем. наук», 23 (1968), 133 - 190. Р. А. Минлос 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Gibbs, J. W., Elementary principles in statistical mechanics, Dover, reprint, 1960.
- [A2] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., Statistical physics, Pergamon, 1980 (译自俄文) (中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席茨, 统计物理学, 人民教育出版社, 1964).
- [A3] Ruelle, D., Thermodynamic formalism, Addison-Wesley, 1978. 徐锡申 译

#### 热力学中的数学问题 [thermodynamics, mathematical prob-

lems in; термодинамики математические задачи]

处于热力学平衡状态的宏观系统一般性质的研究, 以及其平衡状态之间的转变过程的研究, 与上述这些研究有关的数学问题.

宏观热力学的数学工具来自所谓热力学定律. 根据第零定律, 热力学系统必定具有热力学意义上唯一的稳定平衡态, 通过固定作用于系统的外界条件而确定. 第一定律即能量守恒与转化定律, 对于系统的态参量的统计无限小变化 (准静态过程, 即从一个平衡态到另一个平衡态的充分慢变化), 它将这个过程的热效应  $\delta Q$  与系统内能  $E$  的变化和系统对外界所作功  $\delta W$  联系起来. 如果作为显明而且相当简单的例子, 考虑具有固定粒子数的气体系统, 则其状态可由三个参量, 例如, 温度  $\theta$ , 体积  $V$  和粒子数  $N$  (其他方案也是可能的) 予以确定. 于是, 与膨胀过程相联系的功是  $\delta W = p dV$ , 其中  $p$  是气体的压强, 而第一定律确定能量平衡

$$\delta Q = dE + \delta W = dE + p dV. \quad (1)$$

根据准静态过程的热力学第二定律: 热力学系统存在熵, 它作为热力学态的单值函数具有全微分

$$dS = \frac{1}{\theta} \delta Q, \quad (2)$$

于是得到对于比内能  $\varepsilon = E/Nm$  (其中  $m$  为粒子质量) 作为温度  $\theta$  和比体积  $v = V/Nm$  的函数的一组方程:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right]_v &= c_v(\theta, v); \\ \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right]_\theta &= \theta \frac{\partial p(\theta, v)}{\partial \theta} - p(\theta, v), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

这里  $c_v(\theta, v)$  为定体比热; 它们定义  $\varepsilon$  到相差一常数  $\varepsilon = \varepsilon(\theta, v) + \varepsilon_0$ , 而定义总内能到相差一加法常数  $E = Nm \varepsilon(\theta, v) + Nm \varepsilon_0$ . 对于比熵  $s$  的一组方程

$$\left[ \frac{\partial s}{\partial \theta} \right]_v = \frac{1}{\theta} c_v(\theta, v); \quad \left[ \frac{\partial s}{\partial v} \right]_\theta = \frac{\partial p(\theta, v)}{\partial \theta} \quad (4)$$

定义  $s = s(\theta, v) + s_0$  到相差一常数  $s_0$ , 而定义总熵  $S(\theta, V, N) = Nm s(\theta, v) + Nm s_0$  到相差一加法常数  $Nm s_0$ .

系统的其余热力学特性, 热力学势 (thermodynamic potential), 等等, 可以通过这些方程的解予以定义, 应用的数学运算与微分一样不复杂.

为了求解 (3) 和 (4), 必须给定具体热力学系统. 系统的这种具体化涉及给定物态方程 (上述简单情况下是单个方程)  $p = p(\theta, v)$ , 和能态方程——比热  $c_v = c_v(\theta, v)$ , 它们确定系统对于外参量 (上述情况是体积) 的和对于其温度的变化的宏观反应. 常数  $\varepsilon_0$  必须根据计算能量的参考系统作为原点予以选取.

熵常数为求解一系列具体问题所必需, 它可应用热力学第三定律予以确定; 第三定律出现在 Planck 的表述中, 作为对方程组 (4) 的一个补充条件:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} s|_{\theta \rightarrow 0} = 0. \quad (5)$$

上面采用的问题的表述可以称为直接的. 还有与此相逆的各种可能表述方式.

为了研究低温问题, 以及在一系列其他问题中, 也可应用不同的表述. 根据对于  $\varepsilon$  和  $s$  的第一个方程及第三定律, 有

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(\theta, v) &= \varepsilon_0(v) + \int_0^\theta c_v(\theta, v) d\theta, \\ s(\theta, v) &= \int_0^\theta \frac{1}{\theta} c_v(\theta, v) d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

为了完成这些计算, 必须给出比热方程  $c_v(\theta, v)$  和系统基态的比能  $\varepsilon_0(v) = E_0/Nm$ . 这个量通常不能直接予以测量. 它可以用任何明确模型进行给定, 或者由前面引进的态方程间接获得.

上述方案中也可考虑到存在外场 (静电场, 磁场, 等等) 的情况 (代价是增加类型 (3) 和 (4) 的方程数). 但最简易方式是通过计算, 当场从零增加至给定大小时, 自由能  $F = E - \theta S$  中的变化这样来达成, 系统对这个增加的反应必须通过相应态方程  $A = A(\theta, a)$  予以给定, 使得系统在场的准静态变化  $da$  下所作功给出为  $\delta W = A(\theta, a) da$ . 因而, 由 (1) 和 (2) 得

$$dF = d(E - \theta S) = -S d\theta - \delta W, \quad (7)$$

而所寻求变化量 (省略除  $\theta$  和  $a$  外的一切参数) 为

$$\Delta F = F(\theta, a) - F(\theta, 0) = - \int_0^a A(\theta, a') da'. \quad (8)$$

与场  $a$  的增加相联系的热力学特性中的变化, 通过应用 (8) 的相应微分以及简单代数运算而获得.

鉴于仅对简化模型才可能用合适的  $c_v, p, A$  等的公式来描述热力学系统, 所以对真实热力学效应的计算 (即工程热力学问题的求解) 是通过数值方法, 特殊辅助用表等等来完成的.

对于临界点附近 (或者在二级相变中, 考虑到它具有与临界现象的某些类似性) 热力学系统的特殊性质, 曾经进行过研究. 一系列热力学特性邻近临界点的行为, 由温度对临界温度的无量纲偏差的某次幂  $(|\theta - \theta_0|/\theta_0)^k$  表征. 参数  $k$  称为临界指数, 而利用宏观热力学的方法 (有时借助于平衡统计力学的一般方案) 曾经确立对它们的一系列普适关系 (通常是以不等式的形式) ([3]).

转移现象热力学理论的数学问题并不复杂 (见 [1], [4]). 它们一般包括对一组线性关系式的研究, 这些

关系式将流  $\zeta_i$  与宏观量  $\zeta_i$  对其平衡值的偏差联系起来. 对  $\zeta_i$  的系数要满足某些对称性条件, 并用实际转移系数予以表达. 如果将这些方程作为对  $\zeta_i(t)$  的时间方程处理 (以充分大时间尺度), 则这个方程组的解 (仅在罕见情况可能以一般形式) 在半唯象理论中确定系统趋向平衡态的弛豫特性.

#### 参考文献

- [1] Базаров, И. П., Термодинамика, 3 изд., М., 1983.
- [2] Kubo, R., Thermodynamics, North-Holland, 1968 (中译本: 久保亮五, 热力学, 人民教育出版社, 1982).
- [3] Stanley, H. E., Introduction to phase transitions and critical phenomena, Oxford Univ. Press, 1971.
- [4] Groot, S. R. de and Mazur, P. Non-equilibrium thermodynamics, North-Holland, 1962.

И. А. Квасников 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Flügge, S. (ed.), Handbuch der Physik, Encyclopedia of Physics, 12. Thermodynamics of gases, Springer, 1958.
- [A2] Serrin, J. (ed.), New perspectives in thermodynamics, Springer, 1986.

徐锡申 译

#### $\theta$ 函数 [theta-function; тета-функция]

单复变量的  $\theta$  函数 (theta-function of one complex variable) 是复变量  $z$  的拟双周期整函数 (entire function), 即函数  $\theta(z)$  除了周期  $\omega$  外还有一个拟周期 (quasi-period)  $\omega\tau$ ,  $\text{Im}\tau > 0$ , 把拟周期加到自变量上后函数值被乘上某个因子. 换句话说, 有以下关于  $z$  的等式:

$$\theta(z + \omega) = \theta(z), \quad \theta(z + \omega\tau) = \varphi(z)\theta(z).$$

作为周期整函数,  $\theta$  函数总能用级数表出:

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp \left[ \frac{2\pi i n}{\omega} z \right], \quad (1)$$

这里的系数  $c_n$  必须取得能保证收敛性. 级数 (1) 被称为  $\theta$  级数 (theta-series) (由于原始的记号).  $\theta$  函数也能表示成其他形式, 例如无限积.

在应用中通常限于取以下形式的乘子:

$$\varphi(z) = q \exp(-2\pi i k z),$$

这里  $k$  是自然数, 称为  $\theta$  函数的阶 (order) 或权 (weight),  $q$  是一个数. 收敛性可以得到保证, 譬如说可取形如

$$c_n = \exp(an^2 + 2bn + c), \quad \text{Re } a < 0$$

的系数. 在许多问题中取满足下列条件:



$$\begin{aligned}\theta(z+1) &= \theta(z), \\ \theta(z+\tau) &= \exp(-2\pi i k z) \cdot \theta(z)\end{aligned}\quad (2)$$

的  $\theta$  函数是合适的. 具有相同的阶  $k$  的形如 (2) 的所有  $\theta$  函数构成一个  $k$  维向量空间. 这个向量空间的基可写成以下形式

$$\begin{aligned}\theta_r(z) &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \exp[\pi i \tau s(k(s-1) + 2r) + \\ &+ 2\pi i(k s + r)z], \quad r = 0, \dots, k-1.\end{aligned}$$

$\theta$  函数的个别例子已经出现在 J. Bernoulli (1713), L. Euler 的工作中, 在 J. Fourier 的热传导理论中. C. G. J. Jacobi 对  $\theta$  函数作了系统的研究, 并选出了四种特殊的  $\theta$  函数, 构成了他的椭圆函数论的基础 (见 Jacobi 椭圆函数 (Jacobi elliptic functions)).

多复变量的  $\theta$  函数 (theta-functions of several complex variables) 是单复变量  $\theta$  函数的自然推广. 它们用下述方式被构造. 设  $z = (z_1, \dots, z_p)$  是  $p$  个复变量的行矩阵,  $p \geq 1$ ,  $e_\mu$  是  $p$  阶恒等矩阵  $E$  的第  $\mu$  行,  $n = (n_1, \dots, n_p)$  是整数行矩阵,  $A = \|a_{\mu\nu}\|$  是  $p$  阶对称复矩阵使得矩阵  $\text{Im } A = \|\text{Im } a_{\mu\nu}\|$  给出一个正定二次型  $n(\text{Im } A)n^T$  (这里  $n^T$  是矩阵  $n$  的转置). 多重  $\theta$  级数 (multiple theta-series)

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^p} \exp[\pi(n A n^T + 2n z^T)] \quad (3)$$

在  $\mathbb{C}^p$  内紧集上一致绝对收敛, 从而定义了  $p$  个复变量  $z_1, \dots, z_p$  的整超越函数, 称为 1 阶  $\theta$  函数 (theta-function of order 1). 矩阵  $A$  的各个元素被称为  $\theta$  函数  $\theta(z)$  的模数 (moduli) 或参数 (parameters). 模数的个数等于  $p(p+1)/2$ . 一阶  $\theta$  函数  $\theta(z)$  满足以下 (关于  $z$  的) 基本等式:

$$\left. \begin{aligned}\theta(z + e_\mu) &= \theta(z), \\ \theta(z + e_\mu A) &= \exp[-\pi i(a_{\mu\mu} + 2z_\mu)] \cdot \theta(z), \\ 2(1 + \delta_{\mu\nu})\pi \frac{\partial \theta}{\partial a_{\mu\nu}} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_\mu \partial z_\nu},\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

这里  $\mu, \nu = 1, \dots, p$ , 当  $\mu = \nu$  时  $\delta_{\mu\nu} = 1$ , 当  $\mu \neq \nu$  时  $\delta_{\mu\nu} = 0$ .  $(p \times 2p)$  矩阵  $S = (E, A)$  是  $\theta(z)$  的模数系 (moduli system) 或周期与拟周期系 (system of periods and quasi-periods). 如果  $m = (m_1, \dots, m_p)$ ,  $m' = (m'_1, \dots, m'_p)$  是任意的整行矩阵, 则  $\theta$  函数的周期性矩阵可以写成更一般的形式:

$$\begin{aligned}\theta(z + m' + m A) &= \\ &= \exp[-\pi(m A m^T + 2m(z + m')^T)] \cdot \theta(z).\end{aligned}$$

设  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ ,  $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_p)$  是任意

的复行矩阵,  $\Gamma$  是  $(2 \times p)$  矩阵

$$\begin{Bmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{Bmatrix}.$$

则公式

$$\begin{aligned}\theta_\Gamma(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^p} \exp[\pi(n + \gamma)A(n + \gamma)^T + \\ &+ 2(n + \gamma)(z + \gamma')^T] = \\ &= \exp[\pi i(\gamma A \gamma^T + 2\gamma(z + \gamma')^T)] \cdot \theta(z + \gamma' + \gamma A)\end{aligned}$$

定义了具有 (一般形式的) 特征  $\Gamma$  的 1 阶  $\theta$  函数. 用这种术语,  $\theta$  函数 (3) 具有特征 0. 矩阵  $\Gamma$  也称为矩阵  $\gamma' + \gamma A$  的周期性特征 (periodicity characteristic of the matrix). 总有  $\theta_{-\Gamma}(-z) = \theta_\Gamma(z)$ . 性质 (4) 可推广到特征  $\Gamma$  的  $\theta$  函数:

$$\left. \begin{aligned}\theta_\Gamma(z + e_\mu) &= \exp(2\pi i \gamma_\mu) \cdot \theta_\Gamma(z), \\ \theta_\Gamma(z + e_\mu A) &= \\ &= \exp[-\pi i(a_{\mu\mu} + 2(z_\mu - \gamma'_\mu))] \cdot \theta_\Gamma(z).\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

如果  $0 \leq \gamma_i, \gamma'_i < 1$  对  $i = 1, \dots, p$ , 则称特征是正规的 (normal).

最常用到的是分数特征 (fractional characteristics), 这里  $\gamma_i$  和  $\gamma'_i$  都是有公分母  $\delta$  的非负真分数. 最简单且最重要的是半整特征 (semi-integer or half characteristics), 这里  $\delta = 2$ . 半整特征

$$H = \begin{Bmatrix} h \\ h' \end{Bmatrix}$$

可看成是由数 0 和 1 作出来的 (通常“ $\theta$  特征”就是用于指这样的特征). 对于具有特征  $H$  的  $\theta$  函数, 方程 (5) 取以下形式

$$\begin{aligned}\theta_H(z + e_\mu) &= (-1)^{h_\mu} \cdot \theta_H(z), \\ \theta_H(z + e_\mu A) &= \\ &= (-1)^{h'_\mu} \exp[-\pi i(a_{\mu\mu} + 2z_\mu)] \theta_H(z).\end{aligned}$$

根据  $\theta$  函数  $\theta_H(z)$  是偶或奇函数称  $\theta$  特征  $H$  为偶的 (even) 或奇的 (odd) 的. 也就是说,  $\theta$  特征  $H$  是偶的还是奇的取决于数  $h' h^T$  是偶的还是奇的, 这是因为

$$\theta_H(-z) = (-1)^{h' h^T} \cdot \theta_H(z).$$

共有  $2^{2p}$  个不同的  $\theta$  特征, 其中  $2^{p-1}(2^p + 1)$  个是偶的,  $2^{p-1}(2^p - 1)$  个是奇的.  $\theta$  函数  $\theta_H(z)$  在这样的点  $(g' + g A)/2$  处零值, 它的  $\theta$  特征

$$G = \begin{Bmatrix} g \\ g' \end{Bmatrix}$$

与  $H$  相加后产生奇的  $\theta$  特征. Jacobi 在他的椭圆函数论里使用了带半整特征的  $\theta$  函数, 不过他用的周期是  $\pi i$  而不是 1.

设  $k$  是自然数, 称整超越函数  $\theta_\Gamma(z)$  为具有特征  $\Gamma$  的  $k$  阶  $\theta$  函数, 如果它满足以下等式:

$$\begin{aligned}\theta_\Gamma(z + e_\mu) &= \exp(2\pi i \gamma_\mu) \cdot \theta_\Gamma(z), \\ \theta_\Gamma(z + e_\mu A) &= \\ &= \exp[-\pi i(k a_{\mu\mu} + 2k z_\mu - 2\gamma'_\mu)] \cdot \theta_\Gamma(z).\end{aligned}$$

例如  $k$  个一阶  $\theta$  函数的积是  $k$  阶  $\theta$  函数.

利用带半整特征的一阶  $\theta$  函数可以构造具有  $2p$  个周期的亚纯 Abel 函数.  $p$  个复变量的任意 Abel 函数的周期满足 Riemann-Frobenius 关系式, 这就导出了具有相应模系的  $\theta$  函数的定义级数的收敛性. 按照由 K. Weierstrass 提出被 H. Poincaré 证明的一个定理, Abel 函数可被表示成整  $\theta$  函数关于相应的模系的商. 为解 Abel 积分的 Jacobi 反演问题 (Jacobi inversion problem), 构造了特殊的 Riemann  $\theta$  函数 (Riemann theta-function), 它的自变量是 Riemann 曲面上的点系  $\omega_1, \dots, \omega_p$ .

亦见  $\theta$  级数 (theta-series).

#### 参考文献

- [1] Чеботарев, Н. Г., Теория алгебраических функций, М.-Л., 1948, гл. 9.
- [2] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 1, Springer, 1964, Chapt. 8.
- [3] Krazer, A., Lehrbuch der Theta-Funktionen, Chelsea, reprint, 1970.
- [4] Conforto, F., Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, Springer, 1956.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】在构造  $p$  个变量的  $\theta$  函数 (3) 里用到的矩阵  $A$  的条件正是为使  $\mathbb{C}^p/L$  成为 Abel 簇 (Abelian variety) 的条件, 这里  $L$  是矩阵  $(I_p A)$  在  $\mathbb{C}^p$  内定义的格.  $\mathbb{C}$  上所有的 Abel 簇都可如此得到. 因此任何 Abel 簇均相伴有一个  $\theta$  函数.

特别地, Riemann 曲面上第一类 Abel 微分 (Abelian differential) 的典范周期矩阵 (canonical period matrix) 满足此条件, 这样就确定了 Riemann 曲面的 Jacobi 簇 (Jacobi variety) 以及相伴的  $\theta$  函数.

对于不必典范的周期矩阵 (period matrix)  $(BA)$ , 这些关系式是  $A^T B - B^T A = 0$  (Riemann 等式 (Riemann equality)), 在典范的情形下  $B = I_p$ , 从而条件成为  $A$  是对称阵) 以及  $iB^T \bar{A} - iA^T \bar{B}$  是正定 Hermitite 矩阵 (Riemann 不等式 (Riemann inequality)), 在典范的情形下利用  $A$  的对称性, 条件化为  $A$  的虚部的正定性) ([A8], p. 27). 这两个关系式联在一起

有时被称为 Riemann 双线性关系 (Riemann bilinear relations).

#### 参考文献

- [A1] Siegel, C. L., Topics in complex function theory, 2, Wiley-Interscience, 1971.
- [A2] Griffiths, P. A. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley-Interscience, 1978.
- [A3] Mumford, D., Tata lectures on theta, 1-2, Birkhäuser, 1983-1984.
- [A4] Mumford, D., On the equations defining abelian varieties I, Invent. Math., 1 (1966), 287-354.
- [A5] Mumford, D., On the equations defining abelian varieties II-III, Invent. Math., 3 (1967), 71-135, 215-244.
- [A6] Mumford, D., Abelian varieties, Oxford Univ. Press, 1985.
- [A7] Igusa, J., Theta functions, Springer, 1972.
- [A8] Gunning, R. C., Riemann surfaces and generalized theta functions, Springer, 1976.
- [A9] Fay, J. D., Theta functions on Riemann surfaces, Springer, 1973.

陈志杰 译

#### $\theta$ 级数 [theta-series 或 $\theta$ -series; тета-ряд]

一类函数项级数, 用于表示自守形式及自守函数 (见自守形式 (automorphic form); 自守函数 (automorphic function)).

设  $D$  是复空间  $\mathbb{C}^p$  ( $p \geq 1$ ) 中的一个区域,  $\Gamma$  是  $D$  的离散自同构群. 若  $\Gamma$  是有限的, 则  $D$  上的任一亚纯函数  $H(z)$ ,  $z = (z_1, \dots, z_p)$ , 就给出一个自守函数

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} H(\gamma(z)).$$

在无限群的情形, 就需要添加收敛乘子以得到  $\theta$  级数. 相关于群  $\Gamma$  的 Poincaré 级数是如下形式的级数:

$$\theta_m(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma}^* J_\gamma^m(z) H(\gamma(z)), \quad (1)$$

其中  $J_\gamma(z) = d\gamma(z)/dz$  是函数  $z \mapsto \gamma(z)$  的 Jacobi,  $m$  是一个整数称为权或阶,  $*$  号是表示对在级数中产生不同的项的那些  $\gamma \in \Gamma$  求和. 在映射  $z \mapsto \alpha(z)$  ( $\alpha \in \Gamma$ ) 下, 有变换公式

$$\theta_m(\alpha(z)) = J_\alpha^{-m}(z) \theta_m(z),$$

因此,  $\theta_m(z)$  是相关于  $\Gamma$  的权为  $m$  的自守函数. 两个权相同的  $\theta$  级数的商是一个自守函数.

#### $\theta$ 级数

$$E_m(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma}^* J_\gamma^m(z)$$

称为相关于  $\Gamma$  的 Eisenstein  $\theta$  级数, 或简称为相关于



$\Gamma$  的 Eisenstein 级数.

19 世纪 80 年代, H. Poincaré 在其一系列文章中, 联系于单复变量的自守函数的研究, 发展了  $\theta$  级数理论. 设  $\Gamma$  是由分式线性变换

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1,$$

(它把上半平面  $D = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$  映射到自身之上) 组成的离散 Fuchs 群 (Fuchsian group). 在这种情形, Poincaré 级数形如

$$\theta_m(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma}^* (cz+d)^{-2m} H\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \quad (2)$$

其中  $H$ , 例如, 是一个  $D$  上的有界全纯函数. 在这样的假设下:  $\Gamma$  可自由作用在  $D$  上, 及商空间  $X = D/\Gamma$  是紧的. 已经证明级数 (2) 当  $m \geq 2$  时在  $D$  内绝对一致收敛. 在关于  $H$  和  $\Gamma$  的所说条件下, 这一结论在  $D$  是  $\mathbb{C}^p$  内的有界区域的情形对级数 (1) 也成立. 对某些 Fuchs 群, 当  $m=1$  时级数 (2) 也收敛.

术语“ $\theta$  级数”也被用于  $\theta$  函数的级数展开式,  $\theta$  函数在椭圆函数的表示 (见 Jacobi 椭圆函数 (Jacobi elliptic functions)) 及 Abel 函数的表示 (见  $\theta$  函数 (theta-function); Abel 函数 (Abelian function)) 中都有用.

#### 参考文献

- [1] Ford, L. R., Automorphic functions, Chelsea, reprint, 1951.
- [2] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972, гл. 9 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).
- [3] Fricke, R. and Klein, F., Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Teubner, 1926.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 设  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  是一个格. 格  $\Lambda$  的  $\theta$  级数 (theta-series of the lattice  $\Lambda$ ) 是定义为

$$\theta_\Lambda(z) = \sum_{x \in \Lambda} q^{(x,x)} = \sum_{m=1}^{\infty} N_m q^m, \quad q = e^{\pi i z},$$

其中  $N_m$  是  $\Lambda$  中长度平方为  $m$  的点的个数. 例如, 若  $\Lambda$  是格  $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4$ , 则  $N_m$  是  $m$  表为四个整数平方和的表法个数.

对格  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ,  $\theta$  级数是

$$\theta_{\mathbb{Z}}(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} q^{m^2} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots,$$

这就是 Jacobi  $\theta$  函数  $\theta_3(z)$ .

关于格的  $\theta$  函数的更详细的内容, 包括关于许多重要的格 (例如根格和 Leech 格) (的级数) 的公式和表, 及应用, 可参看 [A2].

#### 参考文献

- [A1] Weil, A., Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Springer, 1976.
- [A2] Conway, J. H. and Sloane, N. J. A., Sphere packings, lattices, and groups, Springer, 1993.

潘承彪 译 朱尧辰 校

#### 薄集 [thin set; тонкое множество]

区域  $D \subset \mathbb{C}^k$  的一子集  $A$ , 使得对每一点  $z \in D$ , 存在一开多圆盘  $\Delta(z, r) \subset D$  和一函数  $f$ , 它是全纯的, 不恒等于零, 但它在  $A \cap \Delta(z, r)$  上为零.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 通常, 薄表示是一解析集 (analytic set) 的子集. 亦见集合的薄度 (thinness of a set).

#### 参考文献

- [A1] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall, 1965, Chapt. 1, Sect. C.
- [A2] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986, Chapt. 1, Sect. 3.

钟同德 译

集合  $E \subset \mathbb{R}^n$  的薄度 [thinness of a set; разреженность множества], 亦称集合的稀疏性, 在点  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  上的

判别  $E$  为极集 (polar set) 的一个局部准则. 一个非空集合  $E \subset \mathbb{R}^n$  在下面两种情形下称为在点  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  是薄的 (thin):

1)  $y_0$  不是  $E$  的极限点; 即  $y_0 \notin E'$ , 这里  $E'$  是  $E$  的导出集 (derived set);

2)  $y_0 \in E'$  且在  $y_0$  的一个邻域里存在一个上调和函数 (superharmonic function)  $v(x)$ , 使得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y_0 \\ x \in E \setminus \{y_0\}}} \inf v(x) > v(y_0).$$

集合  $E$  是极集, 当且仅当  $E$  在它的每一点是薄的. 对任意集合  $E$ ,  $E$  在某些点是薄的,  $E$  中这样的点构成的子集是极集. 若一个集合在点  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  是薄的, 则它的任何非空子集在  $y_0$  也是薄的. 有限个在点  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  薄的集合之并在  $y_0$  也是薄的.

平面  $\mathbb{R}^2$  的线段在它的任意点不薄. 若  $E \subset \mathbb{R}^2$  在点  $y_0$  是薄集, 则存在以  $y_0$  为中心的任意小的圆周与  $E$  不交. 极集  $E \subset \mathbb{R}^2$  是完全不连通的. 然而  $x$  轴上的 Cantor 集 (它是零测度集) 在它的任意点不薄. 同时, 例如,  $\mathbb{R}^3$  中的点集

$$E = \{(x, y, z): V(x, y, z) \geq k > 1\},$$

在点  $(0, 0, 0)$  有一个脊, 其中

$$V(x, y, z) = \int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{(x-t)^2 + y^2 + z^2}}$$

是区间  $(0 \leq x \leq 1, 0, 0)$  上具有密度  $t$  的 Newton 位

势 (Newton potential),  $E$  在脊  $(0, 0, 0) \in E'$  是一薄集 (Lebesgue 例子 (Lebesgue example)).

#### 参考文献

[1] Brelot, M., *Eléments de la théorie classique du potentiel*, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., 1969.

[2] Ландкоф, Н. С., *Основы современной теории потенциала*, М., 1966 (英译本: Landkof, N. S., *Foundations of modern potential theory*, Springer, 1972).  
Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】薄度的另外两个重要性质是: 1)  $E$  在  $x$  是薄的, 当且仅当在细拓扑 (fine topology) 下  $x$  不是  $E$  的极限点; 2) 开集  $U$  (若  $U \subset \mathbb{R}^2$ , 设  $U$  为有界) 的边界点  $x$  关于 Dirichlet 问题是正则的 (regular), 当且仅当  $U$  的余集在  $x$  不薄.

薄度的概念以及利用它来定义细拓扑, 在任何一种位势论中都是重要的. 例如, 在与强 Марков 过程 (Markov process) 关联的概率位势论中, 一个 Borel 集  $E$  在  $x$  是薄的, 当且仅当从  $x$  出发, 过程几乎确定一次也不会击中  $E$ . 但是一般说来, 一个集合在它的每一点都薄时, 它本身未必是极集; 可数个这种集合的并集称为半极集 (semi-polar set), 这是一种例外集 (与 Dirichlet 问题 (Dirichlet problem) 相关联), 当某种位势论缺乏对称性 (例如, 热传导方程位势论) 时, 它可以远远大于极集. 大体上说来, 在概率位势论中, 一个集合  $E$  是极集 (相应地, 半极集), 如果这过程几乎确定不会遇到  $E$  (相应地, 遇到  $E$  至多可数次), 亦见抽象位势论 (potential theory, abstract).

#### 参考文献

[A1] Constantinescu, C. and Cornea, A., *Potential theory on harmonic spaces*, Springer, 1972.

高琪仁 吴炯圻 译

第三边值问题 [third boundary value problem; третья краевая задача]

偏微分方程边值问题 (boundary value problem, partial differential equations) 之一. 例如, 设在以  $\Gamma$  为边界的有界域  $\Omega$  中,  $\Gamma$  的每个点都有法线, 并在  $\Omega$  中给定下述二阶椭圆型方程

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x), (*)$$

其中  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 2$ ; 则对于  $\Omega$  中方程 (\*) 的第三边值问题有如下述: 从 (\*) 的所有解的集合中选出这样的解  $u(x)$ , 它在  $\Omega$  的每个边界点处具有沿内法线  $N$  的导数并满足条件

$$\frac{\partial u(x)}{\partial N} + \alpha(x)u(x) = v(x), x \in \Gamma,$$

其中  $\alpha > 0$  和  $v$  是定义在  $\Gamma$  上的连续函数.

А. Б. Иванов 撰

【补注】第三边值问题有时以 V. G. Robin (1855 - 1897) 的姓氏称为 Robin 问题 (Robin problem), 但不要同位势论中冠以同一名称的在 Robin 问题 (Robin problem) 条中讨论的问题相混淆.

第三类边值条件中出现的导数常常不必一定沿内法线方向 (例如, 见 [A1]), 而可以沿在  $\Gamma$  上连续变动的任何方向. 如果此方向处处都不与  $\Gamma$  相切, 则相应的问题称为正则的 (regular).

#### 参考文献

[A1] Friedman, A., *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, 1964. 沈永欢 译

Thom 突变 [Thom catastrophes; Тома катастрофы]

可微映射的奇点 (singularities of differentiable mappings), 其分类是 R. Thom ([1]) 宣布的, 按其梯度动力系统及类似的可微函数的余维数  $\leq 4$  的临界点 (critical point) 表来进行. Thom 的结果原来的陈述是: 一般的四参数函数族是稳定的, 而在临界点附近, 其性态除相差一个符号和变量变换以外, 是以下七种情况之一 (见表).

记号	余维数	余秩	芽	泛形变	名称
$A_2$	1	1	$x^3 + y^2$	$ux$	折点
$A_3$	2	1	$x^4 + y^2$	$ux + vx^2$	尖点
$A_4$	3	1	$x^5 + y^2$	$ux + vx + ux^3$	燕尾
$D_4$	3	2	$x^3 + xy^2$	$ux + vx^2 + wy$	双曲脐点
$D_4^+$	3	2	$x^3 - xy^2$	$ux + vx^2 + wy$	椭圆脐点
$A_5$	4	2	$x^6 + y^2$	$ux + vx^2 + wx^3 + ty^4$	蝴蝶
$D_5$	4	2	$x^4 + xy^2$	$ux + vx^2 + wx^3 + ty$	抛物脐点

相应于 Thom 突变的芽 (germ) 都是有限决定的 (finitely determined) (确切地说, 是 6 - 决定的, 即在适当的坐标之下, 它们相应于次数  $\leq 6$  的二元多项式).

余维数 codim 是一个临界点复杂性的尺度. codim  $r$  的函数  $f$  之任意小扰动都只会得出至多有  $r$  个复临界点的函数. 奇点 (singularity) (即一个芽  $f$  使得  $f(0) = Df(0) = 0$ ) 的余维数 (codimension) 就是数  $\dim m / \langle \partial f \rangle$ , 其中  $m = \{g: g(0) = 0\}$ ,  $\langle \partial f \rangle$  则是由芽  $\partial f / \partial x^i$  生成的理想. 例如, 如果  $f = x^N$ , 则  $\langle \partial f \rangle = \langle x^{N-1} \rangle$ , 而  $x, \dots, x^{N-2}$  的剩余类构成  $m / \langle \partial f \rangle$  的一个基, 因此  $\text{codim} = N - 2$ . 有不等式  $\text{codim} f \geq c(c+1)/2$  成立, 这里  $c$  是 Hesse 式  $\partial^2 f / \partial x^i \partial x^j(0)$  的余秩. 由此特别可知, 若



$r \leq 4$ , 则  $c \leq 2$ .

芽的有限决定性 (或称充分性), 粗略地说, 就表示, 它除了相差光滑的坐标变换外可由它的节 (jet) 决定. 更准确地说, 芽  $f$  称为  $k$  决定的 ( $k$ -determined), 如果每个与  $f$  有相同  $k$  节 (即 Taylor 级数直到  $k$  阶均相同) 的芽  $f_1$  都是右等价 (right-equivalent) 于  $f$  (即  $f_1 = f \circ \varphi$ ,  $\varphi$  是一个微分同胚在 0 的芽; 见 [2]). 一个芽是有限决定的, 当且仅当它的余维数为有限. 特别是, 若  $\text{codim} = r$ , 则  $f$  是  $(r+2)$  — 决定的 (从而当  $r \leq 4$  时它是 6 — 决定的).

Thom 突变和一般位置 (general position) 情况相反, 是退化奇点 (即 Hesse 式在该处退化), 它们可以用小扰动除掉, 如上面所述. 然而, 在许多有实际重要性且理论上也很重要的情况下, 人们感兴趣的不仅是单个对象, 而是一族含有一些“控制”参数的对象. 对参数的每个个别固定值可以除去的退化奇点, 对于这一族对象作为一个整体则可能是不可除去的 (也可以在这个意义下考虑 Thom 突变的稳定性). 然而这时自然的研究对象就不再是奇点本身, 而是一个族 (即奇点的形变), 奇点在其中当参数变动时是不可除去的 (而是会分裂, 即出现“分歧”). 但实际情况是, 在许多情况下, 一切可能的形变之研究可以归结为研究一个单个的形变, 它在一定意义下是很大的, 而一切其它形变均可由它得出. 这种形变称为通用的 (versal). 而它们反过来, 又可以从万有的 (universal) (或称仅有的 (miniversal)) 形变得出, 后者的特点是其参数空间有最小可能的维数. 这里最重要的结果是 Mather 定理 (Mather theorem): 奇点  $f$  具有泛形变, 当且仅当其余维数为有限.

芽  $f(x)$  的形变  $F(x, u)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$  且  $F(x, 0) = f(x)$ , 可由下式给出

$$F(x, u) = f(x) + b_1 u_1 + \cdots + b_r u_r,$$

其中  $(b_1, \dots, b_r)$  是空间  $m / \langle \partial f \rangle$  一个基的任意代表元素. Thom 突变相当于含至多四个参数的形变.

在应用上很重要的是所谓分歧集 (bifurcation set) 或奇异集 (singular set),  $D_f = \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times U : d_x f$

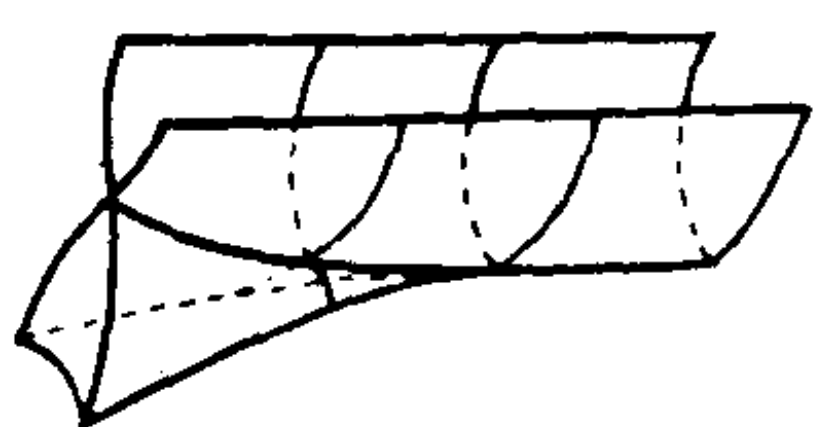


图 1a

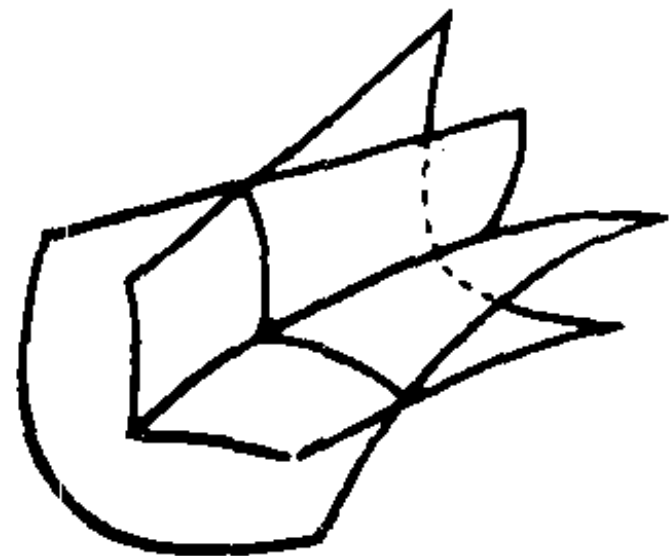


图 1b

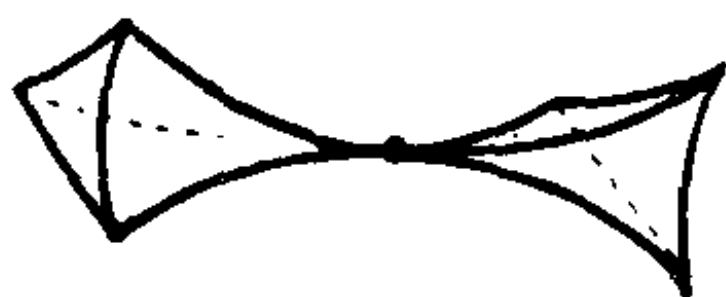


图 1c

$= 0$  而  $d^2 f$  为退化的}; 它在  $u$  空间上的投影, 即集  $\{u \in U, (x, u) \in D_f \text{ 对某个 } x \in \mathbb{R}^n \text{ 成立}\}$ , 称为突变集 (catastrophe set). 它位于控制空间中, 因而是“可观测测量”, 而一切“间断”或“突变”均由它而来. 图 1a, 1b, 1c 描画了相应于  $\text{codim} 3$  的情况.

#### 参考文献

- [1] Thom, R., Topological models in biology, *Topology*, 8 (1969), 313 – 335.
- [2] Bröcker, P. and Lander, L., Differentiable germs and catastrophes, Cambridge Univ. Press, 1975.
- [3] Poston, T. and Stewart, I., Catastrophe theory and its applications, Pitman, 1978.

М. И. Войцеховский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Thom, R., Structural stability and morphogenesis, Benjamin, 1976 (译自法文).
- [A2] Thom, R., Mathematical models of morphogenesis, Wiley, 1983 (译自法文).
- [A3] Арнольд, В. И., Теория катастроф, М. 1983. (中译本: Arnold, V. I., 突变理论, 高等教育出版社, 1990).
- [A4] Zeeman, E. C., Catastrophe theory, Addison-Wesley, 1977.

齐民友 译

#### Thom 类 [Thom class; Тома класс]

Thom 空间 (Thom space) 的 (广义) 上同调群中的一个元素, 该上同调群作为底空间上同调环上的模由 Thom 类生成. 设  $E^*$  是一乘性广义上同调论 (generalized cohomology theories), 记  $1 \in E^0(S^0)$  在  $n$  重纬垂 (suspension) 同构  $\tilde{E}^0(S^0) \cong \tilde{E}^n(S^n)$  下的象为  $\gamma_n \in \tilde{E}^n(S^n)$ . 设  $X$  是道路连通的有限胞腔复形,  $\xi$  为  $X$  上的  $n$  维向量丛,  $j: S^n \rightarrow T(\xi)$  为相应的到 Thom 空间中的包含映射. 元素  $u \in \tilde{E}^n(T)$  称为丛  $\xi$  的一个 Thom 类 (Thom class) (或定向 (orientation)), 如果  $j^* u = \varepsilon \gamma_n$ , 其中  $\varepsilon$  为  $\tilde{E}^0(S^0)$  中的可逆元. 一个丛不一定会有 Thom 类, 如果它确有一个 ( $E^*$  中的) Thom 类, 这个丛就称为  $E$  可定向的 ( $E$ -orientable), 指定了一个 Thom 类之后这个丛就称为  $E$  定向的 ( $E$ -oriented).  $X$  上  $E$  可定向丛的 Thom 类的个数等于群  $(\tilde{E}^0(S^0))^* \times \tilde{E}^0(X)$  的元素个数. 用 Thom 类作乘法就可以得到 Thom 同构 (Thom isomorphism).

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 对于一个带边或不带边的 (拓扑) 流形  $(M, \partial M)$ , 其 Thom 类定义为切丛 (或微丛) 的 Thom 类. 给定一个 Thom 类  $t \in E^n(M \times M, M \times M \setminus \Delta)$  之后, 就有下面一些同构  $\varphi_i: E_r(M \setminus B, M \setminus A) \xrightarrow{\sim} E^{n-r}(A, B)$  (Alexander 对偶性 (Alexander duality)),  $E_r(A, B) \xrightarrow{\sim} E^{n-r}(M \setminus A, M \setminus B)$ ,  $E_r(M, \partial M) \xrightarrow{\sim}$

$E^{n-1}(M)$  (Lefschetz 对偶性 (Lefschetz duality)), 以及  $E_r(M) \xrightarrow{\sim} E^{n-1}(M, \partial M)$ ,  $E_r(M) \rightarrow E^{n-1}(M)$  (Poincaré 对偶性 (Poincaré duality)), 其中  $(M, \partial M)$  是可三角剖分的紧流形,  $B \subset A \subset M \setminus \partial M$  为紧子多面体. 细节见 [A1] 的第 14 章.

一个元素  $z \in E_n(M, \partial M)$  称为基本类 (fundamental class), 如果对每个  $x \in M \setminus \partial M$ ,  $E_*(M, M \setminus \{x\})$  作为  $E_*(pt)$  上的模  $j_*(z) \in E_n(M, M \setminus \{x\})$  ( $\cong E_n(U, U \setminus \{x\}) \cong E_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ) 是其生成子. (这里  $j$  是包含映射  $(M, \partial M) \rightarrow (M, M \setminus \{x\})$ .) 对于通常的同调情形见基本类 (fundamental class). 基本类与 Thom 类之间的关系如下: 若  $M$  为具有 Thom 类  $t$  的可三角剖分的  $n$  维紧流形, 则存在唯一一个基本类  $z \in E_n(M, \partial M)$  使得  $\varphi_i: E_n(M, \partial M) \xrightarrow{\sim} E^0(M \setminus \partial M)$  将  $z$  映到 1, 参见 [A1], 命题 14.17. 利用这一结果, 则用 Thom 类  $t$  定义的 Lefschetz 对偶性同构与 Poincaré 对偶性同构 (本质上由与  $t$  作斜积而得) 都可由与  $z$  作卡积得到.

#### 参考文献

- [A1] Switzer, R. M., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975. 余建明 译

#### Thom 同构 [Thom isomorphism; Тома изоморфизм]

向量 (球面) 丛  $\xi$  的底空间的 (广义) (上) 同调群与其 Thom 空间 (Thom space)  $T(\xi)$  的 (上) 同调群之间的一个同构.

假定  $\xi$  是有限胞腔复形  $X$  上的  $n$  维向量丛, 并且在某个给定的乘性广义上同调论  $E^*$  中是定向的 (见广义上同调论 (generalized cohomology theories)), 就是说, 存在 Thom 类 (Thom class)  $u \in \tilde{E}^*(T\xi)$ . 这时,  $\tilde{E}^*(T\xi)$  就是一个  $E^*(X)$  模, 而且由乘以 Thom 类给出的同态  $\varphi: E^i(X) \rightarrow \tilde{E}^{i+n}(T\xi)$  是一个同构, 称为 Thom 同构 (或 Thom-Dold 同构 (Thom-Dold isomorphism)).

用对偶的方式可以定义一个同构  $E_i(X) \rightarrow \tilde{E}_{i+n}(T\xi)$ .

[1] 中对于经典上同调论  $H^*$  给出了 Thom 同构, 而对一般上同调论  $E^*$  却是在 [2] 中建立的. 而且, 若  $\xi$  在整系数上同调论  $H^*$  中是不定向的, 则有一个同构  $H^k(X) \cong H^{k+n}(T\xi; \{Z\})$ , 其中右端是系数在群的局部系统  $\{Z\}$  中的上同调群. 更一般地说, 若  $\xi$  在上同调论  $E^*$  中是不定向的, 则有一个同构, 它既推广了上面介绍的 Thom 同构, 也推广了对  $E^*$  定向丛的 Thom-Dold 同构 ([3]).

#### 参考文献

- [1] Thom, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comm. Math. Helv., 28 (1954), 17 - 86.

- [2] Dold, A., Relations between ordinary and extraordinary homology, in Coll. Algebraic Topol., Aarhus Univ., 1962, 2 - 9.

- [3] Рудяк, Ю. Б., «Докл. АН СССР», 255 (1980), 6, 1323 - 1325.

- [4] Switzer, R. M., Algebraic topology: homotopy and homology, Springer, 1975.

Ю. В. Рудяк 撰 余建明 译

#### Thom 空间 [Thom space; Тома пространство]

与一个向量丛 (或者球面丛) 或者球面纤维化相联系的拓扑空间.

设  $X$  为 CW 复形,  $\xi$  为其上的向量丛. 假定在  $\xi$  上给定了一个 Riemann 度量, 考虑与  $\xi$  相应的单位圆盘丛  $D(\xi)$ . 单位球面丛  $S(\xi)$  是  $D(\xi)$  的子丛; 商空间  $D(\xi)/S(\xi)$  就是丛  $\xi$  的 Thom 空间, 记为  $T(\xi)$ . 若底空间  $X$  为紧空间, 则 Thom 空间也可说成是丛  $\xi$  的全空间的单点紧化. 而且, Thom 空间是投射  $S(\xi) \rightarrow X$  的锥 (cone). 对任意的球面纤维化, 也可以用这种方式来定义它的 Thom 空间. 当然, 对任何以  $\mathbb{R}^n$  为纤维的丛也可以定义 Thom 空间.

设  $O_k$  为空间  $\mathbb{R}^k$  的正交变换群, 在它的分类空间 (classifying space)  $BO_k$  之上有一个与万有  $O_k$  丛相联的  $k$  维向量丛  $\gamma_k$ . Thom 空间  $T\gamma_k$  通常记作  $MO_k$  或  $TBO_k$ , 并称为群  $O_k$  的 Thom 空间. 类似地, 可以引进 Thom 空间  $MU_k$ ,  $M\mathrm{Sp}_k$  等等, 其中  $U_k$  与  $\mathrm{Sp}_k$  分别为酉群与辛群.

Thom 空间的作用在于可以将一系列几何问题化成同伦拓扑学中的问题, 由此又化成代数问题. 从而, 计算下配边 (bordism) 群的问题就化成了计算 Thom 空间  $MO_k$ ,  $MSO_k$  等等的同伦群的问题 (见 [1], [2] 以及配边 (cobordism)). 光滑流形的分类问题化成了研究法丛 (normal bundle) 的 Thom 空间的同伦性质 (见 [3]). 用子流形来实现闭链的问题 (见 Steenrod 问题 (Steenrod problem)) 化成了研究 Thom 空间  $MSO_k$  与  $MO_k$  等等的上同调 (亦见横截映射 (transversal mapping); 管状邻域 (tubular neighbourhood)).

在丛的范畴上, Thom 空间的构造是自然的, 就是说, 每个 (向量) 丛之间的态射  $f: \xi \rightarrow \eta$  都诱导出一连续映射  $T(f): T(\xi) \rightarrow T(\eta)$ . 特别地, 由于在一个点上  $n$  维向量丛的 Thom 空间是  $S^n$ , 因而对  $X$  上的任意  $n$  维丛  $\xi$  以及任意点  $x \in X$  都有一包含映射  $j_x: S^n \rightarrow T(\xi)$  (由  $x$  上纤维的包含映射所诱导). 如果  $X$  是道路连通的, 则所有这样的包含映射都是同伦的, 因此可以有一个在同伦等价意义下是唯一确定的映射  $j: S^n \rightarrow T(\xi)$ .

对于分别定义在  $X$  与  $Y$  上的两个丛  $\xi$  与  $\eta$ , 可



以定义  $X \times Y$  上的丛  $\xi \times \eta$ . 那么  $T(\xi \times \eta) = T(\xi) \wedge T(\eta)$  (见 [4]). 特别对于平凡丛  $\theta^n$ , 有  $T(\xi \oplus \theta^n) = S^n T(\xi)$ , 其中  $S$  为纬垂 (suspension) 算子, 从而  $T(\theta^n) = S^n(X \cup \text{pt})$ . 在这种情况下可以构造 Thom 空间的谱, 见 **Thom 谱** (Thom spectrum).

若  $E$  为乘性广义上同调论 (generalized cohomology theories), 则有一配对

$$E^*(D(\xi)) \otimes E^*(D(\xi), S(\xi)) \rightarrow E^*(D(\xi), S(\xi)).$$

由此产生一个配对

$$E^*(X) \otimes \tilde{E}^*(T\xi) \rightarrow \tilde{E}^*(T\xi),$$

从而  $\tilde{E}^*(T\xi)$  是一个  $E^*(X)$  模, 这一事实可用来构造 **Thom 同构** (Thom isomorphism).

下面重要的 Atiyah 对偶性定理 (Atiyah duality theorem) 经常要用到 (见 [4], [5]): 若  $M$  为光滑流形, 有边界  $\partial M$  (可能为空集),  $\nu$  是它的法丛, 则 Thom 空间  $T(\nu)$  与  $M/\partial M$  是  $S$  对偶的.

#### 参考文献

- [1] Thom, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comm. Math. Helv.*, **28** (1954), 17 - 86.
- [2] Stong, R. E., Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, 1968.
- [3] Browder, W., Surgery on simply-connected manifolds, Springer, 1972.
- [4] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.
- [5] Atiyah, M., Thom complexes, *Proc. London Math. Soc.*, **11** (1961), 291 - 310. Ю. Б. Рудяк 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Dold, A., A history of algebraic and differential topology: 1900 - 1960, Birkhäuser, 1989.

余建明 译

#### Thom 谱 [Thom spectrum; Тома спектр]

一个空间的谱 (spectrum of spaces), 它等价于某些结构序列的谱 (见  $(B, \varphi)$  结构 ( $(B, \varphi)$ -structure)).

设  $(B_n, \varphi_n, g_n)$  为一结构序列,  $\xi_n$  为映射  $\varphi_n: B_n \rightarrow BO_n$  在  $B_n$  上诱导的丛. 令  $T_n$  为  $\xi_n$  的 **Thom 空间** (Thom space). 映射  $g_n$  诱导出映射  $S_n: ST_n \rightarrow T_{n+1}$ , 其中  $S$  为纬垂 (suspension) 算子:  $ST\xi_n = T(\xi_n \oplus \theta)$  ( $\theta$  为一维平凡丛). 对于结构序列  $(B_n, \varphi_n, g_n)$ , 可以得到一个空间的谱  $\{T\xi_n\} = T(B, \varphi, g)$ , 与形如  $T(B, \varphi, g)$  的谱 (同伦) 等价的任何谱都称为 **Thom 谱**. 它代表了  $(B, \varphi)$  配边理论. 因此, 典型 Lie 群  $O_k, SO_k, U_k$  与  $Sp_k$  的序列就导出

了 Thom 谱  $TBO, TBSO, TBU$  以及  $TBSp$ .

设  $\beta_n$  为有  $n$  束的 Artin 辫群 (见 **辫论** (braid theory)). 若  $S_n$  为对称群, 则同态  $\beta_n \rightarrow S_n \subset O_n$  导出一个映射  $B\beta_n \rightarrow BO_n$ , 由此可以得到一结构序列 (将  $\beta_n$  典范地嵌入  $\beta_{n+1}$  中). 相应的 Thom 谱等价于 Eilenberg-MacLane 谱  $K(\mathbb{Z}/2) = \{K(\mathbb{Z}/2, n)\}$ , 因此  $K(\mathbb{Z}/2)$  是一 Thom 谱 (参见 [1], [2]). 类似地, 利用球面丛可以说明,  $K(\mathbb{Z})$  是一 Thom 谱 (见 [3]).

#### 参考文献

- [1] Mahowold, M., A new infinite family in  $2^{\pi_2}$ , *Topology*, **16** (1977), 249 - 256.
- [2] Priddy, S.,  $K(\mathbb{Z}/2)$  as a Thom spectrum, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **70** (1978), 2, 207 - 208.
- [3] Mahowold, M., Ring spectra which are Thom complexes, *Duke Math. J.*, **46** (1979), 3, 549 - 559.

Ю. Б. Рудяк 撰 余建明 译

#### Thompson 子群 [Thompson subgroup; Томпсона под-группа]

$p$  群 ( $p$ -group) 的由所有极大阶的 Abel 子群生成的特征子群 (characteristic subgroup). 这是 J. G. Thompson ([1]) 所引入的.

#### 参考文献

- [1] Thompson, J. G., A replacement theorem for  $p$ -groups and a conjecture, *J. Algebra*, **13** (1969), 149 - 151.
- [2] Gorenstein, D., Finite groups, Harper & Row, 1968.

Н. Н. Вильямс 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Doerk, K. and Hawkes, T., Finite soluble groups de Gruyter, 1992, p. 214.

石生明 译 王 杰 校

**脉络** [thread; нить], 亦称 丝线、线索, 逆谱  $\{X_\alpha, \omega_\alpha^\beta: \alpha \in \mathfrak{A}\}$  的

点  $x_\alpha \in X_\alpha$  (每个  $X_\alpha$  取一点) 的一个点系  $x = \{x_\alpha\}$ , 即集合  $X_\alpha$  之积  $\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$  的一个点, 它使  $\beta > \alpha$  时  $\omega_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$ .

Б. А. Посынков 撰

**【补注】** 一个逆谱 (或投射系, 或反系) 的脉络集称为该谱的 (投射, 反) 极限 (见 **极限** (limit) 的补注).

#### 参考文献

- [A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

罗嵩龄 译

#### 三体问题 [three-body problem; трех тел задача]

三个可视为质点的物体在 Newton 引力 (见 **New-**

ton 力学定律 (Newton laws of mechanics) 的相互作用下的运动问题. 三体问题的经典例子是太阳 - 地球 - 月亮系统的运动. 三体问题可归结为求解下面的微分方程组:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial y_i},$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

这里,  $x_i, y_i, z_i$  是物体  $M_i$  在某个具有固定坐标轴的绝对坐标系下的直角坐标,  $t$  为时间,  $m_i$  为物体  $M_i$  的质量,  $U$  为只依赖于质点之间相互位置的势能. 函数  $U$  可由下式给出:

$$U = f \left[ \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_2 m_3}{\Delta_{23}} + \frac{m_3 m_1}{\Delta_{13}} \right], \quad f > 0,$$

这里, 相互之间的距离  $\Delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3$  由下式给出:

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}.$$

根据势能的性质, 可以求得运动方程式在绝对坐标系下的十个第一积分. 其中六个称之为质心运动积分, 确定三个物体质心的匀速直线运动. 三个是角动量积分, 确定三体系统的角动量的值和方向. 能量积分确定系统总能量的常值. H. Bruns (1887) 证明了: 三体问题的运动方程没有其他可以表示为坐标及其导数的代数函数的第一积分. H. Poincaré (1889) 进一步证明了: 三体问题的运动方程没有可以表示为单值解析函数的超越积分. C. Sundman (1912) 求得问题的通解, 它表示为每时每刻都收敛的某个正则变量的幂级数. 但是证明, 由于 Sundman 级数收敛极慢, 故对定性研究或实际的数值计算都毫无用处.

三体问题的方程式可以有五个特解, 其中三个质点全都处在某个固定的平面上. 这里, 三体的布局保持固定, 共绘出其共同焦点在系统质心上的诸 Kepler 轨道. 两个特解相应于三体在任何时刻都形成等边三角形的情况. 这是三体问题的所谓 三角形解 (angular solution) 或 Lagrange 解 (Lagrange solution). 三个特解相应于三体都在一条直线上的情况, 称为 直线特解 (rectilinear particular solution), 或 Euler 解 (Euler solution).

对于三体问题的情况, 最终运动 即运动在  $t \rightarrow +\infty$  和  $t \rightarrow -\infty$  时的极限性质得到了详细的研究.

三体问题的一种特殊情况是所谓的 限制三体问题 (restricted three-body problem), 它是从一般的三体问题得出的, 其时, 三体中有一体的质量很小, 以至于对另外两体运动的影响可以忽略不计. 这时, 具

有有限质量  $m_1$  和  $m_2$  的物体  $M_1$  和  $M_2$  在受其相互引力的作用下沿着 Kepler 轨道运动. 对于坐标系  $G\xi\eta\zeta$ , 其原点  $G$  在物体  $M_1$  和  $M_2$  的质心,  $\xi$  轴指向物体  $M_1$  和  $M_2$  的连线,  $\zeta$  轴垂直于它们运动的平面, 具有小质量的第三个物体  $M_3$  的运动可用下列微分方程描写:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{v}\dot{\eta} - \dot{v}^2\xi - \ddot{v}\eta = \frac{\partial W}{\partial \xi},$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{v}\dot{\xi} - \dot{v}^2\eta + \ddot{v}\xi = \frac{\partial W}{\partial \eta},$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{\partial W}{\partial \zeta},$$

这里:

$$W = f \left[ \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right].$$

$v$  是物体  $M_1$  和  $M_2$  的 Kepler 运动的真近点距 (true anomaly),  $r_1$  和  $r_2$  分别是物体  $M_3$  到物体  $M_1$  和  $M_2$  的距离. 对于 圆限制三体问题 (circular restricted three-body problem), 有:

$$\dot{v} = n = \text{常数}, \quad \ddot{v} = 0$$

物体  $M_3$  的运动方程也有一个第一积分, 称为 Jacobi 积分 (Jacobi integral), 其形式为

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = n^2(\xi^2 + \eta^2) +$$

$$+ 2f \left[ \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right] + C$$

这里  $C$  为任意常数. 对于由方程

$$n^2(\xi^2 + \eta^2) + 2f \left[ \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right] + C = 0$$

所确定的曲面称为零速度面, 值得注意的是它确定了物体  $M_3$  相对于物体  $M_1$  和  $M_2$  的可能运动的区域. 限制三体问题有一些与普遍的三体问题类似的特解. 在这些特解中, 具有小质量的物体的位置称之为自由点.

对于限制三体问题, 已经研究了周期运动的各种类别.

#### 参考文献

- [1] Дубошин, Г. Н.: Небесная механика, Аналитические и качественные методы, 2 пзд., М., 1978.
- [2] Субботин, М. Ф.: Введение в теоретическую астрономию, М., 1968.

Е. П. Аксенов 撰

#### 【补注】

对于限制三体问题可应用 KAM 理论, 见拟周期运动 (quasi-periodic motion).

#### 参考文献

- [A1] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical



mechanics, Springer, 1978 (中译本: В. И. Арнольд, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992).

[A2] Poincaré, H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1-3, Gauthiers-Villars, 1892-1899.

[A3] Arnol'd, V. I. and Avez, A., Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, 1968 (译自俄文).

[A4] Siegel, C. L., Vorlesungen über Himmelsmechanik, Springer, 1956.

[A5] Siegel, C. L., and Moser, J., Lectures on celestial mechanics, Springer, 1971.

[A6] Abraham, R. and Marsden, J. E., Foundations of mechanics, Benjamin/Cummings, 1978.

王克仁 译 诸德超 校

### 三维流形 [three-dimensional manifold; трехмерное многообразие]

一个拓扑空间 (topological space), 它的每个点都有一个同胚于三维实空间  $\mathbf{R}^3$  或闭的半空间  $\mathbf{R}_+^3$  的邻域. 这个定义通常补充要求三维流形作为拓扑空间是 Hausdorff 和有可数基的. 三维流形的边界, 即只有上面类型中的第二种而不是第一种邻域的那种点的集合, 是一个无边的二维流形 (two-dimensional manifold). 三维流形的拓扑学的方法是非常特殊的并因而在流形的拓扑学 (topology of manifold) 中处于一个特殊地位.

例. 三维流形的一些性质在一般情况下对高维的流形不成立, 它们是: 可定向的三维流形总是平行的; 闭三维流形形成某个四维流形的边界; 总可给三维流形引入分片线性和微分构造, 并且在两个三维流形之间的任何同胚总可以用分片线性同胚和可微分同胚逼近.

描述三维流形的最普遍的方法之一是使用 Heegaard 分解 (Heegaard decomposition) 和与之密切相关的 Heegaard 图 (Heegaard diagram). 该方法的精髓是, 任何闭定向三维流形  $M$  可以分解为两个有公共边界的子流形, 其中每个子流形同胚于某个亏格  $n$  的标准的完全双环面 (或环柄体, 见环柄理论 (handle theory))  $V$ . 换言之, 一个三维流形  $M$  可以由两个完全的双环面  $V$  沿着它们的边界用某个同胚粘合而成. 这个事实使得三维流形的拓扑学中的许多问题可以简化到曲面的拓扑学中的问题. 最小的可能数  $n$  称为三维流形  $M$  的亏格 (genus of the three-dimensional manifold  $M$ ). 描述三维流形的另一个有用的方法基于三维流形和  $S^3$  中的连接 (见纽结理论 (knot theory)) 之间紧密联系的存在性: 任何闭定向三维流形  $M$  可用形式  $M = \partial W$  来表示, 其中四维流形  $W$  是从 4 球  $B^4$  通过沿  $S^3 = \partial B^4$  中的某个标架连接  $L$  的分支粘贴指数 2 的环柄得到. 等价地, 一个三维流形  $M$  可从球面  $S^3$  中用球面的割补术 (surgery) 得到. 此

外, 可以要求连接  $L$  的所有分支有偶数的标架, 并因此, 这样得到的流形  $W$  是可平行的. 人们经常用到将三维流形作为  $S^3$  中的分歧覆叠空间的这个表示. 如果  $L$  是  $S^3$  中的连接, 则  $S^3/L$  的任何有限层覆叠空间可以给一个闭三维流形  $M$  一些圆来紧化. 在  $p^{-1}(L)$  的外部是局部同胚的自然投影  $p: M \rightarrow S^3$  称为具有沿  $L$  分歧的  $S^3$  的分歧覆叠. 任何一个亏格 2 的三维流形是具有沿某个连接的分歧的球面的二层覆叠, 而在任何亏格的三维流形的情形中, 只能保证一个具有沿某个纽结分歧的三层覆叠的存在性. 这个情况就是为什么三维 Poincaré 猜想和球面的算法识别的问题直到目前为止只在亏格 2 的三维流形中有解的主要原因.

三维流形的拓扑学的主要问题是它们的分类问题. 一个三维流形  $M$  称为简单的 (simple), 如果  $M = M_1 \# M_2$  蕴涵着流形  $M_1, M_2$  中恰有一个是球面. 每一个紧三维流形分解成有限数目的简单三维流形的连通和. 这个分解在可定向的情形是唯一的, 而在不可定向的情形差一个由  $S^2 \times S^1$  的直积的替代是唯一的. 代替简单三维流形的概念, 用不可约的三维流形的概念经常更有用, 即这个三维流形中的每一个 2 球面形成一个球的边界. 不可约的三维流形类与简单的三维流形不同, 正好差三个流形:  $S^3, S^2 \times S^1$  和  $S^2 \tilde{\times} S^1$ . 这里, 流形  $S^3$  是不可约的, 但通常不认为是简单的, 而流形  $S^2 \times S^1$  和  $S^2 \tilde{\times} S^1$  是简单的但不是不可约的. 带边不可约三维流形已相当好地被研究过了. 例如偶对的任何同伦等价  $f: (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$  可以形变成一个同胚, 其中,  $M, N$  是带边的紧定向不可约的三维流形. 在闭的情形下, 附加三维流形  $M$  充分地大 (即它包含某个二边不可压缩的曲面) 就足够了. 这里, 一个曲面  $F \subset M, F \neq S^2$  称作是不可压缩的 (incompressible), 如果从  $\pi_1(F)$  到  $\pi_1(M)$  中的由嵌入诱导的群同态是单射的. 如果一个紧不可约三维流形的第一同调群是无限的, 那么, 这样的曲面一定存在. 任何紧定向不可约足够大的三维流形, 它的基本群含有一个无限循环的正规子群, 则该三维流形是一个 Seifert 流形 (Seifert manifold).

#### 参考文献

- [1] Hempel, J., 3-manifolds, Princeton Univ. Press, 1976.
- [2] Waldhausen, F., On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math.*, 87 (1968), 56-88.
- [3] Jaco, W., Lectures on three-manifold topology, Amer. Math. Soc., 1980. C. B. Матвеев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Moise, E. E., Geometric topology in dimensions 2 and 3, Springer, 1977. 徐森林 译

三级数定理 [three-series theorem; трех рядов теорема], Колмогоров 三级数定理 (Kolmogorov three-series theorem), 三级数准则 (three-series criterion)

【补注】对于每个  $s > 0$ , 设  $\tau_s$  是截断函数

$$\tau_s(x) = \begin{cases} s, & \text{当 } x \geq s \text{ 时,} \\ x, & \text{当 } |x| \leq s \text{ 时,} \\ -s, & \text{当 } x \leq -s \text{ 时.} \end{cases}$$

设  $X_1, X_2, \dots$  是一些独立随机变量, 其分布分别为  $F_1, F_2, \dots$ . 考虑和  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , 其分布为  $F_1 \star \dots \star F_n$ . 为使这些卷积  $F_1 \star \dots \star F_n$  当  $n \rightarrow \infty$  时趋于正常极限分布, 其必要充分条件是: 对于一切  $s > 0$ , 有

$$\sum_k P\{|X_k| > s\} < \infty, \quad (\text{A1})$$

$$\sum \text{Var}(X'_k) < \infty, \quad (\text{A2})$$

$$\sum_{k=1}^n E(X'_k) \rightarrow m, \quad (\text{A3})$$

其中  $X'_k = \tau_s(X_k)$ .

这一事实可以重述为 Колмогоров 三级数定理 (Kolmogorov three-series theorem): 如果 (A1) - (A3) 成立, 则级数  $\sum X_k$  以概率 1 收敛, 否则, 它以概率 0 收敛.

#### 参考文献

[A1] Loève, M., Probability theory, Princeton Univ. Press, 1963.

[A2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 上册, 下册, 科学出版社, 1979). 杜小杨 译

“ $3\sigma$ ”法则 [‘three-sigma’ rule; ‘трех сигм’ правило]

一种经验法则. 根据这种法则, 在概率论和数理统计中, 把“正态分布 (normal distribution) 随机变量的值对其数学期望 (mathematical expectation) 的偏差不大于 3 倍标准差 (standard deviation)”视为实际不可能事件.

设  $X$  是服从正态分布  $N(a, \sigma^2)$  的随机变量; 对于任意  $k > 0$ , 有

$$P\{|X - a| < k\sigma\} = 2\Phi(k) - 1,$$

其中  $\Phi(\cdot)$  是标准正态分布函数; 特别地, 对于  $k = 3$ , 有

$$P\{a - 3\sigma < X < a + 3\sigma\} = 0.99730.$$

该式表明, 随机变量  $X$  的值偏离其数学期望  $a$  的距离超过  $3\sigma$  的情形, 在 1000 次试验中平均不多于 3

次. 试验者有时正是基于这一事实, 在某些概率论与数理统计问题中, 把事件  $\{|X - a| \geq 3\sigma\}$  视为实际不可能的, 从而把事件  $\{|X - a| < 3\sigma\}$  视为实际必然的. 在这种情形下, 称试验者遵循“ $3\sigma$ ”法则.

#### 参考文献

[1] Смирнов, Н. В., Дуинин-Барковский, И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М. 1969.

М. С. Никулин 撰 周概容 译

#### Thue 法 [Thue method; Туэ метод]

A. Thue ([1]) 在解决下述用有理数逼近代数数 (algebraic number) 的问题时创立的 Diophantus 逼近 (Diophantine approximation) 论中的一个方法: 求数  $v = v(n)$ , 使得对于每个  $n$  次代数数  $\alpha$ , 不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{v+\varepsilon}} \quad (1)$$

对任何  $\varepsilon > 0$  有有限多组有理整数解  $p$  和  $q$  ( $q > 0$ ), 而对任何  $\varepsilon < 0$  有无穷多组解.

Thue 证明了  $v \leq n/2 + 1$ . Thue 的方法是基于特殊的二变量  $x, y$  的整系数多项式  $f(x, y)$  的性质以及对于  $v \leq n/2 + 1$  和充分大的  $q$  存在 (1) 的两组解的假设. Thue 定理 (Thue theorem) 在数论中有许多重要应用. 特别, 它蕴含了 Diophantus 方程

$$F(x, y) = m \quad (2)$$

不可能有多于有限多个整数解  $x$  和  $y$ , 此处  $F(x, y)$  是变量  $x, y$  的次数  $n \leq 3$  的整系数不可约型,  $m$  是一个整数.

(1) 中  $v$  的最好可能的估值是 K. F. Roth ([2]) 得到的, 他把 Thue 方法推广到与多项式  $f(x, y)$  类似的具有任意多个变量的多项式的情形, 并且用到 (1) 的大的解数. 其结果是对于任何  $n \geq 2$  有  $v = 2$ , 它称之为 Thue-Siegel-Roth 定理 (Thue-Siegel-Roth theorem). Thue 法还被推广到用代数数逼近代数数的情形. Thue 方法是用来证明一类广泛的代数簇上的曲线上整点个数有限性的一般性方法 (见 Diophantus 几何 (Diophantine geometry); Diophantus 集 (Diophantine set)). 另外, Thue 方法有一个本质性的缺陷, 它在下列意义下是非有效性方法: 它不能对于在证明中被用到的不等式 (1) 或相应的方程 (2) 的那些解是否事实上存在的问题提供答案. 因此, Thue 方法在解决方程 (2) 的解数的有限性问题时, 没有提供确定一个这种类型的具体的方程是否可解以及给出这些解  $x, y$  的值的估计与  $F$  的相依关系的可能性.

亦见有效的 Diophantus 逼近问题 (Diophantine approximation, problems of effective).



## 参考文献

- [1] Thue, A., Ueber Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. Reine Angew. Math.*, **135** (1909), 284 – 305.  
 [2] Roth, K. F., Rational approximation to algebraic numbers, *Mathematika*, **2** (1955), 1, 1 – 20.  
 [3] Проблемы теории диофантовых приближений, М., 1974. А. Ф. Лаврик 撰

【补注】 Thue 方法被 C. L. Siegel 推广而得到  $v < 2\sqrt{n}$ . 一个很好的阐述可见 [A1]. 这个方法称做 Thue-Siegel 方法 (Thue-Siegel method). 最近 P. Vojta ([A2]) 指出如何应用它给出 Mordell 猜想 (Mordell conjecture) 的新证明, 这个方法得到令人瞩目的成功. E. Bombieri 给出了这个证明的值得注意且易于理解的简化. 对于其他的推广, 见 Thue-Siegel-Roth 定理 (Thue-Siegel-Roth theorem).

## 参考文献

- [A1] Landau, E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Chelsea, 1969.  
 [A2] Vojta, P., Siegel's theorem in the compact case, *Ann. of Math.*, **133** (1991), 3, 509 – 548.  
 朱尧辰 译 戚鸣皋 校

半 Thue 系统 [Thue semi-system 或 semi-Thue system; полу-Туз система], 替换系统 (system of substitutions)

见 Thue 系统 (Thue system).

Thue-Siegel-Roth 定理 [Thue-Siegel-Roth theorem; Туэ-Зигеля-Рота теорема]

如果  $\alpha$  是代数无理数 (见代数数 (algebraic number)), 而  $\delta > 0$  任意小, 那么不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\delta}}$$

只有有限多组整数解  $p$  和  $q > 0$  ( $p$  和  $q$  互素).

这个定理在这种类型的定理中是最好可能的; 指数中的数 2 不能再减小. Thue-Siegel-Roth 定理是 Liouville 定理的强化 (见 Liouville 数 (Liouville number)). Liouville 的结果被 A. Thue ([1]), C. L. Siegel ([2]), 及最后被 K. F. Roth ([3]) 逐次加强. Thue 证明了, 如果  $\alpha$  是次数  $n \geq 3$  的代数数, 那么不等式

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^v}$$

当  $v > (n/2) + 1$  时仅有有限多组整数解  $p$  和  $q > 0$  ( $p$  和  $q$  互素). Siegel 证明了 Thue 定理当  $v > 2\sqrt{n}$  时正确. 上面叙述的这个定理的最终的形式是 Roth 得到的. Thue-Siegel-Roth 定理有一个  $p$  进类似. 上面所列出的那些结果都是用非有效性方法证明的 (见

有效的 Diophantus 逼近问题 (Diophantine approximation, problems of effective)).

## 参考文献

- [1] Thue, A., Bemerkungen über gewisse Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *Norske Vidensk. Selsk. Skrifter*, **3** (1908), 1 – 34.  
 [2] Siegel, C. L., Approximation algebraischer Zahlen, *Math. Z.*, **10** (1921), 173 – 213.  
 [3] Roth, K. F., Rational approximation to algebraic numbers, *Mathematika*, **2** (1955), 1, 1 – 20.  
 [4] Mahler, K., Lectures on diophantine approximations, I, Univ. Notre Dame, 1961.  
 [5] Ridout, D., The  $p$ -adic generalization of the Thue-Siegel-Roth theorem, *Mathematika*, **5** (1958), 40 – 48.  
 [6] Гельфонд, А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952. (英译本: Gel'fond, A. O., Transcendental and algebraic numbers, Dover, 1960). С. В. Котов 撰

【补注】 1971 年 W. M. Schmidt ([A1]) 把 Roth 定理推广到几个代数数的联立逼近问题. 他的结果被 H. P. Schlickewei ([A2]) 加以扩充, 使包括了  $p$  进赋值的情形. 后一工作在指数 Diophantus 方程理论 ( $S$  单位方程) 中有一些深刻的推论 (见 [A3]).

在一个完全不同但引人注目的方向上, G. Faltings ([A4]) 把 Roth 定理扩充到 Abel 簇的乘积上并证明了 S. Lang 关于 Abel 簇的子簇上的有理点的一个值得注意的猜想. 这个证明还可以看作 Mordell 猜想 (Mordell conjecture) 的 Vojta 证明的推广 (亦见 Thue 定理 (Thue theorem)).

## 参考文献

- [A1] Schmidt, W. M., Diophantine approximation, Lecture Notes in Math., 785, Springer, 1980.  
 [A2] Schlickewei, H. P., The  $p$ -adic Thue-Siegel-Roth-Schmidt theorem, *Arch. Math.*, **29** (1977), 267 – 270.  
 [A3] Evertse, J. H., On sums of  $S$ -units and linear recurrences, *Compos. Math.*, **53** (1984), 225 – 244.  
 [A4] Faltings, G., Diophantine approximation on abelian varieties, *Ann. of Math.*, **133** (1991), 3, 549 – 576.  
 朱尧辰 译 戚鸣皋 校

Thue 系统 [Thue system; Туэ система]

一种以 A. Thue 的姓氏命名的结合演算 (associative calculus). A. Thue 第一个形式的表述了结合系统中识别字的相等问题 (Thue 问题 (Thue problem), 见 [1]). 如果在一个给定的系统中, 容许的替换仅仅是关系的右手边到左手边的替换 (即倒换替换不许使用), 那么得到一个半 Thue 系统 (Thue semi-system 或 semi-Thue system). 这些系统实际上与局部典范

的 Post 系统相同. 每一个 Thue 系统可以视为一个半 Thue 系统, 但反之不真.

#### 参考文献

- [1] Thue, A., Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebener Regeln, *Kra. Vidensk. Selsk. Skrifter.*, 10 (1914).
- [2] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions, Wolters-Noordhoff, 1970).

С. И. Адян 撰 卢景波 译 罗里波 校

#### 结 [tie; совпадение]

样本中取同一值的观测值组. 设  $X_1, \dots, X_n$  是独立服从同一绝对连续型概率律的随机变量, 其密度为  $p(x)$ . 那么, 观测值  $X_1, \dots, X_n$  以概率 1 两两不等: 若  $i \neq j$ , 则  $X_i \neq X_j$ , 并且基于样本  $X_1, \dots, X_n$  的**顺序统计量** (order statistic)

$$X_{(1)} < \dots < X_{(n)} \quad (*)$$

的每一项  $X_{(i)}$  都严格大于其前一项  $X_{(i-1)}$ .

不过, 实际中计量随机变量  $X_1, \dots, X_n$  时, 由于舍入误差可能出现若干组观测值, 其中每组内的观测值两两相等. 每一个这样的等观测值组称为**结** (tie). 这样, 在一般情形下, 试验者观测到的不是 (\*), 而是**顺序统计量**

$$X_{(1)} = \dots = X_{(\tau_1)} < X_{(\tau_1+1)} = \dots = X_{(\tau_1+\tau_2)} < \dots \\ \dots < X_{(\tau_1+\dots+\tau_{k-1}+1)} = \dots = X_{(\tau_1+\dots+\tau_k)},$$

其中所有  $\tau_i \geq 1$ , 而  $\tau_1 + \dots + \tau_k = n$ . 于是, 如果出现结, 即如果存在  $\tau_j \geq 2$ , 则在确定秩向量时产生困难, 然而在构造**秩统计量** (rank statistic) 时秩向量起基础的作用. 对于如何确定等观测值的秩尚无定论. 该问题的如下两种解法应用最为广泛.

第一种是随机化法. 按这种方法, 构成第  $j$  组的元素

$$X_{(\tau_1+\dots+\tau_{j-1}+1)} = \dots = X_{(\tau_1+\dots+\tau_j)}$$

的秩, 以概率  $1/\tau_j!$  可以取  $\tau_j$  个数

$$\tau_1 + \dots + \tau_{j-1} + 1, \quad \tau_1 + \dots + \tau_{j-1} + 2, \dots, \\ \dots, \tau_1 + \dots + \tau_j$$

的任何一种排列. 随机化法的优点是简便, 但是在关于随机变量  $X_i$  的分布律有几种选择的情形下, 实际运用随机化可能影响统计推断的结果.

第二种方法赋予构成第  $j$  组的等观测值

$$X_{(\tau_1+\dots+\tau_{j-1}+1)} = \dots = X_{(\tau_1+\dots+\tau_j)}$$

相同的秩, 称之为**平均秩** (midrank):

$$\tau_j = \tau_1 + \dots + \tau_{j-1} + \frac{\tau_j + 1}{2},$$

等于数

$$\tau_j + \dots + \tau_{j-1} + 1, \quad \tau_1 + \dots + \tau_{j-1} + 2, \dots, \\ \dots, \tau_1 + \dots + \tau_j$$

的算术平均值. 自然, 这种方法也影响秩统计量的性质, 这在实际中需要考虑到. 例如, 在存在结的情形下, 构造 **Wilcoxon 检验** (Wilcoxon test) 的统计量  $W$  时, 恰好应该选用平均秩, 这时统计量  $W$  的数学期望  $E W$  与无结的情形一样, 而方差  $D W$  由于秩的平均而减小, 等于

$$D W = \frac{m n (m + n - 1)}{2} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{1}{(m + n) [(m + n)^2 - 1]} \sum_{j=1}^k \tau_j (\tau_j^2 - 1) \right\},$$

在统计量  $W$  的标准化时应注意到这一点.

#### 参考文献

- [1] Hájek, J., Theory of rank test, Academia, 1967.
- [2] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1983.

М. С. Никулин 撰

#### 【译注】

#### 参考文献

- [B1] 陈希孺、柴根象, 非参数统计教程, 第四章, 华东师范大学出版社, 1993. 周概容、王健 译

#### 胎紧浸入和套紧浸入 [tight and taut immersions; тесное и напряжённое погружения]

【补注】  $N$  维 Euclid 空间  $R^N$  中闭连通  $n$  维流形  $M$  的  $C^k (k \geq 2)$  可微浸入  $f: M \rightarrow R^N$  的**全绝对曲率** (total absolute curvature of an immersion)  $\tau_a(f) \leq c_0$  (见流形的浸入 (immersion of a manifold)) 可由局部不变量表为积分 (A2). 它满足

$$\tau_a(f) \geq \gamma \geq \beta = \sum \beta_i. \quad (A1)$$

这里  $\gamma$  是取遍所有从  $M$  到 Euclid 空间的浸入或某类特殊的浸入 (例如光滑嵌入的空间的某个分支) 时,  $\tau_a(f)$  的极小值,  $\beta_i = \text{rank } H_i(M; Z_2)$  是以  $Z_2$  为系数的 Čech 同调的第  $i$  个 **Betti 数** (Betti number) (见 Čech 上同调 (Čech cohomology)).

对于一条闭曲线 (curve),  $\tau_a(f) = \int |\rho ds| / \pi \geq \beta = 2$ , 其中  $\rho$  是曲率,  $s$  是弧长. 对  $R^3$  中的一个  $C^2$  曲面 (surface)  $M$ ,  $\tau_a(f) = \int |K d\sigma| / 2\pi \geq \gamma = \beta = 4 - \chi$ , 这里  $K$  是 **Gauss 曲率** (Gaussian curvature),  $d\sigma$  是面积形式,  $\chi$  是  $M$  的 **Euler 示性数** (Euler characteristic). 一个浸入  $f$  称为**胎紧的** (tight), 如果  $\gamma = \beta$ , 而且  $f$  具有最小全绝对曲率  $\tau_a(f) = \beta$ ,



即达到下界. 进而, 如果  $f(M)$  位于单位球面  $S^{N-1} = \{z \in \mathbf{R}^N: |z|=1\}$  之中, 那么从  $M$  到  $S^{N-1}$  的浸入  $f$  称为套紧的 (taut). 一个套紧浸入总是一个嵌入.

$\tau_a$  的一般定义如下:

$$\tau_a(f) = \frac{\int_Q |v^*(\omega)|}{\text{vol}(S^{N-1})} = \int_M \tau_m |d\sigma_m|. \quad (\text{A2})$$

这里  $Q$  是  $(N-1)$  维流形, 它是在  $f(m)$  处的单位法向量丛, 其中  $m \in M$ ,  $v$  为由从  $Q$  到  $S^{N-1}$  上的 Gauss 映射所给出的自然投影, 体积元  $\omega$  为  $S^{N-1}$  上的一个  $(N-1)$  形式,  $v^*(\omega)$  是  $\omega$  在  $Q$  上的拉回,  $d\sigma_m$  为  $M$  上的由到 Euclid 空间的浸入所诱导的体积元. 称形式  $v^*(\omega)$  为 Lipschitz-Killing 形式 (Lipschitz-Killing form), 合理定义的密度  $\tau_m \geq 0$  是  $M$  上的绝对 Lipschitz-Killing 密度 (absolute Lipschitz-Killing density). 对于  $(\mathbf{R}^3 \text{ 中的})$  曲面,  $\tau_m = |K|/2\pi$ . 一般地,  $\tau_a(f)$  量度了在方向的单位球面上由法向量所扫过的面积. 许多齐性空间, 诸如  $\text{SO}(n) \subset \mathbf{R}^{n^2}$ , 所有的射影空间和齐性 Kähler 流形都具有由它们的在  $\mathbf{R}^N$  (对于某  $N$ ) 中的标准模型所给出的胎紧 (甚至套紧) 嵌入. (见下面.)

主要的问题是存在性. 人们也对给定流形  $M$  的胎紧浸入的一些特殊性质感兴趣.

下面的概率定义是很重要的:

$$\tau(f) = E_z \mu_z \leq \infty, \mu_z = \mu(h_z). \quad (\text{A3})$$

这里  $z \in S^{N-1}$  是一个单位向量, 它是  $\mathbf{R}^N$  上满足  $z^*(z) = 1$  的线性函数  $z^*$  的梯度,  $h_z = z^* \circ f$  是  $M$  上的一个“高度函数”,  $\mu_z$  是  $h_z$  的非退化临界点的个数,  $E_z$  是  $z \in S^{N-1}$  关于  $S^{N-1}$  的标准不变度量下的期望 (或平均) 值.

对于光滑浸入, 有

$$\tau = \tau_a. \quad (\text{A4})$$

性质  $\tau(f) = \beta$ , 即胎紧的另一个定义使得能够应用 Morse 理论 (Morse theory). 特别地, 不等式 (A1) 是 Morse 不等式  $\mu_z \geq \beta$  的推论, 后者对于几乎所有  $z \in S^{N-1}$  成立, 因为  $h_z$  对几乎所有  $z$  是非退化的. 由此得出, 如果每一个非退化高度函数有  $\beta$  个临界点, 则所给浸入是胎紧的. 见图 3 和图 4.

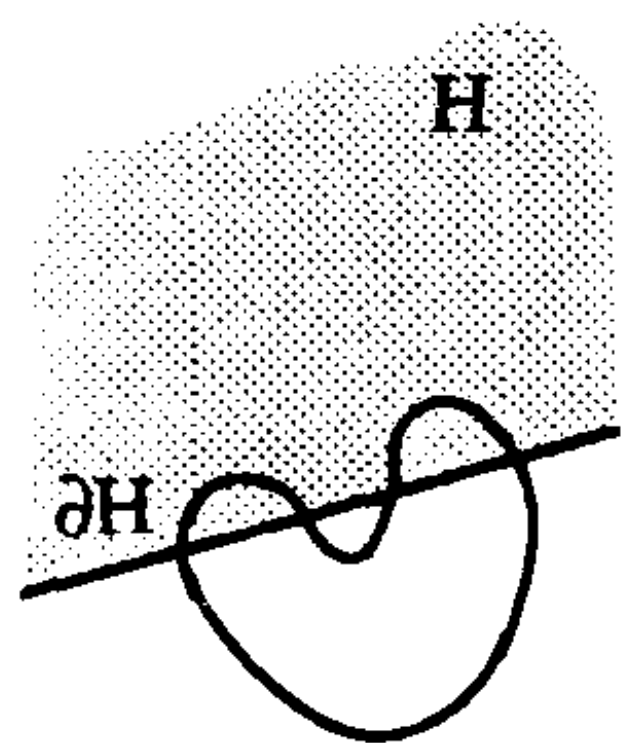


图 1

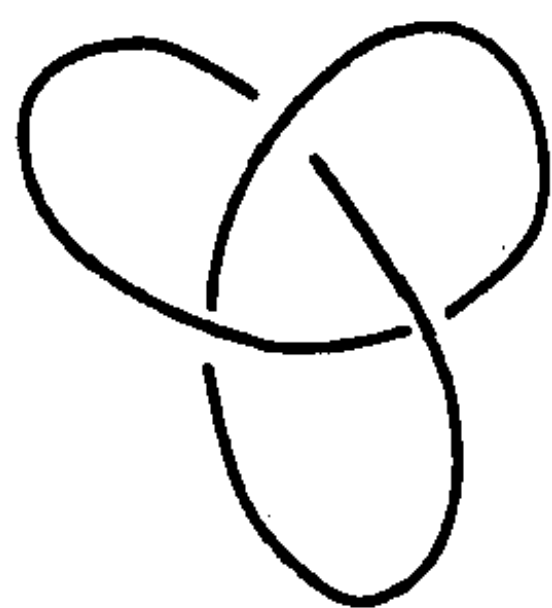


图 2

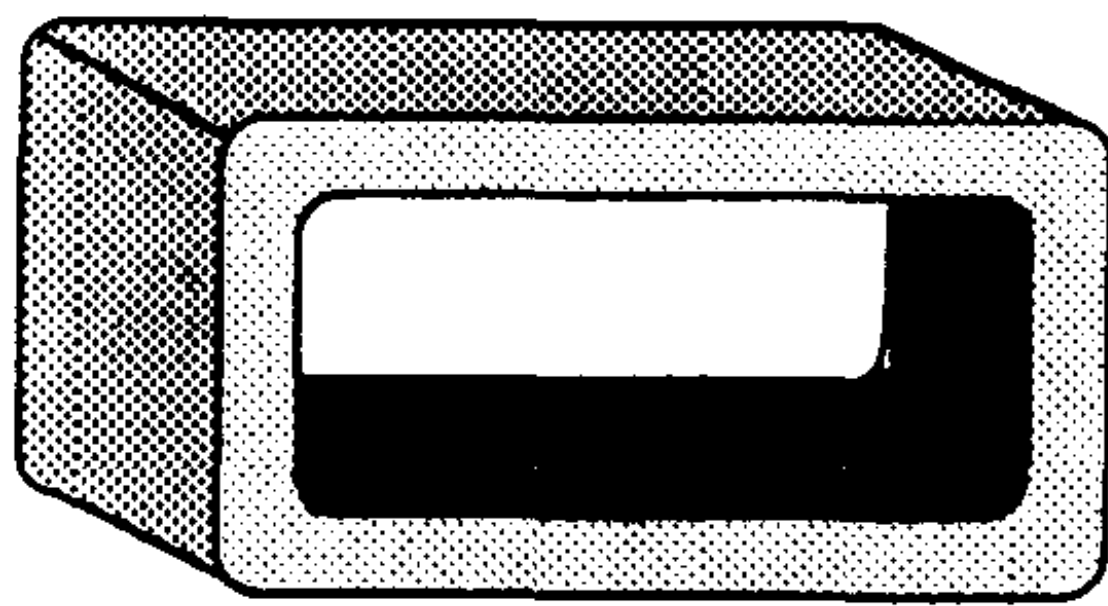


图 3

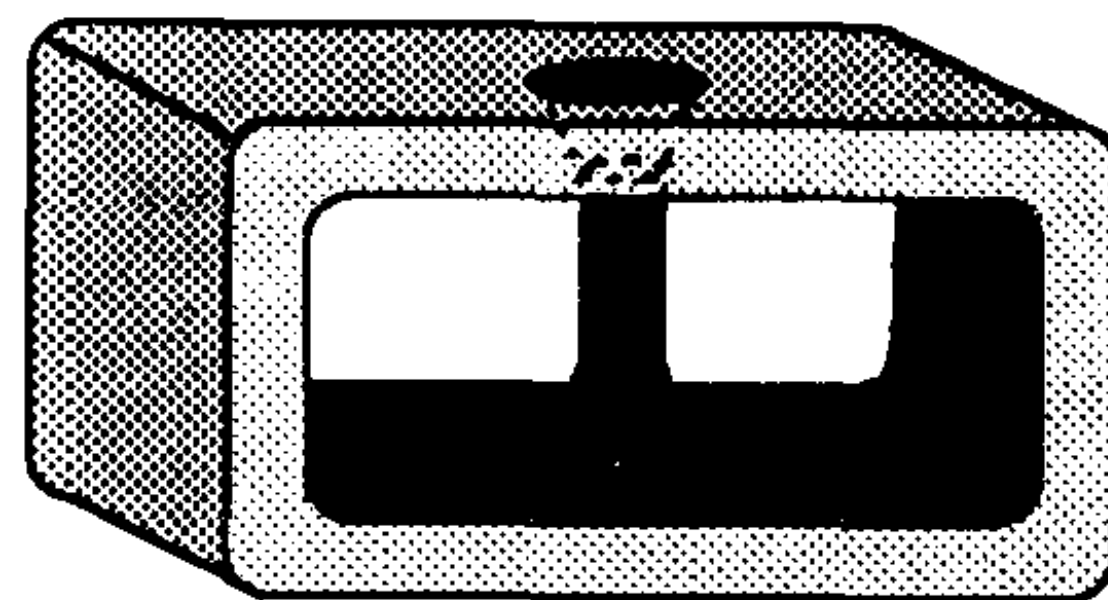


图 4

称空间  $A \subset B$  的嵌入在  $Z_2$  同调中为单射的 (injective), 如果对于  $i \geq 0$ , 诱导同态  $H_i(A, Z_2) \rightarrow H_i(B, Z_2)$  是单的. 令  $H \subset \mathbf{R}^N$  是  $\mathbf{R}^N$  中带有超平面边界  $\partial H$  的半空间. 例如,

$$H = H_z(t) = \{x \in \mathbf{R}^N: z^*(x) \leq t\}.$$

如果  $f$  是一个胎紧浸入,  $h_z$  是一个非退化的高度函数, 那么由 Morse 理论得到  $f^{-1}(H_z(t)) \subset M$  在  $Z_2$  同调中是单的. 于是由连续性, 对任一半空间  $H$  这种单性都成立. 对于闭流形的光滑浸入, 这种半空间性质等价于胎紧性. 然而, 这种半空间定义也能应用于更大范围的从流形和其他紧拓扑空间到  $\mathbf{R}^N$  中的连续浸入或甚至是映射中去. 一个例子是胎紧的“瑞士干酪”, 它是一个带边的嵌入曲面, 见图 5. 一个到  $\mathbf{R}$  中的胎紧映射也称为一个完满函数 (perfect function).

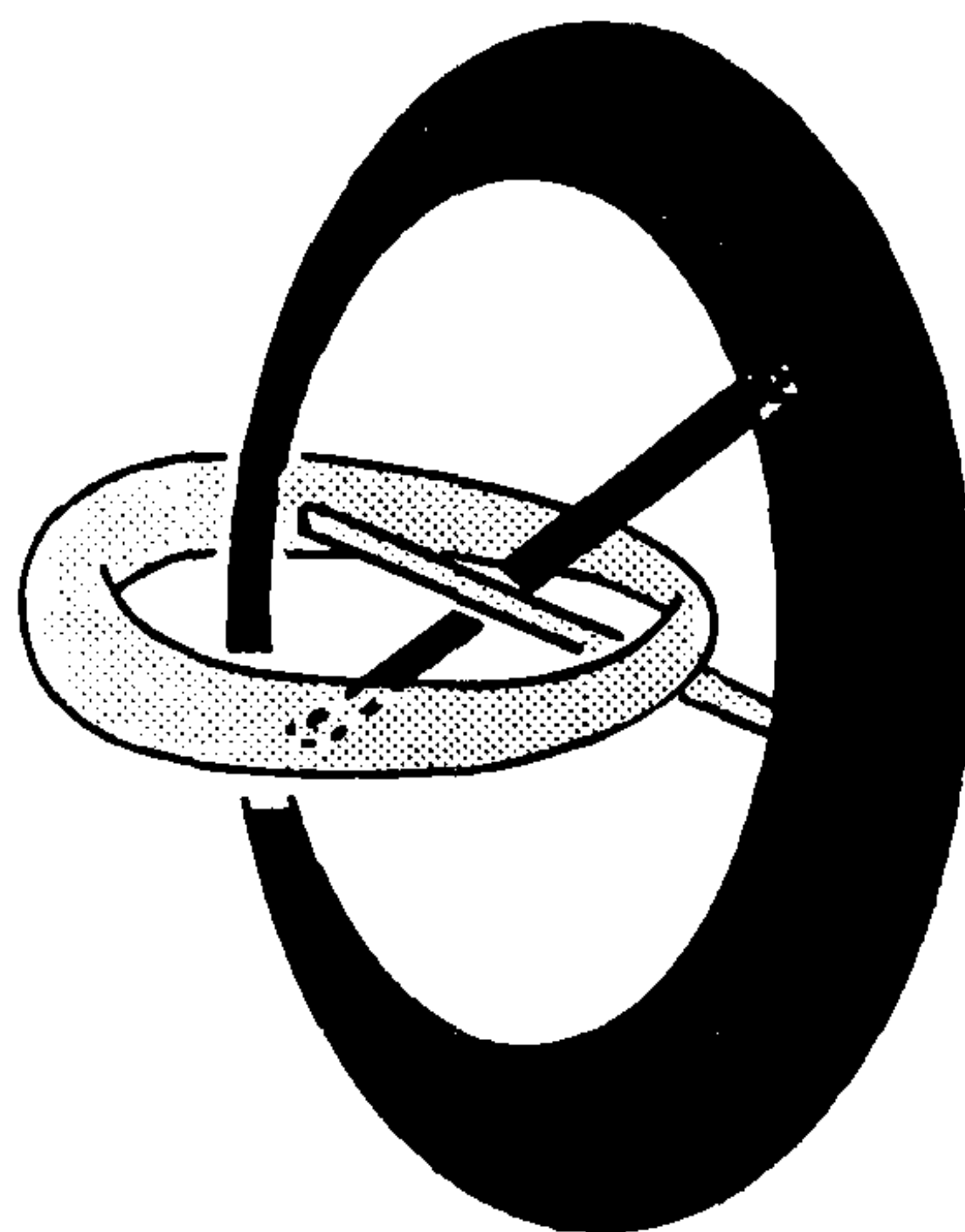


图 5

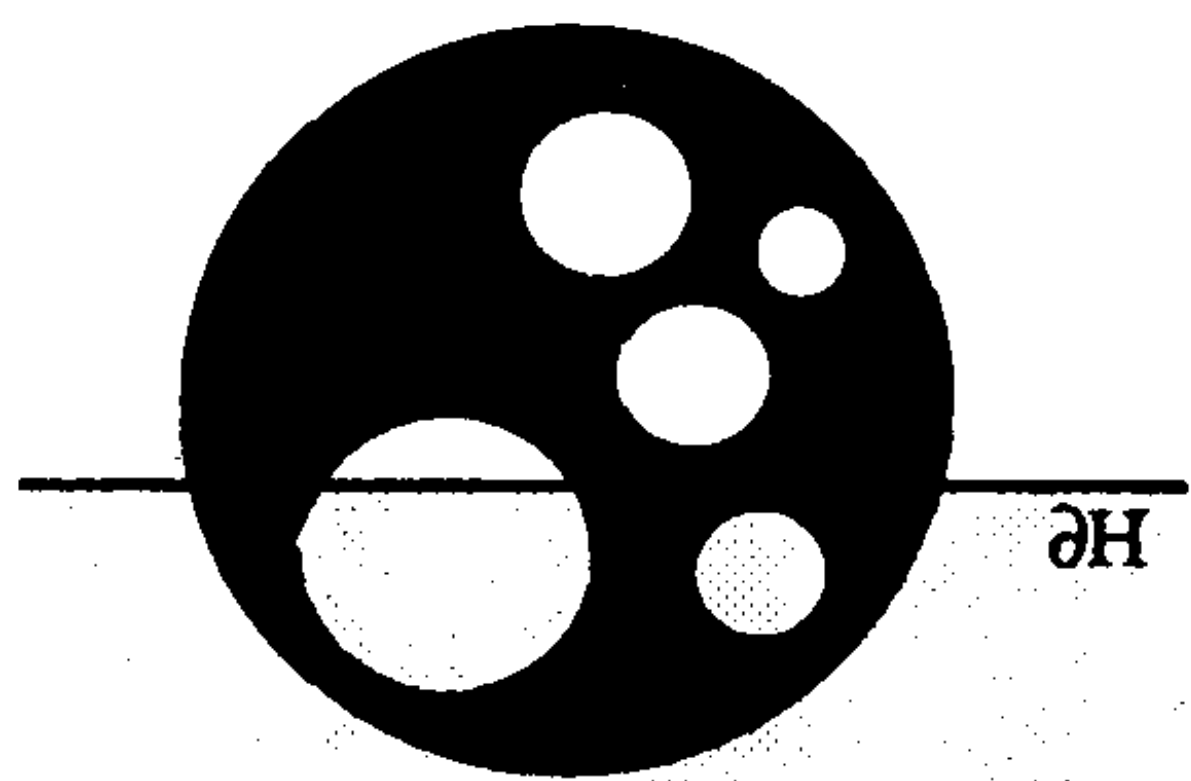


图 6

对于曲线和闭曲面, 半空间性质可导出对任一半空间  $H$ ,  $f^{-1}(H)$  是连通的. 它等价于 Banchoff 两片性质 (Banchoff two-piece property), 即  $\mathbf{R}^N$  中的任一超平面  $\partial H$  将  $M$  至多分割成两个连通的片. 见图 3 和图 4 中的胎紧曲面和图 2 中的非胎紧曲线.

半空间定义将胎紧性置于经典几何学和凸性理论之中. 由于胎紧性在  $\mathbf{R}^N$  中的任意将凸包  $\mathcal{K}(f(M))$  映到  $\mathbf{R}^N$  内的射影变换下是不变的, 因此胎紧性是一个射影性质 (见射影几何学 (projective geometry)). 上述定义的套紧性是一个共形性质 (见共形几何学 (conformal geometry)). 在任意从  $S^{N-1}$  到  $S^{N-1}$  上的共形 (Möbius) 变换下, 套紧性是不变的. 反过来, 套紧性由  $\mathbf{R}^N$  中的将  $\mathcal{K}(S^{N-1})$  映到  $\mathcal{K}(S^{N-1})$  上的唯一的射影变换所确定.

在证明中, Kuiper 基本定理 (Kuiper fundamental theorem) 起着重要作用. 关于嵌入, 该定理说胎紧嵌入空间的顶集是胎紧的. 一个顶集 (top set) 是空间与  $\mathbf{R}^N$  中的支撑半空间或支撑超平面的交.

下面是 (主要对曲面而言的) 各种各样的表示定理.

**曲线.**  $\mathbf{R}^N$  中的胎紧闭曲线是平面凸闭曲线 (W. Fenchel, 1929). 由任何一个定义可知, 图 1 中的平面曲线不是胎紧曲线.  $\mathbf{R}^3$  中形如图 2 的三叶形纽结的打结曲线满足  $\tau(f) > 2b(M)$ . 下确界  $2b(M)$  达不到 (J. Milnor, 1950). 这里  $b(M)$  是纽结  $M$  的桥指标 (bridge index), 它是容有纽结同痕的纽结  $M$  上一个高度函数所能有的极大值的最小个数 (见纽结理论 (knot theory)). 对图 2 中的三叶形纽结,  $b(M) = 2$ . 在此纽结上, 每一个高度函数至少有两个极大值, 但是根据上面的 Milnor 界限, 某些高度函数必有至少三个极大值.

陈省身和 J. Lashof (1957) 给出了第一个高维定理: 闭  $n$  流形的一个满足  $\tau_a(f) = 2$  的  $C^\infty$  类可微实质的 (substantial) (即不在一个超平面中的) 浸入  $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^N (n \geq 1)$  是到凸超曲面上的胎紧嵌入, 且  $N = n + 1$ . 适当定义  $\tau(f) = 2$ , 对连续浸入也有相同的结论.

**曲面.** 如果  $M$  是一个 Euler 数为  $\chi$  的不可定向闭曲面, 则对  $\chi = 1$  (射影平面 (projective plane)) 和  $\chi = 0$  (Klein 瓶, 见 Klein 曲面 (Klein surface)), 不存在到  $\mathbf{R}^3$  中的胎紧浸入, 即便是连续浸入也不存在. 对  $\chi = -1$  (带有一个环柄的射影平面) 的情形, 从 1960 年起就一直是一个悬而未决的问题. F. Haab (1990) 证明了这个曲面实际上没有到 Euclid 空间  $\mathbf{R}^3$  中的胎紧光滑浸入. 因此, 对于任何光滑浸入都存在一平面, 把它分割成至少三块. 所有其他曲面都有到  $\mathbf{R}^3$  中的胎紧浸入. 图 3 描绘了一个胎紧环面 ( $\beta = 4$ ). 图 4 描绘了一个  $\chi = -2, \beta = 6$  的不可定向胎紧曲面. 下面的一些定理表明更高的余维数和解析性强烈地制约着胎紧浸入的可能性及其性质. 与连续浸入或分段线性浸入相比较, 可微性也造成约束.

$\mathbf{R}^N (N \geq 5)$  中的一个实质的光滑胎紧闭曲面必然是  $\mathbf{R}^5$  中的一个 (代数) Veronese 曲面 (拓扑上它是一个实射影平面, 亦见 Veronese 映射 (Veronese mapping)), 且不计  $\mathbf{R}^5$  中的射影变换时是唯一确定的 (N. H. Kuiper, 1960).

由 T. Banchoff (1965) 提出, 后由 W. Kühnel (1980, 见 [A3]) 证明, 除了 Klein 瓶外,  $\mathbf{R}^N$  中恰好存在一个胎紧的实质多面体曲面, 这里  $N + 1 \leq (7 + \sqrt{49 - 24\chi})/2$ . 这个数是地图着色定理中的 Heawood 色数 (Heawood chromatic number). 同样的上界似乎对于连续胎紧浸入也是成立的.

这里还有另一个值得注意的定理. 从实射影平面到  $\mathbf{R}^N (N \geq 5)$  中的一个实质的胎紧连续浸入必须是到  $\mathbf{R}^5$  中的代数 Veronese 曲面上或到 Banchoff 的六顶点多面体曲面上的一个嵌入 ([A11]). 满足  $\chi = 2$  或  $\chi < -9$  的曲面到  $\mathbf{R}^3$  中的任一光滑浸入必正则同痕于一个胎紧的浸入 (U. Pinkall, [A15]). 对于其他曲面, 结果还不完整. 满足  $\chi \leq 0$  的任意可定向曲面都存在到  $\mathbf{R}^4$  中的光滑实质胎紧嵌入, 但是除了环面情形, 这类嵌入都不是解析的 (G. Thorbergsson, [A19]).  $\mathbf{R}^3$  中的任一光滑嵌入纽结可定向曲面的全绝对曲率  $\geq \beta + 4 = 8 - \chi = 6 + 2g$ , 而且如果亏格  $g = 1$  或  $2$ , 则等号不能成立. 但当亏格  $g \geq 3$  时, Kuiper 和 W. F. Meeks ([A10]) 证明了存在着满足  $\tau(f) = \beta + 4$  的“同痕-胎紧”纽结曲面. 图 5 描绘了一个亏格为 3,  $\tau(f) = 12$  的纽结曲面的例子, 它由两个具有非正 Gauss 曲率  $K$  的环柄与两个环绕的胎紧环面连接起来而得到. 对这个曲面, 每一个非退化的高度函数有 12 个临界点.

$\mathbf{R}^3$  中曲面的光滑浸入形成光滑稳定映射  $f: M \rightarrow \mathbf{R}^3$  的一个子类. 在这个类中每个曲面有一个到  $\mathbf{R}^3$  中的胎紧稳定映射, 因此, 具有全绝对曲率



$$\tau(f) = \beta = 4 - \chi(M) = \int |Kd\sigma|/2\pi.$$

$\mathbf{R}^3$  中的胎紧解析曲面在解析曲面类中是等距刚性的 (A. Д. Александров, 1938; 见 [A3], 81 页, 和刚性 (rigidity)). 关于  $\mathbf{R}^3$  中非凸光滑闭曲面的  $C^2$  刚性, 现在几乎一无所知. 但是由 Kuiper 定理 (1955),  $\mathbf{R}^3$  中没有  $C^1$  等距刚性的光滑闭曲面.  $\mathbf{R}^8$  中的一个令人惊奇的胎紧四维流形是复射影平面  $M^4 = P(C, 2)$  到  $\mathbf{R}^8$  中一个单形的四维骨架中的 Kühnel 拓扑嵌入 (Kühnel topological imbedding) ([A9]). 它的象是具有 9 个顶点的  $M$  的三角剖分.

套紧嵌入 (taut imbeddings) 值得单独讨论. 设  $M$  是一紧连通空间, 对在  $n$  维球面  $S^n$  中的  $M \subset S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$  所给出的套紧性的外在定义 (即  $M$  在  $\mathbf{R}^{n+1}$  中是胎紧的) 明显地决定了 (利用胎紧的半空间定义) 下述的内蕴定义: 子空间  $M \subset S^n$  在  $S^n$  中是套紧的, 如果对  $S^n$  中的任一 (圆) 球  $B_s$ , 包含映射  $B_s \cap M \subset M$  在  $\mathbf{Z}_2$  同调下是单射. 利用从点  $z \in S^n \setminus M$  到正交于向量  $z$  的 Euclid  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$  中的球极投影, 可以得到  $\mathbf{R}^n$  中套紧性的下述定义: 紧子空间  $M \subset \mathbf{R}^n$  是套紧的, 当且仅当  $M$  不包含  $\mathbf{R}^n$  的开集, 并且嵌入  $B \cap M \subset M$  在  $\mathbf{Z}_2$  同调下是单射, 这里  $B$  是一个圆球或是  $\mathbf{R}^n$  中一个圆球的补. 因此套紧性蕴含胎紧性. 平面的套紧子空间是一个圆或一个圆盘去掉由处处稠密的不相交开圆盘的并集 (一个“极限的瑞士干酪”). 图 6 中, Banchoff 所给出的平面瑞士干酪是胎紧的, 但不是套紧的, 虽然每一个圆都把干酪分割成至多两块, 但其中一块在同调下不是单射的. 当利用 ANR 假设排除掉怪例后, 可以猜测:  $\mathbf{R}^n$  中任何紧的套紧的绝对邻域收缩核 (亦见, 正规空间的绝对收缩核 (absolute retract for normal spaces); 拓扑空间的收缩核 (retract of a topological space)) 是一个光滑流形. 对于  $n = 3$  的情况, 这是已知的, 见 [A8].

$\mathbf{R}^N$  中一个光滑套紧流形  $M$  的通常定义如下: a) 任一非退化距离函数  $h_x$  有  $\beta(M)$  个临界点; 及 b)  $\mathbf{R}^N$  中任一圆球与  $M$  相交于  $M$  中的一个在  $\mathbf{Z}_2$  同调下为单射的子集. 这些定义对于  $\mathbf{R}^N$  中的那些非紧的正常子流形也有意义并常被使用 (见 [A3]). 但此时胎紧性没有定义, 因而胎紧性不是它的推论.

对于  $\mathbf{R}^N$  中的一个光滑的正常子流形  $M$ , 通常套紧性的要求是一个非常强的条件.  $\mathbf{R}^N$  中仅有下列的套紧闭曲面 (至多差一个 Möbius 变换): 齐性空间, 圆球面  $S^2$ , 标准环面  $S_a^1 \times S_b^1 \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^4$  ( $a$  和  $b$  是半径), 以及在  $S^4 \subset \mathbf{R}^5$  中的标准 Veronese 曲面 (射影平面). 这些模型中的每一个都是由  $\mathbf{R}^n$  中运动所得出的齐性空间.  $\mathbf{R}^3$  中的套紧环面是

Dupin 圆纹曲面 (Dupin cyclide). [A17] 中, 给出了 Euclid 空间中所有套紧 3 维流形的微分同胚类.

小沢 ([A14]) 证明了一个闭套紧流形  $M$  上的距离函数  $h_x$  或  $h_z$  的每一连通的临界点集本身也是一个套紧子流形. 因此, 流形  $M$  含有许多低维的套紧子流形, 如圆, 基于这个缘故, 研究趋于特殊化. 在下列类型空间微分几何学 (differential geometry) 的研究中, 套紧性起着重要作用.

1. 对称空间迷向表示的轨道, 也称为  $R$  空间 ( $R$ -spaces) (小林 - 竹内), 是套紧子流形. 它们自然是齐性空间, 在 R. Bott 和 H. Samelson 的经典文献 [A1] 中, 利用 (退化的) 胎紧高度函数计算了它们的上同调.

2. 闭等参子流形. 一个紧子流形  $M^n \subset \mathbf{R}^N$  称为等参的 (isoparametric), 如果它的法丛平坦, 并且在任意平行法向量场方向的主曲率都是常数. 由此,  $M^n$  落在一个球面  $S^{N-1}$  内, 但当余维数  $N - n = 2$  时,  $M$  不必是齐性的 ([A5]). 如果  $M$  是不可约的, 且具有余维数  $N - n \geq 3$ , 则  $M$  是一个  $R$  空间 ([A20]). 等参子流形是套紧的. 它们形成  $R$  空间的一种推广, 并且它们的上同调也可同样地由与它们相伴的标号 Dynkin 图计算出来 ([A6]). 在文 [A16] 中, 套紧嵌入和等参子流形的概念已推广到 Hilbert 空间. 例如无穷维的旗流形. 最后, 由 H.-F. Münzner ([A12]) 所给出的一个著名的结果是: 对球面  $S^{n+1}$  中的等参超曲面  $M^n$ , 不同主曲率的数目必是 1, 2, 3, 4 或 6.

3.  $\mathbf{R}^N$  中的子流形  $M$  称为全焦的 (totally focal), 如果在  $M$  上每一个距离函数  $h_x (x \in \mathbf{R}^N)$  的所有临界点都是非退化的或者都是退化的. 结合 T. E. Cecil 和 P. J. Ryan, S. Carter 和 A. West ([A4]) 的近年成果, 后者最后得到了闭全焦流形实际上就是闭等参子流形这样的结果.

正如上面所提到的那样, 可注意到: 一个套紧子流形的任何 Möbius 变换, 球极平面投影, 或其管状  $\varepsilon$  邻域边界是套紧的. 套紧性在以 Möbius 群作为子群的 Lie 球变换群下也是不变的 ([A2]). 两个套紧嵌入的积是套紧的, 由套紧嵌入所构造的柱面和旋转曲面是套紧的 (见 [A3] 和 [A15]). 所有已知的 (到 1990 年) 闭套紧子流形都是由这些和一些别的新构造而得出的 (见 [A18] 和 [A13]). 也许这些子流形已经穷尽了所有可能的情形. 大量的其他的结果和推广见参考文献.

#### 参考文献

- [A1] Bott, R. and Samelson, H., Applications of the theory of Morse to symmetric spaces, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 964 - 1029.
- [A2] Cecil, T. E. and Chern, S. S., Tautness and Lie

- sphere geometry, *Math. Ann.*, **278** (1987), 381 – 399.
- [A3] Cecil, T. E. and Ryan, P. J., Tight and taut immersions of manifolds, Pitman, 1985.
- [A4] Carter, S. and West, A., Isoparametric and totally focal submanifolds, *Proc. London Math. Soc.*, **60** (1990), 609 – 624.
- [A5] Ferus, D., Karcher, H. and Münzner, H. F., Clifford Algebren und neue isoparametrische Hyperflächen, *Math. Z.*, **177** (1981), 479 – 502.
- [A6] Hsiang, W. Y., Palais, R. S. and Terng, C. L., The topology of isoparametric submanifolds, *J. Diff. Geom.*, **27** (1988), 423 – 460.
- [A7] Kuiper, N. H., Tight embeddings and maps, in W. Y. Hsiang, et al. (ed.): The Chern Symposium (1979), Springer, 1980, 97 – 145.
- [A8] Kuiper, N. H., Taut sets in three-space are very special, *Topology*, **23** (1984), 323 – 336.
- [A9] Kühnel, W. and Banchoff, T., The 9-vertex complex projective plane, *The Math. Intelligencer*, **5** (1983), 3, 11 – 22.
- [A10] Kuiper, N. H. and Meeks, W. F., III, Total curvature for knotted surfaces, *Invent. Math.*, **77** (1984), 25 – 69.
- [A11] Kuiper, N. H. and Pohl, W. F., Tight topological embedding of the real projective plane in  $E^5$ , *Invent. Math.*, **42** (1977), 177 – 199.
- [A12] Münzner, H.-F., Isoparametrische Hyperflächen in Sphären II, *Math. Ann.*, **256** (1981), 215 – 232.
- [A13] Miyaoka, R. and Ozawa, T., Construction of taut embeddings and the Cecil-Ryan conjecture, in Proc. 1988 Symp. Differential Geometry, Acad. Press, 1990.
- [A14] Ozawa, T., On critical sets of distance functions to a taut submanifold, *Math. Ann.*, **276** (1986), 91 – 96.
- [A15] Pinkall, U., Tight surfaces and regular homotopy, *Topology*, **25** (1986), 475 – 481.
- [A16] Palais, R. S. and Terng, C. L., Critical point theory and submanifold geometry, Lecture notes in math., **1353**, Springer, 1988.
- [A17] Pinkall, U. and Thorbergsson, G., Taut 3-manifolds, *Topology*, **28** (1989), 389 – 402.
- [A18] Pinkall, U. and Thorbergsson, G., Deformations of Dupin hypersurfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **107** (1989), 1037 – 1043.
- [A19] Thorbergsson, G., Tight analytic surfaces, *Topology* (Forthcoming).
- [A20] Thorbergsson, G., Isoparametric foliations and their buildings, *Ann. of Math.*, **31** (1991), 429 – 446.

N. H. Kuiper 撰 沈纯理 译

胎紧测度 [tight measure; плотная мера]

【补注】 设  $X$  是一个拓扑空间,  $\mathcal{B}(X)$  是其开集生成的 Borel  $\sigma$  域 (Borel  $\sigma$ -field),  $\mathcal{K}(X)$  是其所有紧集的铺砌 (即子集族).  $\mathcal{B}(X)$  上的一个测度  $\mu$  是胎紧的, 如果

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(K) : K \subseteq B, K \in \mathcal{K}(X) \}.$$

$X$  上的一个有限胎紧测度是一个 **Radon 测度** (Radon measure). 如果  $X$  是可分的完全度量空间, 那么  $X$  上每个概率测度都是胎紧的 (Ulam 胎紧性定理 (Ulam tightness theorem)), [A2]. “胎紧”这一术语是 L. LeCam 引入的, [A5].

更一般地说, 设  $\mathcal{A} \supset \mathcal{K}$  是集合  $X$  上的两个铺砌,  $\beta$  是定义在  $\mathcal{A}$  上的一个集函数. 如果

$$\sup \{ \beta A : A \subset A_1 \setminus A_2, A \in \mathcal{K} \} = \beta A_1 - \beta A_2,$$

那么  $\beta$  关于  $\mathcal{K}$  是胎紧的.

#### 参考文献

- [A1] Billingsley, P., Convergence of probability measures, Wiley, 1968, 9ff.
- [A2] Topse, F., Topology and measure, Springer, 1970, Xii.
- [A3] Bichteler, K., Integration theory, Springer, 1973, § 24.
- [A4] Oxtoby, J. C. and Ulam, S., On the existence of a measure invariant under a transformation, *Ann. of Math.*, **40**, 1939, 560 – 566.
- [A5] LeCam, L., Convergence in distribution of probability processes, *Univ. of Calif. Publ. Stat.*, **2** (1957), 11, 207 – 236. 周民强 译

#### Тихонов 立方体 [Tikhonov cube; Тихоновский куб]

实直线上单位区间  $I$  的  $\tau$  重拓扑积, 记作  $I^\tau$ , 其中  $\tau$  为任意基数 (cardinal number). Тихонов 立方体是 A. H. Тихонов 在 1929 年引进的. 若  $\tau = n$  为自然数, 则 Тихонов 立方体  $I^n$  是  $n$  维 Euclid 空间中单位立方体, 且其拓扑由标量积度量给出. 若  $\tau = \aleph_0$  是自然数的基数, 则立方体  $I^{\aleph_0}$  同胚于 Hilbert 立方体 (Hilbert cube). 若  $\tau_1 \neq \tau_2$ , Тихонов 立方体  $I^{\tau_1}$  与  $I^{\tau_2}$  不同胚: 若  $\tau$  是无穷基数, 则  $\tau$  是  $I^\tau$  的权 (见拓扑空间的权 (weight of a topological space)), 若  $\tau = n$  是自然数, 则  $n$  是  $I^n$  的维数. Тихонов 立方体有两个特别重要的性质, 即与  $\tau$  无关的紧性以及关于权不大于  $\tau$  的完全正则  $T_1$  空间的万有性, 后者指每个这样的空间同胚于  $I^\tau$  的某子空间. 权不大于  $\tau$  的紧 Hausdorff 空间同胚于 Тихонов 立方体  $I^\tau$  的闭子空间. 因此, 使用取拓扑积及过渡到闭子空间这两种运算, 就足以由特别简单的单一的标准空间 (区间) 得到任何紧空间. Тихонов 立方体紧性的一个值得注意的推论是配备弱拓扑的 Banach 空间中单位球



的紧性. Тихонов 立方体的万有性及定义的简捷性, 使它成为一般拓扑学中重要的标准研究对象. 但是, Тихонов 立方体的拓扑结构决不是平凡的. 特别地, 若  $c$  为连续统的势, 立方体  $I^c$  可分, 尽管它含有  $2^c$  个点; 它的权为  $c$ . 令人意外的是, 每个 Тихонов 立方体  $I^c$  的 Суслин 数都可数, 且与  $\tau$  无关, 即  $I^c$  中任何两两不交的开集族都可数. 虽然, Тихонов 立方体含有许多收敛序列, 但要直接描述 Тихонов 立方体中的闭包运算仍是不够的.

А. В. Архангельский 撰

【补注】 参考文献见 Тихонов 定理 (Tikhonov theorem). 罗嵩龄 译

Тихонов 积 [Tikhonov product; Тихоновское произведение], 拓扑空间族的

与该族的拓扑积 (topological product) 相同. Тихонов 积的概念是 А. Н. Тихонов 于 1929 年引进的.

罗嵩龄 译

Тихонов 空间 [Tikhonov space; Тихоновское пространство]

一个拓扑空间 (topological space), 其中任何有限集是闭的, 且对任何闭集  $P$  及不在  $P$  中的任意点  $x$ , 存在这个空间上的一个连续实值函数  $f$ , 它在  $x$  取值 0, 在  $P$  的任意点取值 1. Тихонов 空间类与完全正则  $T_1$  空间类 (见完全正则空间 (completely-regular space)) 一致. 在 Тихонов 空间中, 任意两个不同点可用不相交的邻域分开 (换言之, 满足 Hausdorff 分离公理), 但并不是所有 Тихонов 空间都正规 (见正规空间 (normal space)). А. Н. Тихонов (1929) 用紧 Hausdorff 空间的子空间刻画 Тихонов 空间.

参考文献

- [1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.
- [2] Архангельский, А. В., Пономарев, В. П., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).

А. В. Архангельский 撰 罗嵩龄 译

Тихонов 定理 [Tikhonov theorem; Тихонова теорема], 关于积的紧性的

任意多个紧空间 (compact space) 的拓扑积是紧的. 这是一般拓扑学的基本定理之一. 它是 А. Н. Тихонов 在 1929 年得到的. 该定理在构建一般拓扑学的所有分支以及许多应用中, 起着十分重要乃至关键性的作用. 特别地, 对完全正则  $T_1$  空间 (即 Тихонов 空间 (Tikhonov space)) 紧化 (compactification)

结构有基本的重要性. 利用它可以构造任意 Тихонов 空间的 Stone-Čech 紧化. Тихонов 定理展示了标准的紧空间——广义 Cantor 不连续统  $D^\tau$  (它是以  $\tau$  为指标的离散两点集之积) 及 Тихонов 立方体 (Tikhonov cube)  $I^\tau$  (它是  $\tau$  个实直线上单位区间之积), 这里  $\tau$  可取任何基数. 再者, 广义 Cantor 集  $D^\tau$  和 Тихонов 立方体  $I^\tau$  的重要性, 在于它们作为通用的联系对象: 每个零维  $T_2$  紧统同胚于某  $D^\tau$  的一个闭子空间, 每个  $T_2$  紧统同胚于某  $I^\tau$  的一个闭子空间.

Тихонов 定理可以用来证明紧空间逆向极限的非空性, 用于构建绝对形的理论, 以及用于紧群的理论. 若考虑它的间接应用, 则一般拓扑学的几乎所有部分都受到这个定理的影响. 罗列此定理对于数学其他分支的直接或间接应用相当困难. 它们实际上出现在紧性概念起重要作用的每个地方, 特别是在泛函分析 (具有弱拓扑的 Banach 空间, 拓扑空间的测度) 中, 在最优控制的一般理论中等等.

参考文献

- [1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).
- [2] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).

【补注】

参考文献

- [A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.
- [A2] Tikhonov, A. N., Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann., 102 (1930), 544 – 561.

罗嵩龄 译

时间最优控制问题 [time-optimal control problem; оптимального быстрогодействия задача]

最优控制的数学理论 (optimal control, mathematical theory of) 中的问题之一, 在于确定极小时间

$$J(u) = t_1, \quad (1)$$

其中其运动由常微分方程组

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U, \quad f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^n$$

描述的控制对象可以从给定的初始位置  $x(0) = x_0$  转移到最终位置  $x(t_1) = x_1$ . 这里,  $x = x(t)$  是  $n$  维相坐标向量, 而  $u = u(t)$  是  $p$  维控制参数向量 (控制), 对任何  $t$  它属于一个给定的闭的容许控制区域  $U$ .

要求的极小时间  $t_1$  是依赖于所选取的控制  $u(t)$  的泛函 (1). 作为在其中找时间最优控制的容许控制

类, 对大多数应用而言, 只需要考察分段连续控制  $u(t)$ , 即对所有被考虑的值  $t$ , 除了在有限多个时间瞬间可以有第一类间断点以外, 是连续的函数. 在理论上, 严格地说, 应考虑更一般的 Lebesgue 可测函数  $u(t)$  ( $0 \leq t \leq t_1$ ) 的类.

时间最优控制问题可以作为变分法中 **Bolza 问题** (Bolza problem) 或 **Mayer 问题** (Mayer problem) 的特殊情形来考虑, 且从这些问题中由被优化函数的特殊形式得到. 时间最优控制  $u(t)$  必定满足 **Понтрягин最大值原理** (Pontryagin maximum principle), 它是一个必要条件, 推广了用于经典变分法的 Euler, Clebsch 和 Weierstrass 的必要条件.

对线性时间最优控制问题, 某些结果可以从关于最优控制的定性结构的必要条件引出. 满足以下三条件的问题称为线性时间最优控制问题 (linear time-optimal control problems) ([1], [2]):

1) 对象的运动的控制关于  $x$  和  $u$  是线性的:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

其中  $A$  和  $B$  分别是  $(n \times n)$  和  $(n \times p)$  常数矩阵;

2) 最终位置  $x_1$  与坐标原点一致, 如果  $u = 0$ , 则它是该对象的一个平衡点;

3) 控制区域  $U$  是一个  $p$  维凸多面体, 使得  $u$  空间的坐标原点属于  $U$  但不是它的一个顶点.

设一般位置条件被满足, 即向量组

$$Bw, ABw, \dots, A^{n-1}Bw$$

线性无关, 其中  $w$  是平行于多面体  $U$  的一条边的任意  $p$  维向量. 则把对象从一给定初始位置  $x_0$  转移到一个平衡位置 ( $x$  空间的坐标原点) 的一个控制  $u(t)$  ( $0 \leq t \leq t_1$ ) 是时间最优控制, 当且仅当 **Понтрягин最大值原理** 对它成立. 此外, 线性时间最优控制问题中的最优控制  $u(t)$  是分段常函数, 且多面体  $U$  的顶点是它的仅有的值.

一般地,  $u(t)$  的跳跃数虽然是有限的, 却可以是任意的. 在以下的重要情形, 跳跃数有个上界.

如果多面体  $U$  是  $p$  维平行多面体

$$a^s \leq u^s \leq b^s, s = 1, \dots, p,$$

且矩阵  $A$  的所有本征值是实的, 则最优控制  $u(t)$  的每一个分量  $u^s(t)$ ,  $s = 1, \dots, p$ , 是分段常函数, 仅取值  $a^s$  和  $b^s$  且最多有  $n-1$  个跳跃, 即最多有  $n$  个常值区间.

对非自治系统也可以研究时间最优控制问题, 即对其右端  $f$  依赖于时间  $t$  的系统.

在那些能成功的情形, 不但按上面描述的规划提

法, 而且以综合问题形式按位置的提法 (见**最优综合控制** (optimal synthesis control)) 研究时间最优控制问题是有效的. 这综合问题的解提供了把该系统从初始出发点  $x_0$  的邻域内任一点转移到给定最终点  $x_1$  的时间最优控制的结构的一个定性表示.

#### 参考文献

- [1] Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамк-  
релидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф., Математиче-  
ская теория оптимальных процессов, 3 изд., М.,  
1976 (英译本: Pontryagin, L. S., Boltyanskiĭ, V.  
G., Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko, E. F.,  
The mathematical theory of optimal processes, Wiley,  
1962).
- [2] Болтянский, В. Г., Математические методы  
оптимального управления, М., 1966 (英译本: Bol-  
tyanskiĭ, V. G., Mathematical methods of optimal  
control, Holt, Rinehart & Winston, 1971).

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】 可达集 (reachable set) 的概念是使最优控制性质直观化的有用的辅助手段. 可达集是一个时间的函数,  $R(t)$ , 由从  $x_0$  出发且仅用容许控制可在时间  $t$  到达的所有点组成. 对线性时间最优控制问题对任意  $t$  这集合是紧和凸的. 极小时间  $t_1$  显然满足  $t_1 = \min \{t: x_1 \in R(t)\}$ . 关于跳跃 (开关 (switches)) 数的更多信息见 [A2].

#### 参考文献

- [A1] Hermes, H. and LaSalle, J. P., Functional analysis  
and time optimal control, Acad. Press, 1969.
- [A2] Olsder, G. J., Time-optimal control of multivariable  
systems near the origin, *J. Optim. Theory & Appl.*,  
15 (1975), 497 - 517. 葛显良 译 吴绍平 校

#### 时间序列 [time series; временной ряд]

统计文献中最初指一系列不同时刻的观测值 (例如, 经济时间序列, 气象时间序列). 在社会经济统计的文献中, 与术语“时间序列”一起还使用术语动态序列 (dynamic series). 在 20 世纪中叶, 时间序列这一术语常表示对随机过程的观测实现; 时间序列分析是指随机过程的统计分析 (见随机过程论中的统计问题 (statistical problems in the theory of stochastic processes)).

И. А. Ибрагимов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Brillinger, D. R., Time series: data analysis and  
theory, Holt, Rinehart & Winston, 1974.
- [A2] Anderson, T. W., The statistical analysis of time se-  
ries, Wiley, 1971.
- [A3] Priestley, M. B., Spectral analysis and time series,  
Acad. Press, 1981. 周概容 译



**Titchmarsh 问题** [Titchmarsh problem; Титчмарша проблема]

求

$$Q(n) = \sum_{p \leq n} \tau(p-l) \quad (1)$$

的渐近表示的问题, 这里  $\tau(m)$  为  $m$  的因子个数 (见除数问题 (divisor problems)),  $l$  是一个固定的不为零的数, 而  $p$  取遍所有的素数. 与此类似的问题是寻求

$$S(n) = \sum_{p \leq n-1} \tau(n-p) \quad (2)$$

的渐近表示.

这个问题由 E. Titchmarsh 于 1930 年提出, 并由他 ([1]) 在 Riemann 假设 (Riemann hypotheses) 为真的假设下予以解决.

由 Ю. В. Линник 所创立的离差法 (dispersion method) 使得可以求出 (1) 与 (2) 的渐近公式:

$$Q(n) =$$

$$= \frac{315\zeta(3)}{2\pi^4} \prod_{p|l} \frac{(p-1)^2}{p^2-p+1} n + O(n(\ln n)^{-1+\epsilon});$$

对  $S(n)$  有类似的公式.

关于算术级数中素数平均分布 (见素数分布 (distribution of prime numbers)) 的 Виноградов-Bombieri 定理也可导出 Titchmarsh 问题的解. 在此, Riemann 猜想为真的假设实际上被一个大筛法 (large sieve) 型的定理所代替.

#### 参考文献

- [1] Линник, Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, [Л.], 1961 (英译本: Linnik, Yu. V., The dispersion method in binary additive problems, Amer. Math. Soc., 1963).
- [2] Бредихин, Б. М., «Успехи матем. наук», 20 (1965), 2, 89-130.
- [3] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer, 1957.

Б. М. Бредихин 撰 张明尧 译 戚鸣皋 校

**Tits 厦** [Tits building; Титса здание]

【补注】厦 (building) 是由单复形 (complex)  $\Delta$  及子复形  $\Sigma$  (寓 (apartment)) 的族  $\mathcal{A}$  组成的对  $(\Delta, \mathcal{A})$ , 它要满足下述条件: i)  $\Delta$  或任一寓  $\Sigma$  中的每个单形要包含在某极大单形 (房 (chamber)) 中,  $\Delta$  或  $\Sigma$  的每个房有相同的有限维数  $l$  (厦的秩 (rank)); ii) 每个寓  $\Sigma$  是连通的, 连通的意義如下, 对  $\Sigma$  的任何两个房  $C, D$ , 有  $\Sigma$  的房的一个序列, 从  $C$  开始, 终结于  $D$ , 且序列中任两个相继的成员的交是  $(l-1)$  单形; iii)  $\Delta$  的任何  $(l-1)$  单形 (分别地, 任何寓  $\Sigma$  的  $(l-1)$  单形) 被包含在  $\Delta$  的多于两个房中 (分别地,  $\Sigma$  的恰好两个房中); iv)  $\Delta$  的任何两个房  $C, D$  含在某个寓中; 及 v) 若  $\Delta$  的两个单形  $A,$

$B$  含于两个寓  $\Sigma, \Sigma'$  中, 则有从  $\Sigma$  到  $\Sigma'$  上的一个同构, 它固定  $A$  及  $B$  的每个点.

例 1. 令  $V$  是向量空间,  $\Delta$  由  $V$  的非零子空间的所有的链 (按包含关系排序) 组成, 而每个寓是由具有下述性质的所有的链组成, 这种链中的子空间可由  $V$  的某基的非空子集生成. 于是  $\Delta$  连同这些子复形就是一个厦.

例 2. 更一般地, 令  $G$  是具有 Tits 系统 (Tits system)  $(G, B, N, S)$  的群, 令  $\Delta$  是所有陪集  $Pg$ ,  $B \leq P < G$ ,  $g \in G$ , 的无交并, 按反包含关系排序, 又令寓集是所有集合  $\{P^n | B \leq P < G, n \in \mathbb{N}\}g, g \in G$ . 则  $\Delta$  在装备了这些寓以后是一个厦, 它的秩即 Tits 系统的秩. 而且这时  $G$  在所有由一个寓及这个寓中的一个房所组成的对的集合上是传递的.

若  $(\Delta, \mathcal{A})$  是厦, 则所有寓皆同构于由 Coxeter 群 (Coxeter group)  $(W, S)$  (厦的 Weyl 群 (Weyl group), 唯一到同构), 所决定的单复形, 它是如下构造的: 单形是由  $S$  的非空子集生成的子群的右陪集, 这些陪集仍按反包含关系排序. 例 2 中这个 Weyl 群与 Tits 系统的 Weyl 群相同. 厦称为球面的 (spherical) 或仿射的 (affine), 若它的 Weyl 群是这样的. 秩 2 的仿射厦恰是树, 且它的每个顶点至少与三个其他顶点邻接.

厦是 Tits 系统的几何的或组合的说法. 最重要的厦产生于与代数群 (algebraic group) 相关的 Tits 系统, 虽然不是所有的厦都这样. 涉及厦的两个主要定理是分类定理, 都属于 J. Tits ([A4], [A5]): 1) 任何秩  $l \geq 3$  的具有不可分解 Weyl 群的球面厦皆同构于由单代数群的 Tits 系统决定的厦; 2) 若  $(\Delta, \mathcal{A})$  是秩  $l \geq 4$  的有不可分解 Weyl 群的仿射厦且每个  $(l-1)$  单形包含在有限个房中, 则  $\Delta$  同构于完全局部域上单代数群的仿射 Tits 系统所决定的复形. 这些结果皆源于以下事实: 大量的几何信息编入到厦的公理中. 实际上, 1) 能看成下述经典结果的巨大的推广: 射影空间 (projective space) 概念的适当公理化导致用标准的向量空间模型来分类 (见例 1). 与此对照, 秩为 2 的球面厦及秩 3 的仿射厦是太杂乱无序而难于分类: 有许多结构, 包括自由的结构. 而且秩为 2 的球面厦若以三个文字的对称群作为 Weyl 群就自然地对应于射影平面 (平面的关联点-线偶对应于房, 亦见射影平面 (projective plane)).

厦对于内蕴结构、表示论及单代数群的几何学的研究都是重要的. 在有限单群、有限几何以及各种上调问题的研究中它们也起重要作用.

#### 参考文献

- [A1] Bruhat, F. and Tits, J., Groupes réductifs sur un corps local, 1. Données radicielles valuées, Publ.

*Math. IHES*, 41 (1972), 5 – 251.

[A2] Kantor, W. M., Generalized polygons, SCABs and GABs', in L. A. Rosati (ed.): *Buildings and the Geometry of Diagrams* (Proc. C. I. M. E. Session, Como 1984), *Lecture notes in math.*, Vol. 1181, Springer, 1986, 79 – 158.

[A3] Ronan, M. A., *Buildings: main ideas and applications*, *Bull. London. Math. Soc.* (To appear).

[A4] Tits, J., *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, *Lecture notes in math.*, 286, Springer, 1986.

[A5] Tits, J., *Immeubles de type affine*, in L. A. Rosati (ed.): *Buildings and Geometry of Diagrams* (CIME Session, Como 1984), *Lecture notes in math.*, Vol. 1181, Springer, 1986, 159 – 190.

W. M. Kantor 撰 石生明 译 王 杰 校

### Tits 丛 [Tits bundle; Титса расслоение]

齐性射影有理簇  $D$  上紧连通齐性复空间  $X$  的全纯纤维化, 它在所有这样的纤维化的类里是普遍的. 这种情形里的普遍性意味着这个类里任意纤维化的射影  $\pi': X \rightarrow D'$  可以表示为  $\pi' = \varphi \circ \pi$ , 这里  $\pi: X \rightarrow D$  是 Tits 丛的射影,  $\varphi: D \rightarrow D'$  是某个全纯的纤维映射.

Tits 丛的显式构造可如下进行. 设  $G$  是全纯可迁地作用在  $X$  上的连通复 Lie 群,  $U$  是  $X$  内某个点的迷向子群.  $U$  的单位连通分支的正规化子  $P$  是  $G$  的抛物子群, 即  $P$  含有一个极大连通可解子群 (见 [1], [2]). Tits 丛的基空间  $D$  被定义为商空间  $D = G/P$ , 射影  $\pi: X \rightarrow D$  由子群的包含  $U \subset P$  所诱导. 这个构造法属于 J. Tits ([1]), 他也证明了这个丛的普遍性.

Tits 丛的纤维是复可平行化的. 如果空间  $X$  是单连通的, 则这个纤维是复环面. 如果  $X$  容许一个可迁群  $G$ ,  $G$  又等于它自己的换位子群, 则 Tits 丛与亚纯约化丛重合 (见 [3]). 这意味着  $X$  上所有亚纯函数在 Tits 丛的纤维上取常值. 当紧复齐性空间  $X$  是 Kähler 时, Tits 丛的纤维是复环面 (就是  $X$  的 Albanese 簇 (Albanese variety)), 并且这个丛本身是解析平凡的 ([2]). 从而紧 Kähler 齐性空间是射影有理齐性簇与复环面的积.

#### 参考文献

- [1] Tits, J., *Espaces homogènes complexes compacts*, *Comment. Math. Helv.*, 37 (1962), 111 – 120.
- [2] Borel, A. and Remmert, R., *Ueber kompakte homogene Kählerische Mannigfaltigkeiten*, *Math. Ann.*, 145 (1962), 429 – 439.
- [3] Grauert, H. and Remmert, R., *Über kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeiten*, *Arch. Math.*, 13 (1962), 498 – 507.

Д. Н. Ахизер 撰 陈志杰 译

### Tits 系统 [Tits system; Титса система]

集合  $(G, B, N, S)$ , 其中  $G$  是群,  $B$  和  $N$  是子群而  $S$  是  $N/(B \cap N)$  的子集, 满足下列条件: 1) 集合  $B \cup N$  生成群  $G$ ; 2)  $T = B \cap N$  是  $N$  的正规子群; 3) 集合  $S$  生成群  $W = N/T$  且由二阶元素组成; 4)  $sBw \subset BwB \cup BswB$ , 对所有  $s \in S, w \in W$ ; 及 5)  $sBs \subset B$ , 对  $s \in S$ . 群  $W$  对于生成系  $S$  是 Coxeter 群 (Coxeter group), 称为 Tits 系统  $(G, B, N, S)$  的 Weyl 群 (Weyl group of the Tits system). 对应  $w \mapsto BwB$  是  $W$  到  $B$  在  $G$  中的双陪集的集合上的一一映射.

例. a)  $G = GL_n(k)$ ,  $k$  是任一域,  $B$  是上三角形矩阵的子群,  $N$  是单项矩阵 (monomial matrix) 的子群 (故  $T$  是对角矩阵的子群及  $W = S_n$ ), 而  $S$  是对换  $(i, i+1)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , 的集合.

b) 更一般地, 令  $G$  是  $k$  上连通的约化代数群,  $T$  是  $G$  上极大环面, 它在  $k$  上可对角化,  $N$  是它的正规化子,  $Z$  是它的中心化子, 令  $R$  是  $G$  的对于  $T$  的根系,  $W = N/Z$  是它的 Weyl 群, 而  $S$  是对应于单根的反射的集合. 再令  $U$  是对应于正根的根本子群在  $G$  中生成的幂么子群, 令  $P = UZ$ . 则四元集  $(G(k), P(k), N(k), S)$  是 Tits 系统.

c) 令  $G = GL_n(\mathbb{Q}_p)$ , 其中  $\mathbb{Q}_p$  是  $p$  进数域, 令  $B$  是由矩阵  $(a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$  (这里  $\mathbb{Z}_p$  是  $p$  进整数环) 组成的子群, 当  $i > j$  时, 满足  $a_{ij} \in p\mathbb{Z}_p$ , 又令  $N$  是单项矩阵的子群. 则存在子集  $S \subset W = N/(B \cap N)$  使得四元组  $(G, B, N, S)$  是 Tits 系统. 这里群  $W$  是型  $\tilde{A}_{n-1}$  的无限 Coxeter 群. 类似地能定义对应于局部域上别的连通的约化群的具有仿射型 Weyl 群的 Tits 系统.

在某些条件下可断言, 容许 Tits 系统的群是单群. 例如下面的条件对此是充分的:  $\alpha$ )  $B$  是可解群且不包含在  $G$  的任何真正规子群中;  $\beta$ )  $G$  等于它自己的换位子群;  $\gamma$ ) Coxeter 群  $W$  是不可分解的; 或  $\delta$ ) 群  $B$  不含  $G$  的任何非平凡正规子群. 用这种方法可证明 Chevalley 群 (Chevalley group) 特别是有限 Chevalley 群的单性.

#### 参考文献

- [1] Tits, J., *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer, 1974.
- [2] Bourbaki, N., *Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras*, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 4 (译自法文). Э. Б. Винберг 撰

【补注】 Tits 系统也称为具有  $BN$  对的群 (group with a  $BN$ -pair).

令  $G$  是集合  $\Omega = \{1, 2, \dots\}$  上的 2 传递置换群; 则  $S = \{s\}$  及  $W = \{1, s\}$ , 其中  $s$  是  $G$  中交换 1 和 2 的一个置换,  $B = G_1$  及  $N = G_{\{1, 2\}}$ . 这就给出



了型  $A_1$  的一个 Tits 系统.

#### 参考文献

- [A1] Ronan, M. A., Lectures on buildings, Acad. Press, 1989. 石生明 译 王杰 校

#### Todd 类 [Todd class; Тодда класс]

由

$$\sum_{j=0}^{\infty} T_j(c_1, \dots, c_j)$$

定义的复丛  $\xi$  的示性类 (characteristic class), 其中  $\{T_j\}$  为相应于幂级数  $t/(1-e^{-t})$  的乘法序列,  $c_i$  为陈 (省身) 类 (Chern class).

由 J. Todd ([1]) 引进.

#### 参考文献

- [1] Todd, J., The arithmetical theory of algebraic loci, *Proc. London Math. Soc.*, 43 (1937), 190 - 225.  
[2] Hirzebruch, F., Topological methods in algebraic geometry, Springer, 1978 (译自德文).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】关于乘法序列, 见示性类.

李贵松 译 潘建中 校

#### Toeplitz 型 (不定的) [Toeplitz form, indefinite; Тёплица форма indefinite]

在有有限支集的无穷序列  $x = \{\xi_p\}_{p=-\infty}^{\infty}$  的空间  $\Phi$  上用表达式

$$(x, x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{p-q} \xi_p \bar{\xi}_q$$

定义的一种二次型, 其中序列  $c = \{c_p\}_{p=-\infty}^{\infty}$ ,  $c_0 = \bar{c}_0$ , 是这样的, 从某个维数  $N$  以后, 型  $(x, x)$  在每个子空间

$$\Phi^N \subset \Phi, \Phi^N = \{\xi_p: \xi_p = 0, |p| > N\}$$

上化成含有  $\kappa$  个平方和的典范形式. 借助于 Toeplitz 型可在  $\Phi$  上引进一个不定标量积; 按迷向子空间因子化和完全化后  $\Phi$  成为一个 Понтрягин 空间 (Pontryagin space).

Н. К. Никольский, Б. С. Павлов 撰  
葛显良 译 吴绍平 校

#### Toeplitz 矩阵 [Toeplitz matrix; Тёплица матрица], $T$ 矩阵 ( $T$ -matrix)

满足以下诸条件的一个无穷矩阵  $(a_{nk})_{n,k=1,2,\dots}$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq M, n = 1, 2, \dots,$$

其中  $M$  不依赖于  $n$ ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0, k = 1, 2, \dots;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1.$$

这些条件对于由把一个序列  $\{s_n\}$  通过矩阵  $(a_{nk})$  变换成序列  $\{\sigma_n\}$ :

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k$$

而定义的矩阵求和法 (matrix summation method) 的正则性 (见正则求和法 (regular summation methods)) 是必要充分的. 这些条件对正则性的必要性和充分性在三角形矩阵的情形是由 O. Toeplitz 所证明的.

#### 参考文献

- [1] Toeplitz, O., *Prace Mat. Fiz.*, 22 (1911), 113 - 119.  
[2] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.  
[3] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, MacMillan, 1950. И. И. Волков 撰

【补注】在文献中术语“Toeplitz 矩阵”也用于具有性质:  $a_{jk}$  仅依赖于  $j-k$ , 即对所有  $j$  和  $k$ ,  $a_{jk} = a_{j-k}$  的 (有限或无限) 矩阵  $(a_{jk})$ . 以下资料是关于这意义下 Toeplitz 矩阵的.

有限 Toeplitz 矩阵在统计学、信号处理与系统理论中有重要应用. 对这样的矩阵有不同的求逆算法 (N. Levinson, I. Schur 和其他人). 一个有限 Toeplitz 矩阵  $A = (a_{j-k})_{j,k=1}^n$  的逆不是 Toeplitz 的, 但是它有如下形式:

$$A^{-1} = \quad (A1)$$

$$= x_0^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_{n-1} & \cdots & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{-n} \\ 0 & y_0 & \cdots & y_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y_{-n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y_{-n+1} & y_{-n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{-1} & y_{-2} & y_{-3} & \cdots & y_{-n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_n & x_{n-1} & \cdots & x_1 \\ 0 & 0 & x_n & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

其中假定  $x_0 \neq 0$ , 且  $x_0, \dots, x_n$  和  $y_{-n}, \dots, y_0$  是以下方程的解:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_{j-k} x_k = \delta_{j0}, \sum_{k=0}^n \alpha_{j-k} y_{k-n} = \delta_{jn} (j = 0, \dots, n).$$

这里  $\delta_{ik}$  是 Kronecker 符号. 公式 (A1) 称为 Гохберг-Semencul 公式 (Gohberg-Semencul formula) (见 [A4]). 关于这方向的进一步发展见 [A5], [A6].

无穷 Toeplitz 矩阵  $(a_{j-k})_{j,k=1}^{\infty}$  在 Hilbert 空间  $l_2$  上定义了一个重要的算子类, 可以借助于它们的象征  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \lambda^j, |\lambda| = 1$  来分析. 这些算子的理论是

丰富的且包含反演定理(基于象征的因子分解), Fredholm 定理, 用象征的卷绕数来表示的指标的显式公式, 对其有限部分的行列式的渐近公式, 等等. 事实上, 无穷 Toeplitz 矩阵构成了显式反演公式已知的很少的几类算子之一, 且它们提供了现代指标理论的第一批例子之一. 关于最近文献见 [A2], [A3], [A7]. 其矩阵元素的象征是有理的无穷 Toeplitz 矩阵是特别令人感兴趣的, 且对应的算子可借助于数学系统理论中的方法来分析(见 [A1]).

#### 参考文献

- [A1] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Wiener-Hopf integral equations, Toeplitz matrices and linear systems, in I. Gohberg (ed.): Toeplitz Centennial, Birkhäuser, 1982, 85 – 135.
- [A2] Böttcher, A. and Silbermann, B., Analysis of Toeplitz operators, Springer, 1990.
- [A3] Gohberg, I. and Fel'dman, I. A., Convolution equations and projection methods for their solution, Amer. Math. Soc., 1974 (译自俄文).
- [A4] Gohberg, I. and Semencul, A. A., On inversion of finite-section Toeplitz matrices and their continuous analogues, Mat. Issled. Kishinev, 7 (1972), 2, 201 – 224 (俄文).
- [A5] Heinig, G. and Rost, K., Algebraic methods for Toeplitz-like matrices and operators, Akad. Verlag, 1984.
- [A6] Kailath, T. and Chun, J., Generalized Gohberg-Semencul formulas for matrix inversion, in H. Dym, S. Goldberg, M. A. Kaashoek and P. Lancaster (eds.): The Gohberg Anniversary Collection, Vol. 1, Birkhäuser, 1989, 231 – 246.
- [A7] Nikolskii, N. K. (ed.), Toeplitz operators and spectral function theory, Birkhäuser, 1989 (译自俄文). 葛显良 译 吴绍平 校

#### 容许(关系) [tolerance; толерантность]

集合  $A$  上的具有自反性和对称性的二元关系  $R \subseteq A \times A$ , 即  $R$  满足对所有  $a \in A$  有  $aRa$ , 且对所有  $b \in A$  有  $aRb$  蕴涵  $bRa$ . 称泛代数 (universal algebra)  $A = \{A, \Omega\}$  上的容许关系  $R$  是相容的 (compatible) 如果它是正方形  $A \times A$  的子代数, 也就是说, 对任意  $n$  元运算  $\omega$ , 条件  $a_i R b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 蕴涵  $(a_1, \dots, a_n \omega) R (b_1, \dots, b_n \omega)$ . 于是, 容许关系是等价 (equivalence) 关系的自然推广, 而相容的容许关系是合同 (congruence) 关系的推广. 相对有补格上的任一相容容许关系是合同关系 ([1]). 泛代数  $A$  上的所有相容容许关系组成的集合  $LT(A)$  在包含关系下是以格  $Con(A)$  为子集 (但未必是子格) 的代数格, 其中  $Con(A)$  是  $A$  上的所有合同关系组成的格. 关于  $LT(A)$  和  $Con(A)$  的性质见 [2], [3].

#### 参考文献

- [1] Chajda, I., Niederle, J., Zelinka, B., On existence conditions for compatible tolerances, Czechoslovak. Math. J., 26 (1976), 2, 304 – 311.
- [2] Schmidt, E. T., Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen, Deutsch, Verlag Wissenschaft, 1969.
- [3] Grätzer, G., General lattice theory, Birkhäuser, 1978. Т. С. Фофанова 撰

【补注】 设  $(M, d)$  为一距离空间, 则  $R = \{(x, y): d(x, y) \leq \varepsilon\}$  定义了  $M$  上的一个容许关系. 这种类型的容许关系 (及其推广) 已应用于如统计学, 力学, 机器人学和动力系统中. 还有涉及动力系统关于某容许关系的结构稳定性的研究, 如 Zeeman 容许稳定性猜想 (Zeeman tolerance stability conjecture) ([A1], [A2]).

#### 参考文献

- [A1] Takens, F., Tolerance stability, in A. Manning (ed.): Dynamical Systems, Warwick 1974, Springer, 1975, 293 – 304.
- [A2] Takens, F., On Zeeman's tolerance stability conjecture, in N. H. Kuiper (ed.): Manifolds, Amsterdam 1970, Springer, 1971, 209 – 219. 赵希顺 译

#### 容忍区间 [tolerance intervals; толерантный интервал]

根据独立同分布随机变量建立的随机区间, 它以给定概率  $\gamma$  至少包含概率测度  $dF$  的  $100p\%$  ( $0 < p < 1$ ), 其中  $F(x)$  是随机变量的未知分布函数.

设  $X_1, \dots, X_n$  是独立同分布随机变量, 其分布函数  $F(x)$  未知;  $T_1 = T_1(X_1, \dots, X_n)$  和  $T_2 = T_2(X_1, \dots, X_n)$  是两个统计量, 满足条件: 对于事先给定的数  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 事件  $\{F(T_2) - F(T_1) \geq p\}$  有给定的概率  $\gamma$ , 即

$$P \left\{ \int_{T_1}^{T_2} dF(x) \geq p \right\} = \gamma. \quad (1)$$

这时, 随机区间  $(T_1, T_2)$  称为分布函数  $F(x)$  的  $\gamma$  容忍区间 ( $\gamma$ -tolerance interval), 其端点  $T_1$  和  $T_2$  称为容忍界限 (tolerance bounds), 而概率  $\gamma$  称为容忍系数 (tolerance coefficient). 由 (1) 可见, 单侧容忍界限  $T_1$  和  $T_2$  (即  $T_2 = +\infty$  和相应地  $T_1 = -\infty$ ) 分别是分位数  $x_{1-p} = F^{-1}(1-p)$  和  $x_p = F^{-1}(p)$  的置信系数为  $\gamma$  的普通单侧置信界限, 即

$$P \{x_{1-p} \in [T_1, +\infty)\} = \gamma,$$

$$P \{x_p \in (-\infty, T_2]\} = \gamma.$$

例. 设  $X_1, \dots, X_n$  是独立同正态分布  $N(a, \sigma^2)$  随机变量, 其中参数  $a$  和  $\sigma^2$  未知. 在这种情形下, 自然取充分统计量  $(\bar{X}, S^2)$  的函数作容忍界限  $T_1$  和



$T_2$ , 其中

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

具体地, 取  $T_1 = \bar{X} - kS$  和  $T_2 = \bar{X} + kS$ , 其中常数  $k$  称为容忍乘数, 它是如下方程的解:

$$P \left\{ \Phi \left( \frac{\bar{X} + kS - a}{\sigma} \right) + \right. \\ \left. - \Phi \left( \frac{\bar{X} - kS - a}{\sigma} \right) \geq p \right\} = \gamma,$$

而  $\Phi(x)$  是标准正态律的分布函数, 而且这里  $k = k(n, \gamma, p)$  与  $a$  和  $\sigma^2$  无关. 这样建立的容忍区间有如下性质: 区间  $(\bar{X} - kS, \bar{X} + kS)$  以置信概率  $\gamma$  至少包含变量  $X_1, \cdots, X_n$  的正态分布的概率质量的  $100p\%$ .

在存在概率密度  $f(x) = F'(x)$  的条件下, 事件  $\{F(T_2) - F(T_1) \geq p\}$  的概率不依赖于  $F(x)$ , 当且仅当容忍界限是顺序统计量 (order statistic). 正是这一事实, 是建立非参数 (亦称分布自由) 容忍区间的一般方法的基础. 设  $X^{(\cdot)} = (X_{(n1)}, \cdots, X_{(nn)})$  根据样本  $X_1, \cdots, X_n$  建立的顺序统计量向量, 而

$$T_1 = X_{(nr)}, T_2 = X_{(ns)}, 1 \leq r < s \leq n.$$

由于随机变量  $F(X_{(ns)}) - F(X_{(nr)})$  服从参数为  $s-r$  和  $n-s+r+1$  的 B 分布, 可见事件  $\{F(X_{(ns)}) - F(X_{(nr)}) \geq p\}$  的概率通过积分  $I_{1-p}(n-s+r+1, s-r)$  表示, 其中  $I_x(a, b)$  是不完全 B 函数. 从而, 在此情形下, (1) 换成

$$I_{1-p}(n-s+r+1, s-r) = \gamma. \quad (2)$$

由 (2) 式即可根据给定的  $\gamma, p$  和  $n$ , 决定 (作为所求容忍区间之容忍限的) 顺序统计量  $X_{(nr)}$  和  $X_{(ns)}$  的序号  $r$  和  $s$ . 此外, 根据给定的  $\gamma, p, r$  和  $s$ , 由 (2) 式可以确定满足 (2) 所必须的样本  $X_1, \cdots, X_n$  的容量  $n$ . 在解类似问题时要利用统计数值表.

#### 参考文献

- [1] Бoльшeв, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1983.
- [2] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.
- [3] David, H. H., Order statistics, Wiley, 1981.
- [4] Murphy, R. B., Non-parametric tolerance limits, Ann. Math. Stat., 19 (1948), 581 - 589.
- [5] Somerville, P. N., Tables for obtaining non-parametric tolerance limits, Ann. Math. Stat., 29 (1958), 599 - 601.
- [6] Scheffé, H. and Tukey, J. W., Non-parametric estimation I. Validation of order statistics, Ann. Math. Stat., 16 (1954), 187 - 192.

[7] Fraser, D. A. S., Nonparametric methods in statistics, Wiley, 1957.

[8] Wald, A. and Wolfowitz, J., Tolerance limits for a normal distribution, Ann. Math. Stat., 17 (1946), 208 - 215.

[9] Robbins, H., On distribution-free tolerance limits in random sampling, Ann. Math. Stat., 5 (1944), 214 - 216. М. С. Никулин 撰 周概容 译

断层照相法 [tomography; томография], 亦称层析 X 射线照相法

【补注】根据投影重新构造图形, 即由函数的线积分或 (超) 平面积分恢复函数. 一些重要的研究课题是: 反演过程的存在性、唯一性和稳定性以及建立有效的数值算法. 在断层照相法中起基本作用的是 Euclid 空间上的 Radon 变换 (Radon transform). 设  $f(x_1, \cdots, x_n)$  是实变量  $x_i \in \mathbf{R}^1 (i = 1, \cdots, n)$  的连续函数且在无穷远处充分快地下降,  $n = 1, 2, \cdots$ . 设  $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$  是  $\mathbf{R}^n$  中的单位向量,  $s$  是实数,  $\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^n: \langle x, \theta \rangle = s\}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的超平面, 其中的  $\langle, \rangle$  表示 Euclid 内积.  $f$  在超平面  $\Gamma$  上的积分

$$F(\theta, s) = \int_{\Gamma} f(x) dm(r) \quad (A1)$$

( $dm$  是  $\Gamma$  上的 Euclid 测度) 称为函数  $f$  的 Radon 变换. Radon 算子 (Radon operator)  $\mathcal{R}: f \rightarrow F$  将  $\mathbf{R}^n$  上的速降  $C^\infty$  函数空间  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  映射到  $Z^n$  上的速降  $C^\infty$  函数空间  $\mathcal{S}(Z^n)$ , 这里的  $Z^n = S^{n-1} \times \mathbf{R}$  是  $\mathbf{R}^{n+1}$  中的单位柱面,  $S^{n-1}$  是  $\mathbf{R}^n$  中的单位球面. 固定  $\theta$  和  $s$ , 积分  $F(\theta, s)$  称为投影 (projection). Radon 变换与 Fourier 变换 (Fourier transform) 之间的联系是中心薄片定理 (central slice theorem):

$$\tilde{f}(\alpha\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta, s) e^{-i\alpha s} ds, \alpha \in \mathbf{R}, \quad (A2)$$

其中,  $\tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx$  是  $f$  的  $n$  维 Fourier 变换, 与 Radon 算子相关的算子是对偶算子 (dual operator) 或反投影算子 (backprojection operator)  $\mathcal{R}^\#: \mathcal{S}(Z^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ :

$$(\mathcal{R}^\# g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta, \quad (A3)$$

$$g \in \mathcal{S}(Z^n).$$

与  $\mathcal{R}$  是关于超平面上所有的点积分不同,  $\mathcal{R}^\#$  是关于经过一个点的所有超平面积分的. 因此,  $\mathcal{R}$  和  $\mathcal{R}^\#$  组成了积分几何学 (integral geometry) 意义下的对偶耦 (见 [A1], [A8] 及 [A9]). 与之有关的变换是  $k$  平面变换 ( $k$ -plane transform) 和发散束变换 (divergent

beam transform), 前者是在  $k$  维子空间上积分 ( $k=1$  时称为  $X$  射线变换 ( $X$ -ray transform),  $k=n-1$  时即为 Radon 变换), 而后者是在半直线上积分.

反演. Radon 变换的反演公式有两种不同的形式, 视空间维数的奇偶而定 ([A12], [A17]):

$$f(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \times \begin{cases} (-1)^{n/2} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{q} \int_{S^{n-1}} F^{(n-1)}(\theta, \langle x, \theta \rangle + q) d\theta dq, \\ n \text{ 是偶数,} \\ (-1)^{(n-1)/2} \int_{S^{n-1}} F^{(n-1)}(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta, \\ n \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

其中的  $F^{(n-1)}$  是  $F$  关于其最后一个 (标量) 变量的  $(n-1)$  阶导数. 因此, 当  $n$  是奇数时, 只需要了解  $x$  点的一个邻域内的局部信息; 但当  $n$  是偶数时, 则需要知道在与函数的支集相交的所有超平面上的积分. 在 1917 年的一篇文章 ([A17]) 中, J. Radon 还讨论了这样一个问题: 根据函数在所有测地线上的积分确定双曲平面上的函数. 先前, 类似的方法曾被 P. Funk ([A5]) 用于椭圆的情形: 根据函数在大圆上的积分重构球面上的偶函数. 奇数  $n$  和偶数  $n$  的反演公式的统一形式是

$$f = c^{-1} L_x^{(n-1)/2} (\mathcal{R}^\# F), \quad F = \mathcal{R} f, \quad (\text{A4})$$

其中的常数  $c = (-4\pi)^{n-1/2} \Gamma(n/2) \Gamma(1/2)$  ( $\Gamma(\cdot)$  是  $\Gamma$  函数),  $L_x$  是 (作用在  $x$  上的) Laplace 算子 (Laplace operator) (见 [A8]). 关于对偶变换存在类似的表达式. 发散束变换和  $X$  射线变换的反演公式也类似于  $\mathcal{R}$  的反演公式. 用解析级数展开法得到了 Radon 变换的其他反演公式, 见 [A3].

由反演公式推得:  $f \in \varphi(\mathbb{R}^n)$  由  $\mathcal{R} f$  唯一确定. 但若只知道变换在区域的某个子集上的情形, 则这一结论可能不再成立. 下面列出其中的一些, 称为不完全数据问题 (incomplete data problems) (见位势论中的反问题 (potential theory, inverse problems in)). i) 外部问题 (exterior problem), 即根据函数在某个球的外部的线或平面上的积分恢复在该球外部的函数. 如果  $f$  在无穷远处足够快地衰减, 则这个问题可解而且解是唯一的. ii) 内部问题 (interior problem), 即根据函数在某个球内部的积分恢复在该球内部的函数. 这个问题仅对维数是奇数的情形存在唯一解. iii) 有限角问题 (limited angle problem), 此时只对半球面上的一个子集中的  $\theta$  给出  $\mathcal{R} f(\theta, s)$ . 只要任意非平凡的齐次多项式在这个方向集上不恒为零, 则问题有唯

一解. iv) 有限个方向的问题. 问题的解在很大程度上是不唯一的. 实际上, 对任意有限方向集、任意函数  $f \in C_0^\infty(K)$  ( $K$  是  $\mathbb{R}^n$  中的紧集) 以及在  $K$  的内部中的任意紧子集  $K_0$ , 都可以找到函数  $f_0 \in C_0^\infty(K)$ , 它在  $K_0$  上等于  $f$  但沿给定方向的所有线积分都等于零 (见 [A20]). 这种 (高度振荡) 函数  $f_0$  有时称为“幻影” (ghosts), 它们构成了具有有限多个投影的变换的零空间. 为了解决这一问题的不确定性, 必须对函数  $f$  的变差加以限制. 另外, 利用增加投影的数目, 可以找到未知函数的任意好的近似.

重构算法. 等式  $f * (\mathcal{R}^\# g) = \mathcal{R}^\# (g * \mathcal{R} f)$  ( $*$  表示卷积 (convolution)) 是滤过反投影 (filtered back-projection) 的基础. 选取  $g$  使得  $\mathcal{R}^\# g$  是近似于  $\delta$  分布的低通滤过, 从而  $f$  由与反投影的卷积 (反投影在符号  $*$  的右面) 而被恢复 (两种运算都适当地离散化). 如果反投影在滤过程序之前执行则会有变化. 中心薄片定理是 Fourier 重构 (Fourier reconstruction) 的基础. 这时的投影  $F(\theta, s)$  是关于最后一个变量的 Fourier 变换, 由  $n$  维 Fourier 逆变换这是容许的. 为了应用快速 Fourier 变换 (见离散 Fourier 变换 (Fourier transform, discrete)), 首先必须从极网格改变到 Descartes 网格. 解析级数展开法 (analytic series expansion method) 建立在将未知函数的单个展开系数的反演公式离散化的基础上. 代数重构技术 (algebraic reconstruction techniques) 使用数值线性代数中的迭代法 (iteration methods), 应用于将 Radon 积分方程完全离散化后得到的线性方程组.

计算机化断层照相法的问题是不适定的 (见不适定问题 (ill-posed problems)). 它们可以是无解的 (如果数据不在变换的范围内) 或者解可能不唯一, 但这些是可以应用广义反演的概念克服的问题. 另外, 将变换映射到解的算子可能是不连续的. 这时要应用正则化程序 (regularization procedures), 例如 Тихонов-Phillips 正则化、配备合适终止准则的迭代法或者截断的奇异值分解等 ([A4], [A15]). 有限数据问题尤其严重的不适定. 在这种情形时也可以应用带或不带先验信息的统计估计程序, 最终经常导致迭代算法.

推广. 可以定义广义的 Radon 变换, 将其中的积分推广为在子空间上, 或更一般地在流形上的积分 ([A6], [A8], [A12]). 与这种空间有关的一个问题是轨道积分问题 (orbital integral problem), 即, 根据函数在 (广义) 球面上的积分恢复该函数. 作为逆散射问题的特例, 在声学 and 衍射的断层照相法中,  $f$  可以由在经过原点的半圆上的数据得以恢复 (见 [A14], [A18] 和 [A21]). Radon 变换的另一种变化是衰减 Radon 变换 (attenuated Radon transform), 两者之间的差别在于后者的积分号下多了一个指数权因



子. 有关 Radon 变换在偏微分方程领域中的应用, 见 [A8] 和 [A13]. Radon 问题的另一个推广是根据测度的投影, 即由某个可测映射诱导的低维测度重构该测度. 复域上的 Random 变换见 [A6]. 有限 Radon 变换 (finite Radon transform) 也已有研究.

应用. 断层照相法是一种广泛应用于重构研究对象内部结构的截面的方法, 而且不用切割或损害研究对象. 正因为如此, 经常提及的是计算机化 (计算的、计算机辅助的) 断层照相法 (computerized (computed, computer assisted) tomography), 因为在实际工作中需要用数值计算机来具体实施重构. 通过物理中介或“探针”——从 X 射线、 $\gamma$  射线、可见光、电子、中子、超声波发展到核磁共振信号——与研究对象的交互作用, 得到需要重构的内部分布的线积分或平面积分. 计算机化断层照相法的一个最著名的例子是在诊断医学中, 人们使用这一方法绘出了人体器官内部的图象. 在工业中这一方法应用于非破坏性试验. 它的应用还出现在放射天文学、雷达理论、电子显微镜、空气动力学、地球物理学以及海洋学中, 参见 [A3], [A10] 和 [A14]. 有限 Radon 变换也在多个不同的领域中得到应用, 例如纠错码和格论等.

#### 参考文献

- [A1] Bryant, R. L., Guillemin, V., Helgason, S. and Wells, R. O., Jr. (eds.), *Integral geometry*, Amer. Math. Soc., 1987.
- [A2] Censor, Y., Elfving, T. and Herman, G. T. (eds.), *Linear algebra in image reconstruction from projections*, *Lin. Alg. Appl.*, **130** (1990), 1 – 305. special issue.
- [A3] Deans, S. R., *The Radon transform and some of its applications*, Wiley, 1983.
- [A4] Engl, H. W. and Groetsch, C. W., *Inverse and ill-posed problems*, Acad. Press, 1987.
- [A5] Funk, P., Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, *Math. Ann.*, **74** (1913), 287 – 300.
- [A6] Gel'fand, I. M., Graev, M. I. and Vilenkin, N. Ya., *Generalized functions*, 5. *Integral geometry and representation theory*, Acad. Press, 1966 (译自俄文).
- [A7A] Goncharev, A. B., *Integral geometry and three-dimensional reconstruction of randomly oriented identical particles from their electron microphotos*, *Acta Appl. Math.*, **11** (1988), 199 – 211.
- [A7B] Goncharev, A. B., *Methods of integral geometry and recovering a function with compact support from its projections in unknown directions*, *Acta Appl. Math.*, **11** (1988), 213 – 222.
- [A8] Helgason, S., *The Radon transform*, Birkhäuser, 1980.

- [A9] Helgason, S., *Groups and geometric analysis*, Acad. Press, 1984.
  - [A10] Herman, G. T., *Image reconstruction from projections, the fundamentals of computerized tomography*, Acad. Press, 1980.
  - [A11] Herman, G. T. and Natterer, F., *Mathematical aspects of computerized tomography*, Proc. Oberwolfach 1980, Springer, 1981.
  - [A12] John, F., Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **109** (1934), 488 – 520.
  - [A13] John, F., *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Interscience, 1955.
  - [A14] Kak, A. C. and Slaney, A. M., *Principles of computerized tomography imaging*, IEEE Press, 1988.
  - [A15] Louis, A. K., *Inverse und Schlecht Gestellte Probleme*, Teubner, 1989.
  - [A16] Natterer, F., *The mathematics of computerized tomography*, Teubner & Wiley, 1986.
  - [A17] Radon, J., Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Sächs. Akad. Wissenschaft. Leipzig Math. Phys. Kl.*, **69** (1917), 262 – 267.
  - [A18] Sabatier, P. C., *Basic methods of tomography and inverse problems*, A. Hilger, 1987.
  - [A19] Shepp, L. A. (ed.), *Computed tomography*, Proc. Symp. Applied Math., **27**, Amer. Math. Soc., 1983.
  - [A20] Smith, K. T., Solmon, D. C. and Wagner, S. L., Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing a function from radiographs, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **83** (1977), 1227 – 1270.
  - [A21] Stark, H., *Image recovery: theory and application*, Acad. Press, 1987.
- J. B. T. M. Roerdink 撰 朱学贤 译 程民德 校

#### Tonelli 平面变差 [Tonelli plane variation; Тонелли плоская вариация]

二元函数的一种数字特征, 它可以用来定义依 Tonelli 意义的有界变差函数类. 设  $f$  是矩形  $D = [a, b] \times [c, d]$  上给定的函数, 又设函数

$$V_f^1(x) \equiv \text{Var}_{c \leq y \leq d} f(x, y)$$

和

$$V_f^2(y) \equiv \text{Var}_{a \leq x \leq b} f(x, y)$$

为 Lebesgue 可测 (前者在区间  $[a, b]$  上, 后者在  $[c, d]$  上). 如果

$$T(f, D) \equiv \int_a^b V_f^1(x) dx + \int_c^d V_f^2(y) dy < \infty,$$

则称函数  $f$  在矩形  $D$  上有有界 (有限) 的 Tonelli 平面变差 (Tonelli plane variation), 并记这类函数为  $T(D)$ . 这定义由 L. Tonelli (见 [1], [2]) 引入. 但是对连续函数, 类  $T(D)$  的另外一种刻画 (通过 Banach 指标 (Banach indicatrix)) 可在 S. Banach 更早的文献 [4] 中找到. 如果函数  $f$  在矩形  $D$  上连续, 那么曲面  $z = f(x, y)$  有有限面积的充分必要条件是  $f$  属于  $T(D)$  (见 Tonelli 定理 (Tonelli theorem)).

#### 参考文献

- [1] Tonelli, L., Sur la quadrature des surfaces, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **182** (1926), 1198 – 1200.
- [2] Tonelli, L., Sulla quadratura delle superficie, *Atti Accad. Naz. Lincei*, **3** (1926), 357 – 363; 445 – 450; 633 – 658.
- [3] Витушкин, А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955, с. 13.
- [4] Banach, S., Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, *Fund. Math.*, **7** (1925), 225 – 236.
- [5] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952, p. 169 (译自波兰文).

Б. И. Голубов 撰 王斯雷 译

**Tonelli 定理 [Tonelli theorem; Тонелли теорема]**, 关于由显示方程给出的连续曲面面积有限性的

设  $f$  是定义在矩形  $D_0 = [a, b] \times [c, d]$  上的实值函数; 那么

a) 连续曲面  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_0$  有有限面积  $S(f, D_0)$  的充分必要条件是,  $f$  在  $D_0$  上有有限的 Tonelli 平面变差 (Tonelli plane variation);

b) 若 a) 成立, 则

$$S(f, D_0) \geq \iint_{D_0} \left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} dx dy \equiv L(f, D_0),$$

其中面积

$$S(D) \equiv S(f, D), D = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \subseteq D_0$$

为矩形  $D \subseteq D_0$  的连续加性函数, 且对几乎处处的点  $(x, y) \in D_0$ , 成立等式

$$S'(x, y) \equiv \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2};$$

c) 等式  $S(f, D_0) = L(f, D_0)$  成立的充分必要条件是,  $f$  在  $D_0$  上绝对连续, 后者成立当且仅当面积  $S(f, D)$  是矩形  $D \subseteq D_0$  上的绝对连续函数.

这定理是由 L. Tonelli 证明的 (见 [1]–[3] 以及 [4]), 虽然命题 a) 对一切用参数定义的曲面是由 S. Banach ([5]) (用不相同的术语) 建立的.

#### 参考文献

- [1] Tonelli, L., Sur la quadrature des surfaces, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **182** (1926), 1198 – 1200.
- [2] Tonelli, L., Sur quadratura delle superficie, *Atti Accad. Naz. Lincei*, **3** (1926), 357 – 363; 445 – 450; 633 – 658.
- [3] Tonelli, L., Su un polinomio d'approssimazione e l'area di una superficie, *Atti Accad. Naz. Lincei*, **5** (1927), 313 – 318.
- [4] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).
- [5] Banach, S., Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, *Fund. Math.*, **7** (1925), 225 – 236.

Б. И. Голубов 撰

**【补注】** 曲面  $z = f(x, y)$  称为连续的, 是指  $f$  连续; 面积  $S(f, D_0)$  为 Lebesgue 面积 (Lebesgue area) (见面积 (area)), 即大致地说, 是曲面内接多边形的面积之值当多边形一致趋于曲面时的下极限. 当偏导数几乎处处有定义时,  $L(f, D_0)$  的定义 (曲面积分 (surface integral)) 有意义; 当  $f$  为绝对连续时, 就是这种情形. 如同对长度概念那样, Tonelli 定理是人们企图弄清面积这一概念的 19 世纪风格的顶峰. 至于这方面的近代工作, 可见面积. 王斯雷 译

**拓扑代数 [topological algebra; топологическая алгебра]**

1) 同时是拓扑空间且代数运算是连续的一种泛代数 (universal algebra).

2) 同时是拓扑空间的拓扑域或交换环  $R$  上的一种代数 (在含算子环 (ring with operators) 的意义下)  $A$ , 且其中加法和乘法运算以及映射  $R \times A \rightarrow A$  ( $(r, a) \rightarrow ra$ ) 都是连续的. Banach 代数 (Banach algebra) 是复数域上拓扑代数的一个例子.

3) 拓扑代数学是代数学的一个分支, 它研究拓扑代数结构, 即群, 半群, 环, 格, 向量空间, 模, 以及其他, 其中装备着拓扑使所考虑的代数运算是连续的.

拓扑群 (topological group) 的概念是与连续变换群的研究相联系而产生的. 譬如说, 在 19 世纪后半期, S. Lie 和他的学派发展了重要的一类拓扑群 (从一流形到其自身中的可微变换群) 的理论, 这些群随后被称为 Lie 群 (Lie group). 一般拓扑群的研究开始于 20 世纪 20 年代 (见 [1], [2]). 20 世纪 30 年初, 拓扑群、环和域被系统地进行了研究.

A. H. Колмогоров ([3]) 开创了研究拓扑射影几何学的公理化方法. 其分类本质上依赖于局部紧除环 (locally compact skew-field) 的描述. 连通局部紧除环的一个完全的描述由 Л. С. Понтрягин 于 1932 年给出 (见 [4], 第 4 章).



分析中的大量问题引向 **Banach 空间** (Banach space) (亦见 [5]) 的一般定义, 这激发了对拓扑环上拓扑模和 Banach 代数的系统研究 (见 [6], [7]).

现在拓扑代数学的基本分支是: **拓扑群** (topological group) 及其推广 (特别是拓扑半群和拟群); **拓扑环** (topological ring) (特别是拓扑域和除环) 和其上的 **拓扑模** (topological module) (特别是 **拓扑向量空间** (topological vector space); **拓扑格** (特别是拓扑射影平面); 以及拓扑泛代数 (见 [5], [8], [10], [11]).

在拓扑代数学中可分出以下的研究方向: 代数系统 (群、环及其他) 中拓扑的存在性, 变换它们到具有特殊性质的拓扑代数系统中; 关于扩张拓扑到代数系统的扩张中和关于把它们嵌入到特殊类别的拓扑代数系统中的可能性等问题; 拓扑代数系统的拓扑性质, 特别是用度量或范数来确定该拓扑的可能性; 不同类别拓扑代数系统的构造 (包括拓扑代数系统的根理论); 自由拓扑代数系统; 和拓扑代数系统的对偶性问题.

#### 参考文献

- [1] Schreier, O., Abstrakte kontinuierliche Gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 4 (1926), 15 – 32.
- [2] Leja, F., Sur la notion du groupe topologique, *Fund. Math.*, 9 (1927), 37 – 44.
- [3] Kolmogorov, A. N., Zur Begründung der projektiven Geometrie, *Ann. of Math.*, 33 (1932), 175 – 176.
- [4] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群, 上、下册, 科学出版社, 1957 – 1958).
- [5] Bourbaki, N., Topological vector spaces, Springer, 1987 (译自法文).
- [6] Гельфанд, И. М., Райков, Д. А., Шилов, Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, М., 1960 (英译本: Gel'fand, I. M., Raikov, D. A. and Shilov, G. E., Commutative normed rings, Chelsea, 1964).
- [7] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本: Naïmark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984).
- [8] Арнаутов, В. И., Водичар М. И., Михалев, А. В., Введение в теорию топологических колец и модулей, Киш., 1981.
- [9] Глушков, В. М., «Успехи матем. наук», 12 (1957), 2, 3 – 41.
- [10] Скорняков, Л. А., «Труды Московского математического об-ва», 3 (1954), 347 – 373.
- [11] Мальцев, А. И., Избранные труды, т. 1 – 2, М., 1976 (英译本: Mal'tsev, A. I., The metama-

thematics of algebraic systems, Collected paper 1936 – 1967, North – Holland, 1971).

В. И. Арнаутов, А. В. Михалёв 撰

【补注】 **拓扑半群** (topological semi-group) 的概念自 1950 年以来在泛函分析和拓扑代数学 (按上面 3) 的意义) 中已经作了研究. 见 [A4] – [A7].

拓扑代数学的一个重要方面是同一集合上拓扑和代数结构之间的相互作用; 特别是, 在其他方面不等价的拓扑性质由于相容代数结构的存在而使之成为等价的方法, 以及反之. 例如, 如果一个拓扑群的底拓扑空间满足  $T_0$  分离性公理, 则它自动地是 Hausdorff 空间 (且甚至是完全正则的). 类似地, 如果一个拓扑环 (具有 1) 的底空间是紧和 Hausdorff 的, 则它也是零维的. 在另一方向, 如果一个格容许有一个紧 Hausdorff 拓扑与其格结构相容, 则它必须是完全的 (即有任意子集的上确界和下确界). 在这种情形 (且即使对拓扑半格), 该拓扑是由代数结构唯一决定的 (加上要求它应是紧和 Hausdorff 的). 关于拓扑格的更多信息, 见 [A1], [A2].

#### 参考文献

- [A1] Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M. and Scott, D. S., A compendium of continuous lattices, Springer, 1980.
- [A2] Johnstone, P. T., Stone spaces, Cambridge Univ. Press, 1982.
- [A3] Hofmann, K. H. and Mostert, P. S., Elements of compact semigroups, Merrill, 1966.
- [A4] Hille, E. and Phillips, R. S., Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc., 1957 (中译本: 希尔, 菲列浦斯, 泛函分析与半群, 上海科学技术出版社, 1964).
- [A5] Goldstein, J., Semigroups of linear operators and applications, Oxford Univ. Press, 1985.
- [A6] Hofmann, K. H., Topological semigroups, history, theory, applications, *Jahresber. Deutsch. Math. - Verein*, 78 (1976), 9 – 59.
- [A7] Hofmann, K. H. and Lawson, J. D., The analytical and topological theory of semigroups, de Gruyter, 1990.
- [A8] Guichardet, A., Special topics in topological algebras, Gordon & Breach, 1968.

葛显良 译 鲁世杰 校

#### 拓扑动力系统 [topological dynamical system; топологическая динамическая система]

一个三元组  $(W, G, F)$ , 其中  $W$  为拓扑空间,  $G$  为拓扑群,  $F$  为定义在  $G$  左乘  $W$  上的连续函数  $G \times W \rightarrow W$ : 若  $w \in W$ ,  $e$  为  $G$  的单位元, 且  $g, h \in G$ , 则 (利用  $G$  中运算的乘法概念)  $F(e, w)$

$= w$  且

$$F(gh, w) = F(g, F(h, w)). \quad (1)$$

(换言之, 若用  $T_g$  表示变换  $w \rightarrow F(g, w)$ , 则  $T_{gh} = T_g T_h$ ). 研究时常采用右乘代替左乘. 这时  $F$  的自变量常用另外的次序 ( $F$  用映射  $W \times G \rightarrow W$  表示), 且 (1) 换成如下条件

$$F(w, gh) = F(F(w, g), h). \quad (2)$$

$F(g, w)$  或  $F(w, g)$  常常简写成  $gw$  或  $wg$ , 则 (1) 和 (2) 写成形式

$$(gh)w = g(hw), w(gh) = (wg)h.$$

若  $G$  是交换群, 则左乘与右乘没有本质区别. 最重要的情形是  $G = \mathbf{Z}$  (具有离散拓扑的整数加群; 这时就称之为 (拓扑) 瀑布 (cascade), 还有  $G = \mathbf{R}$  (这时就称之为 (拓扑) 流 (flow). 在狭义上拓扑动力系统才用到这两种情形. 有时  $G$  不是群而是半群. 然而基本上只研究非负整数的半群 (换言之, 考虑某连续映射  $T: W \rightarrow W$  的迭代) 或者是 (很罕见的) 非负实数的半群.

“拓扑动力系统”这个词 (通常去掉第一个形容词) 属于拓扑动力学 (topological dynamics), 而在拓扑学中, 同样的对象称为连续变换群. 这两种不同术语的出现, 归因于两种学科研究对象的不同性质, 以及所附加的不同限制. 拓扑学中许多结果与紧群  $G$  有关, 但在拓扑动力学中  $G$  常取局部紧群, 而决不是紧群, 并且对  $g \rightarrow \infty$  时轨道  $F(g, w)$  的极限性态 (即在  $G$  的任意大的紧范围之外) 感兴趣, 它即使在分析中也可能相当复杂. 在变换的代数群 (algebraic group of transformations) 的理论中, 并不假定  $G$  的紧性, 而另一方面却对代数簇之间的映射  $F$  有很强正则性要求 (代数簇的基域往往假定为代数闭域, 所以经典情形是“在整个复数域上”谈论正则性). 结合  $G$  的连通性 (往往还有可约性), 就能象在紧群的情形一样得到关于相互伴随轨道 (见轨道 (orbit)) 可能类型的有意义的信息, 特别是排除了与轨道的复杂极限性态有关的许多现象.

“拓扑动力系统”这个词优于通常使用的“连续动力系统 (流, 瀑布)”, 因为“连续”也可能意味着: a) 度量连续, 见连续流 (continuous flow) 的 1); b)  $G = \mathbf{R}$  (在狭义地谈论拓扑动力系统的时候, 就说流是时间连续的情形, 瀑布是时间离散的情形, 有时分别称之为连续动力系统和离散动力系统.)

Д. В. Аносов 撰

【补注】亦见拓扑动力学 (topological dynamics) 的参考文献.

#### 参考文献

- [A1] Vries, J. de, Topological transformation groups, I, Math. Centre Amsterdam, 1975.
- [A2] Ellis, R., Lectures on topological dynamics, Benjamin, 1969.
- [A3] Bronštein, I. U., Extensions of minimal transformation groups, Sijthoff & Noordhoff, 1979 (译自俄文). 罗嵩龄 译

#### 拓扑动力学 [topological dynamics; топологическая динамика]

动力系统理论中研究拓扑动力系统的分支 (见动力系统 (dynamical system); 拓扑动力系统 (topological dynamical system)). 基本的情形是相空间 (phase space) 为度量紧化, 而时间遍历  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Z}$  或  $\mathbf{N}$  (以下均作此假定).

拓扑动力学的起源 (1920—1930) 涉及到与轨道极限性态相关的一系列概念 (例如, 拓扑动力系统的极限集 (limit set) 和中心 (centre)). 在拓扑动力学基本内容中讨论运动的“可重复性”颇为有益, 尽管这些概念本身是在研究更加具体的对象——微分动力系统时提出的. 各种“可重复性” (按照普遍性程度的顺序) 有: 周期性, (Bohr) 意义下殆周期性, (Birkhoff 意义下, 见极小集 (minimal set) 的 2)) 递归性, Poisson 稳定性 (Poisson stability), 非游荡性 (见游荡点 (wandering point)) 及链循环 (chain recurrence). 随着时间的推移, 任意轨道逼近“可重复”轨道生成的集合; 依此观点, 特别注意后者是合情合理的.

在 60 年代, 极小集及其扩张的研究, 使拓扑动力学作为一门独立学科得到较大发展 (它最初与远离动力系统有关, 见远离动力系统 (distal dynamical system)). 然而, 必须记住, 对于轨道极限性态的研究, 不能简单地化为对极小集的研究.

直到 60 年代末, 拓扑动力学主要处理上述问题 (亦见下述段落和动力系统 (dynamical system) 中参考文献 [1], [6], [11], [13]—[15]). 但是, 许多情况下还必须考虑“不可重复”轨道 (因而往往对分界线感兴趣). 特别地, 它们可以描述某种特殊类型的波, 这与它们是不是链循环无关. 与具有非退化临界点的函数对应的梯度动力系统 (gradient dynamical system) 被用于流形的研究; 但是, 在这时, “可重复”轨道的集合有一个平凡结构. 因此后来也研究了除“可重复”运动之外的轨道性态, 以及孤立的 (isolated) 或者局部极大的 (在集合的某邻域  $U$  中, 不存在更大的不变集) 紧不变集. 在这种集合的轨道中, 可能有“不可重复”的. 对这种集合可引入类似于 Morse 指数 (Morse index) 的指标 (它不再是数, 而是更复杂的对象), 并且建立一种关系, 以推广 Morse 不



等式 (Morse inequalities) (恰与 Morse-Smale 系统 (Morse-Smale system) 的结果对应). 也讨论系统中这些集合在连续变化下的性态. (因为没有兴趣研究轨道离开  $U$  之后的性质之类的问题, 所以有可能 (有时甚至必须) 研究“局部动力系统”, 在该系统中, 点的“运动”不必对所有时间值定义. 精确的描述颇为费力. 见 [1], [10]).

与拓扑动力学有关的问题是不变测度 (invariant measure); 拓扑熵; 渐近循环 (见 [2], [3]); 或在描述集合论 (descriptive set theory) 意义下, 由其性质自然确定的相空间的某子集或其他部分, 属于哪一类的问题 (见 [4], [5]). 在拓扑动力学中 (一般地, 在动力系统理论中), 人们提出与动力系统在某种“脱殊的”意义下的那些性质有关的问题 (见一般位置 (general position) 的参考文献 [9], [10], 链循环 (chain recurrence) 的参考文献 [3], [6], [7]). (事实上, 拓扑动力学仅与  $C^0$  拓扑中的“脱殊性”有关, 对于微分动力系统, 在系统的一相对小的集合上,  $C^r (r \geq 1)$  拓扑更合适.) 在拓扑动力学的框架中, 可以讨论 **Ляпунов 稳定性** (Lyapunov stability) 与各种相关概念之间的关系.

拓扑动力学对于具体的动力系统或各动力系统类的应用中, 大量涉及到拓扑动力学的概念及结果对微分动力系统理论 (有时也涉及遍历理论 (ergodic theory)) 的应用. 在拓扑动力学的这些应用中, 常常要考虑在其中相空间不是流形的系统 (当拓扑动力学应用在非流形的不变集上的限制, 或者应用于符号动力学 (symbolic dynamics), 或者兼而有之时, 就出现此情形.) 从 60 年代中叶起, 特别是到了 80 年代, 在区间或圆的连续映射  $S$  迭代所得的瀑布上, 有了许多成果. 它们大部分不依赖于  $S$  的光滑性, 且与不变测度无关, 只与“纯”拓扑动力学有关.

拓扑动力学对统一研究数论中的一系列结果有用武之地 (见 [8], [11]) (虽然其中最深奥的部分与遍历理论有关). 最后, 尽管拓扑流的定义用到了常微分方程自治系统 (autonomous system) 的许多性质, 拓扑动力学有时也可以间接用于研究非自治系统 (这里, 此系统是和经某极限过程所得另一系统的连续统在一起研究的, 并且提供了类似于斜积 (skew product) 条中 2) 的构造. 见 [9]).

#### 参考文献

- [1] Conley, C., Isolated invariant sets and the Morse index, Amer. Math. Soc., 1978.
- [2] Schwartzman, S., Asymptotic cycles, Ann. of Math., 66 (1957), 270 – 284.
- [3] Rhodes, F., Asymptotic cycles for continuous curves on geodesic spaces, J. London Math. Soc., 6 (1973), 247 – 255.

- [4] Шарковский, А. Н., «Укр. Матем. ж.», 17 (1965), 3, 104 – 111; 5, 80 – 95; 18 (1966), 2, 60 – 83; 20 (1968), 2, 136 – 142.
- [5] Шарковский, А. Н., «Доповіді АН УРСР», 1966, 7, 866 – 870.
- [6] Добрынский, В. А., в кн: Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений, К., 1973, 43 – 53.
- [7] Palis, J., Pugh, C., Shub, M. and Sullivan, D., Genericity theorems in topological dynamics, in A. Manning (ed.), Dynamical Systems Warwick, 1974, Lecture notes in math., Vol. 468, Springer, 1975, 241 – 250.
- [8] Furstenberg, H., Poincaré recurrence and number theory, Bull. Amer. Math. Soc., 5 (1981), 3, 211 – 234.
- [9] Millionshchikov, V. M., Les systèmes linéaires. d'équations différentielles ordinaires, in Internat. Congress Mathematicians Nice, 1970, Gauthier-Villars, 1971, 915 – 920.
- [10] Salamon, D., Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets, Trans. Amer. Math. Soc., 291 (1985), 1, 1 – 41.
- [11] Furstenberg, H., Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory, Princeton Univ. Press, 1981.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 极小集及其扩张的研究也可以在相空间不可度量 (但保持紧) 及“时间”遍历任意拓扑群时进行; 亦见 [A1]. 对于通过迭代区间或圆的连续映射所得的瀑布, 例如见 [A2] – [A4], [A6].

对于非自治系统, 亦见 [A5] 及动力系统 (dynamical system) 中参考文献 [13] 的第 IV 章.

#### 参考文献

- [A1] Auslander, J., Minimal flows and their extensions, North-Holland, 1988.
- [A2] Bowen, R. and Franks, J., The periodic points of maps of the disk and the interval, Topology, 15 (1976), 337 – 342.
- [A3] Martens, M., Strien, S. van and Melo, W. de, Julia-Fatou-Sullivan theory for real one-dimensional dynamics, Acta. Math. (待出版).
- [A4] Milnor, J. and Thurston, B., On iterated maps of the interval., in J. C. Alexander (ed.), Dynamical Systems, Lecture notes in math., Vol. 1342, Springer, 1988, 465 – 563.
- [A5] Sell, G. R., Topological dynamics and ordinary differential equations, v. Nostrand, 1971.
- [A6] Sharkovskii, A. N., Coexistence of cycles of continuous maps of a line into itself, Ukrain Mat. Zh., 16 (1964), 61 – 71 (俄文).
- [A7] Gottschalk, W. H. and Hecklund, G. A., Topological dynamics, Amer. Math. Soc., 1955.

[A8] Smale, S., The mathematics of time, Springer, 1980.  
罗嵩龄 译

拓扑熵 [topological entropy; топологическая энтропия]

在拓扑动力学 (topological dynamics) 和遍历理论 (ergodic theory) 中, 与动力系统的度量熵 (metric entropy) ([1] 中引入) 相类似的一个概念. 对于紧统  $X$  的一个开覆盖  $\mathfrak{U}$ , 设  $H(\mathfrak{U})$  表示能够覆盖  $X$  的覆盖元素最少个数的对数 (常以 2 为底). 若  $S: X \rightarrow X$  是连续映射, 则极限

$$h(S, \mathfrak{U}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathfrak{U} \vee S^{-1}\mathfrak{U} \vee \dots \vee S^{-n+1}\mathfrak{U})$$

存在, 其中  $\mathfrak{U} \vee \mathfrak{V}$  是一个覆盖, 其元素由  $\mathfrak{U}$  和  $\mathfrak{V}$  中元素的所有非空交组成. 拓扑熵  $h_{\text{top}}(S)$  定义为  $h(S, \mathfrak{U})$  在所有可能的  $\mathfrak{U}$  上的上确界. 在度量情形下有一个等价定义: 对度量  $\rho$ , 设  $K_\varepsilon(X, \rho)$  表示  $X$  中两两距离大于  $\varepsilon$  的点的最大数. 那么

$$h_{\text{top}}(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log K_\varepsilon(X, \rho_n),$$

其中  $\rho_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n} \rho(S^i x, S^i y)$  (见 [2]–[4]). 这就得到

$$h_{\text{top}}(S^n) = n h_{\text{top}}(S).$$

且当  $S$  是同胚时,  $h_{\text{top}}(S^{-1}) = h_{\text{top}}(S)$ . 因此, 瀑布 (cascade)  $\{S^n\}$  的拓扑熵自然取作  $h_{\text{top}}(S)$ . 对于拓扑流 (连续时间动力系统 (flow (continuous-time dynamical system)))  $\{S_t\}$ , 就得到

$$h_{\text{top}}(S_t) = |t| h_{\text{top}}(S_1).$$

于是, 流的拓扑熵自然取作  $h_{\text{top}}(S_1)$ . 可以用不同的方法定义其他变换群的拓扑熵 (它不能够再简化成群的元素之一的拓扑熵; 见 [7]).

拓扑熵  $h_{\text{top}}(S)$  与在所有正规化不变 Borel 测度  $\mu$  上度量熵  $h_\mu(S)$  的上确界一致 (见 [2], [5]–[7];  $\max h_\mu$  的存在性及  $S$  上  $h_{\text{top}}(S)$  对  $S$  的依赖性见 [18]). 这是变分原理 (variational principle) 的一种特殊情形, 对于固定连续函数  $f$ , 变分原理给出了值

$$\sup_\mu \left[ h_\mu(S) + \int f d\mu \right]$$

的拓扑解释 (见 [4], [8], [9]). 拓扑熵给出了动力系统中运动的“复杂性”或“相异性”的特征 (见 [10], [3], [4]). 一定情况下, 它也与周期轨道数 (周期  $\leq T$  的轨道; 见周期轨道 (periodic trajectory) 及 [3], [4], [11]–[13])) 的渐近性态有关 (当  $T \rightarrow \infty$  时). “熵猜想”断言, 闭流形  $W$  的微分同胚  $S$  的拓扑熵, 不小于由  $S$  在同调空间  $H_*(W, \mathbf{R})$  上导

出的线性变换的谱半径 (spectral radius) 的对数 (见 [14], [15]). 在  $C^\infty$  情形下已获证明 ([17]).

#### 参考文献

- [1] Adler, R. L., Konheim, A. G. and McAndrew, M. H., Topological entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 309 – 319.
- [2] Динабург, Е. И., «Изв. АН СССР Сер. матем.», **35** (1971), 2, 324 – 366.
- [3] Алексеев, М., Символическая динамика, в кн.: Одиннадцатая математическая школа, К., 1976.
- [4] Боуэн, Р., Методы символической динамики, М., 1979 (译自英文).
- [5] Goodman, T. N. T., Relating topological entropy and measure entropy, *Bull. London Math. Soc.*, **3** (1971), 176 – 180.
- [6] Goodwyn, L. W., Comparing topological entropy with measure-theoretic entropy, *Amer. J. Math.*, **94** (1972), 366 – 368.
- [7] Таги-заде, А. Т., «Докл. АН Азерб. ССР», **34** (1978), 6, 18 – 22; 8, 11 – 14.
- [8] Степин, А. М., Таги-заде, А. Т., «Докл. АН СССР», **254** (1980), 3, 545 – 549.
- [9] Moulin Ollagnier, J. and Pinchou, D., The variational principle, *Studia Math.*, **72** (1982), 151 – 159.
- [10] Брудно, А. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», **44** (1982), 124 – 149.
- [11] Кушнirenко, А. Г., Каток, А. Б., Алексеев, В. М., в кн.: Девятая летняя математическая школа, 2 изд., К., 1976, 50 – 341.
- [12] Каток, А. Б., Синай, Я. Г., Степин, А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ, т. 13, М., 1975, 129 – 262.
- [13] Katok, A. B., Lyapunov exponents entropy and periodic orbits for diffeomorphisms, *Publ. Math. IHES*, **51** (1980), 137 – 173.
- [14A] Katok, A. B., The entropy conjecture, in D. V. Anosov (ed.): *Smooth Dynamical Systems*, Moscow, 1977, 181 – 203.
- [14B] Shub, M., Dynamical systems, filtrations and entropy, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80** (1974), 27 – 41.
- [15] Fried, D. and Shub, M., Entropy, linearity and chain-recurrence, *Publ. Math. IHES*, **50** (1979), 203 – 214.
- [16] Denker, M., Grillenberger, C. and Sigmund, K., *Ergodic theory on compact spaces*, Springer, 1976.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 代替译文 [4], 可以参考 [A2].

依上所述,  $h_\mu(S)$  表示  $S$  关于正规化不变 Borel 测度  $\mu$  的熵 (见动力系统的熵理论 (entropy theory of a dynamical system)). 若  $\mu$  遍取所有正规化不变 Borel 测度的集合, 则值  $P_S(f) = \sup_\mu [h_\mu(S) + \int f d\mu]$



称为  $f$  (关于  $S$ ) 的压力 (pressure). 若  $\mu$  满足  $h_\mu(S) + \int f d\mu = P_S(f)$  (即上确界是极大值), 则  $\mu$  称为  $f$  (关于  $S$ ) 的平衡态 (equilibrium state) 或 Gibbs 测度 (Gibbs measure). 关于存在性及唯一性的结论也见 [A2].

有关拓扑熵估计的最新结果, 见 [A1] 及其参考文献.

#### 参考文献

[A1] Newhouse, S. E., Entropy and volume, *Ergod. Th. & Dynam. Syst.*, 8 (1988), 283 – 299.

[A2] Bowen, R., Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Springer, 1975.

罗嵩龄 译

#### 拓扑等价 [topological equivalence; топологическая эквивалентность]

拓扑空间之间的一种关系. 两个拓扑空间  $X$  与  $Y$  称为拓扑等价, 如果它们同胚, 即存在从空间  $X$  到  $Y$  上的一个同胚 (homeomorphism). 在所有拓扑空间组成的类中, 拓扑等价是自反的、对称的、可传递的、二元关系. 所有拓扑空间的总体, 分划成为两两不交拓扑等价类. 拓扑空间在拓扑等价下, 即在任意同胚下保持不变的性质, 称为拓扑不变量 (topological invariants). 例如, 直线与 (不含端点的) 区间拓扑等价; 直线和闭区间不拓扑等价. 任意两个三角形拓扑等价, 然而它们并不是属于这个拓扑等价类的全部拓扑空间, 比如这个类还包含所有圆. 拓扑等价概念的一个重要扩张是同伦等价 (见同伦型 (homotopy type)).

#### 参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948 (中译本: П. С. 亚历山大罗夫, 集与函数泛论初阶, 上册, 商务印书馆, 1954; 下册, 高等教育出版社, 1955).

А. В. Архангельский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

罗嵩龄 译

#### 拓扑域 [topological field; топологическое поле]

一拓扑环 (topological ring)  $K$ , 同时是域 (field), 即加上在  $K \setminus \{0\}$  上逆映射  $a \mapsto a^{-1}$  是连续这一要求. 拓扑域  $K$  的任一子域  $P$ , 及  $P$  的闭包  $\bar{P}$  都是拓扑域.

仅有的连通局部紧拓扑域是  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{C}$  (也见局部紧除环 (locally compact skew-field)). 每个赋范域相对于由范数诱导出的拓扑是一个拓扑域 (见范数 (norm); 域上的范数 (norm on a field)). 如在域  $P$  上存在两个实值范数  $u$  和  $v$ , 每个都使  $P$  成为完全的拓扑

域, 且由  $u$  与  $v$  诱导出的拓扑  $\tau_u$  和  $\tau_v$  不同, 则域  $P$  是代数闭域. 域  $\mathbf{C}$  是域  $\mathbf{R}$  的唯一的实范数扩张.

对每个无限基数为  $\tau$  的域, 存在着  $2^{2^\tau}$  个不同的拓扑使之成为一个拓扑域. 拓扑域的拓扑或是反离散的 (anti-discrete) 或是完全正则的. 具非范数拓扑的拓扑域, 以及有范数但不具有传统范数赋予的拓扑的拓扑域正被构造出来. 拓扑域或是连通的或是完全不连通的. 存在着具有任意有限特征的连通拓扑域. 现不知是否每个拓扑域可作为子域嵌入一个连通拓扑域. 对照于拓扑环和线性拓扑空间, 不是每个完全正则的拓扑空间可嵌入到一个拓扑域中作为一个子空间. 例如, 拓扑域的拟紧的 (特别地, 紧的) 子空间总是可测的. 但是, 每个完全正则且有一个到一可测空间之上的连续的一一映射的空间可嵌入到某个拓扑域中成为一个子空间. 如果拓扑域  $P$  至少包含一个可数的非闭子集, 则在  $P$  上存在一个最弱的可测拓扑使  $P$  成为一个拓扑域.

对于一个拓扑域  $K$ , 可定义完全化  $\tilde{K}$ , 它是一个完全拓扑环,  $K$  作为一个处处稠密的子域嵌入其中. 环  $\tilde{K}$  可能有零因子. 但是, 每个实范数拓扑域的完全化仍是一个实范数拓扑域.

#### 参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (英译本: Pontryagin, L. S., Topological groups, Princeton Univ. Press, 1958).

[2] Wieslaw, W., Topological fields, M. Dekker, 1988.

[3] Шахматов, Д. Б., «Докл. АН СССР», 271 (1983), 6, 1332 – 1336.

Д. Б. Шахматов 撰 冯绪宁 译

#### 拓扑群 [topological group; топологическая группа]

一个集合  $G$ , 在其上给于两个结构——一个群结构和一个拓扑, 使得群运算是连续的. 确切地说, 由直积  $G \times G$  到  $G$  内的映射  $(a, b) \mapsto ab^{-1}$  必须是连续的. 拓扑群  $G$  的一个子群在诱导拓扑内是一个拓扑群. 陪集的商空间  $G/H$  关于  $G$  到  $G/H$  上的典范同态来说被赋予商拓扑. 如果  $H$  是  $G$  的一个正规子群, 则  $G/H$  ( $G$  对  $H$  的商群) 是一个拓扑群.

拓扑群的例. 向量空间  $\mathbf{R}^n$  是关于自然拓扑的实数加法群  $\mathbf{R}$  的  $n$  个拷贝的直积; 圆  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  是  $\mathbf{R}$  对整数子群  $\mathbf{Z}$  的商群; 每一个 Lie 群 (Lie group); 任意抽象群带有离散拓扑; 任意拓扑向量空间 (topological vector space).

通常一个拓扑群的底空间都被假定为 Hausdorff 空间. 商空间  $G/H$  是 Hausdorff 的, 当且仅当子群

$H$  在  $G$  中是闭的 (从现在起所有被考虑的子群都假定是闭的). 陪集的商空间  $G/H$  是正则的. 存在具有非正规底空间的拓扑群 (见 [7]).

一个拓扑群称为连通的 (connected), 全不连通的 (totally disconnected), 紧的 (compact), 局部紧的 (locally compact) 等等, 如果它的底拓扑空间具有相应的性质. 单位元的连通分支  $G^0$  是  $G$  的最大连通闭子群. 商空间  $G/G^0$  是全不连通的. 一个局部紧的全不连通群有一个开的紧子群. 如果  $G$  是一个紧的全不连通群, 则单位元的每一个邻域都包含  $G$  的一个开正规子群. 因此, 紧的全不连通群类与射影有限群 (profinite group) 类重合. 它们在 Galois 理论中扮演重要的角色, 在那里, 带有 Krull 拓扑, 它们作为无限可分域的 Galois 群而出现.

每一个拓扑群在自然方式下都是一个一致空间 (uniform space). 特别地, 一个拓扑群  $G$  上一个左一致群结构由集合

$$L(U) = \{(x, y) \in G \times G : x^{-1}y \in U\}$$

的全体所定义, 这里  $U$  遍历  $G$  的单位元的一组邻域; 右一致结构可通过对称定义. 由一致结构所产生的拓扑与群上原有的拓扑一样. 在一个拓扑群上一致结构的存在使得可以引入并且应用一致连续 (例如, 拓扑群上的实值函数), Cauchy 序列, 完全性和完全化等概念. 一个局部紧的拓扑群在它的一致结构内是完全的. 这一事实的直接结果是一个 Hausdorff 拓扑群的任意局部紧子群都是闭的. 然而, 也存在这样的拓扑群, 它们甚至不能嵌入完全群.

在每一个局部紧拓扑群  $G$  上存在一个非平凡测度  $\mu$ , 它在左平移之下是不变的 (就是说, 对于任意  $\mu$  可测子集  $A \subseteq G$  和每一个元素  $x \in G$  来说, 子集  $xA$  是可测的, 并且  $\mu(xA) = \mu(A)$ ). 这样一个测度称为一个 Haar 测度 (Haar measure). 除去乘以一个常数外它是唯一的.

如果拓扑群  $G$  是紧的, 则 Haar 测度也在右平移之下不变. 而且, 在这一情形下, 可以如此选取常数因子使得  $\mu(G) = 1$ . 这就使得能够考虑积分  $\int f(x) d\mu(x)$  作为函数  $f(x)$  在  $G$  上的平均值. Haar 测度的最重要的应用在于与连续表示论的联系. 关于一个 Haar 测度的积分, 使得可以将有限群的表示论中有重要意义的部分转移到紧群上来 (例如, 特征标的正交关系, 或者关于矩阵元素的正交关系), 还有 Peter-Weyl 定理 (Peter-Weyl theorem), 它首先是对 Lie 群得到的. 这个定理的一个直接推论是每一个紧群都容有一个有限维酉表示的完全系 (换言之, 对于每一个非平凡元素  $x \in G$  存在一个表示  $\rho$ , 使得  $\rho(x) \neq E$ ). 存在没有非平凡有限维表示的局部紧群.

在本质上, 关于拓扑群结构的有意义的结果只对于局部紧群才知道. 对于局部紧 Abel 群来说, 有以下的基本结构定理 (fundamental structure theorem): 每一个局部紧 Abel 群  $G$  可以表示为直积  $G = \mathbf{R}^n \times H$ , 这里  $H$  是一个具有一个开紧子群  $K$  的群. 这个结果是关于局部紧 Abel 群对偶理论的一个推论 (见 Понтрягин 对偶性 (Pontryagin duality)). 这个定理将  $G$  的结构的研究归结为关于离散群  $H/K$  和  $\hat{K}$  的问题, 这里  $\hat{K}$  是  $K$  的特征标群, 换句话说, 归结为抽象群论的问题.

在拓扑群论的发展中起决定性作用的是 Hilbert 第五问题 (Hilbert fifth problem). 它是在 1900 年作为关于局部变换群的问题而陈述的, 而对于拓扑群论的发展来说是本质的. 以下就是一般公认的陈述: 是否每一个局部 Euclid 拓扑群都是一个 Lie 群? (一个拓扑群称为局部 Euclid 的 (locally Euclidean), 如果它有单位元的一个邻域与 Euclid 空间  $\mathbf{R}^n$  同胚, 即如果它是一个拓扑流形). Hilbert 第五问题已于 1952 年解决 (见 [6]). 主要的一步是证明以下的 Lie 型群的判别准则: 一个局部紧群  $G$  是 Lie 群, 当且仅当它是一个无小子群的群 (group without small subgroups) (就是说, 如果存在单位元的一个邻域不包含一个非平凡子群). 还证明了, 一个局部紧群  $G$  如果具有紧商群  $G/G^0$ , 则是 Lie 群的射影极限 (或者等价的提法是,  $G$  中单位元的每一个邻域都包含一个正规子群  $N$ , 使得  $G/N$  是一个 Lie 群). 在任意局部紧群内, 单位元的每一个邻域都包含一个形如  $K \times L$  的开集, 这里  $K$  是一个紧子群而  $L$  是一个连通局部 Lie 群.

具有紧商群  $G/G^0$  的局部紧群是 Lie 群的射影极限这一事实, 使得可以将以前对于 Lie 群已知的许多结果转移到这个群类上 (见 [8]). 例如,  $G$  的每一个紧子群都被包含在一个极大紧子群内, 并且  $G$  的任意两个极大紧子群都是共轭的. 再者, 如果  $K$  是  $G$  的一个极大紧子群, 则存在一组单参数子群  $L_i \cong \mathbf{R} (i = 1, \dots, n)$ , 使得将  $(k, l_1, \dots, l_n), k \in K, l_i \in L_i, i = 1, \dots, n$ , 映成乘积  $kl_1 \cdots l_n$  的映射是群  $K \times L_1 \times \cdots \times L_n$  到  $G$  上的一个同胚映射.

解决了 Hilbert 第五问题之后, 主要问题是更为详细地研究满足这样或那样附加条件的局部紧群的结构. 满足某些有限性条件的群类已被研究过; 例如, 特殊秩的有限性条件, 各种各样关于子群的极大极小条件, 等等 (见 [5]). 局部幂零, 局部紧群的理论已经产生. 这些所得到的结果很大一部分稍后已推广到局部剩余幂零群类上 ([9]).

#### 参考文献

- [1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, General topology, Addison-Wisley, 1966 (译自法文).



- [2] Weil, A., *l'Intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, 1940.
- [3] Понтрягин, Л. С., *Непрерывные группы*, 3 изд., М., 1973 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群 (上, 下册), 科学出版社, 1978).
- [4] Hewitt, E. and Ross, K., *Abstract harmonic analysis*, I, Springer, 1979.
- [5] «Итоги науки. Алгебра», 1964, М., 1966, 123 – 160.
- [6] Глушков, В. М., «Успехи матем. наук», 12 (1957), 2, 3 – 41.
- [7] Граев, М. И., «Успехи матем. наук», 5 (1950), 2, 3 – 56.
- [8] Платонов, В. П., «Сибирский матем. ж.», 7 (1966), 4, 854 – 877.
- [9] Платонов, В. П., «Матем. сб.», 72 (1967), 1, 38 – 58.

О. В. Мельников 撰

【补注】也有双边一致性结构, 左结构与右结构的联合, 这在操作上多少有些不便, 然而却有其优越性, 每一个拓扑群都容有一个完全化 ([A10]).

在 L. E. J. Brouwer 对于维数  $\leq 2$  的局部 Euclid 群, J. von Neumann 和 L. S. Pontryagin 对于交换局部 Euclid 群所作的部分早期解答之后, Hilbert 第五问题被 A. Gleason, D. Montgomery 和 L. Zippin 完全解决 ([A1], [A2]). 详细的阐述见 [6], [A3], [A4]. 关于每一个局部紧子群都有一个开子群是子群的射影极限这一结果属于 Yamabe ([A5]). Hilbert 的原始问题是: “连续变换群的 Lie 概念如何推广才能使我们的研究在没有函数可微性的假设下也可以进行” (“inwieweit der Liesche Begriff der Kontinuierlichen Transformationsgruppe auch ohne Annahme der Differenzierbarkeit der Funktionen unserer Untersuchung zugänglich ist”). 于是就导致提出这样的问题 ([A6]): 如果  $G$  是一个局部紧群, 它作为一个拓扑变换群有效地作用在一个流形  $M$  上, 试问  $G$  是不是 Lie 群? 这方面的一个正面结果是, 当  $M$  是可微分流形而  $G$  通过可微分变换作用于其上时 ( $x \mapsto gx$  是可微分的) ([A7]). 另一个正面结果是说, 如果  $G$  是一个挠群, 有效地作用在一个流形上, 则  $G$  是有限群 ([A8]).

#### 参考文献

- [A1] Gleason, A., Groups without small subgroups, *Ann. of Math.*, 56 (1952), 193 – 212.
- [A2] Montgomery, D. and Zippin L., Small groups of finite dimensional groups, *Ann. of Math.*, 56 (1952), 213 – 241.
- [A3] Kaplansky, J., *Lie algebras and locally compact groups*, Chicago Univ. Press, 1971.
- [A4] Montgomery, D. and Zippin, L., *Topological transformation groups*, Interscience, 1955.

- [A5] Yamabe, H., On the conjecture of Iwasawa and Gleason, *Ann. of Math.*, 58 (1953), 48 – 54.
- [A6] Young, C. T., “Hilbert's fifth problem and related problems on transformation groups”, in F. E. Browder (ed.): *Mathematical Developments Arising from Hilbert's Problem*, Amer. Math. Soc., 1976, 142 – 146.
- [A7] Montgomery, D., Topological groups of differentiable transformations, *Ann. of Math.*, 46 (1945), 382 – 387.
- [A8] Newman, M. H. A., A theorem of periodic transformations of spaces, *Quart. J. Math.*, 2 (1931), 1 – 8.
- [A9] Skijarenko, E. G., “Zum fünften Hilbertschen Probleme” in P. S. Aleksandrov (ed.), *Die Hilbertschen Probleme*, Geest & Portig, 1979, 126 – 144 (译自俄文).
- [A10] Раиков, Д. А., «Акад. наук СССР», 10 (1946), 513 – 528.
- [A11] Comfort, W. W., “Topological groups” in K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.), *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, 1984, 1433 – 1463.
- [A12] Hofmann, K. H. and Morris, S. A., Free compact groups I, *Topology Appl.*, 23 (1986), 43 – 49.
- [A13] Hofmann, K. H. and Morris, S. A., Free compact groups II, *Topology Appl.*, 28 (1988), 215 – 231.

郝钢新 译

#### 拓扑不变量 [topological invariant; топологический инвариант]

拓扑空间 (topological space) 的一些性质 (即在同胚下的不变量).

若集合  $X$  已经配置了某种结构, 由它产生唯一的拓扑, 使  $X$  成为拓扑空间, 则集合  $X$  的拓扑不变量, 是由  $X$  上给定结构诱导出的这个拓扑空间的性质. 例如, 对于集合  $X$  上由给定度量结构或微分几何结构诱导出的拓扑所成拓扑空间, 涉及它的相应性质时, 就会谈到度量空间的连通性 (见连通空间 (connected space)), 或给定微分流形的单连通性.

在拓扑学发展之初, 主要注意力放在所谓数值不变量 (numerical invariants) 上 (不包括最简单的拓扑不变量如连通性, 紧性等). 这些不变量最初主要是对于多面体得出的. 其中最重要的是维数 (dimension) 和 Betti 数 (Betti number). 对于闭曲面, 较早研究过曲面的亏格 (genus of a surface). 现在用第一 Betti 数这个词来表示它. 以后将注意力主要放在本身是群的拓扑不变量上, 再往后仍然是别的代数结构, 例如, Betti 群或秩为 Betti 数的不同维数的同调群 (homology group); 基本群 (fundamental group), 它在

任意维数上的推广是同伦群 (homotopy group); 还有不仅对于多面体, 也对极其广泛的拓扑空间类定义的流形的交环, 它很快又被在应用上更一般、更方便的 Alexander - Колмогоров 上同调环所代替.

在多面体情形下, 重要的拓扑不变量原则上是用将作为多面体三角剖分 (triangulation) 的单纯复形的性质来定义的. 这种定义需要不变性定理 (invariance theorem) 的一个证明, 定理断言, 相应的性质不会因给定多面体由一种三角剖分换成同一多面体或同胚多面体的另一种三角剖分而发生变化.

П. С. Александров 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Jänich, K., Topology, Springer, 1984 (译自德文).
- [A2] Alexandroff, P. [P. S. Aleksandrov] and Hopf, H., Topologie, Chelsea, reprint, 1972.
- [A3] Juhász, I., Cardinal functions in topology, Math. Centre Amsterdam, 1971. 罗嵩龄 译

拓扑模 [topological module; топологический модуль], 左拓扑模 (left topological module)

一个 Abel 拓扑群 (topological group)  $A$ , 它是拓扑环 (topological ring)  $R$  上的模 (module), 其乘法映射  $R \times A \rightarrow A$ , 将  $(r, a)$  映射为  $ra$ , 要求是连续的. 右拓扑模 (right topological module) 被类似地定义. 拓扑模  $A$  的每个子模  $B$  是一个拓扑模. 如果模  $A$  是分离的, 并且  $B$  在  $A$  中闭, 则  $A/B$  是一个分离模. 拓扑模的直积是拓扑模. 模  $A$  作为 Abel 拓扑群的完全化  $\hat{A}$  可以在环  $R$  的完全化  $\hat{R}$  上被自然地赋予拓扑模的结构.

设  $G$  是一个拓扑群, 拓扑  $G$  模 (topological  $G$ -module) 是一个 Abel 拓扑群  $A$ , 并且是一个  $G$  模, 乘法映射  $G \times A \rightarrow A$  要求是连续的.

参考文献

- [1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison - Wesley, 1966 (译自法文).
- [2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison - Wesley, 1972 (译自法文).

Л. В. Кузьмин 撰 蔡传仁 译

拓扑积 [topological product; топологическое произведение], Тихонов 积 (Tikhonov product), 拓扑空间族  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha): \alpha \in A\}$  的

拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$ , 其中  $X$  是集合  $X_\alpha (\alpha \in A)$  的 Descartes 积 (Cartesian product) (即完全直积),  $\mathcal{T}$  是  $X$  上使所有自然射影映射  $\pi_\alpha: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$  连续的最弱 (即最小) 拓扑 (见拓扑结构 (拓扑) (topological structure (topology))). 此外, 拓扑  $\mathcal{T}$

称为积拓扑 (product topology), 而 Тихонов 积  $(X, \mathcal{T})$  也称为空间族  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha): \alpha \in A\}$  的拓扑积.

拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$  的标准基是形如  $\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$  的所有集合构成的族, 其中  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  是指标集  $A$  的任意有限多个元素,  $U_{\alpha_i}$  是拓扑  $\mathcal{T}_{\alpha_i}$  的任意一个元素,  $i = 1, \dots, n$ .

特别地, 若两个空间  $X, Y$  组成的族  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha): \alpha \in A\}$ , 那么积  $Z = X \times Y$  的拓扑基由形如  $U \times V$  的集合组成, 其中  $U$  是  $X$  中任意一个开集,  $V$  是  $Y$  中任意一个开集. 任意有限个有序的拓扑空间之积的拓扑基可以类似表示. 拓扑积的例子有: 两条直线的积是平面;  $n$  条直线的积是  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$ ; 两个圆的积是环面.

最早是就可度量化因子空间的情形定义无穷多个拓扑空间的拓扑积. 与之相应地, 试图用通常 (可数) 序列的收敛性来描述积拓扑. 当因子空间族不可数时, 已经证明了用此方法不可能得出上述结果, 因为在不可数个非单点度量空间的拓扑积中, 闭包运算既不能用序列收敛的语言描述, 也不能简化为可数集的闭包.

无穷个拓扑空间的拓扑积的定义由 А. Н. Тихонов (1930) 给出. 他还证明了紧 Hausdorff 空间的拓扑积仍为紧 Hausdorff 空间 (Тихонов 定理 (Tikhonov theorem)).

拓扑积的构造法, 是从已经存在的对象组成新拓扑对象的一种主要手段. 利用拓扑积可以构造出一般拓扑学的若干基本的标准对象, 特别是定义作一族  $\tau$  (基数) 个实直线上区间的拓扑积的 Тихонов 立方体 (Tikhonov cube)  $I^\tau$ . 由 Тихонов 定理, 所有 Тихонов 立方体都是紧的. Тихонов 证明了任何完全正则  $T_1$  空间都同胚于立方体  $I^\tau$  的一个子空间.

除立方体  $I^\tau$  之外, 空间  $D^\tau$  与  $F^\tau$  在拓扑学中有重要作用, 它们分别是  $\tau$  个空间  $D$  (相应地,  $F$ ) 之积,  $D$  由两个孤立点 (简单二角形) 构成,  $F$  由具有一个孤立点的二角形 (连通二角形) 构成. 任何紧度量空间都是 Cantor 完满集 (即与可数个简单二角形  $D$  的积同胚的空间) 的连续象; 任何零维空间 (即以开闭集为基的任何  $T_0$  空间) 同胚于 Cantor 不连续统  $D^\tau$  的一个子集; 任何  $T_0$  空间同胚于空间  $F^\tau$  的一个子集.

关于拓扑积运算的效力及作用与拓扑性质在拓扑积运算下的性态有关的问题, 是一般拓扑学的中心内容. Hausdorff 空间类, 正则空间类及完全正则空间类, 在拓扑积运算下是稳定的. 但是, 正规空间与区间之积未必是正规空间. 甚至在有限个因子的情形, 一些重要的拓扑性质, 如 Lindelöf 性, 仿紧性, 在拓扑积运算下也是不稳定的.



下述定理在一般拓扑学及其应用(特别是集合论的模型构造)中有重要作用:任意多个可分拓扑空间拓扑积的 Suslin 数是可数的.特别地,任意多个 Тихонов 立方体的 Suslin 数是可数的.

从整个拓扑积中分出某些子空间时,取拓扑积运算导致  $\Sigma$  积和  $\sigma$  积这两种很有用处的运算.取拓扑积  $\mathcal{C}_\alpha$  的框积的运算,导致了集合  $X_\alpha$  的 Discartes 积上的完全不同的拓扑.

#### 参考文献

- [1] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).
- [2] Bourbaki, N., Elements of mathematics, General topology, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).
- [3] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

А. В. Архангельский, В. В. Федорчук 撰

【补注】框积的基由形如  $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$  的集合组成,对任何  $\alpha$ ,  $U_\alpha$  在  $X_\alpha$  中开.通常积拓扑,要求对除去有限个之外的所有  $\alpha$ ,  $U_\alpha = X_\alpha$ .框积比通常积更难操作.

关于拓扑积与  $\Sigma$  积(相应地,框积)的主要问题及最近的结论,在[A1]的第18章(相应地,第4章)有综述.至于框积亦见[A2].

在西方,连通二角形  $F$  常称为 Sierpiński 空间 (Sierpiński space),常用  $2$  记之;这种想法来源于它是具有由序自然导出的  $T_0$  拓扑的有序集  $\{0, 1\}$ ,下集是闭集.

#### 参考文献

- [A1] Kunen, K. and Vaughan, J. E. (eds.), Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, 1984.
- [A2] Douwen, E. K. van, Covering and separation properties of box products, in G. M. Reed (ed.), Surveys in General Topology, Acad. Press, 1980, 55 - 129.
- [A3] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文). 罗嵩龄 译

#### 拓扑环 [topological ring; топологическое кольцо]

一个环  $R$  (ring), 它是一个拓扑空间 (topological space), 使得映射

$$(x, y) \rightarrow x - y, (x, y) \rightarrow xy$$

都是连续的.拓扑环  $R$  称为分离的 (separated), 如果它作为拓扑空间是分离的 (见分离公理 (separation axiom)). 这时  $R$  是 Hausdorff 空间 (Hausdorff space). 拓扑环  $R$  的任何子环  $M$ , 以及  $R$  对一理想  $J$  的商环  $R/J$  都是拓扑环. 如果  $R$  是分离的, 理想  $J$  是闭的, 则

$R/J$  是分离拓扑环. 子环  $M$  在  $R$  中的闭包  $\bar{M}$  也是拓扑环, 拓扑环的直积以自然方式成为拓扑环.

拓扑环的同态 (homomorphism) 是一个环同态, 同时也是一连续映射. 设  $f: R_1 \rightarrow R_2$  是一这样的同态, 并设  $f$  为满的开映射, 则  $R_2$  作为拓扑环同构于  $R_1 / \text{Ker } f$ . Banach 代数是拓扑环的一个例子. 以某些理想集合作为零的基本邻域系可以定义一类重要的拓扑环. 例如, 对交换环  $R$  的任一理想  $m$ , 可以赋予  $m$  进拓扑 ( $m$ -adic topology), 其中集合  $m^n$ ,  $n$  是全体自然数, 构成了零的一组基本邻域组. 这个拓扑是分离的, 如果条件

$$\bigcap_n m^n = 0$$

成立.

对一拓扑环  $R$ , 我们可定义它的完全化  $\hat{R}$ , 它是一完全拓扑环. 可分拓扑环  $R$  可嵌入  $\hat{R}$  成为其中一个处处稠密的子集,  $\hat{R}$  的加法群与  $R$  中加法群的完全化相等, 是一个 Abel 拓扑群.

#### 参考文献

- [1] Bourbaki, N., Element of mathematics, General topology, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).
- [2] Bourbaki, N., Element of mathematics, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).
- [3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд. М. 1973 (英译本: Pontryagin, L. S., Topological groups, Princeton Univ. Press, 1958).
- [4] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1 - 2, Springer, 1967 - 1971 (译自德文).

Л. В. Кузьмин 撰 冯绪宁 译

#### 拓扑半群 [topological semi-group; топологическая полугруппа]

一个集合配备了一个半群代数结构和一个拓扑 Hausdorff 空间 (Hausdorff space) 结构, 使得半群运算在所给的拓扑内是连续的. 任何半群 (semi-group) 在离散拓扑 (discrete topology) 内都是拓扑半群. 存在只能容许离散拓扑的半群. 任意 Hausdorff 空间都可以做成一个拓扑半群, 例如, 给它一个左奇异乘法或零乘法.

出现了拓扑半群的各种独立的分支: 紧拓扑半群的一般理论 (见紧性 (compactness)); 拓扑半群的同伦性质; 具体的拓扑空间上半群的研究; 拓扑半群上的调和与分析; 以及拓扑空间的连续变换的半群. 此外, 拓扑半群的研究已开始联系着对一切闭子半群的考虑.

拓扑半群中自然的一类就是局部紧半群的类, 其中包括紧的和离散的半群. 然而, 许多对于紧和离散半群成立的性质对于任意局部紧半群不再成立. 因此

常常添上一些代数或拓扑性质的附加限制. 这种类型的一个重要条件就是弱一致性: 一个局部紧半群  $S$  称为弱一致的 (weakly uniform), 如果对于任意  $a, b \in S$  (元素之中的一个可以是空符号) 和任意子集  $Y, W \subseteq S$ , 这里  $W$  是一个具有紧闭包  $\overline{W}$  的开子集且  $aYb \subseteq W$  或  $aYb \subseteq S \setminus \overline{W}$ , 存在  $a$  和  $b$  的邻域  $V(a)$  和  $V(b)$ , 使得  $V(a)YV(b) \subseteq W$ , 或相应地,  $V(a)YV(b) \subseteq S \setminus \overline{W}$ . 弱一致半群类包括所有紧半群, 离散半群和局部紧群. 如果一个局部紧半群  $S$  是一个群, 则取逆的映射是连续的, 即  $S$  是一个拓扑群 (topological group). 在一个局部紧逆半群内, 这个映射 (见正则元 (regular element)) 是连续的, 当且仅当  $S$  是弱一致的. 在弱一致半群内极大子群是闭的. 这个性质在任意局部紧半群内不一定成立.

任意局部紧半群  $S$  包含一个闭核  $M(S)$  (见半群的核 (kernel of a semi-group)), 它是一个完全单半群. 特别地,  $S$  有幂等元素. 紧的, 完全单 (完全 0 单) 半群的结构已由一个与关于离散完全单 (完全 0 单) 半群的 Rees 定理相类似的定理作了描述 (见 Rees 矩阵型半群 (Rees semi-group of matrix type)). 与 Rees 定理相类似的定理对于弱一致半群成立, 然而一般来说, 对于局部紧半群不成立 ([10]).

半群  $S$  称为一个脉络 (thread), 如果  $S$  可以如此地线性序化, 使得  $S$  在这个序 (区间) 拓扑之下成为一个连通拓扑半群. 一个具有零元  $0$  和单位元  $e$  的半群  $S$  称为一个标准脉络 (standard thread) 或  $I$  半群 ( $I$ -semi-group), 如果  $S$  是一个脉络并且  $0$  和  $e$  是  $S$  的最小和最大元素. 对于标准脉络已有完全描述 ([2]). 有单位元  $e$  的紧半群  $S$  称为不可约的 (irreducible), 如果它是连通的, 并且不含一个真连通闭子半群  $T$ , 使得  $e \in T$ , 且  $T \cap M(S) \neq \emptyset$ . 有单位元的连通紧半群包含不可约半群作为闭子半群. 不可约半群可以如下地描述: 一个不可约半群  $S$  是交换的, Green 等价关系  $\mathcal{R}$  (见 Green 等价关系 (Green equivalence relations)) 是  $S$  上一个闭合同关系, 且  $S/\mathcal{R}$  是一个标准脉络.

一个拓扑半群的“极小块”是它的单生子半群的闭包, 称为单生半群 (monothetic semi-groups). 对于一个紧单生半群  $S$  来说, 核  $M(S)$  是一个紧单生群. 紧单生半群已被完全描述 ([9]). 弱一致单生半群, 或者是紧的, 或者是离散的. 有一个局部紧单生半群的例子 ([13]), 它既不是离散的, 也不是紧的.

有单位元的交换拓扑半群的特征标 (character) 是到模  $\leq 1$  的复数乘法半群内的一个非零连续同态. 一切特征标的集合  $S^*$  对于逐点相乘的乘法 (见半群的特征标 (character of a semi-group) 和紧开拓扑 (compact-open topology) 来说, 作成有一个单位元的

交换拓扑半群. 可以认为, (Понтрягин) 对偶定理 (duality theorem) 对于一个有单位元的交换拓扑半群  $S$  成立, 如果  $S$  到  $S^*$  的特征标半群的典范同态是拓扑同构“映上”的. 对偶定理对于一个有单位元的交换紧半群  $S$  成立, 当且仅当  $S$  是一个逆半群并且它的幂等元所成的子半群形成一个全不连通空间 (totally-disconnected space). 对偶定理在一个交换局部紧半群上成立的, 必要且充分条件已经被找到 [12]. 必要条件之一是这个半群是弱一致的.

交换紧半群的一个重要的子类就是紧半格 (见幂等元半群 (idempotents, semi-group of)). 一个紧半格在同胚的范围内容有一个唯一的拓扑. 对拓扑半群的某些类型的描述导致度量半群. 在一个拓扑半群  $S$  上一个度量  $d$  称为不变的 (invariant), 如果对一切  $a, x, y \in S$  来说, 都有  $d(ax, ay) \leq d(x, y)$  和  $d(xa, ya) \leq d(x, y)$ . 一个拓扑半群  $S$  称为度量的 (metric), 如果在  $S$  上有一个不变度量, 它诱导出  $S$  上的拓扑. 每一个紧半群都是紧度量半群的一个射影极限. 每一个完全不连通紧半群都是有限半群的一个射影极限.

拓扑半群的某些一般化已被考虑: 具有一个非 Hausdorff 空间的半群和半拓扑半群 (semi-topological semi-group), 这就是一个拓扑空间在其上定义了一个结合的二元运算, 使得一切左和右内平移都是连续映射.

#### 参考文献

- [1] Paalman-de Miranda, A. B., Topological semigroups, Math. Centre, Amsterdam, 1964.
- [2] Hofmann, K. and Mostert, P., Elements of compact semi-groups, Merrill, 1966.
- [3] Berglund, J. and Hofmann, K., Compact semitopological semigroups and weakly almost periodic functions, Springer, 1967.
- [4] Hofmann, K., Mislove, M. and Stralka, A., The Pontryagin duality of compact 0-dimensional semilattices and its application, Springer, 1974.
- [5] Hofmann, K. and Stralka, A., The algebraic theory of compact Lawson semilattices, Applications of Galois connections to compact semilattices, *Diss. Math.*, 137 (1976).
- [6] Hofmann, K., Topological semigroups; history, theory, applications, *Jahrsber. Deutsch. Math.-Verein.*, 78 (1976), 9 - 59.
- [7] Wallace, A. D., The structure of topological semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 61 (1955), 95 - 112.
- [8] Williamson, J. H., Harmonic analysis on semigroups, *J. London Math. Soc.*, 42 (1967), 1 - 41.
- [9] Hewitt, E., Compact monothetic semigroups, *Duke Math. J.*, 23 (1956), 447 - 457.
- [10] Shneperman, L. B., The Rees theorem for weakly



uniform semigroups, *Semigroup Forum*, **23** (1981), 261 – 273.

[11] Day, D., Expository lectures on topological semigroups, in M. A. Arbib (ed): *Algebraic theory of machines, Languages and Semigroups*, Acad. Press, 1968, 269 – 296.

[12] Шнеперман, Л. Б., «Матем. сб.», **77** (1968), 4, 508 – 532.

[13] Зеленюк, Е. Г., «Матем. заметки», **44** (1988), 3, 402 – 403.

Б. П. Танана, Л. Н. Шеврин 撰

【补注】自 1970 年以来, 拓扑半群的研究沿着几个主要方向: 紧半拓扑半群和右 (相应地, 左) 拓扑半群, 紧半格和连续格 (continuous lattice) 以及半群的 Lie 理论.

一个右拓扑半群 (right-topological semi-group) 是一个半群, 在其中所有右平移  $x \mapsto xs$  都是连续的. (有的作者使用相反的记法.) 紧半拓扑半群和紧右拓扑半群, 如同拓扑半群一样, 包含幂等元且具有完全单核 (极小双边理想), 然而, 与紧拓扑半群相反, 它们不一定是闭的. 在一个紧拓扑半群内核的存在已经应用到拓扑群和拓扑半群上概率论中 (见 [A9], [A10]). 紧半拓扑半群是作为在强算子拓扑内线性算子半群而出现的, 并且在一个拓扑群或拓扑半群上弱殆周期函数的理论中起决定性作用 (见 [3], [A1], [2] 和群上殆周期函数 (almost periodic function on a group)), 它们是作为 Lie 群的紧化而产生的 (见 [A9], [A11] 和 Lie 群 (Lie group)). 调和分析和表示论也要求半拓扑半群 (见 [A3], [A4]). 右拓扑半群出现在拓扑动力学 (topological dynamics) 中 (见 [A5], [A9], [A11]), 并且因为自然数加法半群的 Stone-Čech 紧化  $\beta\mathbb{N}$  是一个右拓扑半群而出现在数论中 (见 Ramsey 定理 (Ramsey theorem)). 在  $\beta\mathbb{N}$  中幂等元的存在性已应用于算术级数的 van der Waerden 定理 (van der Waerden theorem) 的一个新证明中 (见 [A9]).

在 [5] 中看到, 一个紧半格在其中每一个元素有一个子半格的邻域基的概念与连续格 (continuous lattice) 的概念一致. 因此, 紧半格的理论与连续格及其一般化的理论是有联系的.

半群的 Lie 理论 (Lie theory of semi-group) 处理 Lie 群的子半群和可以嵌入一个 Lie 群的拓扑半群的问题, 至少局部地关于它们的单位元处是如此. 令  $G$  是一个具有 Lie 代数  $\mathfrak{g} = L(G)$  的 Lie 群,  $S$  是  $G$  的一个子半群, 则对一切  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\exp tX \in \bar{S} (t \geq 0)$  的集合  $L(S)$  是一个凸锥  $W$ , 满足条件  $e^{\text{ad} X} W = W$  对一切  $X \in W \cap -W$ , 这里  $\text{ad} X(Y) = [X, Y]$ . 这样的锥称为 Lie 楔 (Lie wedge). 如果  $W$  生成  $\mathfrak{g}$  作为

Lie 代数, 则由  $\exp W$  在  $\bar{S}$  内代数地生成的这个半群包含关于  $G$  的内点. 如果  $S$  在一切内自同构之下不变, 则对于一切  $X \in \mathfrak{g}$  来说,  $e^{\text{ad} X} W = W$ . 这样的锥称为不变的 (invariant). 在一个 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  中, 不变点锥  $W$  连同内点存在, 仅当  $\mathfrak{g}$  包含一个紧嵌入的 Cartan 子代数 (Cartan subalgebra)  $\mathfrak{h}$  时; 在这一情形下, 借助于交  $W \cap \mathfrak{h}$ , 可以对它们进行分类 (见 [A9]). S. Lie 的基本定理在半群的 Lie 理论中有类比 (见 [A9], [A11]). 半群的 Lie 理论被应用于这样的领域, 如广义相对论中的时序几何 (见 [A7], 流形上和 Lie 群上非线性控制论 (见 [A9]) 和表示论 (见 [A9]).

#### 参考文献

- [A1] Berglund, J. F., Junghenn, H. D. and Milnes, P., Compact right topological semigroups and generalizations of almost periodicity, *Lecture notes in math.*, 663, Springer, 1978.
- [A2] Berglund, J. F., Junghenn, H. D. and Milnes, P., *Analysis on semigroups*, Wiley, 1989.
- [A3] Dunkl, C. D. and Ramirez, D., Representations of commutative semitopological semigroups, *Lecture notes in math.*, 435, Springer, 1975.
- [A4] Dzinotyiweyl, H. A. M., *The analogue of the group algebra for topological semigroups*, Pitman, 1984.
- [A5] Ellis, R., *Lectures in topological dynamics*, Benjamin, 1969.
- [A6] Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M. and Scott, D. S., *A compendium of continuous lattices*, Springer, 1980.
- [A7] Hilgert, J. and Hofmann, K. H., The causal structure of homogeneous manifolds, *Math. Scand.*, **67** (1990), 119 – 144.
- [A8] Hilgert, J., Hofmann, K. H. and Lawson, J. D., *Lie groups, convex cones, and topological theory of semigroups*, Oxford Univ. Press, 1989.
- [A9] Hofmann, K. H., Lawson, J. D. and Pym, J. S. (eds.), *The analytical and topological theory of semigroups*, de Gruyter, 1990.
- [A10] Mukherjea, A. and Tserpes, N., Measures on topological semigroups, *Lecture notes in Math.*, 547, Springer, 1976.
- [A11] Ruppert, W. A. F., Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory, *Lecture notes in Math.*, 1079, Springer, 1984.

郝炳新 译

#### 拓扑空间 [topological space; топологическое пространство]

具有两个要素的总体: 由称为给定空间的点 (point) 的某一类元素构成的集合  $X$ , 以及  $X$  上的拓扑结构 (拓扑) (topological structure (topology)); 开拓



扑还是闭拓扑这一点并不重要(把由给定拓扑构成的集合换成它的补集,其中一种拓扑就变成另一种).除非另有说明,假设拓扑  $\mathcal{G}$  是开的.逻辑上,定义给定集合  $X$  上的拓扑的最简单的方法是直接说  $X$  的诸子集构成拓扑.不过,常用的比较简单的方法并不是指由所有集合构成给定的拓扑,而是指的其中一部分集合(即指定给定拓扑的基(base)).运用基,该拓扑的其余所有元素都可以作为属于基的集合的并集(开拓扑情形)或交集(闭拓扑情形)而得到.例如,实直线的通常拓扑,以所有开区间(其实,只要具有有理端点的开区间就足够了)的集合作为其开拓扑的基.其余的开集是这些区间的并集.

提到开拓扑或闭拓扑的基时,都是指的给定拓扑空间的开基或闭基.开基比闭基更常用,因此,如果简单地讲拓扑空间的基,就是指开基.最小的(非平凡情形,无限的)基数是给定拓扑空间的基的势,称为它的权(见拓扑空间的权(weight of a topological space)).除了所有点的集合的势之外,权是最重要的空间的基数不变量(cardinal invariant of the space)(见基数特征(cardinal characteristic)).具有可数基的空间特别重要,例如实直线.选用所谓有理(开)球(即球心坐标和半径都是有理数的球),就得到了  $n$  维 Euclid 空间的可数基.拓扑通常是用在集合上配备某个另外的结构这种(自然的)标准方式定义的.比如说度量空间的自然拓扑或全序集的自然(区间)拓扑.前者以给定度量空间的所有开球的集合为基,后者以给定全序集的所有开区间为基.

拓扑空间称为可度量化(metrizable)(见可度量化空间(metrizable space)),如果在它的诱导给定拓扑的底集上存在一个度量.可度量化空间成为一类最重要的拓扑空间,数十年来,一般拓扑学的核心问题中,就有一般的和特殊的度量化问题,即寻找拓扑空间(或某个特殊类型的拓扑空间)可度量化的必要充分条件.这些条件是一般或特殊的度量化定理的内容.

给定拓扑空间  $(X, \mathcal{G})$  的所有点的集合  $X$  的子集  $X_0$  可以自然地构成拓扑空间  $((X, \mathcal{G})$  的子空间),其拓扑由所有形为  $X_0 \cap \Gamma$  的集合组成,其中  $\Gamma$  是  $\mathcal{G}$  的任一元素.因为拓扑是  $X$  的子集的集合,所以在给定集合  $X$  上的不同拓扑之间存在一自然的由包含关系确定的(偏)序,这就是说,如果  $\mathcal{G}_1$  是集合  $\mathcal{G}_2$  的子集,即如果拓扑  $\mathcal{G}_1$  中的每个开集在拓扑  $\mathcal{G}_2$  中都是开的,则拓扑  $\mathcal{G}_2$  大于(或等于)拓扑  $\mathcal{G}_1$ .如果从内容看,在给定集合  $X$  上所用的拓扑是清楚的,则简单地用  $X$  表示拓扑空间  $(X, \mathcal{G})$ .从拓扑的概念可以推导出其余所有的基本拓扑概念.首先,闭集定义为开集的补集.还有,包含给定空间  $X$  中一

点  $x$  的任一开集称为  $x$  的邻域(neighbourhood).根据邻域的概念可以把集合  $M \subset X$  的闭包点(closure point)或邻近点(proximate point)定义为这样的点,其每个邻域与  $M$  有非空交集.此定义又蕴含:集合  $M$  的每一点本身就是  $M$  的邻近点. $M$  的所有邻近点的集合称为  $M$  的闭包(closure),记为  $[M]$ (见集合的闭包(closure of a set)).任一集合  $M$  到其闭包的过渡称为给定拓扑空间上的闭包运算(closure operation).此运算的性质是:1)  $M \subset [M]$ , 且  $M = [M]$  的充分必要条件是  $M$  为闭集,或者  $M$  的补集为开集;2)  $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$ ;3)  $[[M]] = [M]$ .任一集合  $M$  的闭包是包含  $M$  的所有闭集的交集;换言之,  $[M]$  是包含  $M$  的最小闭集.

闭包运算及其基本性质 1), 2), 3) 已由在给定集合  $X$  上拓扑的基本概念推出.换一种提法,可以把闭包的这些性质视为基本的拓扑概念.即假定:在给定的抽象集合  $X$  中,对于每个子集  $M$ ,指定一个称为  $M$  的闭包的子集  $[M]$ ,使其满足性质 1), 2), 3) (称为闭包公理(axioms of closure)或 Kuratowski 公理(Kuratowski axioms))和 4)  $\emptyset = [\emptyset]$ .按照这种方式,闭集定义为与其闭包重合的集合,开集定义为闭集的补集.于是,我们准确地得到了最初意义下的拓扑;而且,由此导致的闭包运算与原先给出的运算一致.这个方法是 K. Kuratowski (1922) 为了建立拓扑空间的概念而选用的.1925 年 П. С. Александров 引进了开拓扑结构.两种方法都导致相同的拓扑空间类,其使用非常广泛.

与拓扑空间的概念紧密联系的是一个空间映入另一个空间的连续映射(continuous mapping)的概念.把拓扑空间  $X$  映入拓扑空间  $Y$  的映射  $f: X \rightarrow Y$  是在点  $x \in X$  连续的(continuous at a point  $x \in X$ ),如果对于点  $y = f(x) \in Y$  的任一邻域  $O_y$ ,在  $X$  中存在  $x$  的邻域  $O_x$ ,使得  $f(O_x) \subset O_y$  (Cauchy 条件(Cauchy condition)).不改变定义的内容,可以使邻域  $O_y$  和  $O_x$  分别属于空间  $Y$  和  $X$  的任意的开基.特别地,对于度量空间,连续性的定义可以换为通常的、在数学分析教程中熟知的定义.如果  $f: X \rightarrow Y$  在每一点  $x \in X$  连续,则称  $f$  为把  $X$  映入  $Y$  的连续映射(continuous mapping).下面的每个条件对于  $f: X \rightarrow Y$  的连续性都是必要充分的. a) 若  $x$  是集合  $M \subset X$  的邻近点,则  $f(x)$  是  $Y$  中集合  $f(M)$  的邻近点. b)  $Y$  中任一开集  $\Gamma$  的完全原象  $f^{-1}(\Gamma)$  在  $X$  中是开的.对于闭集有类似结论.

给定一个把拓扑空间  $X$  映入拓扑空间  $Y$  的(连续)映射  $f$  和  $X$  的一个子空间  $X_0$ ,则  $f$  把  $X_0$  映入  $Y$ ,并且是连续的(称为  $f: X \rightarrow Y$  在子空间  $X_0$  的限制(restriction)).



一个重要类型的连续映射是所谓商映射 (quotient mapping), 由下列条件刻画. 集合  $B \subset Y$  在  $Y$  中是开 (闭) 的, 当且仅当  $f^{-1}(B)$  在  $X$  中具有相同性质. 如果  $X$  到  $Y$  的连续映射  $f$  是一一映射, 则定义逆映射  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , 但  $f^{-1}$  不必是连续的. 如果  $f^{-1}$  是连续的, 则  $f$  和  $f^{-1}$  都是  $X$  和  $Y$  的拓扑之间的一一映射. 两个一一映射  $f$  和  $f^{-1}$  都称为拓扑映射 (topological mapping) 或同胚 (homeomorphism). 可以同胚地互相映射的两个空间  $X$  和  $Y$  称为同胚的 (homeomorphic) 或拓扑等价的 (topologically equivalent).

连续映射  $f: X \rightarrow Y$  称为不可约的 (irreducible), 如果除  $X$  外, 没有被映射到整个  $Y$  上的闭集  $M$ .

拓扑空间的具体研究, 首先是从一般的拓扑空间类中分离出若干子类, 这些子类是用定义空间拓扑结构的某些附加条件或公理来刻画的. 这些附加的公理可以是多种类型的. 首先, 有一组公理称为分离公理 (separation axioms). 第一个分离公理 (separation axiom) 是 Hausdorff 公理 (Hausdorff axiom), 它要求空间的任意两个不同的点都能用邻域分离, 即这两点分别含于两个不相交的开集 (两个或更多的集合是不相交的, 如果它们没有两个集合具有公共点). Hausdorff 分离性公理也称为  $T_2$  公理 ( $T_2$ -axiom), 满足它的拓扑空间称为 Hausdorff 空间 (Hausdorff space) 或  $T_2$  空间 ( $T_2$ -space). 这些空间是 F. Hausdorff 在 1914 年定义的, 他首次发现了一类拓扑空间的充分广泛同时又充分丰富的诸多性质, 这些性质满足了当时数学上的迫切需要. 一般拓扑学后来的发展正是源于 Hausdorff 空间.  $T_2$  公理的削弱是  $T_1$  公理 ( $T_1$ -axiom): 拓扑空间两点中每一点都有一个不包含另一点的邻域. 此要求等价于要求“任一有限子集都是闭集”. 满足此要求的空间称为  $T_1$  空间 ( $T_1$ -space). 更宽的拓扑空间类是  $T_0$  空间 ( $T_0$ -space) 类, 即满足  $T_0$  公理 ( $T_0$ -axiom) (Kolmogorov 公理 (Kolmogorov axiom)) 的空间类: 给定两个不同的点, 则至少有一点具有不包含另一点的邻域.  $T_0$  空间可以由有限个点甚至两点组成. 如果一个点是闭且非开的集合, 反过来, 另一点就是开且非闭的集合 (连通二角形 (connected digon)).

$T_3$  公理 ( $T_3$ -axiom) 要求空间的任意点和不含此点的任意闭集可以被邻域分离, 即分别含于两个不相交的开集. 满足  $T_3$  公理的空间称为  $T_3$  空间 ( $T_3$ -space).  $T_3$  空间不必满足  $T_1$  公理. (例如: 连通二角形). 满足  $T_1$  公理的  $T_3$  空间称为正则的 (regular) (见正则空间 (regular space)); 它们是 Hausdorff 空间. 拓扑空间称为  $T_4$  空间 ( $T_4$ -space), 如果它的任意二个不相交的闭集都有不相交的邻域.  $T_4$  空间

同时又是  $T_1$  空间, 则称为正规的 (normal) (见正规空间 (normal space)); 它们是正则 Hausdorff 空间. 满足  $T_i (i = 0, 1, 2, 3)$  公理之一的空间的任意子空间也满足该  $T_i$  公理, 即  $T_i$  公理被给定空间的所有子空间继承.  $T_4$  公理不具备这个性质: 存在正规空间  $X$ , 它的子空间 (甚至开子空间) 不全是正规的. 但是, 如果  $X_0$  是正规空间  $X$  的闭集, 则子空间  $X_0$  是正规的.

到目前为止, 点和集合的分离性是按照存在不相交邻域的意义来理解的. 然而, 在现代拓扑学中所谓函数分离性也很重要, 那是 П. С. Урысон 在 1924 年最早引入的. 拓扑空间中两个集合  $A$  和  $B$  称为函数可分离的 (functionally separable), 如果存在在整个空间  $X$  上连续、有界的实值函数  $f$ , 它在  $A$  的所有点取值 0 而在  $B$  的所有点取值 1. 在正规空间中, 任意两个不相交的闭集是可函数分离的 (Урысон 引理 (Urysohn lemma)). 反之, 任意两个集合的函数分离性蕴含它们的邻域分离性. 特别地, 点和集合的函数分离性蕴含它们在给定空间的邻域分离性. 然而, 如果空间是正则的, 则每个点和不含此点的每个闭集有不相交的邻域, 但由此不会推出每个点和集合是可函数分离的. 于是, 下述完全正则性 (complete regularity) 是比正则性更强的性质. 一个空间称为完全正则的, 如果任一点和任一不含该点的闭集是可函数分离的 (见完全正则空间 (completely-regular space)). 满足此条件的 (完全正则) 空间中, 最重要的是完全正则  $T_1$  空间, 也称为 Тихонов 空间 (Tikhonov space). 特别地, 任意  $T_0$  拓扑群的底空间是完全正则的但不一定是正规的空间.

除分离公理外, 所谓紧性型条件 (conditions of compactness type) 对拓扑空间理论很重要. 它们基于对 (开) 覆盖的研究. 拓扑空间  $X$  的 (开) 集族  $\Sigma$  称为  $X$  的一个覆盖 (covering) (见覆盖 (集合的) covering (of a set)), 如果每一点  $x \in X$  都至少含于一个作为  $\Sigma$  之元素的集合. 如果覆盖  $\alpha'$  的每个元素都是覆盖  $\alpha$  的至少一个元素的子集, 则称  $\alpha'$  为  $\alpha$  的加细, 或者说  $\alpha'$  比  $\alpha$  细, 或者说在给定空间的覆盖偏序集中  $\alpha'$  在  $\alpha$  之后.  $\alpha'$  加细  $\alpha$  的特别情形是  $\alpha'$  含于  $\alpha$  (即  $\alpha'$  每个元素也是  $\alpha$  的元素). 某些紧性型条件假设已经给定了空间  $X$  的两类 (开) 覆盖: 类  $\mathfrak{U}$  和类  $\mathfrak{V}$ , 使得  $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$ , 即  $\mathfrak{V}$  的每个覆盖也属于  $\mathfrak{U}$ .  $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$  紧性条件 (condition of  $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ -compactness) 要求: 对于  $\mathfrak{U}$  中的每个覆盖, 在  $\mathfrak{V}$  中有加细它的覆盖. 如果  $\mathfrak{U}$  是一空间的所有开覆盖组成的类, 而  $\mathfrak{V}$  是有限覆盖 (即由有限个元素组成的覆盖) 的子类, 即覆盖由有限个元素组成, 则得到所有这种类型的条件中最重要的一个, 称为紧性条件.



(compactness condition); 它等价于所谓 Borel-Lebesgue 条件 (Borel-Lebesgue condition): 对空间  $X$  的每个开覆盖  $\alpha$ , 存在一个含于  $\alpha$  的  $X$  的有限覆盖  $\alpha'$ . 满足紧性条件的 Hausdorff 空间称为 Hausdorff 紧统 (Hausdorff compacta). 它们都是正规的. 可度量化 Hausdorff 紧统 (具有可数基的 Hausdorff 紧统) 称为紧统 (compacta). 现在流行另一个术语, 称 Hausdorff 紧统为紧 Hausdorff 拓扑空间, 对可度量化情形不予区别 (亦见紧空间 (compact space)).

如果取可数开覆盖类为  $\mathfrak{U}$ , 仍然取有限覆盖的子类为  $\mathfrak{B}$ , 则相应的  $(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$  紧性称为列紧性 (countable compactness) (见列紧集 (compact set, countably)). 对于可度量化空间, 还有具有可数基的 Hausdorff 空间, 紧和列紧这两个条件等价. 如果取所有开覆盖组成的类为  $\mathfrak{U}$ , 取可数覆盖类为  $\mathfrak{B}$ , 则得到终紧性条件 (condition of final compactness). 说明此条件时 (如同紧性情形) 可以要求覆盖  $\alpha' \in \mathfrak{B}$  不仅是  $\alpha$  的加细, 而且含于  $\alpha$  中.

有一类重要的空间, 称为局部紧空间 (locally compact space), 是按这样的要求定义的: 给定空间  $X$  的每个点  $x$  都有一个邻域  $O_x$ , 它在  $X$  中的闭包是紧子空间. 任何局部紧 Hausdorff 空间, 也仅限于这类空间, 可以视为某个 Hausdorff 紧统  $\bar{X}$  的一个开集, 而且,  $\bar{X}$  是由  $X$  仅添加一个点  $\bar{x}$  而得到,  $\bar{X}$  的拓扑由这最后的要求及  $X$  的拓扑唯一确定; Hausdorff 紧统  $\bar{X}$  称为  $X$  的单点紧化 (one-point compactification) 或  $X$  的 Александров 紧化 (Aleksandrov compactification).

紧性条件之后, 最重要的紧性型条件是仿紧性条件 (condition of paracompactness) (见仿紧性准则 (paracompactness criteria)), 它要求给定空间  $X$  的每个开覆盖  $\alpha$  都可以被一个局部有限开覆盖  $\alpha'$  加细 (拓扑空间的集族称为在它上面局部有限的 (locally finite), 如果每个点都有一个邻域, 仅与该族的有限多个集合相交). 在这里, 不能要求  $\alpha'$  含于  $\alpha$ . 所有可度量化空间都是仿紧的 Hausdorff 空间.

#### 参考文献

- [1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.
- [2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).
- [3] Kuratowski, K., Topology, I. Acad. Press, 1966 (译自法文).
- [4] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности ..., М., 1973.

П. С. Александров 撰

【补注】许多作者恰好按照与上述内容相反的方式使用“ $T_3$  空间”和“正则空间”, “ $T_4$  空间”和“正规

空间”这两对术语.

Borel-Lebesgue 条件 (Borel-Lebesgue condition) 也称为 Heine-Borel 性质 (Heine-Borel property) (见 Heine-Borel 定理 (Heine-Borel theorem)); 而终紧性 (final compactness) 通常也称为 Lindelöf 性质 (Lindelöf property) (见 Lindelöf 空间 (Lindelöf space)). 很少使用术语“紧统”; 它们是紧空间 (也可以是 Hausdorff 空间, 可度量化空间, 等等).

在确定空间上拓扑的诸多等价方式之中, 应当注意收敛结构 (convergence structure). (开集、闭包运算、收敛结构等常用的工具也有进一步的推广.) 收敛性的早期描述使用诸如有向集 (见 [A3] 和有向集 (directed set)) 之类的外在工具, 但有一个内在的描述. 因为描述的格式由底集  $X$  确定, 所以它在技术上是内在的. 平心而论, 这种描述与引入基数  $m$  的内在性相差甚远. 因此, 对于每个幂集 (power set)  $X^m$ , 对于指标集  $m$  上的每个超滤子 (ultrafilter)  $\mathcal{U}$ , 我们必须说明, 它的点  $x_0$  是它的  $m$  元组  $\{x_\alpha\} \in X^m$  沿  $\mathcal{U}$  的极限. [A2] 中描述了紧 Hausdorff 情形的公理, 这时, 每个  $m$  元组都有一个沿每个超滤子的唯一极限; 一般的情形见 [A1]. 应用上, 更常用的是具有辅助工具的收敛性, 特别是广义序列 (网, 见广义序列 (generalized sequence)) 的收敛性.

#### 参考文献

- [A1] Barr, M., Relational algebras, in S. MacLane (ed.), Midwest Category Sem. IV, Lecture notes in math., Vol 137, Springer, 1970, 39 – 55.
- [A2] Linton, F. E. J., Some aspects of equational categories, in Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, 1965), Springer, 1966, 84 – 94.
- [A3] Tukey, J. W., Convergence and uniformity in topology, Princeton Univ. Press, 1940.
- [A4] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文). 白苏华、胡师度 译

拓扑结构 (拓扑) [topological structure (topology); топологическая структура], 开拓扑 (open topology), 相应地, 闭拓扑 (closed topology)

集合  $X$  的一个子集族  $\mathfrak{G}$  (相应地  $\mathfrak{F}$ ), 满足下述性质:

1. 集合  $X$ , 以及空集  $\emptyset$ , 都是族  $\mathfrak{G}$  (相应地  $\mathfrak{F}$ ) 的元素.
2.  $\mathfrak{G}$  (相应地  $\mathfrak{F}$ ).  $\mathfrak{G}$  中有限个元素的交集 (相应地,  $\mathfrak{F}$  中有限个元素的并集), 以及  $\mathfrak{G}$  中任意多个元素的并集 (相应地,  $\mathfrak{F}$  中任意多个元素的交集), 都是该族中的元素.

在集合  $X$  上引进或定义了拓扑结构 (简称拓扑), 该集合就称为拓扑空间 (topological space),



其元素称为点 (points), 族  $\mathcal{G}$  (相应地  $\mathcal{F}$ ) 中元素称为这个拓扑空间的开 (open) (相应地, 闭 (closed)) 集.

若  $X$  的子集族  $\mathcal{G}$  或  $\mathcal{F}$  之一已经定义, 并满足性质 1 及 2 <sub>$\mathcal{G}$</sub>  (或相应地 1 及 2 <sub>$\mathcal{F}$</sub> ), 则另一个族可以对偶地定义为第一个集族中元素的补集族.

П. С. Александров 撰

【补注】亦见拓扑学 (topology); 拓扑空间 (topological space); 一般拓扑学 (general topology).

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989  
(译自波兰文). 罗嵩龄 译

拓扑结构 [topological structures; топологические структуры]

【补注】

引言 一般拓扑学 (亦称集合论拓扑学或分析拓扑学, 见一般拓扑学 (general topology)) 的目的是要以一般的提法来阐明古典分析中熟知的诸如收敛及连续这样一些概念. 最初, 这是对度量空间进行的 (M. Fréchet ([A10]), 1906), 后来又扩展到今天称为 Hausdorff 空间的那种拓扑空间 (F. Hausdorff ([A11]), 1914). 通常的拓扑空间 (topological space) 概念可以回溯到 C. Kuratowski ([A25], 1922), 他把“闭包”的概念公理化, 从而阐明点  $x$  与集合  $A$  之间的“近性” (nearness) (通常记为  $x \in \bar{A}$ , 即  $x$  属于  $A$  的闭包). 但是对度量空间有意义的一致连续性 (uniform continuity)、一致收敛 (uniform convergence), 以及完全性 (completeness) 这些概念却未能对拓扑空间加以阐明. 因此, 又引进了一致空间的概念 (A. Weil ([A33], 1937)) 用“近域” (entourage) 来定义, 而 J. W. Tukey ([A32], 1940) 则是用“一致覆盖” (uniform cover) 来定义的, 亦见一致空间 (uniform space). 基于同样的理由, В. А. Ефремович ([A7], 1952) 也把两个集合之间的“近性” (nearness) 概念公理化, 提出了邻近空间 (proximity space). 此后, 人们多次尝试把拓扑概念与一致概念结合起来, 例如, L. Nachbin (1949) 研究了几乎一致空间 (见 [A9]), A. Császár (1957) 提出了共拓扑基团空间 (见 [A5]), Д. Б. Дойчинов ([A6], 1964) 引进了广义拓扑空间 (或超拓扑空间), М. Katětov ([A21], 1965) 研究了半近性空间 (merotopic space 或 semi-nearness space), H. Herrlich ([A13], 1974) 提出了近性空间 (nearness space). “近性” (nearness) 是拓扑学中的基本概念, 其直观概念现在已有满意的定义, 即利用近性空间 (或相应的, 半近性空间) 可以阐明“任意集族的近性”.

由于拓扑空间之间映射的连续性不可能象古典分

析那样利用收敛序列来阐明, 所以需要更一般的概念. 因此, E. H. Moore 和 H. L. Smith ([A26], 1922) 提出了网的理论 (见网 (拓扑空间中集合的) (net (of sets in a topological space))), 后来, H. Cartan ([A3], 1937) 又引进了滤子 (filter). 由于超滤子 (ultrafilter) 的存在, 一般拓扑中宁愿使用滤子理论. 把滤子收敛的概念公理化则得到极限空间 (拓扑空间的推广). 这种空间是 H. J. Kowalsky ([A24], 1954) 首先研究的, 其后, H. R. Fischer ([A8], 1959) 也进行了独立的研究. 就函数空间的研究而言, 极限空间比拓扑空间更为方便. 此前, G. Choquet ([A4], 1948) 曾经研究过一种更有局限性的概念, 即伪拓扑空间 (Choquet 空间) 的概念. 此外, 还提出了许多其他的概念, 例如, D. C. Kent ([A23], 1964) 的收敛空间, Katětov ([A21], 1965) 的滤子半近性空间 (即筛网确定的半近性空间).

所有上述种种空间都是有结构的集合, 其间保持结构的映射则称为连续映射或一致连续映射, 从而得到许多具体的范畴. 阐释这些范畴构造的明显相似性产生了拓扑范畴的定义及其相互关系的研究. 结果建立了一个新的学科, 即所谓范畴拓扑学 (categorical topology) (约在 1971 年) (见 Herrlich ([A12], 1971) 及 O. Wyler ([A34], 1971)).

本条目的术语见 [A19] 及 [A28].

拓扑范畴. 所谓具体范畴 (concrete category), 是指一个范畴 (category)  $\mathcal{C}$ , 其对象都是有结构的集合, 即配对  $(X, \xi)$ , 其中  $X$  是集合,  $\xi$  是  $X$  上的  $\mathcal{C}$  结构. 其态射  $f: (X, \xi) \rightarrow (Y, \mu)$  是  $X$  与  $Y$  之间的适当映射, 态射的合成是通常的映射合成. 换言之, 范畴  $\mathcal{C}$  还附带有有一个忠实函子 (即遗忘函子)  $\mathcal{U}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ , Set 是集合 (及映射) 的范畴.

具体范畴  $\mathcal{C}$  称为拓扑的 (topological), 当且仅当它满足下述条件:

Cat  $\text{top}_1$ . 初始结构存在性 (existence of initial structures). 对任何集合  $X$ , 任何指标集为  $I$  的一族  $\mathcal{C}$  对象  $\{(X_i, \xi_i)\}_{i \in I}$ , 以及任何一族指标集为  $I$  的映射  $\{f_i: X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ , 存在  $X$  上的唯一  $\mathcal{C}$  结构  $\xi$ , 关于  $\{X, f_i, (X_i, \xi_i), I\}$  是初始结构, 即是对任何  $\mathcal{C}$  对象  $(Y, \mu)$ , 映射  $g: (Y, \mu) \rightarrow (X, \xi)$  是  $\mathcal{C}$  态射的充要条件是: 对每个  $i \in I$ , 合成映射  $(f_i \circ g): (Y, \mu) \rightarrow (X_i, \xi_i)$  是一个  $\mathcal{C}$  态射.

Cat  $\text{top}_2$ . 纤维细小性 (fibre-smallness). 任何集合  $X$  的  $\mathcal{C}$  纤维 (即  $X$  上的所有  $\mathcal{C}$  结构的类) 是一个集合.

Cat  $\text{top}_3$ . 终止隔离子性质 (terminal separator property). 对于基数为 1 的任何集合  $X$ , 恰好存在一个  $X$  上的  $\mathcal{C}$  结构.

拓扑范畴的例子.

1) 拓扑空间 (及连续映射) 的范畴  $\text{Top}$ .

2) 一致空间 (及一致连续映射) 的范畴  $\text{Unif}$ .

3) 邻近空间 (及  $\delta$  映射) 的范畴  $\text{Prox}$ .

4) 收敛空间、极限空间以及伪拓扑空间 (连同连续映射) 的范畴  $\text{Conv}$ ,  $\text{Lim}$  以及  $\text{PsTop}$ .

(设  $X$  是一个集合,  $F(X)$  是  $X$  上所有滤子的集合,  $q$  是  $F(X) \times X$  的子集, 满足下列条件:

$\text{Lim}_1$ ) 对于每个  $x \in X$  有  $(\dot{x}, x) \in q$ , 其中  $\dot{x}$  表示  $X$  中所有含有  $x$  的子集的集合.

$\text{Lim}_2$ ) 对于  $(\mathcal{F}, x) \in q$  而  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  有  $(\mathcal{G}, x) \in q$ .

这时,  $(X, q)$  称为收敛空间 (convergence space), 如果还满足

(C)  $(\mathcal{F}, x) \in q$  蕴含  $(\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in q$ ;

$(X, q)$  称为极限空间 (limit space), 如果还满足

$\text{Lim}_3$ )  $(\mathcal{F}, x) \in q$  且  $(\mathcal{G}, x) \in q$  蕴含  $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, x) \in q$ ;

$(X, q)$  称为伪拓扑空间 (pseudo-topological space) 或 Choquet 空间 (Choquet space), 如果还满足

$\text{PsT}$ )  $(\mathcal{F}, x) \in q$ , 只要对每个超滤子  $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$  有  $(\mathcal{G}, x) \in q$ .

$(\mathcal{F}, x) \in q$  通常改写为  $\mathcal{F} \rightarrow x$  (读作  $\mathcal{F}$  收敛于  $x$ ). 在各种情形中, 态射是所有的连续映射, 即是把收敛于  $x$  的滤子映成收敛于  $f(x)$  的滤子的映射.)

5) 共拓扑基团空间 (及连续映射) 的范畴  $\text{SynTop}$  (见 [A5]).

6) 超拓扑空间 (及连续映射) 的范畴  $\text{SuperTop}$  (见 [A6]).

7) 拟一致空间 (及拟一致连续映射) 的范畴  $\text{QuasiUnif}$  (见 [A9]).

8) 半近性空间 (及一致连续映射) 的范畴  $\text{Mer}$  和近性空间 (及一致连续映射) 的范畴  $\text{Near}$ .

(设  $X$  是一个集合,  $\mu$  是  $X$  的非空覆盖组成的非空集, 满足下列条件:

$N_1$ ) 若  $\mathcal{A}$  是  $\mathcal{B}$  的加细,  $\mathcal{A} \in \mu$ , 则  $\mathcal{B} \in \mu$ ;

$N_2$ ) 若  $\mathcal{A} \in \mu$ ,  $\mathcal{B} \in \mu$ , 则  $\{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \in \mu$ .

这时  $(X, \mu)$  称为半近性空间 (merotopic space 或 semi-nearness space), 而  $\mu$  的元素称为一致覆盖 (uniform coverings).

半近性空间  $(X, \mu)$  称为近性空间 (nearness space), 如果还满足下列条件:

$N_3$ ) 若  $\mathcal{A} \in \mu$ , 则  $\{\text{int}_\mu A \mid A \in \mathcal{A}\} \in \mu$ , 其中  $\text{int}_\mu A = \{x \in X \mid \{A, X \setminus \{x\}\} \in \mu\}$ . 若  $(X, \mu)$  和  $(Y, \mu)$  是半近性空间 (或近性空间), 则映射  $f: X \rightarrow Y$  称为一致连续的 (uniformly continuous), 如

果对每个  $\mathcal{A} \in \eta$ ,  $f^{-1}\mathcal{A} = \{f^{-1}[A] \mid A \in \mathcal{A}\} \in \mu$ .)

9) 双拓扑空间 (及配对连续映射) 的范畴  $\text{BiTop}$  (见 [A22]).

10) 有界型空间 (及有界映射) 的范畴  $\text{Born}$  (见 [A20]).

11) 单纯复形 (及单纯映射) 的范畴  $\text{Simp}$  (见 [A30]).

12) 自反关系的范畴  $\text{Rere}$  及准序集范畴  $\text{PrOrd}$  (它们的对象都是配对  $(X, \rho)$ , 其中  $X$  是集合,  $\rho$  是  $X$  上的自反关系 (就  $\text{Rere}$  而言) 或自反及传递关系 (就  $\text{PrOrd}$  而言); 在两种情况下, 态射都是保持关系的映射).

13) 紧生成的拓扑空间 (及连续映射) 的范畴  $\text{CGTop}$  (即是范畴  $\text{Top}$  中含有范畴  $\text{Comp } T_2$  的最小余自反子范畴, 其中  $\text{Comp } T_2$  是紧 Hausdorff 空间 (及连续映射) 的范畴).

14) 对称收敛空间、对称极限空间、对称伪拓扑空间及对称拓扑空间 (及连续映射) 的范畴  $\text{Conv}_s$ ,  $\text{Lim}_s$ ,  $\text{PsTop}_s$  及  $\text{Top}_s$ .

(收敛空间  $(X, q)$  称为对称的 (symmetric), 如果满足:

(S)  $(\mathcal{F}, y) \in q$  及  $x \in \bigcap \mathcal{F}$  蕴含  $(\mathcal{F}, x) \in q$ .

特别是, 拓扑空间  $X$  为对称拓扑空间的充要条件是:  $X$  为  $R_0$  空间 ( $R_0$ -space), 即  $x \in \overline{\{y\}}$  蕴含  $y \in \overline{\{x\}}$ ,  $(x, y) \in X \times X$ .)

15) 筛网确定的半近性空间 (及一致连续映射) 的范畴  $\text{Grill}$ .

(半近性空间  $(X, \mu)$  称为筛网确定的 (grill-determined), 如果  $X$  的任何一个近性子集族  $\mathcal{A}$  均含于  $X$  上的某个近性筛网  $\mathcal{G}$  中. 这里,  $X$  的子集族  $\mathcal{B}$  称为近性的 (near), 如果对每个  $\mathcal{C} \in \mu$ , 存在某个  $C \in \mathcal{C}$ , 使得对每个  $B \in \mathcal{B}$  有  $C \cap B \neq \emptyset$ ;  $\mathcal{B}$  称为筛网 (grill), 如果  $\emptyset \notin \mathcal{B}$ , 并且对  $X$  的任何一对子集  $(A, B)$ ,  $A \cup B \in \mathcal{B}$  的充要条件是  $A \in \mathcal{B}$  及  $B \in \mathcal{B}$ .

范畴  $\text{Grill}$  同构于范畴  $\text{Fil}$ , 后者定义如下:  $\text{Fil}$  的对象是配对  $(X, \gamma)$ , 其中  $X$  是集合,  $\gamma$  是  $X$  上的滤子集, 满足下述条件: 1) 若  $\mathcal{A} \in \gamma$ , 且滤子  $\mathcal{C}$  比  $\mathcal{A}$  精细, 则  $\mathcal{C} \in \gamma$ ; 2) 对任何  $x \in X$  有  $\dot{x} \in \gamma$ . 态射  $f: (X, \gamma) \rightarrow (X', \gamma')$  是映射  $f: X \rightarrow X'$ , 使得对每个  $\mathcal{A} \in \gamma$ , 由  $\{f[F] \mid F \in \mathcal{A}\}$  生成的滤子属于  $\gamma'$ .)

16) 接触近性空间 (及一致连续映射) 的范畴  $\text{Cont}$ .

(近性空间  $(X, \mu)$  称为接触 (contigial) 近性空间, 如果对每个  $\mathcal{A} \in \mu$ , 存在一个有限的  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ , 使得  $\mathcal{B} \in \mu$ .)

17) 子拓扑近性空间 (及一致连续映射) 的范畴



SubTop.

(近性空间  $(X, \mu)$  称为子拓扑 (subtopological) 近性空间, 如果它可以嵌入一个拓扑近性空间 (即对称拓扑空间). 注意, 范畴  $\text{Top}_s$  同构于拓扑近性空间 (及一致连续映射) 的范畴  $\text{T-Near}$ . 这里, 近性空间  $(X, \mu)$  称为拓扑 (topological) 近性空间, 如果  $X = \bigcup \{ \text{int}_\mu A : A \in \mathcal{A} \}$  蕴含  $\mathcal{A} \in \mu$ .)

拓扑范畴的性质.

1) 条件  $\text{Cattop}_1$  可以换为下述等价条件 (存在最终结构 (existence of final structure)): 对于任何集合  $X$ , 任何一族指标集为  $I$  的  $\mathcal{A}$  对象  $\{(X_i, \xi_i)\}_{i \in I}$  以及任何一族指标集为  $I$  的映射  $\{f_i: X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ , 存在  $X$  上的唯一  $\mathcal{A}$  结构  $\xi$ , 关于  $\{(X_i, \xi_i), f_i, X, I\}$  是最终结构 (final structures), 即是对任何  $\mathcal{A}$  对象  $(Y, \mu)$ , 映射  $g: (X, \xi) \rightarrow (Y, \mu)$  是  $\mathcal{A}$  态射的充要条件是: 对每个  $i \in I$ , 合成映射  $g \circ f_i: (X_i, \xi_i) \rightarrow (Y, \mu)$  是一个  $\mathcal{A}$  态射.

2) 让  $\mathcal{A}$  是一个拓扑范畴. 这时下述结论成立:

(1)  $\mathcal{A}$  是完全且余完全范畴, 遗忘函子  $U: \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$  通过初始结构 (最终结构) 将极限 (余极限) 从  $\text{Set}$  提升到  $\mathcal{A}$ .

(2)  $\mathcal{A}$  态射是单态射 (monomorphism) (满态射 (epimorphism)、双态射 (bimorphism)) 的充要条件是: 它是单射 (满射、双射).

(3)  $\mathcal{A}$  是良幂范畴及余良幂范畴.

(4) 对任何  $\mathcal{A}$  态射  $f: (X, \xi) \rightarrow (Y, \mu)$ , 下列条件等价: a)  $f$  是一范畴的嵌入 (imbedding of categories), 即  $f$  是单射且  $\xi$  是关于  $(Y, \mu)$  及  $f$  的初始结构; b)  $f$  是极端单态射; c)  $f$  是正则单态射.

(5) 对任何  $\mathcal{A}$  态射  $f: (X, \xi) \rightarrow (Y, \mu)$ , 下列条件等价: a)  $f$  是商映射 (quotient mapping), 即  $f$  是满射, 且  $\mu$  是关于  $(X, \xi)$  及  $f$  的最终结构; b)  $f$  是极端满态射; c)  $f$  是正则满态射.

(6)  $\mathcal{A}$  是 (满、嵌入) 范畴并且是 (商、单) 范畴.

(7) 遗忘函子  $U: \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$  具有满且忠实的左伴随函子. 即对任何集合  $X$ , 存在  $X$  上的离散  $\mathcal{A}$  结构  $\xi_x$ , 其特性是: 任何映射  $f: (X, \xi_x) \rightarrow (Y, \eta)$  都是  $\mathcal{A}$  态射.

(8) 遗忘函子  $U: \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$  具有满且忠实的右伴随函子, 即对任何集合  $X$ , 存在  $X$  上的非离散  $\mathcal{A}$  结构  $\xi^x$ , 其特性是: 任何映射  $f: (Y, \mu) \rightarrow (X, \xi^x)$  都是  $\mathcal{A}$  态射.

(9) 对任何集合  $X$ , 由 " $\xi \leq \mu \Leftrightarrow 1_X: (X, \xi) \rightarrow (X, \mu)$  是  $\mathcal{A}$  态射" 赋序的、 $X$  的  $\mathcal{A}$  纤维是一个完全格 (complete lattice).

(10) 对任何集合  $X \neq \emptyset$ , 任何常值映射  $f: (X, \xi)$

$\rightarrow (Y, \eta)$  是一个  $\mathcal{A}$  态射.

(11) 任何  $\mathcal{A}$  对象  $(X, \xi)$ , 其中  $X \neq \emptyset$ , 都是隔离子.

(12)  $\mathcal{A}$  对象  $C$  是余隔离子的充要条件是: 存在一个嵌入, 把一个具有两个点的非离散对象映入  $C$ .

(13)  $\mathcal{A}$  对象  $(X, \xi)$  是射影对象的充要条件是:  $\xi$  是  $X$  上的离散结构 (亦见范畴的射影对象 (projective object of a category)).

(14)  $\mathcal{A}$  对象  $(X, \xi)$  是单射对象的充要条件是:  $X \neq \emptyset$  且  $\xi$  是  $X$  上的非离散结构 (亦见单射对象 (injective object)).

3) 为了说明拓扑范畴之间的关系, 反射及余反射的理论是非常有用的. 以下, 总是假定子范畴是满的 (full) 且同构闭的 (isomorphism closed) 子范畴 (范畴  $\mathcal{A}$  的子范畴  $\mathcal{B}$  称为同构闭的, 如果任何  $\mathcal{A}$  对象, 只要同构于某个  $\mathcal{B}$  对象, 就是一个  $\mathcal{B}$  对象; 满子范畴的定义见满子范畴 (full subcategory)). 若  $\mathcal{B}$  是范畴  $\mathcal{A}$  的子范畴,  $\mathcal{J}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  表示包含函子, 则  $\mathcal{B}$  称为  $\mathcal{A}$  中的自反的 (余自反的) (reflective (co-reflective)) 子范畴, 如果下述两个 (等价的) 条件成立: a)  $\mathcal{J}$  具有左伴随函子  $\mathcal{R}$  (右伴随函子  $\mathcal{R}_c$ ), 称为反射子 (reflector) (余反射子 (co-reflector)); b) 对于每个  $\mathcal{A}$  对象  $X$ , 存在一个  $\mathcal{B}$  对象  $X_{\mathcal{B}}$  和一个  $\mathcal{A}$  态射  $r_X: X \rightarrow X_{\mathcal{B}}$ , 称为  $X$  的  $\mathcal{B}$  反射 (对应地,  $m_X: X_{\mathcal{B}} \rightarrow X$ , 称为  $X$  的  $\mathcal{B}$  余反射), 使得对每个  $\mathcal{A}$  对象  $Y$  和每个  $\mathcal{A}$  态射  $f: X \rightarrow Y$  (对应地,  $f: Y \rightarrow X$ ), 存在唯一的  $\mathcal{B}$  态射 (即  $\mathcal{B}$  态射)  $\bar{f}: X_{\mathcal{B}} \rightarrow Y$  (对应地,  $\bar{f}: Y \rightarrow X_{\mathcal{B}}$ ), 使得  $\bar{f} \circ r_X = f$  (对应地,  $m_X \circ \bar{f} = f$ ).

此外, 子范畴  $\mathcal{B}$  分别称为  $\mathcal{A}$  中满自反 (单余自反) (epireflective (monocoreflective))、极端满自反 (极端单余自反) (extremal epireflective (extremal monocoreflective)) 或双自反 (双余自反) (bireflective (bico-reflective)) 子范畴, 如果  $\mathcal{B}$  是自反 (余自反) 子范畴, 并且每个  $\mathcal{A}$  对象  $X$  的  $\mathcal{B}$  反射 ( $\mathcal{B}$  余反射) 分别是满态射 (单态射)、极端满态射 (极端单态射) 或双态射.

就拓扑范畴而言, 下述两个结论成立:

(1) 拓扑范畴的任何双自反 (及双余自反) 的子范畴都是拓扑范畴.

(2) 让  $\mathcal{B}$  是拓扑范畴  $\mathcal{A}$  的子范畴, 则下述结论成立:

a)  $\mathcal{B}$  是  $\mathcal{A}$  中的满自反 (极端满自反) 的子范畴的充要条件是:  $\mathcal{B}$  在  $\mathcal{A}$  中的乘积运算、子对象 (即极端单态射) 运算及弱子对象 (即单态射) 运算下是封闭的.

b)  $\mathcal{B}$  是  $\mathcal{A}$  中的双自反子范畴的充要条件是:  $\mathcal{B}$  是  $\mathcal{A}$  中的自反子范畴, 并且含有  $\mathcal{A}$  的所有非离散对





具体范畴  $\mathcal{C}$  称为具有初始结构的 (或单拓扑的) (initially structured (or monotopological)), 如果满足  $\text{Cattop}_2$ ) 及  $\text{Cattop}_3$ ), 并且对任何集合  $X$ , 任何一族指标集为  $I$  的  $\mathcal{C}$  对象  $\{(X_i, \xi_i)\}_{i \in I}$  的任何映射单源  $\{f_i: X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$  (即是一族映射  $\{f_i: X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ , 使得对任何一对映射  $Y \xrightarrow{\alpha} X, f_i \circ \alpha = f_i \circ \beta (i \in I)$  蕴含  $\alpha = \beta$ ), 存在  $X$  上的唯一  $\mathcal{C}$  结构  $\xi$ , 关于  $\{X, f_i, (X_i, \xi_i), I\}$  是初始结构.

显然, 每个拓扑范畴都是有初始结构的. 此外, 一个拓扑范畴 (有初始结构的范畴) 的任何满自反 (极端满自反) 子范畴都是有初始结构的. 例如, (拓扑  $T_0$  空间的) 范畴  $\text{Top}_0$ , (拓扑  $T_1$  空间的) 范畴  $\text{Top}_1$ , (正则拓扑  $T_1$  空间的) 范畴  $\text{Reg}_1$ , (完全正则拓扑  $T_1$  空间的) 范畴  $\text{Comp Reg}_1$ , (半序集的) 范畴  $\text{Poset}$ , (Hausdorff 收敛空间的) 范畴  $\text{HConv}$ , (Hausdorff 极限空间的) 范畴  $\text{HLim}$  以及 (Hausdorff 伪拓扑空间的) 范畴  $\text{HPsTop}$  (最后三例中 Hausdorff 性质是指滤子极限唯一) 都是有初始结构的范畴, 但不是拓扑范畴. 反之, 任何有初始结构的范畴都是某个拓扑范畴的极端满自反子范畴. 有初始结构的范畴是完全的、余完全的、良幂的, 但并不具有拓扑范畴的所有良好性质, 特别是, 这种范畴不是余良幂的 (例如,  $T_{2a}$  空间, 即 **Урысон 空间** (Urysohn space) (及连续映射) 的范畴是有初始结构的, 但不是余良幂的). 进一步的细节见 [A28].

**任意基本范畴上的拓扑范畴.** 先给一些定义. 让  $\mathcal{C}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  是一个函子,  $A$  是一个  $\mathcal{C}$  对象,  $(f_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I}$  是一族有指标的  $\mathcal{C}$  态射, 均以  $A$  为定义域. 配对  $\{A, (f_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I}\}$  称为  $\mathcal{C}$  中的一个源 (source), 它称为  $\mathcal{C}$  初始 ( $\mathcal{C}$ -initial) 源, 如果对  $\mathcal{C}$  中的每个源  $\{B, (g_i: B \rightarrow A_i)_{i \in I}\}$  以及每个  $\mathcal{C}'$  态射  $f: \mathcal{C}(B) \rightarrow \mathcal{C}(A)$ , 使得对每个  $i \in I$  有  $\mathcal{C}(f_i) \circ f = \mathcal{C}(g_i)$ , 则存在唯一的  $\mathcal{C}$  态射  $\bar{f}: B \rightarrow A$ , 使得对每个  $i \in I$  有  $\mathcal{C}(\bar{f}) = f$  而  $f_i \circ \bar{f} = g_i$ . 函子  $\mathcal{C}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  称为拓扑函子 (topological functor), 如果对任何一族有指标的  $\mathcal{C}$  对象  $(A_i)_{i \in I}$  以及  $\mathcal{C}'$  中的任何一个源  $\{X, (f_i: X \rightarrow \mathcal{C}(A_i))_{i \in I}\}$ , 存在  $\mathcal{C}$  中的唯一的  $\mathcal{C}$  初始源  $\{A, (g_i: A \rightarrow A_i)_{i \in I}\}$ , 使得对每个  $i \in I$  有  $\mathcal{C}(A) = X$  而  $\mathcal{C}(g_i) = f_i$ . 让  $\mathcal{C}$  是一个固定的范畴, 称为基本范畴 (base category).  $\mathcal{C}$  上的具体范畴 (concrete category) 是指一个配对  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ , 其中  $\mathcal{C}$  是一个范畴, 而  $\mathcal{C}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  是一个忠实的、可取的函子 (即任何  $\mathcal{C}$  同构  $f$  是一个  $\mathcal{C}'$  恒同的充要条件是  $\mathcal{C}(f)$  是一个  $\mathcal{C}'$  恒同), 并且是可转移函子 (即是对任何  $\mathcal{C}$  对象  $A$ , 任何  $\mathcal{C}'$  对象  $B$  以及任何同构  $q: B \rightarrow \mathcal{C}(A)$ , 存在唯一的  $\mathcal{C}$  对象  $C$  及同构  $\bar{q}: C \rightarrow A$ , 使得  $\mathcal{C}(\bar{q}) = q$ ). 函子  $\mathcal{C}$  称为  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  的基本函子

(underlying functor).  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  有时也记为  $C$ .  $\mathcal{C}$  上的具体范畴  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  称为初始完全 (initially complete) 范畴, 如果  $\mathcal{C}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  是拓扑函子;  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  称为小纤维 (small-fibred) 范畴, 如果对每个  $\mathcal{C}'$  对象  $X$ , 满足  $\mathcal{C}(A) = X$  的所有  $\mathcal{C}$  对象  $A$  的类是一个集合;  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  称为拓扑 (topological) 范畴, 如果它既是初始完全范畴, 又是小纤维范畴.

显然, 若  $\mathcal{C}$  是开始时定义的拓扑范畴,  $\mathcal{C}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  表示遗忘函子, 那么  $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$  是  $\text{Set}$  上的拓扑范畴. 但这时略去了公理  $\text{Cattop}_3$ ). 这个公理等价于  $\mathcal{C}$  对象之间的所有常值映射 (即是通过  $\{\emptyset\}$  析因的函数) 都是  $\mathcal{C}$  态射. 因此, 例如, 有向图 (及图同态) 的范畴  $\text{Graph}$  不再被排除. 除了  $\text{Set}$  外, 基本范畴还有, 例如, 1) 以  $\{\emptyset\}$  作为唯一对象, 恒同映射作为唯一态射的范畴  $\mathcal{C}$ . 这时  $\mathcal{C}$  上的具体范畴是半有序集;  $\mathcal{C}$  上的拓扑范畴是完全格.

2) 群 (及同态) 的范畴  $\text{Group}$ . 于是, 拓扑群 (及连续同态) 的范畴  $\text{TopGroup}$  是  $\text{Group}$  上的拓扑范畴.

3) 范畴  $\mathcal{C}$ , 其对象是互不相交集的配对  $(A, B)$ , 其态射  $F: (A, B) \rightarrow (A', B')$  是映射  $F: A \cup B \rightarrow A' \cup B'$ , 使得  $F(A) \subseteq A', F(B) \subseteq B'$ . 于是, 范畴  $\text{Net}$  是  $\mathcal{C}$  上的拓扑范畴. 这里  $\text{Net}$  的对象是三元组  $(A, B, R)$ , 其中  $(A, B)$  是  $\mathcal{C}$  对象, 而  $R \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$ ,  $\text{Net}$  的态射  $F: (A, B, R) \rightarrow (A', B', R')$  是  $\mathcal{C}$  态射  $F: (A, B) \rightarrow (A', B')$ , 使得对任何  $(x, y) \in R$  有  $(F(x), F(y)) \in R'$ , 在  $\mathcal{C}$  上是拓扑的 (注意,  $\text{Net}$  的对象称为网络, 在计算机科学中得到应用, 见 [A29]).

拓扑函子是忠实函子、可取函子、可转移函子, 从而导致某些初始完全的具体范畴. 如果  $\mathcal{C}$  是  $\mathcal{C}'$  上的拓扑范畴, 其基本函子是  $\mathcal{C}$ , 那么按照关于  $\text{Set}$  上的拓扑范畴的诸结果可以得到下列结论:  $\mathcal{C}$  具有满且忠实的左伴随函子和右伴随函子; 通过初始结构 (最终结构) 把极限 (余极限) 从  $\mathcal{C}'$  提升到  $\mathcal{C}$ .  $\mathcal{C}$  上的任何析因结构可以通过初始结构 (或最终结构) 提升为  $\mathcal{C}$  上的析因结构; 完全性、余完全性、良幂性及余良幂性在  $\mathcal{C}$  中成立的充要条件是: 这些性质在  $\mathcal{C}'$  中成立; 纤维是完全格, 等等. 此外, 对偶性成立, 即是若  $\mathcal{C}$  是  $\mathcal{C}'$  上的拓扑范畴, 则  $\mathcal{C}$  的对偶范畴 (见范畴 (category))  $\mathcal{C}^{op}$  是  $\mathcal{C}'^{op}$  上的拓扑范畴.

**Descartes 闭性及进一步的限制.** 拓扑空间 (及连续映射) 的范畴  $\text{Top}$  并不具有某些企望的性质, 例如, 两个商映射的乘积不必是商映射. 并且一般不存在自然的函数空间拓扑结构, 即  $\text{Top}$  不是 Descartes 闭的 (见范畴 (category)). 由于这不便于研究代数拓扑 (同伦论)、泛函分析 (对偶理论) 及拓扑代数 (商代

数), 所以 Top 已经换成某些性态良好的子范畴或某些更方便的超范畴. 确切的概念如下:

1) 范畴  $\mathcal{C}$  称为 Descartes 闭 (Cartesian closed) 范畴, 如果下列条件成立 (亦见范畴 (category)):

a) 对任何一对  $\mathcal{C}$  对象  $(A, B)$ , 存在  $\mathcal{C}$  中的一个乘积  $A \times B$ ;

b) 设  $A$  是一个  $\mathcal{C}$  对象, 那么对每个  $\mathcal{C}$  对象  $B$ , 存在某个  $\mathcal{C}$  对象  $B^A$  和某个  $\mathcal{C}$  态射  $e_{A,B}: A \times B^A \rightarrow B$ , 使得对每个  $\mathcal{C}$  对象  $C$  和每个  $\mathcal{C}$  态射  $f: A \times C \rightarrow B$ , 存在唯一的  $\mathcal{C}$  态射  $\bar{f}: C \rightarrow B^A$ , 使得图表

$$\begin{array}{ccc} A \times B^A & \xrightarrow{e_{A,B}} & B \\ 1_A \times \bar{f} \swarrow & & \nearrow f \\ & A \times C & \end{array}$$

可交换 (即是对每个  $\mathcal{C}$  对象  $A$ , 函子  $A \times -: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  具有右伴随函子, 记为  $\cdot^A$ , 这里, 对每个  $\mathcal{C}$  对象  $B$  定义  $(A \times -)(B) = A \times B$ , 对每个  $\mathcal{C}$  态射  $f$  定义  $(A \times -)(f) = 1_A \times f$ ). 形如  $B^A$  的对象称为幂对象 (power objects).

2) 设  $\mathcal{C}$  是一个范畴. 一族有指标的  $\mathcal{C}$  态射  $\{f_i: B_i \rightarrow B\}_{i \in I}$  称为一个渊藪 (epi-sink), 如果对于定义域为  $B$  的任何一对  $\mathcal{C}$  态射  $(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha \circ f_i = \beta \circ f_i (i \in I)$  蕴涵  $\alpha = \beta$ .

3) 设  $\mathcal{C}$  是一个拓扑范畴. 渊藪  $\{f_i: B_i \rightarrow B\}_{i \in I}$  称为最终渊藪 (final epi-sink), 如果  $B$  的  $\mathcal{C}$  结构是关于  $\{f_i\}_{i \in I}$  的最终结构.

就拓扑范畴  $\mathcal{C}$  而言, 下列断言是等价的:

(1)  $\mathcal{C}$  是 Descartes 闭范畴;

(2) 对任何  $\mathcal{C}$  对象  $A$  以及任何一族有指标的  $\mathcal{C}$  对象  $\{B_i\}_{i \in I}$ , 下述结论成立:

a)  $A \times \coprod_{i \in I} B_i \cong \coprod_{i \in I} (A \times B_i)$  (更确切地说,  $A \times \coprod$  保持余积).

b) 若  $f$  是商映射, 则  $1_A \times f$  也是商映射, 即  $A \times -$  保持商映射;

(3) a) 对任何  $\mathcal{C}$  对象  $A$  以及任何一族有指标的  $\mathcal{C}$  对象  $\{B_i\}_{i \in I}$ ,  $A \times \coprod_{i \in I} B_i \cong \coprod_{i \in I} (A \times B_i)$  (更确切地说,  $A \times -$  保持余积).

b)  $\mathcal{C}$  中任何两个商映射  $f$  和  $g$  的乘积  $f \times g$  是一个商映射;

(4) 对每个  $\mathcal{C}$  对象  $A$ , 函子  $A \times -$  保持最终渊藪: 对  $\mathcal{C}$  中任何最终渊藪  $\{f_i: B_i \rightarrow B\}_{i \in I}$ ,  $\{1_A \times f_i: A \times B_i \rightarrow A \times B\}_{i \in I}$  也是最终渊藪;

(5) 对任何配对  $(A, B) \in |\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|$ , 从  $A$  到  $B$  的所有  $\mathcal{C}$  态射的集合  $[A, B]_{\mathcal{C}}$  可以具有一个  $\mathcal{C}$  对象  $B^A$  的结构, 使得:

a) 赋值映射 (evaluation mapping)  $e_{A,B}: A \times B^A \rightarrow B$  是一个  $\mathcal{C}$  态射, 这里对每个  $(a, g) \in A \times B^A$  定

义  $e_{A,B}(a, g) = g(a)$ .

b) 对每个  $\mathcal{C}$  对象  $C$ , 映射  $\psi: (B^A)^C \rightarrow B^{A \times C}$  是满映射, 这里对每个  $\mathcal{C}$  态射  $f: C \rightarrow B^A$  定义  $\psi(f) = e_{A,B} \circ (1_A \times f)$ .

4) 于是, 就 Descartes 闭的拓扑范畴  $\mathcal{C}$  而言, 下列结论成立:

a) 第一指数律:  $A^{B \times C} \cong (A^B)^C$ ;

b) 第二指数律:  $(\prod_{i \in I} A_i)^B \cong \prod_{i \in I} A_i^B$ ;

c) 第三指数律:  $A^{\coprod_{i \in I} B_i} \cong \prod_{i \in I} A^{B_i}$ ;

d) 分配律:  $A \times \prod_{i \in I} B_i \cong \prod_{i \in I} A \times B_i$ .

Descartes 闭的拓扑范畴的例子有 Set, PsTop, Lim, Conv, Grill, Born, Simp, Rere, PrOrd, CGTop.

5) 若  $\mathcal{C}$  是有初始结构的范畴, 则  $\mathcal{C}$  是 Descartes 闭范畴的充要条件是: 对每个  $\mathcal{C}$  对象  $A$ , 函子  $A \times -$  保持最终渊藪. 此外, 在 Descartes 闭的有初始结构的范畴  $\mathcal{C}$  中, 幂对象  $B^A$  可以解释为集合  $[A, B]$ , 配备了某个适当的  $\mathcal{C}$  结构, 即是一个“函数空间” (精确到同构), 而  $\mathcal{C}$  态射  $e_{A,B}$  则是通常的赋值映射 (精确到同构). 由于 Descartes 闭的有初始结构的范畴的任何极端满自反子范畴都是 Descartes 闭范畴, 所以范畴 Poset, HConv (Hausdorff 收敛空间), HLim (Hausdorff 极限空间) 以及 HPsTop (Hausdorff 伪拓扑空间) 都是 Descartes 闭的有初始结构的范畴 (在每种情况下, Hausdorff 性质都是指滤子极限唯一), 因为这些范畴分别是 PrOrd, Conv, Lim 以及 PsTop 中的极端满自反子范畴 (例如见 [A28]). 由于上述 Descartes 闭的拓扑范畴中有些还满足另一个良好性质, 所以给出下述定义是有用的: 范畴  $\mathcal{C}$  称为一个拓扑斯 (topos) (拟拓扑斯 (quasi-topos), 如果  $\mathcal{C}$  具有有限的极限及余极限;  $\mathcal{C}$  是 Descartes 闭范畴; 并且在  $\mathcal{C}$  中 (强性) 部分态射都是可表示的, 即是对任何  $\mathcal{C}$  对象  $A$ , 存在一个 (强性) 单态射  $m_A: A \rightarrow A'$ , 使得  $m_A$  是万有的, 即对映入  $A$  的任何 (强性) 部分态射 (即由一个 (强性) 单态射  $m: B \rightarrow C$  和一个态射  $f: B \rightarrow A$  组成的配对) 存在唯一的拉回

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ m \downarrow & & \downarrow m_A \\ C & \longrightarrow & A' \end{array}$$

显然, 任何拓扑斯都是拟拓扑斯. 上述 Descartes 闭的诸拓扑范畴中只有 Set 是拓扑斯 (注意, 拓扑斯是平衡范畴 (balanced category), 即任何双态射都是同构的范畴). 由于在具有前推的每个范畴中, 强性单态射与极端单态射一致, 所以强性单态射可以换为嵌入, 只要  $\mathcal{C}$  是拓扑范畴. 因此, 就拓扑范畴  $\mathcal{C}$  而言, 下列条件是等价的:

(1)  $\mathcal{C}$  是拟拓扑斯;



(2)  $\mathcal{C}$  是 Descartes 闭范畴, 并且任何  $\mathcal{C}$  对象  $A$  可以添加唯一一点  $\infty_A$  而嵌入一个  $\mathcal{C}$  对象  $A' = A \cup \{\infty_A\}$ , 使得对于从  $B$  的子范畴  $C$  到  $A$  的任何  $\mathcal{C}$  态射  $f: C \rightarrow A$ , 由

$$f'(b) = \begin{cases} f(b), & b \in C, \\ \infty_A, & b \notin C, \end{cases}$$

定义的唯一映射  $f': B \rightarrow A'$  是一个  $\mathcal{C}$  态射;

(3) 在  $\mathcal{C}$  中, 最终渊藪是通用的 (universal), 即若  $\{f_i: A_i \rightarrow A\}_{i \in I}$  是  $\mathcal{C}$  中的最终渊藪,  $f: B \rightarrow A$  是  $\mathcal{C}$  态射, 并且对于每个  $i \in I$  图表

$$\begin{array}{ccc} B_i & \xrightarrow{f_i} & A_i \\ g_i \downarrow & & \downarrow f_i \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

是  $\mathcal{C}$  中的拉回, 那么  $\{g_i: B_i \rightarrow B\}_{i \in I}$  是  $\mathcal{C}$  中的最终渊藪.

(4) a)  $\mathcal{C}$  是 Descartes 闭范畴, 并且 b)  $\mathcal{C}$  中的最终渊藪是遗传的 (hereditary), 即若  $\{f_i: A_i \rightarrow A\}_{i \in I}$  是  $\mathcal{C}$  中的最终渊藪,  $B$  是  $A$  的子空间,  $B_i$  是  $A_i$  的子空间, 其基本集为  $f_i^{-1}(B)$ , 而  $g_i = B_i \rightarrow B$  是  $f_i$  的相应限制, 则  $\{g_i: B_i \rightarrow B\}_{i \in I}$  也是  $\mathcal{C}$  中的最终渊藪.

成为拟拓扑斯的拓扑范畴亦称为强拓扑范畴 (strongly topological categories) 或拓扑统 (topological universes).

拟拓扑斯的例子有: PsTop, Lim, Conv, Grill, Born, Simp, Rere.

特别是, 成为拟拓扑斯的拓扑范畴具有遗传商 (见上述 (4b)). 这个条件的用处在于研究拓扑范畴的连通性时已经显而易见 (见 [A18], [A27]). 甚至在 Mer 中最终渊藪也是遗传的, 尽管 Mer 不是 Descartes 闭范畴. 由于 Descartes 闭是拓扑范畴的一个方便的性质 (见 [A31]), 所以拟拓扑斯性质可以视为一个超常方便的性质 (见 [A35]). 因此, 对于已知的拓扑范畴  $\mathcal{C}$  以及已知的方便 (或超常方便) 的性质  $P$ , 如果能找到  $\mathcal{C}$  的最小扩充  $P(\mathcal{C})$  满足  $P$ , 这似乎是合乎需要的. 这样的扩充称为  $\mathcal{C}$  的  $P$  包 ( $P$ -hull). 人们已经付出相当大的努力来构造这样的包. 进一步的细节例如见 [A16].

任意基本范畴上的 Descartes 闭拓扑范畴甚至具有具体幕 (基本范畴  $\mathcal{C}$  上基本函子为  $\mathcal{C}$  的拓扑范畴  $\mathcal{C}$  称为具有具体幕 (concrete powers), 如果对所有的对象  $A$  和  $B$ ,  $\mathcal{C}(B^A) = \mathcal{C}(B)^{\mathcal{C}(A)}$ , 并且  $\mathcal{C}$  和  $\mathcal{C}$  中的赋值映射重合). 例如, Graph 和 Net 都是具有具体幕的拟拓扑斯. 关于任意基本范畴上拓扑范畴的 Descartes 闭性以及拟拓扑斯的研究见 [A1] 和 [A15].

终评. 结果, 例如有关仿紧性、正规性或维数的许多企望得到的性质, 在 Top 中是不成立的, 但把 Top 换成 Near 后却成立, 因为后者可以恰当地嵌入 Mer. 甚至在研究函数空间时, 例如, Mer 的子范畴 Grill 的性态也比 Top 好. 利用近性空间适当的完全化, 即所谓标准完全化 (或 Herrlich 完全化), 可以得到某些著名的扩张及紧化, 例如 Wallman 扩张, Hewitt 实紧化, Александров 单点紧化以及 Stone-Čech 紧化. 甚至拓扑空间的任何 Hausdorff 紧化 (或正则 Hausdorff 扩张) 也可以利用标准完全化得到 (详情例如见 [A17] 及 [A28]). 最后但并非无足轻重的一点, 代数拓扑中使用的 Čech 同调论及上同调论也对近性空间 (及半近性空间) 有了适当的推广, 基本思想是把开覆盖换为一致覆盖 (详情例如见 [A2] 及 [A28]).

#### 参考文献

- [A1] Adámek, J. and Herrlich, H., Cartesian closed categories, quasitopoi and topological universes, *Comm. Math. Univ. Carolinae*, **27** (1986), 235 – 257.
- [A2] Bently, H. L., Homology and cohomology for merotopic and nearness spaces, *Quaest. Math.*, **6** (1978), 541 – 568.
- [A3] Cartan, H., Théorie des filtres, *Comp. Rend.*, **205** (1937), 595 – 598.
- [A4] Choquet, G., Convergences, *Ann. Univ. Grenoble Sect. Sci. Math. Phys. (N. S.)*, **23** (1948), 57 – 112.
- [A5] Császár, A., Foundations of general topology, Macmillan, 1963.
- [A6] Doitchinov, D. B., A unified theory of topological spaces, proximity spaces and uniform spaces, *Soviet Math. Dokl.*, **5** (1964), 595 – 598 (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **5** (1964)).
- [A7] Efremovič, V. A., Geometry of proximity, *Math. USSR Sb.*, **31** (1952), 73, 189 – 200. (*Mat. sb.*, **31** (1952), 73).
- [A8] Fischer, H. R., Limesräume, *Math. Ann.*, **137** (1959), 269 – 303.
- [A9] Fletscher, P. and Lindgren, W. F., Quasi-uniform spaces, M. Dekker, 1982.
- [A10] Fréchet, M., Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. Palermo*, **22** (1906), 1 – 74.
- [A11] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914. Reprinted (incomplete) English translation: Set theory, Chelsea (1978).
- [A12] Herrlich, H., Categorical topology, *General Topol. Appl.*, **1** (1971), 1 – 15.
- [A13] Herrlich, H., Topological structures, in *Math. Centre Tracts*, Vol. 52, Math. Centrum Amsterdam, 1974, 59 – 122.
- [A14] Herrlich, H., Some topological theorems which fail to be true, in *Categorical topology*, Lecture notes in

math., Vol. 540, Springer, 1976, 265 – 285.

- [A15] Herrlich, H., Universal topology, in Categorical Topology, Sigma Ser. Pure Math., Heldermann, 1984, 223 – 281.
- [A16] Herrlich, H., Topological improvements of categories of structured sets, *General Topol. Appl.*, 27 (1987), 145 – 155.
- [A17] Herrlich, H., Topologie II: Uniforme Räume, Heldermann, 1988.
- [A18] Herrlich, H., Salicrup, G. and Vázquez, R., Light factorization structures, *Quest. Math.*, 3 (1979), 189 – 213.
- [A19] Herrlich, H. and Strecker, G. E., Category theory, Heldermann, 1979.
- [A20] Hogbe-Nlend, H., Théorie des bornologies et applications, Lecture notes in math., Springer, 1971.
- [A21] Katětov, M., On continuity structures and Spaces of mappings, *Comm. Math. Univ. Carolinae*, 6 (1965), 257 – 278.
- [A22] Kelley, C. J., Bitopological spaces, *Proc. London Math. Soc.*, 13 (1963), 71 – 89.
- [A23] Kent, D. C., Convergence functions and their related topologies, *Fund. Math.*, 54 (1964), 125 – 133.
- [A24] Kowalsky, H.-J., Limesräume und Komplettierung, *Math. Nachr.*, 12 (1954), 301 – 340.
- [A25] Kuratowski, C., Sur l'opération  $\bar{A}$  de l'analysis situs, *Fund. Math.*, 3 (1922), 182 – 199.
- [A26] Moore, E. H. and Smith, H. L., A general theory of limits, *Amer. J. Math.*, 44 (1922), 102 – 121.
- [A27] Preuss, G., Connectedness and disconnectedness in  $S$ -Near, in Categorical Aspects of Topology and Analysis, Lecture notes in math., Vol. 915, Springer, 1982.
- [A28] Preuss, G., Topological structures — An approach to categorical topology, Reidel, 1988.
- [A29] Reisig, W., Petri nets, EATCS Monographs on Theoretical computer Science, 4, Springer, 1985.
- [A30] Spanier, E. H., Algebraic topology, Springer, 1966 (中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科技出版社, 1987).
- [A31] Steenrod, N. E., A convenient category of topological spaces, *Michigan Math. J.*, 14 (1967), 133 – 152.
- [A32] Tukey, J. W., Convergence and uniformity in topology, Princeton Univ. Press, 1940.
- [A33] Weil, A., Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Hermann, 1937.
- [A34] Wyler, O., Top Categories and categorical topology, *General Topol. Appl.*, 1 (1971), 17 – 28.
- [A35] Wyler, O., Are there topoi in topology?, Lecture notes in math., 540, Springer, 1976, 696 – 719.

【译注】

1) 共拓扑基因空间 (syntopogeneous space) 是指

在它上面定义了共拓扑基因结构 (syntopogeneous structure) 的集合.

共拓扑基因结构的定义如下:

(1) 定义在集合  $E$  的子集族上的关系 “ $<$ ” 称为  $E$  上的序拓扑基因 (order topogene), 如果满足

$$(O_1) \quad 0 < 0, E < E;$$

$$(O_2) \quad A < B \Rightarrow A \subset B;$$

$$(O_3) \quad A \subset A' < B' \subset B \Rightarrow A < B;$$

$$(O_4) \quad \begin{cases} A < B \\ A' < B' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cap A' < B \cap B' \\ A \cup A' < B \cup B' \end{cases}.$$

(2) 考虑集合  $E$  和  $E$  上的非空序拓扑基因族  $\mathcal{S} = \{<\}$ ,  $\mathcal{S}$  称为  $E$  上的共拓扑基因结构, 如果满足

(S<sub>1</sub>)  $<', <" \in \mathcal{S}$ , 则存在比  $<'$  和  $<"$  细的  $< \in \mathcal{S}$ ;

(S<sub>2</sub>)  $< \in \mathcal{S}$ , 则存在  $<' \in \mathcal{S}$ , 使得

$$A < B \Rightarrow \text{存在 } C, \text{ 满足 } A <' C <' B.$$

2) 关于拓扑范畴的进一步讨论见 [B1].

参考文献

- [B1] Adamek, J., Herrlich, H. and Strecker, G. E., Abstract and Concrete Categories, John Wiley & Sons, Inc., 1990.

G. Preuss 撰 胡师度、白苏华 译

拓扑张量积 [topological tensor product; топологическое тензорное произведение], 两个局部凸空间  $E_1$  和  $E_2$  的

关于  $E_1 \times E_2$  上双线性算子有泛性质且满足一连续条件的一个局部凸空间 (locally convex space). 更确切地说, 设  $\mathcal{X}$  是局部凸空间的某一个类且对每一  $F \in \mathcal{X}$  设给定从  $E_1 \times E_2$  到  $F$  中的分别连续双线性算子集合的一个子集  $T(F)$ . 则  $E_1$  和  $E_2$  的拓扑张量积 (关于  $T(F)$ ) 是有以下性质的 (唯一的) 局部凸空间  $E_1 \tilde{\otimes} E_2 \in \mathcal{X}$  连同算子  $B \in T(E_1 \tilde{\otimes} E_2)$ : 对任何  $S \in T(F)$ ,  $F \in \mathcal{X}$ , 存在唯一的连续线性算子  $R: E_1 \tilde{\otimes} E_2 \rightarrow F$  使得  $R \circ B = S$ . 这样, 如果说到函子  $T: \mathcal{X} \rightarrow \text{集合}$ , 则  $E_1 \tilde{\otimes} E_2$  定义为这函子的表示对象.

在所有已知的例子中  $\mathcal{X}$  包含复数域  $\mathbb{C}$ , 而  $T(\mathbb{C})$  包含具有  $f \circ g$  形式,  $f \in E_1^*$ ,  $g \in E_2^*$ , 映  $(x, y)$  到  $f(x)g(y)$  的所有双线性泛函. 如果在拓扑张量积存在的情形, 则存在一个  $E_1 \tilde{\otimes} E_2$  中可等同于代数张量积 (tensor product)  $E_1 \otimes E_2$  的稠密子空间; 此外,  $B(x, y) = x \otimes y$ .

如果  $\mathcal{X}$  由所有分别 (分别地, 联合) 连续双线性算子组成, 则该拓扑张量积称为归纳的 (inductive) (相应地, 射影的 (projective)). 最重要的是射影拓



扑张量积. 设  $\{p_i\}$  是  $E_i (i=1, 2)$  中的一个半范数定义族; 用  $\pi$  表示用半范数族  $\{p_1 \hat{\otimes} p_2\}$  定义的  $E_1 \hat{\otimes} E_2$  上的拓扑:

$$p_1 \hat{\otimes} p_2(u) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n p_1(x_k) p_2(y_k) : \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k = u \right\}.$$

如果  $\mathcal{L}$  是所有的或相应地, 所有完全的局部凸空间的类, 则  $E_1$  和  $E_2$  的射影拓扑张量积存在且其局部凸空间是具有拓扑  $\pi$  的  $E_1 \hat{\otimes} E_2$ , 相应地, 其完全化 (completion). 如果  $E_i$  是带有范数  $p_i$  的 Banach 空间,  $i=1, 2$ , 则  $p_1 \hat{\otimes} p_2$  是  $E_1 \hat{\otimes} E_2$  上的一个范数; 关于它的完全化记成  $E_1 \hat{\otimes} E_2$ . 对每一  $\varepsilon > 0$ ,  $E_1 \hat{\otimes} E_2$  的元素有表示

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes y_k,$$

这里

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_1(x_k) p_2(y_k) \leq p_1 \hat{\otimes} p_2(u) + \varepsilon.$$

如果用半范数族  $p_1 \tilde{\otimes} p_2$

$$p_1 \tilde{\otimes} p_2(u) = \sup_{f, g \in V \times W} |(f \otimes g)(u)|$$

赋予  $E_1 \hat{\otimes} E_2$  一个弱于  $\pi$  的拓扑, 这里  $V$  和  $W$  是关于  $p_1$  和  $p_2$  的单位球面的极集, 则产生了一个拓扑张量积, 有时称为内射的 (injective).

局部凸空间  $E_1$ , 如果具有这样的性质: 对一个任意的  $E_2$  在  $E_1 \hat{\otimes} E_2$  上的两个拓扑重合, 则它们构成核空间 (nuclear space) 这一重要的类.

射影拓扑张量积是与下述的逼近性质相结合的: 局部凸空间  $E_1$  有逼近性质, 如果对每一准紧集  $K \subset E_1$  和零的邻域  $U$  存在有限秩连续算子  $\varphi: E_1 \rightarrow E_1$  使得对所有  $x \in K$  有  $x - \varphi(x) \in U$ . 所有的核空间都有逼近性质. Banach 空间  $E_1$  有逼近性质, 当且仅当对任意 Banach 空间  $E_2$  由方程  $[\tau(x \otimes y)](f \otimes g) = f(x)g(y)$  确切定义的算子  $\tau: [E_1 \hat{\otimes} E_2] \rightarrow (E_1^* \otimes E_2^*)^*$  有平凡核. 无逼近性质的可分 Banach 空间已经构造出来 ([3]). 这空间也给出了无 Schauder 基的 Banach 空间的一个例子, 因为有 Schauder 基的 Banach 空间有逼近性质 (这样, S. Banach 所称的“基问题”已被否定地解决了).

#### 参考文献

- [1] Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Amer. Math. Soc., 1955.
- [2] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Macmillan, 1966.
- [3] Enflo, P., A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math., 130 (1973), 309 - 317. А. Я. Хелемский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Pietsch, A., Nukleare lokalkonvexe Räume, Akad. Verlag, 1965.
- [A2] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., Classical Banach spaces, I, Springer, 1977.
- [A3] Treves, F., Topological vector spaces, distributions and kernels, Acad. Press, 1967.
- [A4] Pisier, G., Factorisation of linear operators and geometry of Banach spaces, Amer. Math. Soc., 1986.

葛显良 译 鲁世杰 校

#### 拓扑传递性 [topological transitivity; топологическая транзитивность]

对于拓扑动力系统 (topological dynamical system)  $\{T_t\}$ , 通常对于流或瀑布 (时间  $t$  取遍实数或整数) 定义的一种性质. 它指的是以整个相空间  $W$  作为其  $\omega$  极限集的轨道  $\{T_t w_0\}$  的存在性. (见轨道的极限集 (limit set of a trajectory); 一个等价条件是在  $W$  中处处稠密的正半轨道  $\{T_t w_0: t \geq 0\}$  的存在性.) 这样的轨道 (半轨道) 称为拓扑传递的.

与拓扑传递性密切相关的是区域的传递性 (transitivity of domains): 对任何非空开集  $U, V \subset W$ , 存在一个  $t > 0$ , 使得  $T_t U \cap V \neq \emptyset$ . 更确切地说, 拓扑传递性蕴涵区域的传递性, 若  $W$  是完全可分度量空间, 则反之亦然 (见 [1], [2]) (这时, 拓扑传递轨道的集合具有连续统的基数). 因此, 在关于  $W$  的同样假定下, 拓扑传递性关于时间的走向是对称的: 若存在以整个  $W$  作为其  $\alpha$  极限集的轨道  $\{T_t w_0\}$ , 则有区域的传递性及拓扑传递性.

拓扑传递性通常指的是在  $W$  中处处稠密的轨道  $\{T_t w_0\}$  的存在性. (当这种轨道的点组成  $W$  中的开集时, 两定义之间有着本质的不同; 否则, 轨道本身就是  $\alpha$  极限或  $\omega$  极限, 因而整个  $W$  就是它的  $\alpha$  极限集或  $\omega$  极限集.) 后一定义也用于更一般的变换群 ([3]). 这个定义以及一些结果也适用于不可逆映射和半群, 尽管在拓扑动力学中往往不涉及这些.

#### 参考文献

- [1] Birkhoff, G. D., Dynamical systems, Amer. Math. Soc., 1927.
- [2] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949 (中译本: В. В. 涅梅茨基, В. В. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性论, 科学出版社, 1956 - 1959).
- [3] Gottschalk, W. and Hedlund, G. A., Topological dynamics, Amer. Math. Soc., 1955.

Д. В. Аносов 撰

【补注】具有区域传递性的拓扑动力系统也称为拓扑遍历的 (topological ergodic) (在 [3] 中称为区域传递的 (regionally transitive)). 在许多情况下, 度量传递性 (metric transitivity) 蕴涵拓扑传递性.

罗嵩龄 译

拓扑向量空间 [topological vector space; топологическое векторное пространство], 拓扑域  $K$  上的

装备着与向量空间结构相容的拓扑 (见拓扑结构 (拓扑) (topological structure (topology))) 的  $K$  上向量空间 (vector space)  $E$ , 即满足以下公理: 1) 映射  $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 + x_2, E \times E \rightarrow E$  是连续的; 和 2) 映射  $(k, x) \rightarrow kx, K \times E \rightarrow E$  是连续的 (这里积  $E \times E$  和  $K \times E$  看成有积拓扑). 完全类似地可定义拓扑除环 (不必交换) 上的拓扑左和右向量空间 (topological left and right vector spaces). 有时带有拓扑  $\tau$  的拓扑向量空间  $E$  表成  $(E, \tau)$ . 另一方面, 关于域  $K$  的说明常常省略.

同一域上两个拓扑向量空间  $E_1$  和  $E_2$  称为同构的 (isomorphic), 如果存在一个从  $E_1$  到  $E_2$  上的连续的一一对应的线性变换且其逆也连续. 拓扑向量空间  $(E, \tau)$  的维数 (dimension of a topological vector space) 是向量空间  $E$  的维数.

在拓扑向量空间上规定拓扑的方法, 和该拓扑的性质. 设  $(E, \tau)$  是拓扑域  $K$  上的一个拓扑向量空间. 此拓扑  $\tau$  在平移下是不变的 (即对任何  $a \in E$  映射  $x \rightarrow x + a$  是从  $E$  到自身上的一个同胚). 所以拓扑  $\tau$  是由任何固定点 (特别是零点) 的邻域基 (base, basis) (基本邻域系) 唯一决定的. 拓扑  $\tau$  是与  $E$  的加群结构相容的, 且以下命题成立. 1)  $E$  是 Hausdorff 的 (分离的), 当且仅当对  $E$  中每一点  $x \neq 0$ , 存在零的一个邻域不包含  $x$ . 2) 如果  $E$  是 Hausdorff 的, 则它是完全正则的. 3) 存在  $E$  上具有下列性质的唯一的一致结构 (亦见一致空间 (uniform space)): a) 它在平移下不变 (即所有平移是一致连续的); 和 b) 与它相伴的拓扑与空间  $E$  的原拓扑一致. 拓扑向量空间中一个集合称为完全的 (complete), 如果它关于上述的一致结构是完全的. 这样, 拓扑空间  $E$  是完全的, 如果  $E$  中每一 Cauchy 滤子 (Cauchy filter) 收敛. 对每一拓扑向量空间  $E$ , 存在一个同一域上的完全拓扑向量空间, 包含  $E$  作为一个处处稠密子集且诱导出  $E$  上的原拓扑和线性结构. 它称为  $E$  的完全化 (completion). 每一 Hausdorff 拓扑向量空间都有 Hausdorff 完全化, 在精确到保持空间  $E$  的元素不动的同构下是唯一的.

此后, 除非明确的说明, 均假定  $K$  是一非离散赋范域, 赋予由此范数导出的拓扑 (见域上的范数 (norm

on a field)). 如果  $E$  是  $K$  上向量空间, 则一个集合  $Q \subset E$  称为圆形的 (circled) 或平衡的 (balanced), 如果对所有  $|k| \leq 1$  的  $k \in K$ ,  $kQ \subset Q$ . 设  $A$  和  $B$  是  $E$  的两个子集, 则称  $A$  吸收  $B$ , 如果存在一个正数  $r$  使得对所有满足  $|k| \geq r$  的  $k \in K$  有  $kA \supset B$ .  $E$  的一个子集称为吸收的 (absorbing) 或径向的 (radial), 如果它吸收每一个单点集. 在每一个  $K$  上拓扑向量空间  $E$  中存在具有以下性质的零的闭邻域基  $\mathcal{N}$ :  $\alpha$ ) 对每一集合  $V \in \mathcal{N}$  存在  $W \in \mathcal{N}$  使得  $W + W \subset V$ ;  $\beta$ ) 每一个  $V \in \mathcal{N}$  是平衡吸收集; 且  $\gamma$ ) 如果  $V \in \mathcal{N}$ , 则对  $K$  中每个  $k \neq 0$ ,  $kV \in \mathcal{N}$ . 另一方面, 设  $\tau$  是  $K$  上向量空间  $E$  的一个拓扑且在平移下不变又有一个零的邻域基  $\mathcal{N}$  满足性质  $\alpha$ ) 和  $\beta$ ), 且又满足以下性质:  $\gamma_1$ ) 存在一个  $k \in K$ ,  $0 < |k| < 1$ , 使得如果  $V \in \mathcal{N}$ , 则  $kV \in \mathcal{N}$ . 那么  $E$  连同拓扑  $\tau$  是  $K$  上的拓扑向量空间 (在  $K$  上的范数是 Archimedes 的 (见 Archimedes 公理 (Archimedean axiom) 情形,  $\gamma_1$ ) 是加在  $(E, \tau)$  上其他性质的结果)). 每一满足  $\alpha$ ),  $\beta$ ) 和  $\gamma_1$ ), 或在有 Archimedes 范数的域的情形至少满足  $\alpha$  和  $\beta$ ) 的  $K$  上向量空间  $E$  的每个滤子基  $\mathcal{F}$  是关于  $E$  上某唯一决定的与向量空间结构相容的拓扑  $\tau$  的零的基本邻域系 (不必是闭的). 实数域  $\mathbf{R}$  或复数域  $\mathbf{C}$  上的一个拓扑向量空间及其拓扑称为局部凸的 (locally convex), 如果  $E$  有一个凸集组成的零的邻域基 (局部凸空间的定义有时也要求该空间是 Hausdorff 的).

例 1) 每个拓扑域  $K$  可看作它本身上的 (一维) 拓扑向量空间. 按此方式考虑, 它将表示成  $K_0$ . 2) 设  $I$  是一非空集, 又设  $K_0^I$  是  $K_0$  的  $I$  重积所成的  $K$  上向量空间, 赋予乘积拓扑. 那么  $K_0^I$  是拓扑向量空间. 3) 如果拓扑域  $K$  的拓扑是离散的, 则  $K$  上每个向量空间, 带有与其加法群结构相容且对与  $K$  的任意非零元相乘不变的拓扑, 就是一个拓扑向量空间 (特别地, 这些条件被  $E$  上离散拓扑所满足). 具有离散拓扑的域上的一个拓扑向量空间称为拓扑向量群 (topological vector group). 4) 设  $E$  是拓扑域  $K$  上的一个向量空间, 又设  $\mathcal{P}$  是  $E$  上半范数的一个集合.  $E$  上按半范数 (semi-norm)  $p$  半径为  $r > 0$  的球 (ball) 是集合  $\{x \in E: p(x) < r\}$ . 按属于  $\mathcal{P}$  的 (所有) 半范数的 (所有有正半径的) 球的所有有限交的集合构成关于  $E$  上与向量空间结构相容的某拓扑  $\tau_{\mathcal{P}}$  的零的邻域基. 称此拓扑由  $\mathcal{P}$  给出或定义. 如果  $K = \mathbf{R}$  或  $K = \mathbf{C}$ , 则  $\tau_{\mathcal{P}}$  是局部凸的. 反之, 任何局部凸空间 (locally convex space) 的拓扑可由某半范数的集合定义, 例如, 由平衡凸集组成的零的任意邻域子基的规范函数 (Minkowski 泛函) 的集合定义.

拓扑向量空间的一个子集称为有界的 (bounded), 如果被零的每个邻域吸收.



一个拓扑向量空间称为可赋范的 (normable), 如果它的拓扑可由单一的范数定义.  $\mathbf{R}$  或  $\mathbf{C}$  上一个拓扑向量空间可赋范, 当且仅当它是 Hausdorff 的且有零的一个凸有界邻域 (Kolmogorov 定理 (Kolmogorov theorem)).

5) 设  $n$  是一自然数, 设  $I_n$  是包含  $n$  个元素的一个集合又令  $K_0^n = K_0^{I_n}$ .  $K_0^n$  的拓扑由范数  $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$  定义, 其中符号  $|\cdot|$  表示  $K$  中范数. 如果域  $K$  是完全的, 则  $K$  上每个  $n$  维拓扑向量空间同构于  $K_0^n$  (对  $n=1$  即使无  $K$  的完全性假设这仍成立). 如果域  $K$  是局部紧的, 则  $K$  上一个 Hausdorff 拓扑向量空间是有限维的, 当且仅当它有零的一个准紧邻域 (Tikhonov 定理 (Tikhonov theorem)).

一个拓扑向量空间称为可度量化的, 如果它的拓扑可由某个度量 (metric) 定义 (在所有这样的度量中, 总存在一个平移下不变的). 一个拓扑向量空间可度量化, 当且仅当它是 Hausdorff 的且有零的一个可数邻域基.

6) 设  $(E, \tau)$  是一个拓扑向量空间, 设  $E_1$  是  $E$  的向量子空间又设  $\tau_1$  是  $E_1$  上子空间拓扑. 拓扑  $\tau_1$  是与  $E_1$  的向量空间结构相容的. 拓扑向量空间  $(E_1, \tau_1)$  称为拓扑向量空间  $(E, \tau)$  的拓扑向量子空间 (topological vector subspace). 如果  $\mathscr{V}$  是  $(E, \tau)$  中零的一个邻域基 (分别地, 子基), 则集合  $\{V \cap E_1 : V \in \mathscr{V}\}$  构成  $(E_1, \tau_1)$  中零的一个邻域基 (分别地, 子基). 如果  $(E, \tau)$  是 Hausdorff 的 (分别地, 可度量化的, 局部凸的), 则  $(E_1, \tau_1)$  也是如此. 如果拓扑  $\tau$  是由某半范数集合给出, 则拓扑  $\tau_1$  由这些半范数在  $E_1$  上的限制给出.

7) 设  $(E, \tau)$  和  $E_1$  如上面的 6), 又设  $E/E_1$  是  $E$  关于子空间  $E_1$  的商向量空间.  $E/E_1$  上商拓扑  $\tau_2$  与  $E/E_1$  上向量空间结构是相容的. 拓扑向量空间  $(E/E_1, \tau_2)$  称为  $(E, \tau)$  在  $E_1$  上的拓扑向量商空间 (topological vector quotient space). (由商空间定义, 一个集合  $V \subset E/E_1$  在  $\tau_2$  中是闭的, 当且仅当在典范映射  $E \rightarrow E/E_1$  下它的逆象在  $(E, \tau)$  中闭. 如果  $\mathscr{V}$  是  $E$  中零的一个邻域基, 则在典范映射  $E \rightarrow E/E_1$  下它的元素的象的集合构成  $(E/E_1, \tau_2)$  中零的一个邻域基 (对子基, 一般这不成立). 拓扑向量空间  $(E/E_1, \tau_2)$  是 Hausdorff 的, 当且仅当子空间  $E_1$  在  $(E, \tau)$  中是闭的. 如果  $\{0\}$  表示单元集  $\{0\}$  在  $(E, \tau)$  中的闭包, 则 (Hausdorff) 拓扑向量空间  $E/\overline{\{0\}}$  称为与  $E$  相伴的 Hausdorff 拓扑向量空间. 当然, 如果  $E$  本身是 Hausdorff 的, 则相伴 Hausdorff 拓扑向量空间同构于它. 如果  $E$  是局部凸的 (分别地, 如果  $E$  可度量化且  $E_1$  是闭的; 或如果  $E$  可度量化且是完全的), 则  $E/E_1$  是局部凸的 (分

别地, 可度量化, 完全的). 然而  $E$  可以是完全的 (不能度量化) 且有一个非完全的拓扑向量商 (甚至是可分的可度量化的) (见下).

8) 设  $\mathscr{S}$  是  $[0, 1]$  上所有 Lebesgue 可测实值函数的向量空间, 设  $\mu_1$  是这区间上的 Lebesgue 测度, 对每个  $n \in \mathbf{Z}_+$ , 令

$$V_n = \left\{ f \in \mathscr{S} : \mu_1 \left\{ t \in [0, 1] : |f(t)| > \frac{1}{n+1} \right\} < \frac{1}{n+1} \right\}.$$

集合  $\mathscr{V} = \{V_n : n \in \mathbf{N}\}$  构成  $\mathscr{S}$  中具有性质  $\alpha$ ) 和  $\beta$ ) 的一个滤子基. 设  $\tau$  是  $\mathscr{S}$  上带有零的邻域基  $\mathscr{V}$  的与向量空间结构相容的拓扑, 且设  $\mathscr{S}_0$  是与  $(\mathscr{S}, \tau)$  相伴的 Hausdorff 拓扑向量空间 ( $(\mathscr{S}, \tau)$  本身不是 Hausdorff 的). 拓扑向量空间  $\mathscr{S}_0$  可距离化, 但不是局部凸的. 作为一个向量空间, 它可恒同于  $[0, 1]$  上  $\mu_1$  可测实值函数的  $\mu_1$  等价类的空间.  $(\mathscr{S}, \tau)$  (分别地,  $\mathscr{S}_0$ ) 中一个序列的收敛与 (第一种情形中个体的函数的, 而第二种情况下  $\mu_1$  等价类的) 依测度收敛是一样的.

从现在起  $K = \mathbf{R}$  或  $K = \mathbf{C}$ .

9) 设  $S = S(\mathbf{R}^n)$  是取值于  $K$ , 且满足以下条件的所有  $\mathbf{R}^n$  上无穷可微函数  $\varphi$  的向量空间: 对  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$ , 对所有  $k, \gamma \in \mathbf{Z}_+$ ,

$$p_{rk}(\varphi) \equiv \max(1 + \|t\|^\gamma) \|\varphi^{(k)}(t)\| < \infty,$$

其中

$$\|t\| = [\sum |t_i|^2]^{1/2},$$

$$\|\varphi^{(k)}(t)\| =$$

$$= \max \left\{ \left| \frac{\partial^k \varphi(t)}{\partial t_1^{k_1} \cdots \partial t_n^{k_n}} \right| : k_1 + \cdots + k_n = k \right\}.$$

赋予用以上方程定义的范数  $p_{rk}$  的集合来给定的拓扑  $\tau_s$ ,  $S$  是完全、可距离化的、局部凸空间 (这样的空间称为 Fréchet 空间 (Fréchet space)). 空间  $(S, \tau_s)$  在广义函数 (generalized function) 理论中起着重要作用. 有兴趣的是在  $S$  上没有任何范数使  $S$  成为 Banach 空间且使得函数  $\varphi \mapsto \varphi(t)$ ,  $S \rightarrow K (t \in \mathbf{R})$  都连续 (特别地,  $(S, \tau_s)$  不是可赋范的).

构造拓扑向量空间的某些方法. 1) 投射拓扑 (projective topology). 设  $E$  是一个向量空间, 又对某指标集  $\mathscr{A}$  中的每个  $\alpha$ , 设  $g_\alpha$  是从  $E$  到一个拓扑向量空间  $E_\alpha$  中的线性变换. 则使得所有映射  $g_\alpha$  连续的  $E$  上的所有拓扑中, 有一个最弱的拓扑  $\tau$  (拓扑集合  $\{g_\alpha^{-1}(\tau_\alpha) : \alpha \in \mathscr{A}\}$  的上确界, 其中对每个  $\alpha$ ,  $\tau_\alpha$  是  $E_\alpha$  上拓扑). 该拓扑  $\tau$  称为投射拓扑, 且赋予  $\tau$  的

空间  $E$  称为空间族  $E_\alpha$  关于映射  $g_\alpha$  的投影极限 (projective limit). 拓扑  $\tau$  是与  $E$  上向量空间结构相容的, 且如果所有空间  $(E_\alpha, \tau_\alpha)$  是局部凸的, 则  $(E, \tau)$  也是. (有时术语“投影极限”用于表示一种更特殊的构造, 且不是“带投影拓扑的空间”的同义词, 见局部凸空间 (locally convex space).)

投影拓扑的例: a) 空间族  $E_\alpha$  的积赋予关于投影  $g_\alpha$  的投影拓扑——术语“投影极限”由来于此. b) 设  $E$  是一个向量空间又设  $\{\tau_\alpha\}$  是  $E$  上与向量空间结构相容的一族拓扑. 赋予拓扑  $\{\tau_\alpha\}$  的上确界的空间  $E$  是拓扑向量空间族  $\{(E, \tau_\alpha)\}$  关于恒等映射族  $E \rightarrow E$  的投影极限. c)  $E$  的一个拓扑子空间  $E_1$  是单一族  $\{E\}$  关于包含映射  $E_1 \rightarrow E$  的投影极限. d) 任一局部凸空间是一族 Banach 空间 (Banach space) 的投影极限.

2) 归纳拓扑 (inductive topology). 设  $E$  是一个向量空间, 且对某集合  $\mathfrak{A}$  中每个  $\alpha$ , 设  $g_\alpha$  是从一个拓扑向量空间  $E_\alpha$  到  $E$  中的线性变换. 则在  $E$  中存在: a) 一个使所有  $g_\alpha$  都连续的最强拓扑; b) 一个与其向量空间结构相容的且使所有这些映射都连续的最强拓扑; c) 一个使所有  $g_\alpha$  都连续的最强局部凸拓扑 (即使所有  $E_\alpha$  是局部凸空间的情形, 这三个拓扑可以不同). 如果所有的  $E_\alpha$  是局部凸空间, 则空间  $E$  赋予 c) 中定义的拓扑就称为空间族  $\{E_\alpha\}$  关于映射族  $g_\alpha$  的归纳极限 (inductive limit), 而该拓扑是 (同一空间族关于同一映射族的) 归纳拓扑. 术语“归纳极限”有时也在不同的意义下使用. 这里引入的意义是文献中用得最广的. 归纳拓扑是一种投影拓扑, 是拓扑集合的上确界.

归纳极限的例: a) 局部凸空间族  $\{E_\alpha\}$  的局部凸直和 (direct sum). 这是向量空间族  $\{E_\alpha\}$  的代数直和  $E$ , 赋予局部凸空间族  $\{E_\alpha\}$  关于  $E_\alpha$  到  $E$  中的典范包含  $g_\alpha$  族的归纳拓扑. b) 设  $E$  是一向量空间又设  $\{\tau_\alpha\}$  是  $E$  上一族与向量空间结构相容的局部凸拓扑. 设  $\tau$  是它在所有局部凸拓扑的类中的下确界. 则局部凸空间  $(E, \tau)$  是局部凸空间族  $\{(E, \tau_\alpha)\}$  关于  $E$  上恒同映射族的归纳极限. c) 设  $E$  是局部凸空间又设  $E_1$  是一向量空间. 拓扑向量商空间  $E/E_1$  是单元集  $\{E\}$  关于典范映射  $E \rightarrow E/E_1$  的归纳极限. d) 局部凸空间称为有界型的 (bornological), 如果从它到任何 Banach 空间中的映每一有界集到有界集的任一线性变换均是连续的. 一个局部凸空间是有界型的, 当且仅当它是一族可赋范局部凸空间的归纳极限. e) 设  $\Omega$  是空间  $\mathbb{R}^n$  的一个非空开子集, 又对每一紧统  $K \subset \Omega$ , 设  $D_K$  是由所有在  $\Omega \setminus K$  上为零的  $S(\mathbb{R}^n)$  中函数组成的  $(S(\mathbb{R}^n), \tau_S)$  的拓扑向量子空间. 令  $D(\Omega)$  是向量子空间  $\bigcup \{D_K: K \subset \Omega\}$  赋予局部凸空

间族  $\{D_K: K \subset \Omega\}$  关于典范包含  $D_K \rightarrow D(\Omega)$  的归纳拓扑. 局部凸空间  $D(\Omega)$  (它也在广义函数论中起重要作用) 是完全的、Hausdorff 的和不可度量化. 它是一个 Montel 空间 (Montel space), 因而是仿紧的, 也是正规的. 空间  $D(\Omega)$  有一个不完全的可度量化商空间 ([11]) 且后者是某  $\mathbb{R}^N$  的真稠子空间.

3) 映射的空间 (spaces of mappings). 设  $E$  是一拓扑向量空间,  $T$  是一个集合而  $\sigma$  是  $T$  的子集的一个集合以包含关系为序, 使以下性质成立: 对所有的  $B_1, B_2 \in \sigma$  存在  $B_3 \in \sigma$  满足  $B_3 \supset B_1 \cup B_2$ . 设  $L$  是从  $T$  到  $E$  中的映射的某向量空间 (带有自然的代数运算), 又设  $\mathcal{V}$  是  $E$  中零的一个邻域基. 对  $B \in \sigma$  和  $V \in \mathcal{V}$ , 令  $v_{B,V} = \{g \in L: g(B) \subset V\}$ . 则集合  $\{v_{B,V}: B \in \sigma, V \in \mathcal{V}\}$  是对  $L$  上平移下不变的唯一拓扑的零 (把  $T$  的全体映成  $E$  的零元的映射  $f \in L$ ) 的一个邻域基. 这个拓扑称为在  $\sigma$  中集合上的一致收敛拓扑 (topology of uniform convergence), 或简称  $\sigma$  拓扑 ( $\sigma$ -topology). 这拓扑与  $L$  上向量空间结构相容, 当且仅当对所有的  $f \in L$  和所有的  $B \in \sigma$  集合  $f(B)$  在  $E$  中有界. 例如, 如果  $\sigma$  是  $T$  的所有有限子集的集合, 则以上条件成立. 在这种情形下  $L$  上这个  $\sigma$  拓扑称为逐点收敛拓扑 (topology of pointwise convergence). 这个拓扑是由空间  $E$  的复本组成的族  $\{E_t: t \in T\}$  关于映射  $L \rightarrow E_t, g \mapsto g(t)$  的投影拓扑 (在  $L$  中). 赋予  $\sigma$  拓扑的空间  $L$  将表成  $L_\sigma$ . 如果  $T$  是一个拓扑向量空间且空间  $L$  的所有元素是连续线性映射而  $\sigma$  的所有元素是  $T$  中有界集, 则  $L_\sigma$  也是拓扑向量空间. 如果  $E$  是局部凸空间, 则  $L_\sigma$  也是如此. 从拓扑向量空间  $E_1$  到  $E_2$  中的所有连续线性映射的向量空间表成  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ . 特别地, 假设  $E$  是局部凸空间.  $E$  的 (拓扑地) 对偶 (topologically dual) 空间是  $E$  上所有连续线性泛函的向量空间  $E'$ . 这样  $E' = \mathcal{L}(E, K_0)$ .  $E'$  赋予  $E$  的所有有界子集的集合  $\beta$  上的一致收敛拓扑, 则它称为强对偶 (strong dual) (且它的拓扑称为强拓扑 (strong topology)), 且表成  $\beta(E', E)$ .  $E'$  上点式收敛拓扑也称为弱拓扑 (weak topology), 或更通常地称为弱 \* 拓扑 (weak-\* topology). 对弱 \* 拓扑一般采用的记号是  $\sigma(E', E)$ . 已知  $E_\sigma$  的拓扑对偶空间可按显然的方式 ( $E \ni x \mapsto [g \mapsto g(x)]$ ) 典范地恒同于  $E$ . 因而  $E$  可以给予  $E'$  上点式收敛拓扑  $\sigma(E, E')$  (称为弱拓扑 (weak topology)).  $(E, \sigma(E, E'))$  常表成  $E_\sigma$ . 它的对偶是  $E'$ , 而且  $\sigma(E, E')$  是使得  $(E, \tau)' = E'$  的  $E$  上最弱局部凸拓扑  $\tau$ . 也有具有此性质的一个最强局部凸拓扑, 即所谓的 Mackey 拓扑 (Mackey topology)  $\mu(E, E')$ . Mackey 拓扑是在  $E'$  的绝对凸  $\sigma(E', E)$  紧子集上的一致收敛拓扑. 当  $E$  是赋范空间时,



$\sigma(E', E)$  称为  $E'$  上弱 \* 拓扑. 任何局部凸空间的拓扑可看成其对偶空间的某些子集的集合上的收敛拓扑.

4. 张量积 (tensor products). 设  $E_1$  和  $E_2$  是局部凸空间, 令  $E_1 \otimes E_2$  是它们的代数张量积 (tensor product), 又设  $b$  是从拓扑空间  $E_1 \times E_2$  到  $E_1 \otimes E_2$  中的典范双线性映射.  $E_1 \otimes E_2$  上的投射 (projective) (相应地, 归纳 (inductive)) 拓扑是使得  $b$  连续 (相应地, 分别连续) 的  $E_1 \otimes E_2$  上所有局部凸拓扑中的最强者. 即使这术语不是完全一致的, 但它是通常采用的. 在向量空间上由配置投射 (分别地, 归纳) 拓扑而得到的局部凸空间表成  $E_1 \otimes_\pi E_2$  ( $E_1 \otimes_i E_2$ ) 且它的完全化表成  $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$  ( $E_1 \hat{\otimes}_i E_2$ ). 空间  $E_1 \otimes_\pi E_2$  和  $E_1 \otimes_i E_2$  称为相应的局部凸空间的局部凸张量积 (locally convex tensor product), 而它们的完全化称为完全局部凸张量积. 除了这里引入的那些以外, 还有另外的局部凸张量积. 这些是由于在代数张量积上引入与上述不同的拓扑而产生的. 如果张量积的因子之一是一个核型空间 (nuclear space), 则它的许多性质就更简单.

例. 局部凸空间  $S(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes}_\pi S(\mathbb{R}^k)$ ,  $S(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes}_i S(\mathbb{R}^k)$  和  $S(\mathbb{R}^{n+k})$  是典范同构的 (前面两者之间的同构是从 Fréchet 空间之积到任意局部凸空间中每一分别连续双线性映射是连续的这一事实的结果). 局部凸空间  $D(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes}_i D(\mathbb{R}^k)$  和  $D(\mathbb{R}^{n+k})$  也是典范同构的. 向量空间  $D(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes}_\pi D(\mathbb{R}^k)$  和  $D(\mathbb{R}^{n+k})$  是典范同构的, 但它们的拓扑不一致 ([8], [9]).

对偶性 (duality). 局部凸空间及其对偶之间的关系在局部凸空间研究中起着重要的作用. 特别地, 一个局部凸空间的某些性质依赖于其对偶空间的大小. 例如, 如果  $E$  是一个局部凸空间而  $E'$  是它的对偶, 则对所有与  $E$  和  $E'$  之间对偶性相容的  $E$  上局部凸拓扑, 有界集恰好是同样的, 且闭凸集也恰好是同样的.

对偶性理论原来对完全空间的研究是有用的. 这样, 一个局部凸空间 (分别地, 可度量化局部凸空间)  $E$  是完全的, 当且仅当如其对偶  $E'$  的每一个超平面与  $E$  中零的所有邻域的极集之交在拓扑  $\sigma(E', E)$  中都是闭的, 则它本身在该拓扑中也是闭的 (Banach-Grothendieck 定理 (Banach-Grothendieck theorem) 和 Крейн-Шмульян 定理 (Krein-Shmul'yan theorem)).

在这方面可给出以下定义. 一个局部凸空间称为  $B_r$  完全的 ( $B_r$ -complete) (相应地,  $B$  完全的 ( $B$ -complete) 或满完全的 (fully complete), 超完全的 (hypercomplete) Крейн-Шмульян 空间 (Krein-Shmul'yan space)), 如果  $(E', \sigma(E', E))$  中与  $E$  中零的所有邻域的极集之交是闭的处处稠密线性子空间

(分别地, 线性子空间, 绝对凸集, 凸集) 本身是闭的. 这些空间类在推广 Banach 的闭图象定理和开映射定理 (见以下) 中起重要作用. 完全可度量化局部凸空间和自反 (见以下) 可度量化局部凸空间的强对偶属于这些空间类之一. 同时, 空间  $D$  和  $D'$  不属于其中任一类. 超完全空间类与 Крейн-Шмульян 空间类不一致. 然而迄今还不知道  $B_r$  完全空间类和超完全空间类是否一致.

用对偶性方法也可证明关于局部凸空间紧子集的命题. 1) 设  $E$  是一个局部凸空间又设  $H$  是具有 Mackey 拓扑中完全闭凸包的  $E$  的子集. 若  $H$  的每一元素序列有  $E$  中极限点, 则  $H$  是相对紧的 (Eberlein 定理 (Eberlein theorem)). 2) 设  $E$  是可度量化局部凸空间又设  $\{x_n\}$  是  $E$  中序列其每一子序列有  $(E, \sigma(E, E'))$  中的极限点. 则从  $\{x_n\}$  可抽取收敛子序列 (Шмульян 定理 (Shmul'yan theorem)). 3) 设  $B$  是 Hausdorff 局部凸空间  $E$  的一个紧子集又设  $C$  是  $B$  的闭凸包. 则  $C$  是紧的, 当且仅当它在 Mackey 拓扑中是完全的 (Крейн 定理 (Krein theorem)).

局部凸空间  $E$  称为半自反的 (semi-reflexive) (分别地, 自反的 (reflexive)), 如果典范包含  $x \rightarrow [g \rightarrow g(x)]$ ,  $E \rightarrow (E'_\beta)_\beta$  是向量空间的同构 (分别地, 拓扑向量空间的同构). 一个局部凸空间是半自反的, 当且仅当其中每一个有界子集按拓扑  $\sigma(E, E')$  是相对紧的. 它是自反的, 当且仅当它是半自反的桶型空间 (barrelled space).

拓扑向量空间之间的映射. 1. 闭图象和开映射定理 (closed-graph and open-mapping theorems). 从一个拓扑向量空间  $E_1$  到一拓扑向量空间  $E_2$  中的线性映射  $f$  称为拓扑同态 (topological homomorphism), 如果它把  $E_1$  中每一开集映成  $f(E_1)$  中开集 (按由  $E_2$  诱导出的拓扑).  $f: E_1 \rightarrow E_2$  的图象 (graph) 是集合  $\{(x, f(x)): x \in E_1\} \subset E_1 \times E_2$ .

设  $\mathcal{E}_1$  和  $\mathcal{E}_2$  是两个拓扑向量空间类. 称关于偶对  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$  闭图象定理 (分别地, 同态定理或开映射定理) 成立, 如果对所有的  $E_1 \in \mathcal{E}_1$  和  $E_2 \in \mathcal{E}_2$ , 每一个其图象在拓扑向量空间  $E_1 \times E_2$  中是闭的线性映射  $f: E_1 \rightarrow E_2$  是连续的 (分别地, 如果每一个从  $E_2$  到  $E_1$  上的满连续线性映射是拓扑同态). 如果  $\mathcal{E}$  是所有完全、可度量化的拓扑向量空间的类, 则闭图象定理和开映射定理两者对  $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  成立 (Banach 定理 (Banach theorem)). 这结果可以加强. 设  $\mathcal{E}_1$  是所有作为 Banach 空间族的归纳极限的 Hausdorff 局部凸空间的类 (这种空间称为超有界型的 (ultrabor-nological)), 又设  $\mathcal{E}_2$  是包含所有完全、可度量化局部凸空间且关于其中空间的可数族的投射和归纳极限是封闭的最小局部凸空间类. 则闭图象和开映射定理关

于偶对  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$  成立 (Райков 定理 (Raikov theorem)). (在泛函分析中出现的具有其通常拓扑的所有完全局部凸空间同时属于这两类.) 事实上, 上述论断对比  $\mathcal{E}_2$  稍微宽一些的拓扑向量空间类  $\mathcal{E}_2'$  可以证明, 且可对多值线性映射证明之. 在 [7] 中已描述了另一类拓扑向量空间  $\mathcal{E}_2'' \supset \mathcal{E}_2'$ , 它可取代该论断中  $\mathcal{E}_2$  的地位, 这就是所谓带网空间 (spaces with a web).

设  $\mathcal{E}, \mathcal{E}_\ell, \mathcal{E}_\ell'$  分别是所有 Hausdorff 桶型的、总体完全的、和  $B_\ell$  完全的局部凸空间类. 那么闭图象定理对  $(\mathcal{E}, \mathcal{E}_\ell')$  成立, 而开映射定理对  $(\mathcal{E}, \mathcal{E}_\ell)$  成立.

2. 不动点定理 (fixed-point theorems). a) 设  $E$  是 Hausdorff 局部凸空间,  $K$  是它的非空凸紧子集, 又设  $f$  是从  $K$  到  $K$  的非空凸闭子集的集合中的一个映射. 假设对每个  $x \in K$  和集合  $f(x)$  的每个邻域  $\mathcal{U}$ , 存在  $x$  的一个邻域  $\mathcal{V}$  使得  $f(\mathcal{V} \cap K) \subset \mathcal{U}$  ( $f$  的这个性质称为上半连续性 (upper semicontinuity)); 则存在点  $z \in K$ , 使得  $z \in f(z)$  ——  $f$  的一个“不动点” (樊畿定理 (Fan theorem) —— Schauder-Тихонов 定理 (Schauder-Tikhonov theorem) 的一种推广). b) 设  $E$  是 Hausdorff 拓扑向量空间,  $K$  是它的非空紧凸子集, 又设  $\Gamma$  是从  $K$  到  $K$  中的具有以下性质的两两可交换的映射  $g$  的集合: 如果  $x, z \in K, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  且  $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ , 则  $g(\alpha x + \beta z) = \alpha g(x) + \beta g(z)$ . 那么存在点  $z_0 \in K$ , 使得对所有  $g \in \Gamma$  有  $g(z_0) = z_0$  (Марков-角谷静夫定理 (Markov-Kakutani theorem)).

3. 在局部凸空间理论中也有很大重要性的是 Hahn-Banach 定理 (Hahn-Banach theorem) 和 Banach-Steinhaus 定理 (Banach-Steinhaus theorem).

在取值于局部凸空间的测度理论中, 且特别是与随机过程理论相联系, 在局部凸空间上数值柱面测度理论中, 许多有意义的结果已经得到.

拓扑向量空间上的数学分析已经兴起, 且继续在发展, 这就是所谓无穷维分析 (infinite-dimensional analysis). 虽然它是经典分析的一种推广, 但是在其中产生的问题和结果方面以及在方法方面与经典分析都有所不同. 无穷维分析包括拓扑向量空间上可微映射和拓扑向量空间上可微测度的理论; 拓扑向量空间上广义函数和测度 (分布) 的理论; 以及微分方程理论——包括关于实自变量而取值在拓扑向量空间的函数的微分方程, 和关于定义在拓扑向量空间上的数值函数和测度 (可以是广义的) 的微分方程两者. 无穷维分析的语言对于表述无穷维系统物理学——量子场论、统计力学和流体动力学中的基本问题是很自然的, 对于表述起源于无穷维分析以外的某些数学问题

也是如此.

#### 参考文献

- [1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Topological vector spaces, Addison-Wesley, 1977 (译自法文).
- [2] Robertson, A. and Robertson, B., Topological vector spaces, Cambridge Univ. Press, 1964.
- [3] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Macmillan, 1966.
- [4] Edwards, R. E., Functional analysis: theory and applications, Holt, Rinehardt, Winston, 1965.
- [5] Pietsch, A., Nuclear locally convex spaces, Springer, 1972 (译自德文).
- [6] Pietsch, A., Operator ideals, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1978.
- [7] Wilde, M. de, Closed graph theorems and webbed spaces, Pitman, 1978.
- [8A] Schwartz, L., Théorie des distributions, Hermann, 1966.
- [8B] Schwartz, L., Théorie des distributions à valeurs vectorielles I, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 7 (1957), 1–141.
- [8C] Schwartz, L., Théorie des distributions à valeurs vectorielles II, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 8 (1958), 1–209.
- [9] Шавгулидзе, Е. Т., «Функц. анализ и его прил.», 11 (1977), 1, 91–92.
- [10] Смолянов, О. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 35 (1971), 3, 682–696.
- [11] Смолянов, О. Г., Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения, М., 1979.
- [12] Jarchow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981.
- [13] Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 1–140.
- [14] Valdivia, M., Topics in locally convex spaces, North-Holland, 1982.
- [15] Köthe, G., Topological vector spaces, 1–2, Springer, 1969–1979.
- [16] Pérez Carrera, P. and Bonet, J., Barrelled locally convex spaces, North-Holland, 1987.
- [17] Fröhlicher, A. and Kriegel, A., Linear spaces and differentiation theory, Wiley, 1988.
- [18] Смолянов, О. Г., Шавгулидзе, Е. Т., Непрерывные интегралы, М., 1990.

О. Г. Смолянов 撰

【补注】关于无穷维分析方面, 例如见抽象微分方程 (differential equation, abstract), 微分方程定性理论 (Banach 空间中的) (qualitative theory of differential equations in Banach spaces), 向量测度 (vector measure) 以及 [A3].

一个局部凸拓扑向量空间是拟完全的 (quasi-com-



plete), 如果每一个有界闭集是完全的. 每一个拟完全的拓扑向量空间是序列完全的 (sequentially complete) (每一个 Cauchy 序列有极限). 有不是拟完全的序列完全空间的例子, 也有不是完全的拟完全空间的例子 ([15]). 有自然的拟完全化运算 ([15], Vol. 1, p. 295).

#### 参考文献

- [A1] Horvath, J., Topological vector spaces and distributions, 1, Addison-Wesley, 1968.
- [A2] Dugundji and Granas, A., Fixed point theory, 1, PWN, 1982.
- [A3] Daleckiĭ, Yu. L. and Fomin, S. V., Measures and differential equations in infinite-dimensional spaces, Kluwer, 1992 (译自俄文).

葛显良 译 鲁世杰 校

**拓扑化范畴** [topologized category; топологизированная категория]

赋予 Grothendieck 拓扑的范畴.

【补注】 见景 (site).

**拓扑学** [topology; топология]

在数学的框架下, 研究并阐述连续性思想的数学分支. 连续性思想直观地表达了时间和空间的基本性质, 因而有重要的学术价值. 在拓扑学中, 连续性概念得到数学的证明, 因此它很自然地渗透到几乎所有的数学分支. 拓扑学和代数学一起, 构成了数学的普遍基础, 促进了数学的统一.

拓扑学的目的是研究图形以及图形之间相互位置关系的性质, 这些性质在同胚 (homeomorphism) 之下保持不变. 同胚是其逆映射也连续的一一连续映射. 因此, 可以把拓扑学视为几何学的一个分支. 此分支的一个特点是: 由其规则界定的研究范围囊括了很广泛的一类几何对象.

导致这种广泛性的原因是: 拓扑学的主要概念——同胚——的定义不需要任何经典的几何概念, 例如, 不需要距离、直线性、线性、光滑性等等概念. 同胚的概念及基于它的连续映射概念仅仅假定: 被研究的点和图形的点集可以有某种直观上明显的邻近性关系, 一般说来, 这种关系有别于简单的隶属关系.

拓扑学中的“图形”是这样的任意点集, 在它上面, 点和满足指定公理的某些点集之间给定了邻近性的关系. 这样的图形称为**拓扑空间** (topological space). 实际上, 在某种几何 (仿射几何、射影几何、微分几何等等) 意义下的任意图形自然也可以看作是拓扑空间. 在这个意义下, 拓扑学是最一般的几何学; 而且, 在拓扑学中有意略去了其他几何学所研究图形的许多性质.

拓扑学的主要问题是识别和研究空间的拓扑性质, 或**拓扑不变量** (topological invariant). 最重要的拓扑不变量是**连通性** (connectivity); **紧性** (compactness); **维数** (dimension); **拓扑空间的权** (weight of a topological space); **基本群** (fundamental group); 以及**同调群** (homology group).

此外, 受到颇多注意的是一个图形在另一个图形中的位置关系或一个拓扑空间在另一个拓扑空间中的位置关系, 这些关系在其包含空间到自身的同胚映射之下保持不变. 这类问题始于 **Jordan 定理** (Jordan theorem). 在这些思想的发展进程中, 人们得到了 **Alexander 对偶律** 及其推广, **纽结理论** (knot theory).

按一般的作法, 很自然地把三元组  $(X, f, Y)$  视为拓扑学的主要研究对象, 这里  $f$  是拓扑空间  $X$  到拓扑空间  $Y$  的连续映射. 它包括上述拓扑学基本问题的两种描述. 用范畴论的说法, 比较诸三元组的基本工具是它们之间的连续同胚.

现代拓扑学涉及的很多拓扑空间 (准确地说, 拓扑空间类型) 是在反映多种数学分支的很不相同需要的影响下描述的. 这表明拓扑空间的范围先天就是多样的.

在作为整个数学对拓扑学的需要而描述的最重要的拓扑空间类中, 特别地有: **流形** (光滑的, 分段线性的, 拓扑的, 等等, 见 **流形** (manifold))——这些拓扑空间局部地具有 Euclid 空间的结构; **多面体** (见 **抽象多面体** (polyhedron, abstract))——这些空间是由诸如线段、三角形、四面体等初等图形“引伸”出来的. (作为多面体概念的基础的单纯复形的概念, 是研究多面体和流形的重要工具); Euclid 空间的子空间 (研究子空间及其在空间中位置关系的拓扑学部分通常称为几何拓扑学); **函数空间** (例如具有点态收敛拓扑或具有紧开拓扑的连续函数 (映射) 空间和具有弱拓扑的 **Banach 空间** (Banach space)——这类拓扑对象在泛函分析及其应用起重要作用).

许多重要的拓扑空间类是用公理方式, 即以具体拓扑对象的某种重要性质来分类的. 例如, **Heine-Borel 定理** (Heine-Borel theorem) (见 **Borel-Lebesgue 覆盖定理** (Borel-Lebesgue covering theorem)): 有限闭区间的由开区间构成的每个覆盖都有有限的子覆盖. 该定理导致定义抽象的**紧性** (compactness) 概念 (亦见**列紧性** (compactness, countable)) 和与之相应的**紧空间类** (见**紧空间** (compact space)). 在具体集合上出现的自然**度量** (metric) 是**度量空间** (metric space) 和**可度量化空间** (metrizable space) 的抽象定义的出发点. 用邻域来分离点与集合 (见**分离公理** (separation axiom)) 这个直观明显的思想, 在拓扑学中被用于定义 Hausdorff 空间类、正规空间类、正则空间类、完全正则空间类, 等等. 特别地, 表述空间的无限可除



性思想的仿紧空间类也是重要的。(见 Hausdorff 空间 (Hausdorff space); 正规空间 (normal space); 完全正则空间 (completely-regular space); 仿紧空间 (paracompact space).)

对上述拓扑空间类的研究, 由一般的同胚的思想及由此产生的拓扑不变量的概念统一起来。因为同胚概念有特别明显的集合论特征, 所以集合论的方法和具有某种复杂性或一般性的结构被用于研究包括上述所有拓扑空间类在内的一些拓扑空间类。这些方法多数具有一般的特性, 对于整个拓扑学是有价值的。同时, 限于某些固定空间类的拓扑对象的研究要求特殊的、更窄更细致的方法。这些方法用于其适用范围明显不同的拓扑学诸领域, 换言之, 拓扑学被分解为若干独立的、关联不大的分支(如代数拓扑学 (algebraic topology); 微分拓扑学 (differential topology); 几何拓扑学 (geometric topology) 和一般拓扑学)。然而, 拓扑学从一开始就被它的原始概念所统一。在拓扑学的发展进程中, 这种统一因许多基本结构、原理和概念对所有拓扑分支的普遍价值而得到加强。诸如商空间 (quotient space) 的概念, 拓扑积 (topological product) 运算, 函数分离思想, 拓扑逼近和拓扑扩张, 涉及紧性的诸原理, 等等。

在其他数学领域直接影响下形成的拓扑学对象通常具有下列重要特点: 其拓扑是由与所研究对象自然联系着的某些其他的、更严格的数学结构产生的。在这方面, 产生了下列有关基本性质的问题:

1) 给定的“外在”结构(组合的, 微分的, 代数的等等)的不变量是如何与该结构所生成拓扑的拓扑不变量相联系的?

2) 给定的“外在”结构的哪些不变量是它所生成的拓扑的不变量, 即哪些是拓扑不变量?

3) 准确到同构, 由一个给定拓扑生成的给定类型的不同的“外在”结构有多少个? 首先, 重要的是要弄清楚, 是否至少存在一个这样的结构, 而特别有意义的是此结构唯一的情形(准确到同构); 因此, 它自身就是一个被研究拓扑的(拓扑)不变量(它的所有特征标也都是不变量)。

在一些拓扑学分支, 例如, 在流形的拓扑学 (topology of manifold) 中, 这些一般性问题有重要而又具体的含义。

原则上, 涉及度量的和拓扑的不变量之间关系的问题和确定给定拓扑的度量的存在性问题(度量化问题)具有类似的特征。

在更一般空间的情形下, 提出了一致结构和它生成的拓扑结构二者的不变量之间关系的问题。研究一致不变量及其与拓扑不变量之间的关系, 是一致拓扑 (uniform topology) (见一致空间 (uniform space)) 的

任务。与拓扑结构关系密切的另一种结构是邻近结构。邻近空间 (proximity space) 的概念是建筑在空间的诸子集之间的邻近性关系之上的, 它有别于拓扑空间的概念。

拓扑学中基本问题的提法, 因被研究拓扑空间类的大小而有所变化。于是, 在限定了更窄的空间类之后, 人们就面临着用拓扑不变量准确到同构地将它们分类的问题。这个问题看起来是完全自然的, 例如, 在拓扑流形类中就有这个问题, 但是, 即使在这个类中, 分类也是非常困难乃至在算法上多半是不可解的。准确到同胚的流形分类问题的复杂性, 导致研究拓扑空间的同伦等价 (homotopy equivalence) 关系的必要性(这是比同胚更粗的分类)。基于这种关系, 产生了一个连续映射到另一个连续映射的同伦 (homotopy) 的概念, 这是具有纯粹的集合论特性的问题。

在拓扑研究中, 虽然代数拓扑方法起着极为重要的作用, 纯集合论的结构也有本质的作用。例如, 这涉及到下述事实: 用于流形的同伦等价关系超出了流形类的范围。这里, 人们得到较为简单的拓扑对象, 对此的研究在技巧方面是很有用的。同伦论方法要求实现集合论的结构, 诸如各种类型的“拼接”, 把一个拓扑空间和另一个沿着任一连续映射粘合, 等等。这导致 CW 复形 (CW-complex) 和胞腔空间 (cellular space) 的概念; 后者也构成包括所有可微流形和多面体的极大空间类, 且可用代数拓扑方法予以十分全面的研究。

对于较广的空间类, 例如所有紧统类, 所有仿紧统类或所有度量空间类, 不可能提出用一组可计算的拓扑不变量将这些空间准确到同胚地分类的问题, 这是因为其直观上的不可解性。在这里, 拓扑学的基本问题并不是比较单个的拓扑空间, 而是专门用公理的方法来比较整个拓扑空间类, 这些类通常对应于不同的拓扑不变量或它们的组合。这样一来, 拓扑学的基本问题就转换成了系统比较拓扑不变量的问题。因此, 一个系统而又发展的拓扑空间分类法被成功地作出。

这个问题的解法主要有两种。第一种是空间和映射的相互分类法。研究拓扑不变量在不同的连续映射类之下的性质, 也研究一个给定类中的拓扑空间何时能表为另一给定类中的空间在某类连续映射之下的象。此问题更重要更自然, 因为拓扑空间通常是给定的, 且已经与某些连续映射有联系; 例如, 一个新空间作为某原始拓扑空间的商空间而构造的情形。

第二种是比较法, 它应用基数, 或基数值, 拓扑不变量, 也称为基数特征 (cardinal characteristic)。因为无限基数是基数不变量的值, 这就给出了用基数的运算和定律来比较它们的可能性。这一拓扑学方向对于诸如 Martin 公理、连续统假设等集合论的描述依赖



颇深. Суслин 猜测 (在集合论的 Zermelo-Fraenkel 公理体系的框架下, 其不可解性已获证明) 可以用基数不变量的语言来描述. 以下是运用基数不变量的颇具特色的推理: 对于可度量化空间, 密度和重数是一致的; 因此, 如果给定空间的密度和重数不相同, 该空间就是不可度量化的. 运用基数不变量理论, 得到了许多精采的、意料不到的结果.

尽管为获得上述特殊性质采用的拓扑问题和方法依赖于研究中所选择的拓扑空间类, 但决定拓扑学发展的许多基本问题是用一般方法对所有拓扑分支描述, 并且是用某些一般的原理和方法来解决的.

下列诸问题是其实例:

a) 在拓扑结构或由生成它的外部结构的基础上构造一组拓扑不变量. 这时提出的问题是, 对各个空间或空间类求出这些不变量.

b) 研究拓扑不变量在拓扑空间基本运算下的性质, 特别地, 研究到子空间的转移运算之下的性质.

c) 研究拓扑不变量在不同类 (特别是嵌入类) 的连续映射下的性质.

d) 研究空间及其在某一包容空间中的补的诸拓扑性质之间的关系. 几何拓扑学的许多结果, 对偶定理以及与拓扑空间及其在紧 Hausdorff 扩张中的剩余的性质有关的一些结果, 都是这个方向很好的例证.

在这些一般的方法中, 可用于解决所有拓扑分支中多数拓扑问题的方法是:

$\alpha$ ) 覆盖方法 (见覆盖 (集合的) (covering (of a set))). 此方法给出一个结果, 用于解度量化问题, 确定和研究仿紧空间, 以及确定和研究组合拓扑的基本对象 (单纯复形和胞腔复形). 用多面体来逼近拓扑空间, 也是基于覆盖方法, 特别地, 基于覆盖的神经 (见集族的神经 (nerve of a family of set)). 关于流形浸入 Euclid 空间的诸定理, 是利用开覆盖和与之对应的单位分解来证明的.

$\beta$ ) 函子 (functor) 方法. 此方法涉及到拓扑空间的具有准确的 (函子) 性质和容许计算的代数对象或代数拓扑对象. 同调群 (homology group)、上同调环 (cohomology ring) 以及与推广切流形概念的拓扑空间上向量丛概念相伴的  $K$  函子 ( $K$ -functor), 都是函子的重要实例. 拓扑学中的代数方法就是建立在使用这些函子的基础上的.

$\gamma$ ) 谱方法 (见空间的谱 (spectrum of space)). 其实质是把具有较复杂结构的空问表示为较简单空间 (例如, 多面体) 逆谱的极限. 在这方面, 人们研究谱的元素和极限空间的那些拓扑不变量之间的关系. 谱的概念以某种形式体现了用较简单的或更便于研究的对象来逼近拓扑空间的思想.

广泛的空间类的上同调论构造, 以及具有给定综

合性质的复杂拓扑空间的实例构造, 都以此方法为依据.

$\delta$ ) 连续映射方法: 嵌入, 一类空间到另一类空间的映射 (见连续映射 (continuous mapping)). 在这里, 拓扑不变量性质的研究是此方法的实质. 把定义在空间一部分的映射连续扩张到整个空间的作法在这个问题的求解中起重要作用. 此问题的求解实质上依赖于空间的同伦性质, 它处于同伦论的中心位置. 特别地, 与此问题有关的是阻碍理论和收缩核理论 (见阻碍 (obstruction); 拓扑空间的收缩核 (retract of topological space)).

$\varepsilon$ ) 公理方法 (axiomatic method). 此方法给出最广泛且最自然的框架, 用以阐明拓扑不变量之间的相互关系, 并按照使分类系统而协调的需要, 在拓扑结构自身“之中”定义新的拓扑不变量和拓扑空间类. 这里, 人们选定一个拓扑不变量, 该不变量由拓扑结构自身所定义, 且通常是由被研究类中空间的具体给出方式抽象而得的, 而且不考虑计算此拓扑不变量的方法问题. 于是, 产生了紧统类, 连续统类, 等等.

拓扑学的应用有两重含义, 即它所确定的拓扑分支的应用和拓扑学自身的应用. 显然, 存在连续性思想时就有可能用到拓扑学.

在具体情形下, 尽管拓扑学的上述应用是多方面的, 但可以举出许多一般性的原理和方法, 拓扑学的多数应用都是以此为依据的. 例如, 流形理论在力学和微分方程理论中有最直接的应用; 同调论已超出了拓扑学的框架, 发展成一个重要的独立学科分支——同调代数 (homological algebra), 此分支已用于代数几何, Banach 代数理论, 等等. 下列概念得自拓扑学的代数处理及与之相关的应用: 流形; 由微分拓扑产生的  $K$  函子; 配边 (cobordism) 理论, 它对微分拓扑的发展有重要作用, 且已用于代数几何 (Riemann-Roch 定理 (Riemann-Roch theorem)) 及椭圆算子理论 (指标公式 (index formulas)), 等等. 映射度 (degree of mapping) 在应用上也很重要. 所谓代数基本定理的证明就要用到它. 同调和同伦的概念与方法在无限维函数空间的应用分析上有实质性影响——特别地, 对于偏微分方程解的存在性定理. 连续映射的不动点定理也有重要应用. 这些定理兼有集合论性质和代数性质, 其应用具有定性的特点; 它们的目的是计算这样那样的对象, 而是证明其存在. 把拓扑结构和线性结构结合起来的许多重要原理都带有同样的目的. 例如, 关于凸紧统端点的 Крейн-Мильман定理, Banach-Steinhaus 定理, 闭图象定理, 关于单位球在弱拓扑下的紧性的 Alaoglu 定理, 关于具有弱拓扑的 Banach 空间中紧统的 Eberlein-Шмольян定理, 等等.



存在许多“纯”集合论性质的拓扑原理与概念。其中有：紧性（可数紧性）概念；关于紧空间拓扑乘积之紧性的 Тихонов 定理；关于紧集在任意 Hausdorff 空间中的封闭性定理；紧性作为绝对封闭性的刻画；Stone-Weierstrass 定理；完全性及其相关原理；压缩映射的不动点定理；关于可数个处处稠密开集族交集非空性的 Baire 定理；等等。拓扑维数以及紧性和完全性无疑是最重要的一般数学概念之一。

在泛函分析、位势论等分支的许多结构中，拓扑空间和边界的扩张概念有实质性作用（在函数代数中：Шилов 边界，Martin 边界和 Choquet 边界）。

拓扑动力学 (topological dynamics) 的性质要求对集合论的概念和拓扑结构作更广泛的抽象。仅仅给出讨论和分析诸如下面那样一些概念的框架：轨道的极限集，殆周期性，极小集，Lagrange 稳定性，Poisson 稳定性，非游荡点，等等。在这里，紧性再一次起了非常重要的作用。

拓扑学的（特别是集合论的）概念和方法很自然地出现在拓扑代数中。在应用拓扑方法时，应当注意，在与拓扑学一致的某些代数结构中，拓扑不变量之间的关系可能变化甚大：许多熟知的关系被简化了，出现了一些新的深刻关系。

拓扑学的集合论的结构在数理逻辑中有重要应用。

#### 参考文献

- [1] Александров, П. С., Комбинаторная топология, М.-Л., 1947 (英译本: Aleksandrov, P. S., Combinatorial topology, Graylock, Rochester, 1956).
- [2] Sullivan, D., Geometric topology, M. I. T., 1971.
- [3] Hu, S.-T., Homotopy theory, Acad. Press, 1959.
- [4] Steenrod, N. E., The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.
- [5] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966 (中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).
- [6] Hurewicz, W. and Wallman, H., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1948.
- [7] Новиков, С. П., «Успехи матем. наук», 21 (1966), 5, 217 – 232.
- [8] Александров, П. С., «Успехи матем. наук», 19 (1964), 6, 3 – 46.
- [9] Александров, П. С., Федорчук, В. В., «Успехи матем. наук», 33 (1978), 3, 3 – 48.
- [10] Kuratowski, K., Topology, 1 – 2, Acad. Press, 1966 – 1968 (译自法文).
- [11] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности ..., М., 1973.
- [12] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

- [13] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).
- [14] Архангельский, А. В., «Успехи матем. наук», 33 (1978), 5, 29 – 84.
- [15] Топология, БСЭ-3, 26, 86 – 92.
- [16] Геометрия, БСЭ-3, 6, 307 – 313.
- [17] Сибирский, К. С., Введение в топологическую динамику, Кишинев, 1970 (英译本: Sibirskii, K. S., Introduction to topological dynamics, Noordhoff, 1975).

А. В. Архангельский 撰

【补注】直到 60 年代，大约在 P. Cohen 为了证明集合论 (set theory) 中基本的独立性定理而引入力迫法 (forcing method) 之时 ([A3])，一般拓扑学主要还是用否定方式定义。一般拓扑学是不局限于具有多种结构的经典流形的拓扑学 (见流形 (manifold)；流形的拓扑学 (topology of manifolds))：仅有拓扑结构之空间的拓扑学。有人认为，几何拓扑学 (geometric topology) 的范围从扭结理论 (knot theory) (它并不总是一般拓扑学) 经 3 维拓扑学 (它虽然很特殊，但部分地是产生概念与方法的温床，因而可以大为推广) 发展到怪异“流形”理论，怪异流形的建立类似于用图册来建立经典流形，不过，它使用的不是 Euclid 空间的而是具有适当自相似性质的其他可度量化空间的初等部分。

一般拓扑学的成功领域中的一个例子是类胞腔映射 (cell-like mapping) ([A5])，其中心思想起源于在 R. H. Bing 的著名例子“犬骨”中涉及的 3 维拓扑学 ([A1])。这些映射 (闭满射，其纤维同胚于可表为收缩的胞腔序列之交集的流形的子集) 在流形的刻画中起实质性作用，见流形的拓扑学 (topology of manifolds)。正因为模拟同胚，它们很早就脱离了流形而列入维数论和几何拓扑学。Kozłowski-Walsh 定理 (Kozłowski-Walsh theorem) ([A9]) 表明：3 维流形在类胞腔映射下的象最多是 3 维的。此结论对所有有限维连续统是否成立 (即它们的类胞腔象是否一定是有限维的) 问题，至今是维数论的主要问题之一 ([A5])。至于怪异流形，第一种类型 (初等部分不是线性空间) 是 Hilbert 立方体流形 (Hilbert cube manifold) ([A2])。现已证明：K. Menger 的万有空间  $M_n^m$  (见 Menger 曲线 (Menger curve)) 与  $m$  最终 (即对大的  $m$ ) 是无关的，并且适合作为  $M_n$  流形理论的基础 ([A4])。

随着集合论 (模型) 的增加，在一般拓扑学中集合论的影响逐渐占了上风。《集合论的拓扑学手册》(Handbook of Set-Theoretic Topology) ([A10]) 是一般拓扑学家必备的参考书。该书开始的三章是关于基



数特征 (基数不变量, 见**基数特征** (cardinal characteristic)) 的. 第三章全部涉及可数性. 与**描述集合论** (descriptive set theory) 比较, 在这方面它无疑已确立了一个独立的地位, 但还不能从一般拓扑学分开. 进一步, 关于涉及 Н. Н. Лузин (1914) 和 В. Серпинский (1924) 的著名的构造问题有着活跃的工作, 他们二人的构造理论起源于**连续统假设** (continuum hypothesis; CH), 见 [A10], 第 5 章. 一般说来, 在 CH 之下作的每项工作都会提出这样的问题: 在  $\neg$ CH 之下又如何? 见 [A10], 第 19 章, 关于 Martin 公理. 而且, 其中有一个分支特别活跃, 称为“**S 和 L 问题**” (“基本的 S 和 L 问题”, [A10], 第 7 章). 它出自 **Суслин 猜测** (见 **Суслин 假设** (Suslin hypothesis)): 遗传的 Lindelöf 线性序空间必是可分的. 然而, 在 Cohen ([A3]) 之后不久, S. Tenenbaum ([A14]) 和 T. Jech ([A8]) 就证明了: 此猜测与 ZFC 无关, 即与通常的集合论公理无关. **L 空间问题** (L-space problem) 是: “每个遗传 Lindelöf 正则  $T_1$  空间都是可分的” 是否与 ZFC 相容? **S 空间问题** (S-space problem) 是: “每个遗传可分的正则  $T_1$  空间是 Lindelöf 的” 是否是相容的? S. Todorćević 在 1983 年给出了肯定的证明 ([A15]). 此分支学科研究在各种空间类型和各种集合论模型中的这些性质之间的关系. [A10] 中有好几章主要讨论 S 和 L 问题.

**覆盖性质** (covering property) (包括紧性) 和正规性 (乘积的正规性、集体正规性、正规 Moore 空间问题) 的范围界线, 是一直很活跃的两个邻近领域. 其中最大的问题是研究了多年的**正规 Moore 空间问题** (normal Moore space problem). 它涉及 R. L. Moore 的正则可展空间, 而不是 **Moore 空间** (Moore space) 条目中 J. C. Moore 的空间. 原问题 (1930 年) 是: 是否所有正规 Moore 空间都是可度量化的? 在 [A10] 的第 15 章中, 对其复杂的历史回顾颇多. 迄今得到的结果有: a) 对于给定的很大的基数, 每个正规 Moore 空间都是可度量化的; 但出人意料的是, 大基数实质上是必须的. 特别地, b) 如果集合的全域没有可测基数的内模型, 则存在一个不可度量化的正规 Moore 空间. 更多的介绍见 [A10] 第 16 章, 其中包括 K. Kunen 和 P. Nyikos 的定理, 同时给出了 a) 的另一种说法. 颇为难办的是: 给定一个强紧基数  $\kappa$ , 用作出  $\kappa$  个**随机实数** (random real numbers) 的方式构造的模型可能没有不可度量化的正规 Moore 空间. 显然, 解释这种情况是拓扑学的一个很重要的任务.

**拓扑测度论** (topological measure theory) 这一分支学科值得重视, 它有点脱离了一般拓扑学, 而且脱离的趋势颇强, 当然, 测度的重要性主要还是在泛函分

析中. 对此分支至 1984 年止的回顾见 [A10] 的第 22 章. 与测度论相比, 泛函分析有相当广泛的部分依赖于拓扑方法, 其程度与分析方法一样 (见 [A10] 第 23 章). 若干性态良好的紧空间类, 例如 Corson 紧空间 (Corson compact space), Eberlein 紧空间 (Eberlein compact space), 或多或少是按泛函分析意义来定义的. 这些空间类中最早的是 **Eberlein 紧统** (Eberlein compactum): 在弱拓扑下同胚于 Banach 空间之一子集的紧空间. Corson 紧空间成为一个较广的类, 其定义开始显示出这一领域的思想倾向: Corson 紧空间是这样一种紧空间, 在点态收敛拓扑下, 它可嵌入到某一集合  $I$  上的具有可数支集的实值函数集合中.

特殊连续统提出这样的问题: 关于空间  $X$ ,  $X$  上的实值连续函数的线性拓扑空间  $C_p(X)$  能告诉我们什么呢? 这里, 必须假定  $X$  是完全正则的, 从而存在足够多的实值连续函数. 背景是 И. М. Гельфанд, M. H. Stone 和 E. Hewitt 的经典结果:  $X$  上的有界实值连续函数所成的 Banach 空间严格地确定了  $X$  的 **Stone-Čech 紧化** (Stone-Čech compactification),  $X$  上所有实值连续函数所成的环严格地确定了  $X$  的 **Hewitt 实紧化** (Hewitt realcompactification) ([A6]).  $C_p(X)$  的拓扑并不确定  $X$  是否是紧的 ([A7]). 然而, 作为一致空间 (作为加法拓扑群由其结构诱导的),  $C_p(X)$  确定了紧性 ([A16]). 这个特殊的分领域尚处于发展初期 (亦见 [A22]).

准确检验给定 4 维流形的同胚问题, 其算法不可解性是 A. A. Марков 在 1958 年证明的 ([A11]). 现在已经有两份关于一般拓扑学未解决问题的权威性目录 ([A12], [A13]).

#### 参考文献

- [A1] Bing, R. H., A decomposition of  $E^3$  into points and tame arcs such that the decomposition space is topologically different from  $E^3$ , *Ann. of Math.*, **65** (1957), 2, 484 – 500.
- [A2] Chapman, T. A., *Lectures on Hilbert cube manifolds*, Amer. Math. Soc., 1976.
- [A3] Cohen, P. J., *Set theory and the continuum hypothesis*, Benjamin, 1966.
- [A4] Dranishnikov, A. N., Universal Menger compacta and universal mappings, *Math. USSR-Sb.*, **57** (1987), 139 – 149 (*Mat. Sb.*, **129** (1986), 121 – 139).
- [A5] Dranishnikov, A. N. and Shchepin, E. V., Cell-like maps. The problem of raising dimension, *Russian Math. Surveys*, **41** (1986), 6, 59 – 111 (*Uspekhi Mat. Nauk*, **41** (1986), 6, 49 – 90).
- [A6] Gillman, L. and Jerison, M., *Rings of real-valued continuous functions*, v. Nostrand, 1960.
- [A7] Gul'ko, S. P. and Khmyleva T. E., Compactness is not preserved by the  $t$ -equivalence relation, *Math.*

Notes, 39 (1986), 484 - 487 (Mat. Zametki, 39 (1986), 895 - 903).

[A8] Jech, T. J., Trees, *J. Symbolic Logic*, 36 (1971), 1 - 14.

[A9] Kozłowski, G. and Walsh, J. J., Cell-like mappings on 3-manifolds, *Topology*, 22 (1983), 147 - 153.

[A10] Kunen, K. and Vaughan, J. E. (eds.), Handbook of Set-theoretic topology, North-Holland, 1984.

[A11] Markov, A. A., Unsolvability of the homeomorphism problem, in Proc. Internat. Congress Mathem. (Cambridge, 1958). Cambridge Univ. Press, 1960, 300 - 306.

[A12] Mill, J. van and Reed, G. M. (eds.), Open problems in topology, North-Holland, 1990.

[A13] Mill, J. van and Reed, G. M., Open problems in topology, *Topology and its Appl.*, 38 (1991), 101 - 105.

[A14] Tenenbaum, S., Souslin's problem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 59 (1968), 60 - 63.

[A15] Todorčević, S., Forcing positive partition relations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 280 (1983), 703 - 720.

[A16] Uspen'skii, V. V., A characterization of compactness in terms of uniform structure in a function space, *Russian Math. Surveys*, 37 (1982), 4, 143 - 144 (*Uspekhi Mat. Nauk*, 37 (1982), 4, 183 - 184).

[A17] Willard, S., General topology, Addison-Wesley, 1970.

[A18] Nagata, J., Modern general topology, North-Holland, 1985.

[A19] Brown, R., Topology, Ellis Horwood, 1988.

[A20] Morita, K. and Nagata, J. (eds.), Topics in general topology, North-Holland, 1989.

[A21] James, I. M., General topology and homotopy theory, Springer, 1984.

[A22] Arkhangel'skii, A. V., Topological function spaces, Kluwer, 1991 (译自俄文).

白苏华、胡师度 译

### 紧收敛拓扑 [topology of compact convergence; компактной сходимости топология]

连续函数空间上的拓扑中的一种; 与紧开拓扑 (compact-open topology) 相同. 对于从局部凸空间  $E$  到局部凸空间  $F$  中的线性映射的空间  $L(E, F)$ , 紧收敛拓扑是  $\sigma$  拓扑中的一种, 即在属于  $E$  中有界集的一个集族  $\sigma$  的集合上一致收敛的拓扑; 它是与  $L(E, F)$  的向量空间结构相容的且是局部凸的.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 这样  $L(E, F)$  上紧收敛拓扑是由所有紧集的族定义的 ([A1]).

准紧收敛拓扑 (topology of pre-compact convergence) 是由所有准紧集的族定义的  $\sigma$  拓扑 ([A2]).

$\mathbb{R}^n$  上所有  $m$  次可微的实或复值函数的空间  $C^m(\mathbb{R}^n)$  上的按所有导数紧收敛的拓扑 (topology of compact convergence in all derivatives) 是由伪范数

$$\{q_K^{(m)}: K \subset \mathbb{R}^n \text{ 紧}\},$$

$$q_K^{(m)}(f) = \sup \{|D^p f(x)|: x \in K, |p| \leq m\}$$

的族定义的. 由此得到的函数空间是局部凸和可度量的 ([A3]).

### 参考文献

[A1] Treves, F., Topological vector spaces, distributions and kernels, Acad. Press, 1967, 198.

[A2] Köthe, G., Topological vector spaces, I, Springer, 1969, p. 263 ff.

[A3] Kelley, J. L. and Namioka, I., Linear topological spaces, v. Nostrand, 1963, 82.

葛显良 译 鲁世杰 校

### 嵌入的拓扑学 [topology of imbeddings; топология вложений]

拓扑学的一个分支, 在其中, 研究 Euclid 空间或流形的闭子集所特有的局部拓扑性质.

嵌入的拓扑学出现在 A. Schoenflies, L. Antoine, П. С. Урысон 和 J. Alexander 的工作中.  $E^3$  中的嵌入是 20 世纪 50 年代被研究的. 特别地, 证明了曲面到  $E^3$  中的嵌入可由多面体嵌入拓扑地逼近. 对  $n > 3$ , 嵌入到  $E^n$  的拓扑的系统的研究开始于 Schoenflies 猜想 (Schoenflies conjecture) 解决之后. 基本地, 它是在事实的积累和解决了大量的特殊性问题后来到的. 嵌入的拓扑理论的方法和几何的流形的拓扑学 (topology of manifolds) 之间的关系也被阐明了. 大约在 20 世纪 70 年代中期, 嵌入的拓扑学被系统地表达成一个有它自己的术语、方法和问题的独立分支. 它用于解决流形的几何拓扑学中的一些基本问题: 证明了维数  $\geq 5$  的球面的非组合三角剖分存在性, 得到了拓扑流形的特征和单连通四维流形的分类.

空间  $X$  (作为规定, 流形, 多面体或紧集) 在 Euclid 空间  $E^n$  中的拓扑嵌入 (topological imbedding) 是从  $X$  到空间  $f(X) \subset E^n$  中的任意同胚  $f: X \rightarrow E^n$ . 有时, 拓扑嵌入被简单地理解为一个包含  $X \subset E^n$ . 两个嵌入  $f_1, f_2: X \rightarrow E^n$  称作等价的 (equivalent), 如果存在一个同胚  $h: E^n \rightarrow E^n$  使得  $h \circ f_1 = f_2$ . 如果  $h$  是一个同痕, 则称嵌入  $f_1, f_2$  是同痕的 (isotopic).

非等价嵌入的最简单的例子是用纽结 (见纽结理论 (knot theory)) 得到的; 在  $E^3$  中构造一个零维紧体或线段的非等价嵌入是更加困难的 (见非驯纽结 (wild knot)).

位于  $E^3$  中的直线段上的 Cantor 集和  $E^3$  中的非驯零维 Antoine 紧统是非等价的.



拓扑嵌入理论的基本问题集中于局部性质上这个事实由称为非驯嵌入的存在性所解释: 对该非驯嵌入, 局部构造的正则性被破坏了. 驯顺 (局部平坦) 嵌入的整体性质的研究, 作为规则, 不包含在嵌入的拓扑学中 (也见驯顺嵌入 (tame imbedding)).

下面的四个定理被看作是拓扑嵌入理论的基础.

定理 1 (表征 (characterization)). 嵌入  $X \subset E^n$  是驯顺的, 当且仅当补集  $Y = E^n \setminus X$  有性质 1-ULC (对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得每个  $\delta$  映射  $S^1 \rightarrow Y$  在  $Y$  中  $\varepsilon$  同伦于零).

定理 2 (关于闭嵌入 (close imbeddings)). 任何两个闭驯顺嵌入由一个小的合痕是合痕的.

定理 3 (关于在平凡维的区域中的嵌入 (imbeddings in a trivial-dimensional domain)). 如果  $2 \dim X + 2 \leq n$ , 则任何两个驯顺嵌入是合痕的.

定理 4 (关于逼近 (approximation)). 任何嵌入可用驯顺嵌入逼近.

除了定理 3, 所有这些定理都只在对维数加以限制下给出了证明; 这些限制对于流形、多面体和紧体是不同的.

流形  $X$  在  $E^n$  中的一个嵌入是驯顺的 (tame) (或局部平坦的 (locally flat)), 如果对任何点  $x \in X$ , 存在  $E^n$  中的一个邻域  $U(x)$ , 使得对  $(U(x), U(x) \cap X)$  在一个使点变到  $E^n$  中的原点的同胚变换下同胚于标准的对 (homeomorphic to the standard pair)  $(E^n, E^r)$ .

定理 1 当  $n \neq 4$  和  $r \neq n-2$  时成立 (如果  $r = n-2$  和  $n \geq 5$ , 答案也是已知的: 对于补集  $Y = E^n \setminus X$ , 粗略地讲, 同伦等价于一个圆是必要的).

当  $r \neq n-2$  和  $n \geq 5$  时, 定理 2 成立 (附加一个小引结表明, 对  $r = n-2$ , 定理 2 显然是不对的; 当  $r = n-2$  时, 对于两个嵌入是合痕闭的条件是知道的). 另外, 如果  $X$  是球面  $S^r$ , 则已经证明, 当  $r \neq n-2$  时, 任何驯顺嵌入  $S^r \rightarrow E^n$  是合痕于标准的 (如果  $r = n-2$  和  $n \neq 4$ , 这是正确的, 当且仅当补集  $E^n \setminus S^{n-2}$  同伦等价于一个圆).

定理 4 当  $r \neq n-2$  和  $n \neq 4$  时成立 (但是, 如果  $r = n-2$  和  $n \geq 6$ ——相应的反例表明——显然是不对的).

多面体  $X$  在  $E^n$  中的一个嵌入称作是驯顺的 (tame), 如果它等价于分片线性嵌入. 定理 1, 2 和 3 当  $\dim X \leq n-3$  时成立.

一个  $r$  维紧统  $X$  在  $E^n$  中的嵌入称为驯顺的 (tame), 如果可以由一个合痕将它从一个任何直线多面体  $P \subset E^n$  (维数  $\leq n-r-2$ ) 中移开. 当  $r \leq n-3$  和  $n \neq 4$  时, 定理 1 成立, 一般地讲, (如果  $2r+2 > n$ ) 定理 2 不真而定理 4 对任何  $r$  都成立.

#### 参考文献

- [1] Келдыш, Л. В., Топологические вложения в евклидово пространство, М., 1966 (英译本: Keldysh, L. V., Topological imbeddings in a Euclidean space, Amer. Math. Soc. 1968).
- [2] Чернавский, А. В., «Докл. АН СССР», 181 (1968), 2, 290 – 293.
- [3] Чернавский, А. В., «Матем. сб.», 91 (1973), 2, 279 – 286.
- [4] Daverman R., Locally nice codimension one manifolds are locally flat, Bull. Amer. Math. Soc., 79 (1973), 2, 410 – 413.
- [5] Chapman, T., Locally homotopically unknotted embeddings of manifolds in codimension two are locally flat, Topology, 18 (1979), 339 – 348.
- [6] Ancel, F. and Cannon, J., The locally flat approximation of cell-like embeddings, Ann. of Math., 109 (1979), 61 – 86.
- [7] Bryant, J. and Seebeck, C. L., Locally nice embeddings of polyhedra, Quart. J. Math., 19 (1968), 257 – 274.
- [8] Edwards, R. D., The equivalence of close piecewise linear embeddings, General Topol. Appl., 5 (1975), 2, 147 – 180.
- [9] Miller, R. T., Approximating codimension three embeddings, Ann. of Math., 95 (1972), 3, 406 – 416.
- [10] Bryant, J. L., Approximating embeddings of polyhedra in codimension three, Trans. Amer. Math. Soc., 170 (1972), 85 – 95.
- [11] Edwards, R. D., Dimension theory I, in L. C. Glase and T. B. Rushing (eds.): Geometric topology (Utah. 1974), Lecture notes in math., Vol. 438, Springer, 1975, 195 – 211.
- [12] Штанько, М. А., «Матем. сб.», 90 (1973), 4, 625 – 636. М. А. Штанько 撰

【补注】 一个给定的空间是否允许嵌入到特定的  $E^n$  中以及这样的嵌入的分类问题曾是代数拓扑学中许多研究的课题. H. Whitney ([A1]) 证明了每个光滑  $n$  维流形可以嵌入在  $E^{2n} (n > 1)$  中, 示性类 (characteristic class) 的理论给出了将给定的  $n$  流形嵌入到较低维的流形中的必要条件. 例如, 维数  $n = 2^k$  的实射影空间不能嵌入到  $E^{2n-1}$  中. 对维数的某些范围, A. Haefliger ([A2]) 给出了充分条件. 吴文俊 ([A3], [A4]) 发展了单纯复合形的嵌入的代数不变量. 也见胎紧和套紧浸入 (tight and taut immersions).

#### 参考文献

- [A1] Whitney, H., The self-intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space, Ann. of Math., 45 (1944), 220 – 246.
- [A2] Haefliger, A., Plongements différentiables dans la domaine stable, Comm. Math. Helvetici, 37 (1963),

155 - 176.

[A3] 吴文俊, 复形在欧氏空间中的实现 I, 中国科学, 7(1958), 251 - 297.

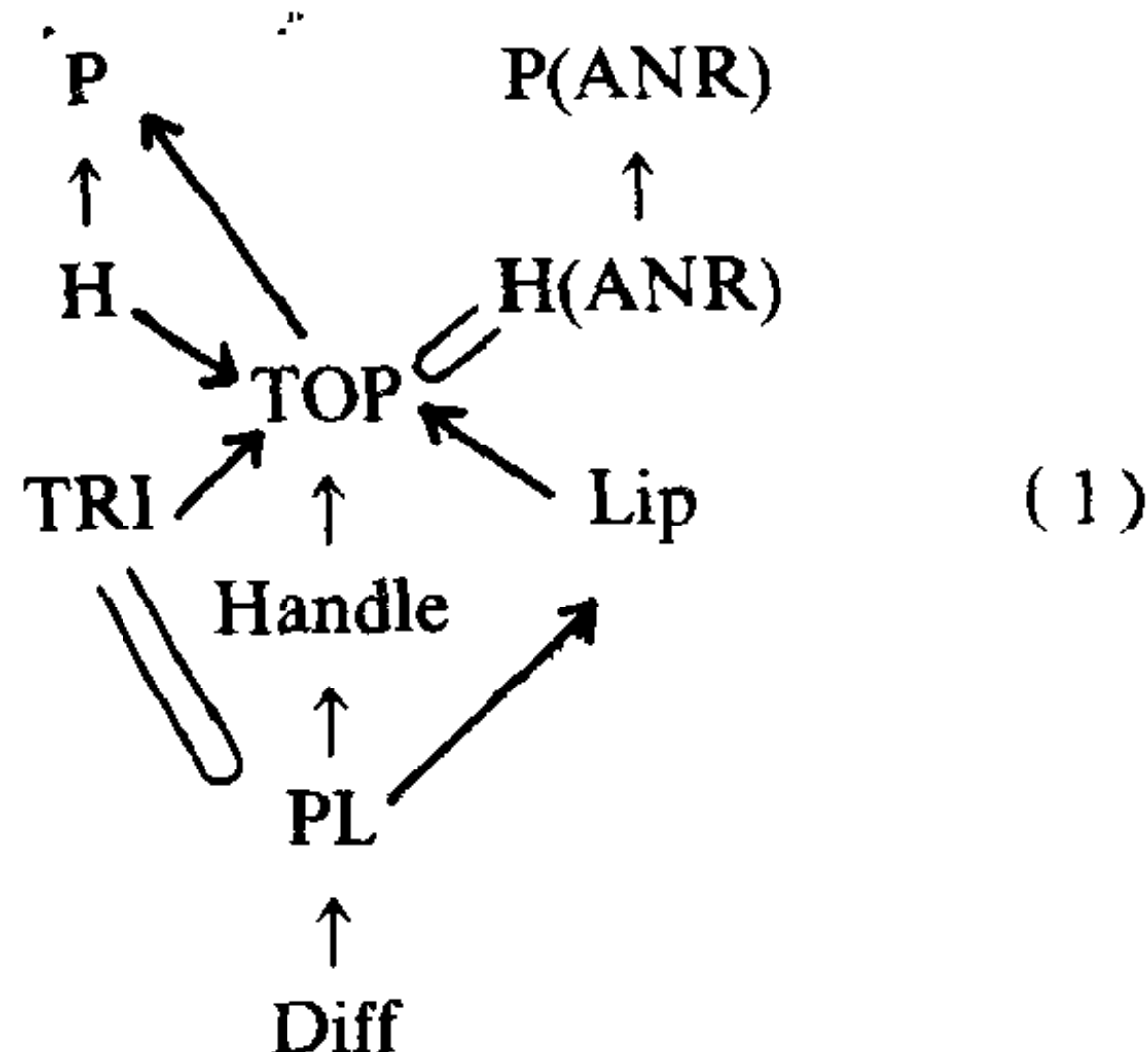
[A4] 吴文俊, 复形在欧氏空间中的实现 II, 中国科学, 8(1959), 79 - 94.

[A5] Moise, E. E., Geometric topology in dimensions 2 and 3, Springer, 1977. 薛春华 译

# 流形的拓扑学 [topology of manifolds; топология многообразий]

研究不同类型流形之间关系的流形 (manifold) 理论的一个分支.

有限维流形的最重要的类型和它们之间的关系在 (1) 中由图所表明. 这里 Diff 是微分 (光滑) 流形的



范畴; PL 是分片线性 (组合) 流形的范畴; TRI 是多面体的拓扑流形的范畴; Handle 是允许拓扑分解为环柄的拓扑流形的范畴; Lip 是 Lipschitz 流形 (带局部图卡之间的 Lipschitz 转移映射) 的范畴; TOP 是拓扑流形 (Hausdorff 和具有可数基) 的范畴; H 是无边 (多角体, 它的每个顶点的星形状的边界有相应维数的球面的同调) 的多面体同调流形的范畴;  $H(\text{ANR})$  是广义流形 (同调于无边流形的有限维绝对邻域收缩核  $X$ , 即具有性质: 对任何点  $x \in X$ , 群  $H^*(X, X \setminus x; \mathbb{Z})$  同构于群  $H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0; \mathbb{Z})$ ) 的范畴;  $P(\text{ANR})$  是 Poincaré 空间 (有限维绝对邻域收缩核  $X$ , 对于它, 存在数  $n$  和元素  $\mu \in H_n(X)$  使得当  $r \geq n+1$  时,  $H_r(X, \mathbb{Z}) = 0$  和对所有的  $r$ , 映射  $\mu \cap : H^r(X) \rightarrow H_{n-r}(X)$  是一个同构) 的范畴;  $P$  是 Poincaré 多面体的范畴 (由多面体组成的上述范畴的子范畴).

(1) 中的箭头, 除了三个较低的和箭头  $H \rightarrow \text{TOP}$  外, 表示具有遗忘函子结构的函子. 箭头  $\text{Diff} \rightarrow \text{PL}$  表示关于光滑流形可三角剖分性的 Whitehead 的定理. 当维数  $< 8$  时, 箭头是可逆的 (任何 PL 流形是可光滑的), 但在维数  $\geq 8$  时, 存在不可光滑的 PL 流形, 甚至同伦等价于任何光滑流形的 PL 流

形. 嵌入  $\text{PL} \subset \text{TRI}$  在同样强的意义下也是不可逆的 (存在同伦等价于任何 PL 流形的维数  $\geq 5$  的多面体流形). 这里, 对  $n \geq 5$  的球面  $S^n$ , 早已存在三角剖分, 但在其中, 它不是一个 PL 流形.

箭头  $\text{PL} \rightarrow \text{Handle}$  表示事实: 每个 PL 流形有环柄分解.

箭头  $\text{PL} \rightarrow \text{Lip}$  表示了关于在任何 PL 流形上的 Lipschitz 结构的存在性定理.

箭头  $\text{Handle} \rightarrow \text{TOP}$  当  $n \neq 4$  时是可逆的, 而当  $n = 4$  时是不可逆的 (任何维数  $n \neq 4$  的拓扑流形允许一个环柄分解和存在四维拓扑流形, 对于它, 这不是真的).

类似地, 如果  $n \neq 4$ , 箭头  $\text{Lip} \rightarrow \text{TOP}$  是可逆的 (且进一步是唯一的方法).

关于箭头  $\text{TRI} \rightarrow \text{TOP}$  的可逆性问题给出了关于任何拓扑流形的可三角剖分性的古典的不可解问题.

箭头  $H \rightarrow P$  在强的意义下是不可逆的 (存在不同伦等价于任何同调流形的 Poincaré 多面体).

箭头  $H \rightarrow \text{TOP}$  表示了有关任何一个维数  $\geq 5$  的同调流形同伦等价于一个拓扑流形的定理.

箭头  $\text{TOP} \rightarrow P$  表示了关于任何一个拓扑流形同伦等价于一个多面体的定理.

嵌入  $\text{TOP} \subset H(\text{ANR})$  表示了任何一个拓扑流形是一个 ANR.

对于箭头  $\text{Diff} \rightarrow \text{PL} \rightarrow \text{TOP} \rightarrow P$ , 类似的问题已经用稳定丛 (分别是向量、分片线性、拓扑和球丛) 的理论解决了, 即通过检查流形  $X$  到相应的分类空间  $\text{BO}$ ,  $\text{BPL}$ ,  $\text{BTOP}$ ,  $\text{BG}$  的映射的同伦类.

存在典型的合成映射

$$\text{BO} \rightarrow \text{BPL} \rightarrow \text{BTOP} \rightarrow \text{BG}, \quad (2)$$

它的同伦纤维和它们的合成的同伦纤维分别用符号

$\text{PL}/O$ ,  $\text{TOP}/O$ ,  $G/O$ ,  $\text{TOP}/\text{PL}$ ,  $G/\text{PL}$ ,  $G/\text{TOP}$  来表示.

来自范畴  $\text{Diff}$ ,  $\text{PL}$ ,  $\text{TOP}$ ,  $P$  的每个流形  $X$ , 存在一个正规稳定丛, 即一个从  $X$  到相应的分类空间的典型映射  $\tau_X$ .

在从流形的“窄”范畴到“较宽”的范畴的变换中, 例如, 从光滑到分片线性, 映射  $\tau_X$  由相应的映射 (2) 构成. 因此, 例如对 PL 流形  $X$ , 存在一个光滑流形 PL 同胚于它 ( $X$  称为可光滑的), 仅当提升问题 (3) 可解:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{BO} \\ & \nearrow & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\tau_X} & \text{BPL} \end{array} \quad (3)$$

该问题的解的同伦障碍位于群  $H^{i+1}(X, \pi_i(\text{PL}/O))$



中, 这里, 结果是 (3) 的可解性对 PL 流形  $X$  的光滑性 (和所有非等价的光滑是在映射  $X \rightarrow \text{PL/O}$  的同伦类的集合  $[X, \text{PL/O}]$  相对应的一一映射中) 不仅是必要的, 而且是充分的.

通过用  $\text{TOP/O}$  代替  $\text{PL/O}$ , 对维数  $\geq 5$  的拓扑流形  $X$  的可光滑性同样成立, 而且 (用  $\text{TOP/O}$  代替  $\text{PL/O}$ ) 也对它们的 PL 三角剖分成立. 同伦群  $\Gamma_k = \pi_k(\text{PL/O})$  同构于通过粘合两个  $k$  维球的边界得到的定向微分光滑流形的分类的群. 这个群对所有的  $k$  是有限的 (对  $k \leq 6$  甚至是平凡的). 因此, 任何一个 PL 流形  $X$  的非等价光滑的数目是有限的且以数

$$\text{ord} \sum_k H^k(X, \pi_k(\text{PL/O}))$$

为上界.

同伦群  $\pi_k(\text{TOP/PL})$  等于零, 一个例外:  $\pi_3(\text{TOP/PL}) = \mathbb{Z}/2$ . 因此, 维数  $\geq 5$  的拓扑流形  $X$  的 PL 三角剖分存在性由一些上同调类  $\Delta(X) \in H^4(X, \mathbb{Z}/2)$  的零化所决定, 而  $X$  的非等价 PL 三角剖分的集合是在相应于群  $H^3(X, \mathbb{Z}/2)$  的一一映射中.

当  $k \neq 3$  时, 群  $\pi_k(\text{TOP/O})$  与群  $\Gamma_k$  一致, 当  $k = 3$  时,  $\pi_k(\text{TOP/O})$  与  $\Gamma_k$  差一个群  $\mathbb{Z}/2$ . 维数  $\geq 5$  的拓扑流形  $X$  的非等价光滑化数是有限的, 且以数  $\text{ord} \sum_k H^k(X, \pi_k(\text{TOP/O}))$  为上界.

类似的结果对 Poincaré 多面体是不正确的.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{BPL} \\ & \nearrow \tau'_X & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\tau_X} & \text{BG} \end{array} \quad (4)$$

当然, 例如在 (4) 中提升的存在对同伦等价于 Poincaré 多面体  $X$  的 PL 流形的存在是必要条件, 但一般地讲 (对  $n \geq 5$ ), 只保证 PL 流形  $M$  和度为 1 的使得  $\tau_M = f \circ \tau'_X$  的映射  $f: M \rightarrow X$  的存在. 该流形到一个同伦等价于  $X$  的流形的变换需要割补术 (surgery) (再构造) 的技术, 最初, 当  $X$  是一个维数  $\geq 5$  的单连通光滑流形的情形, 这技术是由 С. П. Новиков 发展的. 对单连通的  $X$ , 该技术已推广到下面考虑的情形. 因此, 对单连通 Poincaré 多面体  $X$ , 一个维数  $\geq 5$  的同伦等价于它的 PL 流形的存在, 当且仅当提升 (4) 存在. 同伦等价于一个 (甚至单连通) Poincaré 多面体的拓扑或光滑流形的存在性问题仍是比较复杂的.

#### 参考文献

- [1] Новиков, С. П., «Изв. АН СССР, Сер. Матем.», 30 (1966), 1, 207 – 246.
- [2] Madsen, I. and Milgram, R., The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds, Princeton Univ. Press, 1979.
- [3] Latour, F., Double suspension d'une sphere d'homologie (d'après R. Edwards), in Sem. Bourbaki Exp.

515, Lecture notes in math., Vol. 710, Springer, 1979, 169 – 186.

- [4] Freedman, M. H., The topology of four-dimensional manifolds, *J. Differential Geom.*, 17 (1982), 357 – 453.
- [5] Quinn, F., Ends of maps III, Dimensions 4 and 5, *J. Differential Geom.*, 17 (1982), 503 – 521.
- [6] Mandelbaum, R., Four-dimensional topology: an introduction, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2 (1980), 1 – 159.
- [7] Lashof, R., The immersion approach to triangulation and smoothing, in A. Liulevicius (ed.): Algebraic Topology (Madison, 1970), Proc. Symp. Pure Math., Vol. 22, Amer. Math. Soc., 1971, 131 – 164.
- [8] Edwards, R. D., Approximating certain cell-like maps by homeomorphisms, *Notices Amer. Math. Soc.*, 24 (1977), 7, A649.
- [9] Quinn, F., The topological characterization of manifolds, *Abstracts Amer. Math. Soc.*, 1 (1980), 7, 613 – 614.
- [10] Cannon, J. W., The recognition problem: what is a topological manifold, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84 (1978), 5, 832 – 866.
- [11] Spivak, M., Spaces satisfying Poincaré duality, *Topology*, 6 (1967), 77 – 101.
- [12] Kuiper, N. H., A short history of triangulation and related matters, in P. C. Baayen, D. van Dulst and J. Oosterhoff (eds.): Bicentennial Congress Wisk, Genootschap (Amsterdam 1978), Math. Centre Tracts, Vol. 100, CWI, 1979, 61 – 79.

М. А. Штанько 撰

【补注】最近发现 ([A1]), 维数 4 的光滑流形的性能根本不同于维数  $\geq 5$  的流形. 在大量的近期结果中有

- i) 存在一个光滑的、紧的、单连通的 4 流形的可数无限族, 它们彼此同胚, 但具有不同的光滑结构.
- ii) 存在不可数的光滑 4 流形族, 每一个同胚于  $\mathbb{R}^4$ , 但彼此具有不同的光滑结构.
- iii) 存在单连通光滑 4 流形, 它们是  $h$  配边 ( $h$ -cobordism) 的, 但不微分同胚.

对提升问题 (3), 见 [A2] – [A3].

对于 Kirby-Siebenmann 定理 (Kirby-Siebenmann theorem), 箭头  $\text{TOP} \rightarrow \text{P}$ , 也见 [A4].

#### 参考文献

- [A1] Donaldson, S. M., The geometry of 4-manifolds, in A. M. Gleason (ed.): Proc. Internat. Congress of Mathematicians (Berkeley, 1986), Amer. Math. Soc., 1987, 43 – 54.
- [A2] Hirsch, M. W. and Mazur, B., Smoothings of piecewise-linear manifolds, Princeton Univ. Press, 1974.
- [A3] Lashof, R. and Rothenberg, M., Microbundles and smoothing, *Topology*, 3 (1965), 357 – 388.

- [A4] Kirby, M. C. and Siebenmann, L. C., Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations, Princeton Univ. Press, 1977.

薛春华 译

### 一致收敛拓扑 [topology of uniform convergence; равномерной сходимости топология]

从集合  $X$  到一致空间 (uniform space)  $Y$  中映射的空间  $\mathcal{S}(X, Y)$  上的由  $\mathcal{S}(X, Y)$  上一致结构生成的拓扑, 其环境基是使得对一切  $x \in X$ ,  $(f(x), g(x)) \in v$  而  $v$  跑遍  $Y$  的一个环境基的所有偶对  $(f, g) \in \mathcal{S}(X, Y) \times \mathcal{S}(X, Y)$  的集合. 在此拓扑中一有向集  $\{f_x\}_{x \in A} \subset \mathcal{S}(X, Y)$  收敛于  $f_0 \in \mathcal{S}(X, Y)$  称为在  $X$  上  $f_x$  一致收敛 (uniform convergence) 于  $f_0$ . 如果  $Y$  是完全的, 则  $\mathcal{S}(X, Y)$  按一致收敛拓扑是完全的. 如果  $X$  是拓扑空间且  $\mathcal{S}(X, Y)$  是由  $X$  到  $Y$  中的连续映射的集合, 则  $\mathcal{S}(X, Y)$  在  $\mathcal{S}(X, Y)$  中按该一致收敛拓扑是闭的; 特别地,  $X$  上一致收敛的连续映射序列  $f_n$  的极限  $f_0$  是  $X$  上连续映射.

#### 参考文献

- [1] Bourbaki, N., General topology, Element of mathematics, Springer, 1988 (译自法文).

- [2] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1985).

В. И. Соболев 撰

【补注】 如果  $Y$  是具有由度量定义的一致结构的度量空间, 则  $\mathcal{S}(X, Y)$  中的一个开集基由集合族  $U(f, \varepsilon) = \{g: \rho(f(x), g(x)) < \varepsilon \text{ 对一切 } x \in X\}$  构成, 且可发现以经常在分析中遇到的形式出现的一致收敛概念.

#### 参考文献

- [A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文). 葛显良 译 鲁世杰 校

### 拓扑斯 [topos; топос]

一个范畴, 等价于某个拓扑化范畴 (topologized category) 上的集合的层范畴. 另一个定义为: 拓扑斯是一个范畴  $C$ , 使得  $C$  上的典范拓扑的任意层是可表示的. 对于一个拓扑斯的对象 (它们是集合的层) 可以定义通常的集范畴结构. 基于这一理由, 拓扑斯可看作集合论的非标准模型. 此处用更一般的定义会方便些: 一个初等拓扑斯 (elementary topos) 是一个带有积和终对象的范畴 (category)  $C$ , 连同同一个反变函子  $\mathcal{S}: C \rightarrow C$  (此处对  $X \in C$ ,  $\mathcal{S}(X)$  是对应于  $X$  的子对象族的一个对象), 且有单射  $\sum_X \rightarrow X \times \mathcal{S}(X)$ , 此处  $\sum$  是隶属关系的图. 对象  $\mathcal{S}(1)$  是拓扑斯  $C$  中命题逻辑值的自然定义域.

#### 参考文献

- [1] Artin, M., Grothendieck, A. and Verdier, J. L., Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4), Lecture notes in math., 269, 270, 305, Springer, 1972 - 1973.

- [2] Deligne, P., Cohomologie étale (SGA 4 I/2), Lecture notes in math., 569, Springer, 1977.

- [3] Cartier, P., Catégories, logique et faisceaux: modèles de la théorie des ensembles, in Sémin. Bourbaki 1977/78, Lecture notes in math., Vol. 710, Springer, 1979.

- [4] Goldblatt, R., Topoi: the categorical analysis of logic, North-Holland, 1979. В. И. Данилов 撰

【补注】 拓扑范畴称为景 (site) (拓扑化范畴) 更好.

拓扑斯的概念是 A. Grothendieck ([1]) 于 1963 年左右引入的, 它与代数几何中的某种上同调理论有关, 特别是层的平展和结晶上同调 (见艾达尔拓扑 (etale topology)). 尽管这种上同调可以用给定的景 (site) 直接描述, 但拓扑斯诱导出一个更有不变量意味的刻画; 与拓扑空间上的层的“经典”情况相反, (见层论 (sheaf theory)), 许多不同的景可以给出同样的层的拓扑斯, 因而给出同样的上同调理论. 稍后 M. Artin 和 B. Mazur ([A1]) 指出了怎样定义拓扑斯的同伦群, 并建立了关于给定拓扑斯的同调和上同调的“Whitehead 定理” (见拓扑范畴的同伦型 (homotopy type of a topological category)).

初等拓扑斯的概念是 F. W. Lawvere 和 M. Tierney 在 1969 年提出来的. 他们的想法是抽象出集范畴的那些层范畴也具备的初等 (即一阶) 性质, 使得后者可以被看作“广义集合论”的模型. Lawvere-Tierney 公理比 Grothendieck 引出的相应公理更简单也更广泛; 基于这个理由, 未加修饰的术语“拓扑斯”现在一般指“初等拓扑斯”, 而较早意义下的拓扑斯 (即等价于景上的层范畴的范畴) 被看作 Grothendieck 拓扑斯. 初等拓扑斯的公理可以代替传统的集合论公理体系作为数学的基础 ([A3], [A4]). 与此相关, 一个初等拓扑斯可以被看作高阶直观型论的一个模型 (见类型论 (types, theory of)) ([A5], [A6]), 这样在直觉主义 (intuitionism) 理论中研究过的许多传统模型, 如 Kripke 模型 (Kripke models) 和 Beth 模型成为特殊情况. 这些模型并不总是适应 Grothendieck 拓扑斯的较窄的框架. 例如 Kleene 的可实现性 (realizability) 解释给出了由 J. M. E. Hyland 引入的有效拓扑斯 (effective topos) ([A7]), 但不是 Grothendieck 拓扑斯. 有效拓扑斯近来在理论计算机科学中引起了极大的兴趣, 因为它包含多形态  $\lambda$  演算 ( $\lambda$ -calculus) 及其相关理论的“自然”模型 ([A8], [A9]).

由于 Lawvere-Tierney 公理的引入, 拓扑斯理论发展的一个重要方面如上文所述影响到逻辑, 而它的



几何方面已由 Grothendieck 及其同事的早期研究表现出来. 在这种联系中, 轨迹理论 (见 **轨迹** (locale)) 以及从轨迹范畴到 (Grothendieck) 拓扑斯范畴的拓扑概念的推广是关键所在. 一个重要的例子是 A. Joyal 和 Tierney ([A10]) 关于轨迹和拓扑斯的开映射和下降理论的工作导致了 Grothendieck 拓扑斯用轨迹范畴的内广群 (见 **广群** (groupoid)) 的表示. 类似地, 轨迹局部紧性概念的推广导致了 Grothendieck 拓扑斯范畴中可幕化对象 (即具有函数空间的对象) 的刻画 ([A13]). 更近期的研究 [A14], [A15], [A16] 表明, Grothendieck 拓扑斯的同调和上同调理论并不比轨迹的相应理论复杂, 事实上, 每个拓扑斯都可以被具有相同“弱同伦型”的轨迹覆盖.

拓扑斯理论的进一步资料, 包括此处未涉及到的方面, 可见 [A4], [A6], [A17] – [A20].

#### 参考文献

- [A1] Artin, M. and Mazur, B., Etale homotopy, Lecture notes in math., 100, Springer, 1969.
- [A2] Lawvere, F. W., Quotifiers and sheaves, in Actes du Congrès Intern. des Mathématiciens, Nice 1970, Gauthier-Villars, 1971, 329 – 334.
- [A3] Lawvere, F. W., An elementary theory of the category of sets, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 52 (1964), 1506 – 1511.
- [A4] Bell, J. L., Toposes and local set theories, Oxford Univ. Press, 1988.
- [A5] Fourman, M. P., The logic of topoi, in J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical logic*, North-Holland, 1977, 1053 – 1090.
- [A6] Lambek, J. and Scott, P. J., *Introduction to higher-order categorical logic*, Cambridge Univ. Press, 1986.
- [A7] Hyland, J. M. E., The effective topos, in A. S. Troelstra and D. van Dalen (eds.), *The L. E. J. Brouwer Centenary Symposium*, North-Holland, 1982, 165 – 216.
- [A8] Hyland, J. M. E., A small complete category, *Ann. Pure Appl. Logic*, 40 (1988), 135 – 165.
- [A9] Carboni, A., Freyd, P. J., Scedrov, A., A categorical approach to realizability and polymorphic types, in M. Main, et al. (ed.), *Proc. 3rd A. C. M. Workshop on Mathematical Foundations of Programming Language Semantics*, Lecture notes comp. sci., Vol. 298, Springer, 1988, 23 – 42. 张英伯 译

#### Torelli 定理 [Torelli theorems; Торе́лли теорема]

指出一代数簇或 Kähler 簇  $X$  的上同调空间的 Hodge 结构 (Hodge structure) (周期矩阵) 完全刻画了  $X$  的极化 Jacobi 簇的一些定理.

经典的 Torelli 定理是关于曲线的情况的 (见 [1], [2]), 并指出, 一曲线除相差一个同构外, 完全由其

周期决定. 设  $X$  是一个亏格为  $g$  的曲线,  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$  是  $H_1(X, \mathbb{Z})$  的一个基, 令  $\omega_1, \dots, \omega_g \in H^0(X, \Omega_X^1) = H^{1,0} \subset H^1(X, \mathbb{C})$  是 Abel 微分 (Abelian differential) 的一个基, 而  $(g \times 2g)$  矩阵  $\Omega = \|\pi_{ij}\|$  是周期矩阵 (period matrix),  $\pi_{ij} = \int_{\gamma_j} \omega_i$ . 闭链的交  $\gamma_i \gamma_j = q_{ij}$  在  $H_1(X, \mathbb{Z})$  中定义了一个反对称双线性型  $Q$ . 令  $X$  和  $\tilde{X}$  是两条曲线. 如果能这样选取基  $\gamma$  和  $\omega$  使得相对于它们, 周期矩阵  $\Omega$  和曲线的相交矩阵  $Q$  相同, 则  $X$  和  $\tilde{X}$  是同构的. 换言之, 如果曲线  $X$  和  $\tilde{X}$  的典范极化 Jacobi 阵同构, 则  $X \simeq \tilde{X}$ .

令  $X$  为一射影簇 (或更一般地, 为一紧 Kähler 流形 (Kähler manifold)), 令  $D = D_k$  是与本原上同调空间  $H^k(X, \mathbb{C})_0$  (见 **周期映射** (periodic mapping)) 相关的 Griffiths 簇. 则  $D$  包含了在一切与  $X$  同胚的簇上的本原  $k$  形式的周期矩阵. 周期依赖于  $H^k(X, \mathbb{C})_0$  到一个固定空间  $H$  的同构如何选取. 有一个自然定义的  $D$  的解析自同构群  $\Gamma$ , 使得  $M = D/\Gamma$  是一个解析空间, 而  $X$  决定唯一的点  $\Phi(X) \in M$ . 这时  $M$  称为模空间 (modular space) 或称为 Hodge 结构的模空间 (moduli space of Hodge structure).

整体 Torelli 问题 (global Torelli problem) 就是要阐明  $\Phi(X)$  是否可以唯一决定  $X$  直到相差一个同构的问题. 所谓 (广义的) Torelli 定理的陈述就是对此问题的肯定的回答. 在 1 形式和 2 形式的情况下, Torelli 定理对 Abel 簇平凡地成立 (见 [3]). 本质上说来, 整体 Torelli 问题的解的仅有的非平凡情况 (1984) 是  $K3$  曲面 ( $K3$ -surface) 的情况. Torelli 定理也已被推广到 Kähler  $K3$  曲面.

局部 Torelli 问题 (local Torelli problem) 就是要解决上同调空间的 Hodge 结构何时才能将簇  $X$  的局部模空间 (即 **西空间** (Kuranishi space)) 的点分离开的问题. 令  $\pi: \mathcal{X} \rightarrow B$  是一族极化代数簇, 而  $\pi^{-1}(0) = X$ , 令  $M = D/\Gamma$  是与  $X$  上的本原  $k$  形式的周期相联系的 Griffiths 簇. 周期映射  $\Phi: B \rightarrow M$  对每一个  $t \in B$  给出了  $\pi^{-1}(t)$  上的  $k$  形式的周期矩阵. 这个映射是全纯的; 相应的切映射  $d\Phi$  也已算出来了 (见 [3]). 局部 Torelli 问题等价于以下问题:  $d\Phi$  何时为嵌入? 考虑对偶于  $d\Phi$  的映射, 即可得关于局部 Torelli 定理成立的上同调判别法: 若映射

$$\mu: \bigoplus_{0 \leq r \leq (k-1)/2} H^{n-r-1}(X, \Omega^{n-k+r+1}) \otimes H^r(X, \Omega^{k-r}) \rightarrow H^{n-1}(X, \Omega^1 \otimes \Omega^n)$$

是一满态射, 则  $k$  形式的周期给出了  $X$  的局部模. 关于曲线的局部 Torelli 定理等价于二次微分是由 Abel 微分生成的这一事实. Noether 定理 (Noether theorem) 指出, 如果  $g = 2$ , 它是成立的, 又如果  $g > 2$  而  $X$  不是超椭圆的, 它也成立. 局部 Torelli 定理当  $k = n$

时, 若典范类是平凡的, 显然成立. 这种簇包含了 Abel 簇,  $P^{n+1}$  中的  $n+2$  次超曲面以及  $K3$  曲面. 对于许多类高维簇也证明了局部 Torelli 定理成立. 对于  $P^{n+1}$  中的非奇异  $d$  次超曲面, 证明了在一般点上周期映射是嵌入, 但  $n=2, d=3$  时例外, 而当  $d$  可以整除  $n+2, d=4$  且  $n=4m$ , 或  $d=6$  且  $n=6m+1$  时可能也不行 (见 [4]).

## 参考文献

- [1] Torelli, R., *Rend. Accad. Lincei V*, **22** (1913), 98 – 103.  
 [2] Weil, A., Zum Beweis der Torellischen Satzes, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, (1957), 33 – 53.  
 [3] Griffiths, P. A., Periods of integrals on algebraic manifolds, I. II, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 568 – 626; 805 – 865.  
 [4] Donagi, R., Generic Torelli for projective hypersurfaces, *Compos. Math.*, **50** (1983), 325 – 353.

Вал. С. Куликов 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Griffiths, P. A., (ed.), Topics in transcendental algebraic geometry, Princeton Univ. Press, 1984.  
 [A2] Barth, W., Peters, C. and Ven, A. van de., Compact complex surfaces, Springer, 1984. 齐民友 译

## 圆环坐标 [toroidal coordinates; тороидальные координаты]

数  $\sigma, \tau$  及  $\varphi$ , 与 Descartes 直角坐标  $x, y, z$  的关系由下列公式给出:

$$x = \frac{a \sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \cos \varphi, \quad y = \frac{a \sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \sin \varphi, \\ z = \frac{a \sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma},$$

这里  $-\pi \leq \sigma \leq \pi, 0 \leq \tau < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$ . 坐标曲面  $\sigma = \text{常数}$  是中心在  $(0, 0, a \cot \sigma)$ 、半径为  $a/|\sin \sigma|$  的球面; 坐标曲面  $\tau = \text{常数}$  是环面, 它以  $Oxy$  平面上中心在原点、半径为  $a \coth \tau$  的圆为轴向圆, 其横截面的圆的半径为  $a/\sinh \tau$ ; 坐标曲面  $\varphi = \text{常数}$  是半平面  $y/x = \tan \varphi$ . 圆环坐标系是正交的.

Lamé 系数 (Lamé coefficients) 是:

$$L_\sigma = L_\tau = \frac{a^2}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2}, \\ L_\varphi = \frac{a^2 \sinh^2 \tau}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2}.$$

Laplace 算子 (Laplace operator) 是:

$$\Delta f = \frac{(\cosh \tau - \cos \sigma)^3}{a^2 \sinh \tau} \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \frac{\partial f}{\partial \tau} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sinh \tau (\cosh \tau - \cos \sigma)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right].$$

Д. Д. Соколов 撰 沈纯理 译

## 圆环调和函数 [toroidal harmonics; тороидальная гармоника]

在圆环坐标 (toroidal coordinates)  $(\sigma, \tau, \varphi)$  中用分离变量法 (separation of variables, method of) 解 Laplace 方程 (Laplace equation) 时所产生的环面上点的函数. 一调和函数 (harmonic function)  $h = h(\sigma, \tau, \varphi)$ , 如果它是 Laplace 方程的解, 那么它可以写成级数形式:

$$h = \sqrt{\cosh \tau - \cos \sigma} \times \\ \times \sum_{j,k=0}^{\infty} [A_{jk} P_{j-\frac{1}{2}}^{(k)}(\cosh \tau) + B_{jk} Q_{j-\frac{1}{2}}^{(k)}(\cosh \tau)] \times \\ \times (a_k \cos k\sigma + b_k \sin k\sigma) (c_j \cos j\varphi + d_j \sin j\varphi), (*)$$

其中  $P_{j-\frac{1}{2}}^{(k)}, Q_{j-\frac{1}{2}}^{(k)}$  是具有半整数指标的连带 Legendre 函数 (Legendre functions). 令  $\tau = \tau_0$  就得到圆环调和函数或表面圆环调和函数 (surface toroidal harmonic), 这和用三个变量  $(\sigma, \tau, \varphi)$  表达的函数 (\*) 不一样, 有时称 (\*) 为空间圆环调和函数 (spatial toroidal harmonic).

由于有展开式

$$\frac{1}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \sigma}} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[ Q_{-\frac{1}{2}}(\cosh \tau) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} Q_{k-\frac{1}{2}}(\cosh \tau) \cos k\sigma \right],$$

其中  $Q_{k-\frac{1}{2}}$  是第二类 Legendre 函数, 级数 (\*) 被用来在圆环坐标中解边值问题.

## 参考文献

- [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977 (中译本: А. Н. 吉洪诺夫, А. А. 萨马尔斯基, 数学物理方程, 上、下册, 高等教育出版社, 1956).  
 [2] Morse, P. M. and Feshbach, H., Methods of theoretical physics, 1 – 2, McGraw-Hill, 1953.

Е. Д. Соломенцев 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, The Gamma function. The hypergeometric function. Legendre functions, 1, McGraw-Hill, 1953,



Formula 3.10(3).

孙和生 译 陆柱家 校

挠率 [torsion; кручение]

1) 三维空间中的一条曲线  $\gamma$  的挠率 (torsion of a curve) 是一个刻画  $\gamma$  偏离其密切平面 (osculating plane) 的量. 设  $P$  是  $\gamma$  上的任一点,  $Q$  是  $P$  的邻近点. 令  $\Delta\theta$  表示  $\gamma$  在  $P$  和  $Q$  两点处的密切平面之间的夹角,  $|\Delta s|$  表示  $\gamma$  的弧  $PQ$  的长度.  $\gamma$  在  $P$  点的绝对挠率 (absolute torsion)  $|k_2|$  定义为

$$|k_2| = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

定义  $\gamma$  的挠率为  $k_2 = \pm |k_2|$ , 其中如果一个位于  $P$  点的观察者看到当点在此曲线上沿着使  $s$  增加的方向移动时, 密切平面从副法线 (binormal) 向量到主法线 (principal normal) 向量是反时针 (顺时针) 方向转动的, 则取  $k_2$  为正 (负) 号.

对一条正则 (三次连续可微) 曲线, 在曲率 (curvature) 不为零的任意点处可定义其挠率. 若  $r = r(s)$  是曲线的自然参数化, 则

$$k_2 = - \frac{(r', r'', r''')}{[r', r'']^2}.$$

挠率有时被称为第二曲率 (second curvature).

作为弧长函数的曲率和挠率, 在不计空间位置时, 确定一条曲线.

挠率处处为零的曲线是一条平面曲线.

E. B. Шихин 撰

【补注】“第二曲率”这一术语常被用于高维 Frénet 理论之中. 该理论所考虑的曲线是  $n$  维 Euclid 空间中的曲线. 如果曲线足够光滑, 则一般地可对曲线定义  $(n-1)$  个曲率, 而且其最后一个曲率也可赋以符号.

三维空间中曲线的挠率与沿着曲线的平行法向量场的旋转角度相联系. 对一条具有正曲率的曲线, 其平行法向量场绕曲线一周的旋转角由全挠率给出, 它也被称为曲线的全扭曲 (total twist).

2) 测地挠率 (geodesic torsion) 是曲线挠率的一种推广; 它是空间  $E^3$  中一条带 (strip) 的一个不变量, 用

$$a = (x_1, x_3, x_3')$$

来定义, 其中  $x_1$  是带的基曲线  $\Gamma$  的切向量,  $x_3$  是带的法向量. 具有非零曲率的曲线  $\Gamma$  的通常挠率  $k_2$  可借助于  $a$  及法曲率  $b$  和测地曲率  $c$  表示成如下公式:

$$k_2 = a + \frac{b'c - bc'}{b^2 + c^2}.$$

测地挠率为零是曲率带, 特别是对属于  $E^3$  中一个曲面的带的一个特征性质——见曲率线 (curvature line).

也可对 Riemann 空间的带定义类似的概念 (见

[1], [2]).

3) 子流形的挠率 (torsion of a submanifold) 是曲线挠率的推广, 即为在浸入于 Riemann 空间  $V^n$  中的子流形  $M^k$  的法丛  $\nu(M^k)$  上所诱导的联络 (见联络 (connection); 流形上的联络 (connections on a manifold)) 的曲率. 令  $\omega_\beta^\alpha$  是  $\nu(M^k)$  上的联络形式,  $\omega_s^\alpha$  是  $M^k$  在  $V^n$  中的 Euler 曲率形式,  $s = 1, \dots, k; \alpha, \beta = 1, \dots, n-k$ , 则形式

$$\Omega_{\alpha R}^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

定义了  $M^k$  在  $V^n$  中的 Riemann 挠率 (Riemannian torsion), 形式

$$\Omega_{\alpha G}^\beta = \omega_\alpha^s \wedge \omega_s^\beta$$

定义了  $M^k$  在  $V^n$  中的 Gauss 挠率 (Gaussian torsion). 这些挠率之间具有如下的关系式

$$\Omega_{\alpha R}^\beta = \Omega_{\alpha G}^\beta + R_{\alpha k h}^\beta \sigma^k \wedge \sigma^h,$$

其中  $R_{\alpha k h}^\beta$  是  $V^n$  的曲率张量沿着切于  $M^k$  的一个二重向量方向的分量,  $\sigma^s$  是  $M^k$  的切空间的一个正交共基. 借助于形式  $\sigma^i \wedge \sigma^j$ , 将挠率形式  $\Omega_{\alpha R}^\beta$  ( $\Omega_{\alpha G}^\beta$ ) 分解后所得到的张量  $S_{ij}^\beta$  称为 Gauss 挠率和 Riemann 挠率.

例. 设  $M^2$  是 Euclid 空间  $E^4$  中的一个曲面, 则 Gauss 挠率和 Riemann 挠率相同, 变成一个简单的数

$$k = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} E & F & G \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix},$$

其中  $E, F, G$  是  $M^2$  在  $E^4$  中的第一基本型的系数,  $L_i, M_i, N_i$  是  $M^2$  在  $E^4$  中的第二基本型的系数.  $k$  在某个邻域中为零可以几何地解释为曲率椭圆退化成了一条直线上的一个区间; 于是存在两族正交的曲率线, 其切线对应于该区间的两个端点. 局部地,  $k=0$  是  $M^2$  位于一个浸入于  $E^4$  内的 Riemann 空间  $V^3$  中的充分必要条件,  $M^2$  在  $V^3$  中的法向量指向  $V^3$  的 Ricci 张量 (Ricci tensor) 的主向量方向. 特别地, 挠率为零是  $M^2$  在  $E^3$  中平坦的一个必要条件.

4) 仿射联络  $\Gamma$  的挠率 (torsion of an affine connection) 是一个刻画具有联络  $\Gamma$  的流形  $M^n$  上的函数关于此联络的共变导数 (covariant derivative) 与可交换性相偏离的程度的量, 它是用变换

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

来定义的, 其中  $X, Y$  是  $M^n$  上的向量场,  $\nabla_X Y$  是  $Y$

沿着  $X$  的协变导数,  $[X, Y]$  是  $X$  和  $Y$  的 Lie 括号. 在局部坐标  $x^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 下, 令  $X = \partial / \partial x^i$ ,  $Y = \partial / \partial x^j$ , 则变换  $S$  由

$$S\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = S_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

给出; 张量  $S_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$  即为挠率张量 (torsion tensor), 其中  $\Gamma_{ji}^k$  是  $\Gamma$  关于所选取的基的分量.

利用联络的位移的向量值 1-形式  $\omega^k$  的协变微分可给出挠率的一个等价定义, 称形式

$$\Omega^k = d\omega^k + \theta_j^k \wedge \omega^j$$

为挠率形式 (torsion form); 其中  $\theta_j^k$  是  $\Gamma$  的联络形式. 在局部余基  $dx^i$  (基  $\partial / \partial x^i$  的对偶) 下, 挠率形式为

$$\Omega^k = S_{ij}^k dx^i \wedge dx^j,$$

其中  $S_{ij}^k$  的意义与前面所述相同.

仿射联络  $\Gamma$  的挠率有如下的几何解释. 从  $x \in M^n$  出发又回到  $x$  处的任意无穷小环路  $L$  在  $M^n$  于  $x$  处的切空间中的切展线不再是一条闭曲线. 不计二阶项时, 在切展线端点处的向量差具有分量  $\Omega^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . 换句话说, 此向量与具有二重向量  $df^{ij}$  的 2 维面积元的有界围道  $L$  成比例:  $\Omega^k = S_{ij}^k df^{ij}$ . 这些思想形成了解释在位移形式下具有内部压力连续分布源的弹性介质的基础; 于是向量  $\Omega^k$  是 Burgers 向量 (Burgers vector) 的一种类似 (见 [4] - [7]).

例. 在具有度量联络 (metric connection) 的 2 维 Riemann 空间  $M^2$  中, 挠率张量约化成一个向量:  $S_{ij}^k = S^k e_{ij}$ , 其中  $e_{ij}$  是度量二重向量. 考虑  $M^2$  中一个小三角形, 它的边是长度分别为  $a, b, c$  的测地线, 且有夹角  $A, B, C$ . 向量  $S^k$  在点  $A$  处向边  $AB$  上的投影的主部等于  $(c - a \cos B - b \cos A) / \sigma$ , 而向  $AB$  的垂直方向上的投影等于  $(a \sin B - b \sin A) / \sigma$ , 其中  $\sigma$  是三角形的面积. 于是, 如果  $M^2$  的挠率为零, 那么在允许相差一个和  $\sigma$  相比为小量的情况下, 传统三角学中的正弦和余弦定理是成立的.

5) 空间  $A$  的挠率 (torsion of a space) 是由偶对  $(X, A)$  所定义的 Whitehead 群 (Whitehead group)  $\text{Wh } A$  的一个元素  $\tau(X, A)$ , 其中  $A$  是一个有限胞腔空间 (cellular space), 嵌入  $A \subset X$  是一个同伦等价. 等价地: 挠率是基本群  $\pi_1$  的 Whitehead 群  $\text{Wh } \pi_1$  的一个元素. 在胞腔的扩张、收缩和胞腔加细下, 挠率是不变的. 已经证明挠率是一个拓扑不变量. 如果  $A$  是单连通的, 则它的挠率为零 (见 Whitehead 挠率 (Whitehead torsion)).

如果  $(W; M_0, M_1)$  是一个任意的  $h$  配边, 则

称  $\tau(W, M_0) = \tau(K, M_0)$  为  $h$  配边挠率 (torsion of the  $h$ -cobordism), 其中  $K$  是与流形  $W$  (流形  $M_0$ ) 的给定环柄分解相配的胞腔空间.

设  $M_f$  是胞腔式映射  $f: X \rightarrow Y$  的柱, 这里  $f$  是一个同伦等价 (见映射柱面 (mapping cylinder)), 则  $\tau(M_f, Y) = 0$ , 但  $\tau(M_f, X) \in \text{Wh } \pi_1 X$  处处不为零. 它是用公式

$$\tau(f) = f_* \tau(M_f, X) \in \text{Wh } \pi_1 Y$$

来定义的. 称这个元素为映射  $f$  的挠率 (torsion of the mapping) (有时  $\tau(M_f, X)$  本身也称为挠率). 如果  $\tau(f) = 0$ , 则称映射为单同伦等价 (simple homotopy equivalence) (见 [8]).

6) 有限生成 Abel 群  $G$  的挠率 (torsion of a finitely-generated Abelian group) 是群  $G$  中由所有有限阶  $v$  的元素所组成的群  $T$ . 在差一个置换的情形下, 数  $v$  可以唯一选定为素数的幂, 称为群  $G$  的挠系数 (torsion coefficients) (见 [9]).

#### 参考文献

- [1] Cartan, E., *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, 1946.
- [2] Blaschke, W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie*, *Elementare Differentialgeometrie*, I, Springer, 1921.
- [3] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1969, М., 1971, 123 - 168.
- [4] Sulanke, R. and Wintgen, P., *Differentialgeometrie und Faserbündel*, Birkhäuser, 1972.
- [5] Норден, А. П., *Пространства аффинной связности*, 2 изд., М.-Л., 1976.
- [6A] Cartan, E., *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3), 40 (1923), 325 - 412.
- [6B] Cartan, E., *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3), 41 (1923), 1 - 25.
- [6C] Cartan, E., *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3), 42 (1925), 17 - 88.
- [6D] Cartan, E., *Sur les variétés à connexion projective*, *Bull. Soc. Math. France*, 52 (1924), 205 - 241.
- [6E] Cartan, E., *Sur les variétés à connexion conforme*, *Ann. Soc. Polon. Math.*, 2 (1924), 171 - 221.
- [7] Schouten, J. A., *Tensor analysis for physicists*, Clarendon Press, 1951.
- [8] Rourke, C. P. and Sanderson, B. J., *Introduction to piecewise-linear topology*, Springer, 1972.
- [9] Курош, А. Г., *Теория групп*, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987; 下册, 1982).



М. И. Войцеховский 撰

【补注】 Abel 群  $A$  的挠子群 (torsion subgroup)  $T(A) = \{a \in A: na = 0, \text{ 对某个 } n\}$  定义了一个从 Abel 群的范畴到其自身的函子 (functor). 对结合环上的左模的挠性, 见扭子模 (torsion submodule).

## 参考文献

- [A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988 (译自法文).
- [A2] Coxeter, H., Introduction to geometry, Wiley, 1963.
- [A3] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976 (中译本: 多卡模, 曲线和曲面的微分几何学, 上海科学技术出版社, 1988).
- [A4] Darboux, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 1-4, Chelsea, reprint, 1972.
- [A5] Guggenheimer, H., Differential geometry, McGraw-Hill, 1963.
- [A6] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1-2, Interscience, 1963-1969.
- [A7] O'Neill, B., Elementary Differential geometry, Acad. Press, 1966.
- [A8] Spivak, M., Differential geometry, 1-5, Publish or Perish, 1979.
- [A9] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982.
- [A10] Cartan, E., Oeuvres complètes, Gauthier-Villars, 1952. 沈纯理 译

## 挠率形式 [torsion form; кручения форма]

仿射联络 (affine connection) 的位移的向量值 1 形式的共变微分, 即 2 形式

$$\Omega = D\omega = d\omega + \theta \wedge \omega,$$

其中  $\theta$  是联络形式. 挠率形式满足第一 Bianchi 恒等式 (first Bianchi identity):

$$d\Omega = \theta \wedge \Omega + \omega \wedge \Theta,$$

其中  $\Theta$  是给定联络的曲率形式 (curvature form). 约化联络的挠率形式的定义是类似的.

М. И. Войцеховский 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1-2, Interscience, 1963. 沈纯理 译

## 无扭模 [torsion-free module; модуль без кручения], 亦称无挠模

一个无零因子环  $A$  上的模 (module)  $M$ , 使得由等式  $am = 0, a \in A, m \in M$  可得  $a = 0$  或  $m = 0$ .

这样的 (左) 模例子有环  $A$  自身及  $A$  的非零左理想. 无扭模的子模以及无扭模的直和与直积都是无扭模. 如果  $A$  是交换的, 则对任意模  $M$ , 有一个扭子模.

$$T(M) = \{m \in M \mid \exists a \in A, a \neq 0, \text{ 使得 } am = 0\},$$

这时商模  $M/T(M)$  是无扭的. Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 更一般地, 对任意交换环  $R$ , 一个左  $R$  模  $M$  称为无扭的, 如果  $m \in M, r$  为  $R$  中正则元, 使  $rm = 0$ , 则必有  $m = 0$ . 详情及一些参考文献见扭子模 (torsion submodule). 冯绪宁 译

## 扭子模 [torsion submodule; кручения подмодуль], 亦称挠子模

【补注】 设  $R$  是有单位元的结合环,  $M$  是左  $R$  模. 扭子群 (torsion subgroup)  $T(M)$  定义为

$$T(M) = \{x \in M: \text{Ann}_R(x) \text{ 含有一个正则元}\}.$$

这里正则元 (regular element)  $r \in R$  是一个不是零因子 (既非左零因子, 又非右零因子) 的元素.

如果  $R$  是左 Ore 的 (left Ore) (见下文和结合环与结合代数 (associative rings and algebras)), 则  $T(M)$  是  $M$  的子模, 称为扭子模 (torsion submodule). 若  $T(M) = 0$ , 则模  $M$  是无扭的 (torsion free). 若  $T(M) = M$ , 则为扭 (torsion) 模.

更一般地, Abel 范畴  $\mathcal{C}$  的扭 (挠) 理论 (torsion theory) 是  $\mathcal{C}$  的对象的一对子类  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ , 使得对所有  $T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$ , 均有  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(T, F) = \{0\}$ , 并且  $\mathcal{T}$  和  $\mathcal{F}$  关于这一性质极大, 即若对所有  $F \in \mathcal{F}, \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, F) = \{0\}$ , 则有  $X \in \mathcal{T}$ ; 若对所有  $T \in \mathcal{T}, \text{Mor}_{\mathcal{C}}(T, Y) = \{0\}$ , 则  $Y \in \mathcal{F}$ .

左 Ore 环  $R$  的扭子模和无扭子模形成左  $R$  模范畴  $R\text{-Mod}$  的一个扭理论.

$R\text{-Mod}$  上的根 (radical) 是一个左正合函子  $\text{Rad}: R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ , 使对所有  $M, N \in R\text{-Mod}$ , 有

i)  $\text{Rad}(M)$  是  $M$  的子模;

ii) 对所有  $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ , 有  $f(\text{Rad } M) \subset \text{Rad } N$ ; 更确切地,  $\text{Rad}(f)$  是  $f$  在  $\text{Rad}(M) \subset M$  上的限制;

iii)  $\text{Rad}(M/\text{Rad}(M)) = \{0\}$ .

一个根  $\text{Rad}$  是扭根 (torsion radical) 或遗传根 (hereditary radical), 若对模  $M$  的每个子模  $N, N \cap \text{Rad}(M) = \text{Rad}(N)$ . 扭根  $\text{Rad}$  确定  $R\text{-Mod}$  中的一个扭理论  $\mathcal{T}_{\text{Rad}} = \{M \in R\text{-Mod}; \text{Rad}(M) = M\}$ ,  $\mathcal{F}_{\text{Rad}} = \{M \in R\text{-Mod}; \text{Rad}(M) = 0\}$ .  $R\text{-Mod}$  的所有扭理论由此得到.

$R$  的一个左分母集是  $R$  的一个子幺半群  $S$  (即

$1 \in S$ , 并且  $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_{12} \in S$ , 使得

a) (左 Ore 条件 (left Ore condition)) 对所有  $s_1 \in S, r_1 \in R$ , 存在  $s_2 \in S, r_2 \in R$ , 使得  $s_2 r_1 = r_2 s_1$ ;

b) 若对  $r \in R, s \in S$ , 有  $rs = 0$ , 则存在  $s' \in S$ , 使得  $s'r = 0$ .

如果  $R$  的所有正则元的集合是一个左分母集, 则  $R$  称为左 Ore 的 (left Ore). 左分母集也称为左 Ore 集 (left Ore set).

一个左分母集  $S$  由相伴根函子

$$\text{Rad}_S(M) = \{x \in M; \text{Ann}_R(x) \cap S \neq \emptyset\}$$

确定  $R\text{-Mod}$  的一个扭理论 ( $\mathcal{S}_S, \mathcal{S}_S$ ). 这表示了扭理论和 (非交换) 局部化 (理论) 之间的联系. 这方面的更详细的内容见 [A1], [A2], [A3], 也见分式环 (fractions, ring of).

#### 参考文献

- [A1] Rowen, L. H., Ring theory, I, Acad. Press, 1988, § 3.4.  
 [A2] Faith, C., Algebra: rings, modules, and categories, I, Springer, 1973, § 15, § 16.  
 [A3] Golan, J. S., Localization of noncommutative rings, M. Dekker, 1975. 蔡传仁 译

#### 挠率张量 [torsion tensor; кручения тензор]

一个  $(1, 2)$  型张量, 关于其指标是反对称的. 它可通过流形  $M^n$  上的局部共基把联络的挠率形式 (torsion form) 分解而得. 特别地, 在和乐共基  $dx^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 下, 挠率张量的分量  $S_{ij}^k$  可用联络的 Christoffel 符号 (Christoffel symbol)  $\Gamma_{ij}^k$  表示如下:

$$S_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 挠率张量  $T$  也可用共变导数  $\nabla$  和向量场  $X, Y$  表示成

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

#### 参考文献

- [A1] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965.  
 [A2] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.  
 [A3] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982. 沈纯理 译

#### 环面 [torus; тор]

由一个闭圆环绕位于圆所在的平面内并且与圆不相交的一轴线旋转所得到的立体图形. 圆的中心画出一个圆, 称为环面的轴圆 (axial circle of the torus),

它的中心称为环面的中心 (centre of the torus). 轴圆的平面称为环面的赤道面 (equatorial plane of the torus), 由给定圆的旋转而得到的位于环面上圆的边界称为环面的子午线 (meridians of the torus).

在 Euclid 空间  $E^3$  的 Descartes 坐标下, 具有向径

$$r = a \sin u \mathbf{k} + l(1 + \varepsilon \cos u)(i \cos v + j \sin v)$$

(这里  $(u, v)$  是内蕴坐标,  $a$  是旋转圆的半径,  $l$  是轴圆的半径, 并且  $\varepsilon = a/l$  是偏心率) 的环面的表面也常称为一个环面 (torus), 它的线索是

$$ds^2 = a^2 du^2 + l^2(1 + \varepsilon \cos u)^2 dv^2,$$

它的曲率是  $K = (\cos u)/al(1 + \varepsilon \cos u)$ . 环面分别是旋转曲面 (surface of revolution) 与管道曲面 (canal surface) 的特殊情形.

从拓扑的观点看, 一个环面是两个圆的乘积, 所以一个环面是一个亏格 1 的二维闭流形. 如果这个乘积是可度量化的, 那么它可以作为一个 Clifford 曲面 (Clifford surface) 在  $E^4$  内或在椭圆空间  $El^3$  内的实现; 例如, 在  $E^4$  内它的方程是

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2, \quad x_3^2 + x_4^2 = b^2.$$

环面的一个自然的推广是多维环面 (multidimensional torus), 即圆  $S$ , 即模等于 1 的所有复数的流形自身的拓扑乘积.  $S$  的自然的光滑性决定了环面上一个光滑流形结构, 并且自然的乘法结构诱导环面上一个连通紧的交换实 Lie 群结构. 这些群是 Lie 群理论的一个重要部分, 且它们也称为环面 (tori) (见紧 Lie 群 (Lie group, compact); 极大环面 (maximal torus); Cartan 子群 (Cartan subgroup)). 一个偶数维的环面容许有一个复结构; 当某些条件得到满足时, 这样一个结构使环面成为 Abel 簇 (Abelian variety) (亦见复环面 (complex torus)). 在代数群的结构理论中, 环面作为一个实 Lie 群, 有一个重要的类似, 代数环面 (algebraic torus) (亦见代数群 (algebraic group); 线性代数群 (linear algebraic group)). 一个代数环面自身不是一个环面 (如果基域是复数域), 但是有一个子群是一个环面并且在其上可缩 (作为一个拓扑空间). 更确切地, 一个代数环面, 作为一个 Lie 群, 同构于某个环面与同样的几个正实数乘法群的乘积.

М. И. Войцеховский, В. Л. Попов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Berger, M., Geometry, 1-2, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一—五卷, 科学出版社, 1987—1991).  
 [A2] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988 (译自法文).



[A3] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969, p. 132; 356; 374.

林向岩 译 陆珊年 校

环面纽结 [torus knot; торический узел], 型  $(p, q)$  的  $\mathbb{R}^3$  中的一条曲线, 在柱坐标  $r, z, \theta$  中, 用方程

$$r = 2 + \cos t, \quad z = \sin t, \quad \theta = \frac{pt}{q}$$

给出, 其中  $t \in [0, 2\pi q]$ . 这里,  $p$  和  $q$  是互素的自然数. 环面纽结位于非扭环面  $(r-2)^2 + z^2 = 1$  的曲面上, 与环面的子午线相交于  $p$  个点且在  $q$  个点平行. 型  $(p, 1)$  和  $(1, q)$  的环面纽结是平凡的. 最简单的非平凡环面纽结是三叶形 (trefoil) (图 1), 它是型  $(2, 3)$  的一种. 型  $(p, q)$  的环面纽结的群有一个表示 (presentation)  $\langle a, b: a^p = b^q \rangle$ , Alexander 多项式由

$$(t^{pq} - 1)(t - 1)(t^p - 1)^{-1}(t^q - 1)^{-1}$$

给出. 所有的环面纽结都是 Neuwirth 纽结 (Neuwirth knot). 环面纽结的亏格是  $(p-1)(q-1)/2$ .

环面纽结的第二个结构用到代数超曲面

$$V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2: z_1^p + z_2^q = 0\}$$

在点处的奇异性. 如果  $p$  和  $q$  互素, 则  $V$  与充分小的球面  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  的交是  $S^3$  中的一个纽结, 它等价于型  $(p, q)$  的环面纽结. 在  $p$  和  $q$  不互素的情形, 这个交也位于一个非扭环面  $T^2 \subset S^3$  上, 但由几个分支组成. 这样得到的链环称为型  $(p, q)$  的环面链环 (torus link of type  $(p, q)$ ) (见图 2, 其中  $p=3, q=6$ ).

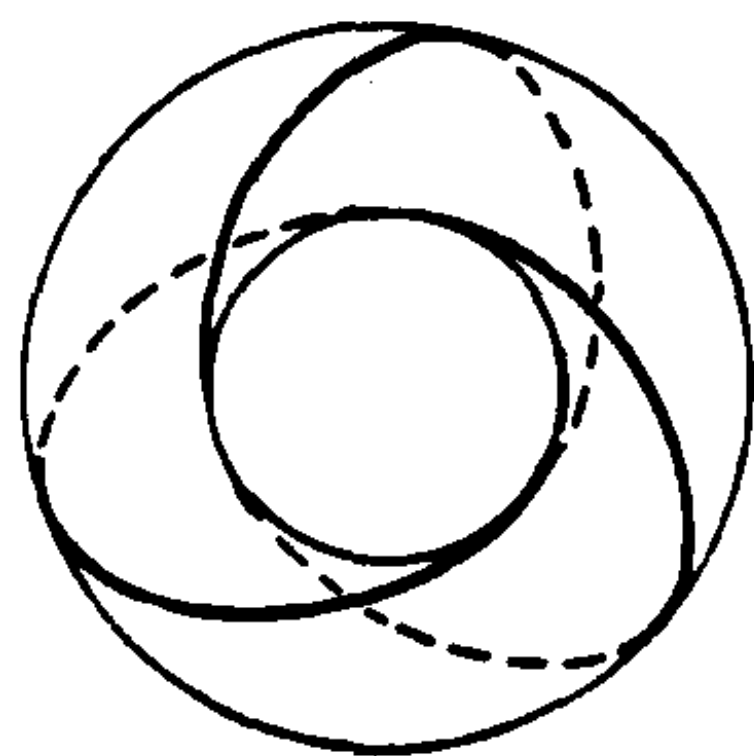


图 1

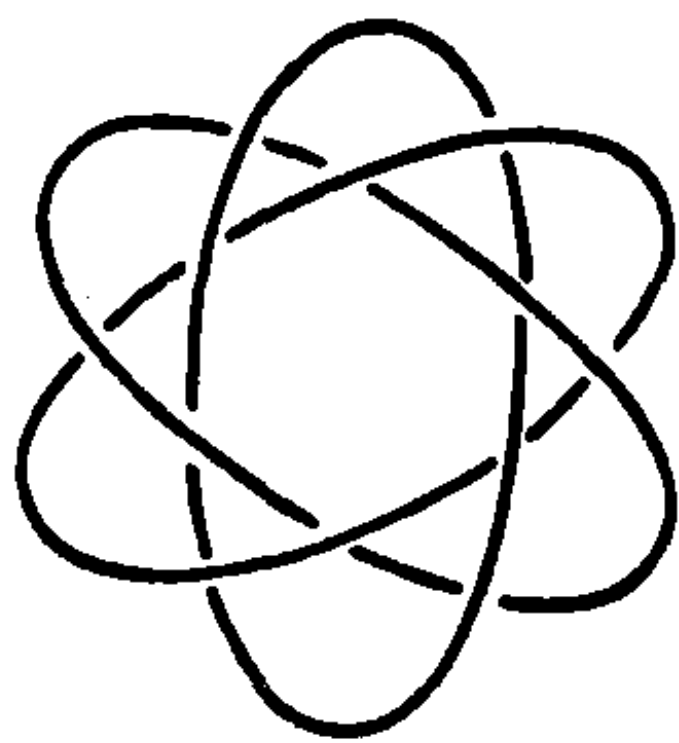


图 2

#### 参考文献

[1] Crowell, R. H. and Fox, R. H., Introduction to knot theory, Ginn, 1963.

[2] Milnor, J., Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press, 1968. М. И. Фарбер 撰

【补注】也见纽结理论 (knot theory).

#### 参考文献

[A1] Rolfsen, D., Knots and links, Publish or Perish, 1976. 徐森林 译

全导数 [total derivative; полная производная], 复合函数的

函数  $y = f(t, u_1, \dots, u_m)$  关于  $t$  的导数, 其中  $f$  不仅直接依赖于变量  $t$ , 而且还通过中间变量  $u_1 = u_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, u_m = u_m(t, x_1, \dots, x_n)$  依赖于  $t$ . 它由公式

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial t}$$

计算, 其中  $\partial f / \partial t, \partial f / \partial u_1, \dots, \partial f / \partial u_m, \partial u_1 / \partial t, \dots, \partial u_m / \partial t$  均为偏导数 (partial derivative).

Е. Д. Соломенцев 撰 王斯雷 译

全增量 [total increment; полное приращение], 多元函数的

当所有自变量具有增量 (一般为非零) 时, 函数得到的增量. 确切地说, 设函数  $f$  定义在变量  $x_1, \dots, x_n$  的  $n$  维空间  $\mathbb{R}^n$  的点  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  的某个邻域内. 记

$$\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n),$$

$$x^{(0)} + \Delta x = (x_1^{(0)} + \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n),$$

称函数  $f$  在  $x^{(0)}$  的增量

$$\Delta f = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$$

为全增量, 是指当  $x^{(0)} + \Delta x$  属于  $f$  的定义域时, 它被看成自变量  $x_1, \dots, x_n$  的  $n$  个可能增量  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$  的函数. 除了函数的全增量, 也可以考虑  $f$  在点  $x^{(0)}$  关于变量  $x_k$  的部分增量 (partial increments)  $\Delta_{x_k} f$ , 即当  $\Delta x_j = 0, j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$  时的增量  $\Delta f$ , 而  $k$  固定 ( $k = 1, \dots, n$ ).

Л. Д. Кудрявцев 撰 王斯雷 译

全集 [total set; тотальное множество]

向量空间 (vector space)  $E$  上分离  $E$  中点的线性泛函的一个集合  $\Sigma$ , 即使得对任意非零向量  $x \in E$  存在  $f \in \Sigma$  使  $f(x) \neq 0$ . В. И. Ломоносов 撰

【补注】在上述意义下的全集也可以更确切地称为线性泛函的全集 (total set of linear functionals), [A1].

更一般地, 当  $T$  是一拓扑向量空间时, 集合  $M \subset T$  称为全集或基本集 (fundamental set), 如果  $M$  的线性张在  $T$  中稠. 如果  $E$  的代数对偶  $E^*$  上给予弱拓扑 (weak topology) (因而  $E^* \simeq \prod_{\alpha \in A} K$ , 如果  $K$  是基域且  $\{e_\alpha: \alpha \in A\}$  是  $E$  的一个代数基), 则对集合  $\Sigma \subset E^*$  这两个定义是一致的.

## 参考文献

- [A1] Rolewicz, S., Metric linear spaces, Reidel, 1985, 44.  
 [A2] Köthe, G., Topological vector spaces, I, Springer, 1969, p. 132, 247 ff. 葛显良 译 鲁世杰 校

## 全空间 [total space; расслоения пространство]

见纤维空间 (fibre space).

## 函数的全变差 [total variation of a function; полное изменение функции]

即一元函数的变差 (variation of a function). 实值函数的全变差是它的正变差 (见函数的正变差 (positive variation of a function)) 与负变差 (见函数的负变差 (negative variation of a function)) 之和.

Б. И. Голубов 撰

【补注】若  $f$  为  $[a, b]$  上的复值函数, 则它在  $[a, b]$  上的全变差是数

$$V_a^b f = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \right\}.$$

若  $f$  还是连续的, 则这个数就是参数表示  $f$  在复平面上的弧长. 若  $f$  在  $[a, b]$  上绝对连续, 则

$$V_a^b f = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

## 参考文献

- [A1] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981. 王斯雷 译

## 全加性函数 [totally-additive function; вполне аддитивная функция], 集合上的

更一般地, 称为可数加性集函数 (countably-additive set function).

## 全有界集 [totally-bounded set; вполне ограниченное множество], 度量空间中的

与度量空间的全有界子空间相同. 见全有界空间 (totally-bounded space).

A. B. Архангельский 撰 罗嵩龄 译

## 全有界空间 [totally-bounded space; вполне ограниченное пространство]

一个度量空间 (metric space)  $X$ , 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 它可表示成有限个直径小于  $\varepsilon$  的集合之并集. 等价条件是: 对每个  $\varepsilon > 0$ ,  $X$  中存在有限  $\varepsilon$  网 ( $\varepsilon$ -net), 也就是这样的有限集  $A$ , 它使  $X$  中每个点与  $A$

中某点的距离小于  $\varepsilon$ . 全有界空间并且仅有全有界空间才是这样的度量空间, 它可以表示成紧度量空间 (见紧空间 (compact space)) 的子空间. 度量全有界空间当作拓扑空间来看, 包罗了所有具有可数基的正则空间 (regular space). Euclid 空间的子空间全有界, 当且仅当它有界. 其逆不真: 任意两点间距离为 1 的无穷空间, 如同 Hilbert 空间的球面或球, 就是有界而非全有界的度量空间. 全有界空间概念的意义可用下述定理说明: 度量空间是紧统 (compactum), 当且仅当它是全有界且完全的. 度量全有界空间的度量完全化是紧空间. 全有界空间在一致连续映射下的象是全有界空间.

## 参考文献

- [1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).  
 [2] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914 (中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960).  
 [3] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948 (中译本: П. С. 亚历山大罗夫, 集与函数泛论初阶, 上册, 商务印书馆, 1954; 下册, 高等教育出版社, 1955).  
 [4] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы функционального анализа, 4 изд., М., 1976 (中译本: А. Н. 柯尔莫果洛夫, С. Р. 佛明, 函数论与泛函分析初步, 上、下册, 高等教育出版社, 1992).

A. B. Архангельский 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文). 罗嵩龄 译

## 全不连通空间 [totally-disconnected space; вполне несвязное пространство]

一个空间, 它的任何多于一点的子集都不连通. 等价条件是, 该空间中任何点的连通分支就是这个点. 同全不连通空间的任何子空间一样, 全不连通空间的拓扑积与拓扑和都是全不连通的. 任何全不连通紧统 (在所有意义下) 是零维的. 这种紧统很重要, 特别因为它们是 Boole 代数的 Stone 空间. 平面上全不连通空间 (Knaster-Kuratowski 扇 (Knaster-Kuratowski fan)) 可以用附加一个单点的办法构成连通空间. 这样的空间不是零维的. 在 Hilbert 空间中, 由所有坐标为有理数的点组成的子空间是一维全不连通的. 若空间中每个点是包含该点的所有闭开集的交, 则此空间是全不连通的 (特别地, 所有零维空间全不连通). 但是, 存在具有可数基的全不连通度量空间, 并不是其中所有点都是这种闭开集的交.



## 参考文献

- [1] Hurewicz, W. and Wallman, G., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1948.
- [2] Engelking, R., Outline of general topology, North. Holland, 1968 (译自波兰文).
- [3] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).
- [4] Bourbaki, N., Elements of mathematics, General topology, Springer, 1989 (译自法文).

A. B. Архангельский, Б. А. Ефимов 撰

【补注】存在全不连通的平面集  $E$ , 其中没有真超集是全不连通的 ([A3]). 这种集合的余集称为平面的原始离差集 (primitive dispersion set). 对所有  $n$ , 存在  $n$  维全不连通可分度量群 ([A4]).

不连通空间这个术语存在一些混乱. 有几种不连通性; 主要的两个共同点是: i) 本条目采用的: 连通子集由至多一点组成; ii) 对任意两点  $x, y$ , 存在闭开集  $C$ , 使  $x \in C$  而  $y \notin C$ .

这时, 两种都称为全不连通性. 参考文献 [A1] 和 [A2] 称满足 ii) 的空间为全不连通空间, [A2] 中称满足 i) 的空间为遗传不连通的 (hereditarily disconnected) (因为它们没有非平凡的连通子空间). (注意, ii) 蕴涵 i).)

Knaster - Kuratowski 扇形是如下定义的平面的一个子集: 在平面上考察位于区间  $[0, 1] \times \{0\}$  中的常用的 Cantor 三分集  $C$ . 将  $C$  中任意点  $x$  与点  $(1/2, 1/2)$  用直线段  $L_x$  连接. 对任一  $x \in C$ , 可如下取  $L_x$  的子集  $F_x$ : 若  $x$  是  $C$  的余集中一个区间的端点, 取  $L_x$  中所有具有有理第二坐标的点, 反之取具有无理第二坐标的点. 并集  $F = \bigcup_{x \in C} F_x$  就是 Knaster - Kuratowski 扇. 若在  $F$  上移动点  $(1/2, 1/2)$ , 就得到满足上述 i) 而不满足 ii) 的空间. 也见 Kuratowski - Knaster 扇形 (Kuratowski - Knaster fan).

## 参考文献

- [A1] Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984 (译自俄文).
- [A2] Engelking, R., General topology, Helderman, 1989 (译自波兰文).
- [A3] Estill, M. E., A primitive dispersion set of the plane, *Duke Math. J.*, 9 (1952), 19, 323 - 328.
- [A4] Mill, J. van,  $n$ -dimensional totally disconnected topological groups, *Math. Japon.*, 32 (1987), 267 - 273. 罗嵩龄 译

全测地流形 [totally-geodesic manifold; вполне геодезическое многообразие], 全测地子流形 (totally-geodesic submanifold)

Riemann 空间 (Riemannian space)  $V^N$  中的一个

子流形  $M^n$ , 使得  $M^n$  中的测地线 (geodesic line) 也是  $V^N$  中的测地线. 全测地子流形  $M^n$  是用如下的特征来刻画的: 对  $M^n$  的每个法向量, 其相应的第二基本形式 (second fundamental form) 为零; 这等价于  $M^n$  的所有法曲率为零.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】一般 Riemann 流形中全测地子流形的存在是例外情形. 反之, 许多这种全测地子流形的存在在近期的各种研究中被用来刻画某些特殊流形, 例如对称空间. 见 [A1].

## 参考文献

- [A1] Ballman, W., Gromov, M. and Schroeder, V., Manifolds of non-positive curvature, Birkhäuser, 1985.
- [A2] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1 - 2, Interscience, 1963 - 1969. 沈纯理 译

全不完满空间 [totally-imperfect space; вполне несовершенное пространство]

不包含与 Cantor 集 (Cantor set) 同胚的子集的拓扑空间 (topological space). 例如, 任何完全可分不可数的可度量空间含有一不可数子空间, 和它的余子空间同为全不完满的.

A. A. Мальцев 撰

【补注】在 F. Bernstein 发表 [A1] 之后, 若  $R$  的子集及其补集都是全不完满的, 常称之为 Bernstein 集 (Bernstein set). 这种集合是不可测的.

## 参考文献

- [A1] Bernstein, F., Zur Theorie der trigonometrischen Reihe, *Ber. K. Sächs. Ges. Wissenschaft Leipzig Math-Phys. Kl.*, 60 (1908), 325 - 338. 罗嵩龄 译

全不可约集 [totally-irreducible set; вполне неприводимое множество]

局部凸的拓扑向量空间 (topological vector space)  $E$  上的, 在  $E$  上的所有弱连续线性算子的代数  $S(E)$  中处处稠密 (见弱拓扑 (weak topology)) 的线性算子 (linear operator) 集  $M$ , 这里,  $S(E)$  被认为带弱算子拓扑. 全不可约集的概念, 最初是对 Banach 空间引进的, 后来发现在群 (主要是半单 Lie 群) 表示理论中很有用. 如果  $M$  是全不可约集, 则它也是拓扑不可约的, 即  $E$  的关于  $M$  不变的任意闭子空间, 或者是零或者是整个空间  $E$ . 如果  $M$  是全不可约集, 则它的在  $S(E)$  中的换位子集由恒等的倍数算子组成. 在下列情形, 全不可约的性质与拓扑不可约的性质是等价的: 1)  $\dim E < \infty$ , 2)  $M$  是 Hilbert 空间上的酉算子的半群.

## 参考文献

- [1] Желобенко, Д. П., Гармонический анализ на па -

простых комплексных группах Ли, М., 1974.

Д. П. Желобенко 撰

【补注】 向量空间  $E$  上的算子集  $M$  称为代数不可约的 (algebraically irreducible), 如果不存在在所有  $A \in M$  作用下保持不变的  $E$  的真子空间 (即除了  $\{0\}$  和  $E$  以外). 也见不可约表示 (irreducible representation). 在英文中, “totally-irreducible” 有时也写成 “completely irreducible (完全不可约的)”.

拓扑不可约和代数不可约之间的联系, 以及  $M$  的换位子集由恒等的倍数算子组成这一结论, 都基于 Schur 引理 (Schur lemma). 在  $E$  是域  $k$  上的有限维空间的情形, 由算子集合的代数 (或拓扑) 不可约性可以推得:  $\text{End}_k(E)$  中的换位子集通常是域  $k$  上的可除代数, 而且等于  $k$  如果  $k$  是代数闭的. 如果  $k$  不是代数闭的则不一定. 例如, 在  $k = \mathbf{R}$  的情形, 群的不可约表示的换位可以是  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  或者  $\mathbf{R}$  上的四元数的 4 维代数. 因此, 上面关于有限维空间  $E$  时在代数不可约性 (或者, 此时是相同的, 拓扑不可约性) 之间的等价的叙述适合于代数闭的基本域, 但对非代数闭的基本域不成立. 例如, 设  $M$  是算子集:

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$$

(四元数代数 (quaternion algebra) 的在其本身上的左正则表示), 则  $M$  是代数不可约的, 但它的换位代数是形式为

$$\begin{bmatrix} e & f & g & h \\ -f & e & -h & g \\ -g & h & e & -f \\ -h & -g & f & e \end{bmatrix}, \quad e, f, g, h \in \mathbf{R}$$

的所有矩阵的 4 维代数 (四元数代数在  $\text{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^4)$  中的另一个相应于右正则表示的副本).

#### 参考文献

- [A1] Bratteli, O. and Robinson, D. W., Operator algebras and quantum statistical mechanics, 1, Springer, 1979, p. 47.
- [A2] Dixmier, J., Les  $C^*$ -algèbres et leur représentations, Gauthier-Villars, 1964, § 2.3.

朱学贤 译 刘和平 校

全正规空间 [totally-normal space; вполне нормальное пространство]

一个拓扑空间 (topological space), 它的满足条件  $[A] \cap B = \emptyset$ ,  $A \cap [B] = \emptyset$  的任意两个子集  $A, B$  有不交邻域; 这里,  $[A]$  和  $[B]$  为集合  $A$  和  $B$  的闭

包,  $\emptyset$  为空集. 全正规空间, 且只有这样的空间, 是遗传正规的. 完满正规空间 (perfectly-normal space) 是全正规的, 但反之不真. 也存在非全正规的正规空间 (normal space).

В. И. Пономарев 撰

【补注】 在西方, 这种空间称为完全正规的 (completely normal). 全正规空间 (totally-normal space) 是这样的正规空间, 其每个开集都是局部有限开集族  $F_\alpha$  之并 ([A1]). 因此, 这种空间推广了完满正规空间. 在维数论和同调论中, 完满正规空间在这种意义下多数可以推广成全正规空间.

#### 参考文献

- [A1] Dowker, C. H., Inductive dimension of completely normal spaces, Quart. J. Math. (Oxford), 4 (1952), 267 - 281.
- [A2] Engelking, R., General topology, Helderman, 1989 (译自波兰文).

罗嵩龄 译

全序群 [totally ordered group; линейно упорядоченная группа]

一个代数系统 (algebraic system)  $G$ , 关于乘法是一个群 (group), 关于二元序关系  $\leq$  是一个全序集 (totally ordered set), 并且满足下列公理: 对任意元素  $x, y, z \in G$ , 由  $x \leq y$  得到  $xz \leq yz$  和  $zx \leq zy$ .

全序群  $G$  的正元 (positive element) 集  $P = \{x \in G: x \geq e\}$  有下列性质: 1)  $PP \subseteq P$ ; 2)  $P \cap P^{-1} = \{e\}$ ; 3)  $g^{-1}Pg \subseteq P$ ; 以及 4)  $P \cup P^{-1} = G$ . 反过来, 如果群  $G$  有一个集合  $P$  满足条件 1) - 4), 那么  $G$  可以构成一个以  $P$  为正元集的全序群.

对于一个群是可序的有大量判别准则. 可序群是元素开方有唯一性的无挠群. 下面的群是可序的: 无挠 Abel 群, 无挠幂零群, 自由群以及自由可解群. 单纯非 Hopf 全序群存在. 可序群对其中心的商群是可序的.

全序群的直积, 完全直积和自由积, 并且也还有圈积都可以用扩充因子序的方法全序. 可以由全序群近似的群本身是可序的. 对于全序群有一个局部定理 (见 Мальцев 局部定理 (Mal'tsev local theorem)). 一个全序群可以嵌入一个全序体的乘群和一个单纯全序群中. 可序群类是可公理化的. 一个全序群是关于区间拓扑的拓扑群 (topological group). 一个全序群称为 Archimedes 的 (Archimedean), 当且仅当它没有非平凡的凸子群. 任意一个 Archimedes 全序群同构于具有自然顺序的实数加群的一个子群. 一个全序群的所有凸子群的集合形成一个具有 Archimedes 因子的完全内不变系统 (infra-invariant system), 从而全序群有可解正规系统 (见子群系统 (subgroup system)).



全序群理论的特性是同偏序扩充相联系的问题 (见准可序群 (pre-orderable group)). 全序群概念有若干推广.

## 参考文献

- [1] Кокорин, А. И., Копытов, В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972 (英译本: Kokorin, A. I. and Kopytov, V. M., Fully ordered groups, Israel Progr. Sci. Transl., 1974).
- [2] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.
- [3] Bourbaki, N., Algèbre, Éléments de mathématiques, Masson, 1981, Chaps. IV – VI.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Anderson, M. and Feil, T., Lattice ordered groups. An introduction, Reidel, 1988.

卢景波 译 王世强 校

**全序集** [totally ordered set; линейно упорядоченное множество], 链 (chain)

一个偏序集 (partially ordered set), 对其中的任意两个元素  $a$  和  $b$  适合  $a \leq b$  或  $b \leq a$ . 全序集的任一子集本身也是全序集. 全序集的每一个极大 (小) 元素是一个最大 (小) 元素. 全序集的一个重要特殊情况是良序集 (well-ordered set). 在偏序集的全序子集中, 合成序列 (composition sequence) 起着特别重要的作用. 一个全序集  $P$  的一个分割 (cut) 是指把它划分成两个集合  $A$  及  $B$ , 使得  $A \cup B = P$ ,  $A \cap B$  是空集,  $A \subseteq B^\vee$  并且  $B \subseteq A^\Delta$ , 其中

$$B^\vee = \{x \in P: x \leq b, \text{ 对所有 } b \in B\},$$

$$A^\Delta = \{x \in P: x \geq a, \text{ 对所有 } a \in A\}.$$

类  $A$  和  $B$  分别称分割的下类和上类 (lower and upper classes of the cut). 可以区分出下面类型的分割: 跳跃 (jump)——在下类中有一个最大元素并且上类中有一个最小元素; Dedekind 分割 (Dedekind cut)——在下 (上) 类中存在一个最大 (小) 元素, 但是在上 (下) 类中没有最小 (大) 元素; 间断 (gap)——在下类中没有最大元素并且在上类中没有最小元素. 一个全序集称为连续的 (continuous), 如果其所有分割都是 Dedekind 分割. 全序集  $P$  的一个子集  $D$  称为稠密的 (dense), 如果  $P$  的每一个非单个元素的区间都包含  $D$  的元素. 全序实数集可以刻画为一个既无最大元素, 又无最小元素, 但却包含一个可数稠密子集的连续全序集. 每一个可数全序集同构于区间  $[0, 1]$  中的所有二进位分式构成的全序集的一个子集. 一个格 (lattice)  $L$  同构于全序整数集的一个子集, 当且仅

当它的每一个子格是一个收缩核 (retract).

## 参考文献

- [1] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948.
- [2] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.
- [3] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Theory of sets. Addison-Wesley, 1968 (译自法文).

Л. А. Скорняков 撰

【补注】全序集也称线性序集 (linearly ordered set).

## 参考文献

- [A1] Sierpiński, W., Cardinal and ordinal numbers, PWN, 1958.
- [A2] Zuckerman, M. M. Sets and transfinite numbers, Macmillan, 1974.

卢景波 译 王世强 校

**全良序集** [totally well-ordered set; вполне упорядоченное множество]

见良序集 (well-ordered set).

**竞赛图** [tournament; турнир]

无自环的定向图 (graph, oriented), 且每一对顶点之间恰有一个方向的弧连接它们.  $n$  个顶点的竞赛图, 可视为在没有平局的情况下  $n$  个选手比赛的结果. 竞赛图的概念被用于对  $n$  个对象用两两比较的方法进行排序. 因此, 它在生物学、社会学等领域有用.

一个竞赛图, 如果它的顶点能用  $1, \dots, n$  进行标号, 使得顶点  $v_i$  到  $v_j$  有弧, 当且仅当  $i > j$ , 则这个竞赛图称为传递的 (transitive). 传递的竞赛图不含回路. 一个竞赛图, 如果对任意有序对  $v_i v_j$ , 都存在自  $v_i$  到  $v_j$  的有向路, 则称它是强的 (strong). 竞赛图的一个弧集称为相容的 (compatible), 如果这些弧及弧关联的顶点所构成的子图里不含回路. 按竞赛图“胜者”的定义, 相容集的最大基数是相容性的度量. 每一个竞赛图包含一个基数不小于  $(n^2/4)(1 + o(1))$  的相容弧集. 相容性的另一度量是  $n$  个点竞赛图的传递  $k$  顶点子竞赛图个数与强  $k$  顶点子竞赛图个数的比.  $n$  个点竞赛图的强  $k$  顶点子竞赛图的最大个数等于

$$\binom{n}{k} - k \binom{(n-1)/2}{k}, \text{ 若 } n \text{ 为奇数,}$$

$$\binom{n}{k} - \frac{k}{2} \left\{ \binom{n/2}{k} - \binom{(n-2)/2}{k-1} \right\},$$

若  $n$  为偶数.

一个竞赛图是强的, 当且仅当它有一个生成回路

(Hamilton 回路).  $n$  个顶点的每个强竞赛图有一个长为  $k$  的回路,  $k = 3, \dots, n$ . 每一个竞赛图有一条生成路 (Hamilton 路).

$n$  个顶点的竞赛图的出度  $d_i$  满足方程

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (n - d_i)^2.$$

假设一组整数  $(d_1, \dots, d_n)$  满足条件  $0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_n \leq n-1$ . 那么存在一个竞赛图其出度为  $d_1, \dots, d_n$ , 当且仅当对任意  $k = 1, \dots, n-1$  有不等式

$$\sum_{i=1}^k d_i \geq \frac{k(k-1)}{2}.$$

且当  $k = n$  时等式成立. 进而, 一个竞赛图是强的, 当且仅当对  $k < n$  有

$$\sum_{i=1}^k d_i > \frac{k(k-1)}{2}.$$

如果  $T_1$  和  $T_2$  是一个竞赛图的两个子竞赛图且满足: 对  $T_1$  的每个顶点  $v'$  和  $T_2$  的每个顶点  $v''$  有弧  $(v', v'')$ , 则记为  $T_1 \rightarrow T_2$ . 假设一个竞赛图的点集被划分为不相交的子集  $T_1, \dots, T_m$ , 使得对  $1 \leq i \leq j \leq m$  或者  $T_i \rightarrow T_j$  或者  $T_j \rightarrow T_i$ , 那么这个划分定义了  $T$  的顶点上的一个等价关系 (equivalence relation). 一个竞赛图称为简单的 (simple), 如果其顶点上不能够定义非平凡的等价关系.  $n$  个顶点的每个竞赛图都是某个  $n+2$  个顶点简单竞赛图的子竞赛图. 一个  $n$  顶点竞赛图  $T$  是某个  $n+1$  顶点简单竞赛图的子竞赛图, 当且仅当  $T$  不是 3 个点的回路, 也不是奇数个顶点的非平凡传递竞赛图. 两两不同构的  $n$  个顶点的竞赛图的个数渐近地等于

$$\frac{1}{n!} 2^{\binom{n}{2}}$$

$n$  个顶点标号的不同竞赛图的个数等于

$$2^{\binom{n}{2}}$$

对于竞赛图和强竞赛图的生成函数  $t(x)$  和  $s(x)$  有关系:

$$s(x) = \frac{t(x)}{1 + t(x)}$$

$n \geq 5$  个顶点的每个竞赛图, 若它不是强的, 则可由它的  $n-1$  个顶点的子竞赛图族唯一地重构.

#### 参考文献

- [1] Harary, F., Graph theory, Addison-Wesley, 1969.  
 [2] Moon, J. W., Topics on tournaments, Holt, Rinehart & Winston, 1968. A. A. Сапоженко 撰  
 【补注】  $N = \{1, \dots, n\}$  上的一个随机竞赛图定义为: 对每对不同顶点  $x_i, x_j$ , 随机地选取弧  $\overrightarrow{x_i x_j}$  或

$\overleftarrow{x_i x_j}$ . 这种选取对所有不同顶点对是等概率和独立的. 关于随机竞赛图的许多结果见 [2].

#### 参考文献

- [A1] Harary, F. and Moser, L., The theory of round robin tournaments, Amer. Math. Monthly, 73 (1966), 231 - 246.  
 [A2] Comtet, L., Advanced Combinatorics, Reidel, 1974, p. 68ff. 刘振宏 译 李 乔 校

域塔 [tower of fields 或 field tower; Башня полей]

某个域  $k$  的扩张序列

$$k \subset k_1 \subset \dots \subset k_i \subset \dots \quad (*)$$

依据扩张  $k_{i+1}/k_i$  的性质, 这个塔被称作正规的, Abel 的, 可分的, 等等. 域塔的概念在 Galois 理论 (Galois theory) 中起着重要的作用, 在此理论中用根号表示方程的根的问题归结为该方程的分裂域含于一个正规 Abel 域塔的可能性.

在类域论 (class field theory) 中出现域塔

$$k \subset k_1 \subset \dots \subset k_i \subset \dots,$$

其中  $k$  是某个代数数域, 同时每个域  $k_{i+1}$  是  $k_i$  的 Hilbert 类域 (Hilbert class field) (即  $k_i$  的极大 Abel 非分歧扩张). 任一扩张  $k_{i+1}/k_i$  的 Galois 群同构于域  $k_i$  的理想类群 (依照 Artin 互反律), 由于后者是有限群, 所以所有扩张  $k_{i+1}/k_i$  都是有限的. 这些  $k_i$  的并集  $K$  是  $k$  的极大可解非分歧扩张. 扩张  $K/k$  的有限性问题 (类域塔问题 (class field tower problem)) 于 1925 年由 Ph. Furtwängler 提出, 于 1964 年得到了否定的答案 ([2]). 具有无限类域塔的域的例子是有理数域添加  $\sqrt{-30030}$  所得到的扩张. 这样的域不可能嵌入到一个具有唯一因子分解性质的代数数域中. 此问题的这个解答在代数数论中有其应用, 例如, 在得到代数数域判别式增长的精确估计方面.

#### 参考文献

- [1] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1967.  
 [2] Голод, Е. С., Шафаревич, И. Р., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 28 (1964), 2, 261 - 272. А. Н. Паршин 撰 赵春来 译

迹 [trace; след]

域 (field)  $K$  到域  $k$  (其中  $K$  是  $k$  的有限扩张) 的映射, 它把元素  $\alpha \in K$  映到下述矩阵的迹 (见方阵的迹 (trace of a square matrix)): 此矩阵是把  $\beta \in K$  映成  $\alpha\beta$  的  $k$  线性映射  $K \rightarrow K$  的矩阵.  $\text{Tr}_{K/k}$  是加法群的同态 (homomorphism).

如果  $K/k$  是可分扩张, 则



$$\mathrm{Tr}_{K/k}(\alpha) = \sum \sigma_i(\alpha),$$

其中的求和取遍  $K$  到  $k$  的代数闭包  $\bar{k}$  的所有  $k$  同构  $\sigma_i$ . 迹映射是传递的, 即, 如果  $L/K$  和  $K/k$  是有限扩张, 则对任一  $\alpha \in L$ ,

$$\mathrm{Tr}_{L/k}(\alpha) = \mathrm{Tr}_{K/k}(\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha)).$$

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】特别在比较老的数学文献中, 会见到用  $S_{K/k}$  (来源于德文 Spur) 代替  $\mathrm{Tr}_{K/k}$  作为这个映射的记号.

#### 参考文献

- [A1] Jacobson, N., Lectures in abstract algebra, 3. Theory of fields and Galois theory, Springer, reprint, 1975.  
[A2] Jacobson, N., Basic algebra, 1, Freeman, 1985.  
[A3] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1965.

赵春来 译

#### 方阵的迹 [trace of a square matrix; след]

矩阵 (matrix) 的主对角线上元素的和. 矩阵  $A = \|a_{ij}\|$  的迹记作  $\mathrm{tr} A$ ,  $\mathrm{Tr} A$  或  $\mathrm{Sp} A$ :

$$\mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

设  $A$  是域  $K$  上一个  $n$  阶方阵.  $A$  的迹等于  $A$  的特征多项式 (characteristic polynomial) 的根的和. 如果  $K$  是特征为零的域, 那么  $n$  个迹  $\mathrm{tr} A, \dots, \mathrm{tr} A^n$  唯一确定  $A$  的特征多项式. 特别地,  $A$  是幂零的, 当且仅当  $\mathrm{tr} A^k = 0$  对所有  $k = 1, \dots, n$ .

如果  $A$  与  $B$  是  $K$  上同阶的方阵,  $\alpha, \beta \in K$ , 则

$$\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{tr} A + \beta \mathrm{tr} B,$$

$$\mathrm{tr} AB = \mathrm{tr} BA,$$

如果  $\det B \neq 0$ ,

$$\mathrm{tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{tr} A.$$

域上方阵的张量 (Kronecker) 积的迹等于其因子的迹的乘积.

Д. А. Супруненко 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Cohn, P. M., Algebra, 1, Wiley, 1982, p. 336.  
[A2] Gantmacher, F. R. (Gantmakher, F. R.), The theory of matrices, 1, Chelsea, reprint, 1959 (译自俄文) (中译本: 甘特马赫尔, 矩阵论, 高等教育出版社, 1955). 蒋滋梅 译

#### $C^*$ 代数 $A$ 上的迹 [trace on a $C^*$ -algebra; след на $C^*$ -алгебре]

$A$  的正元素集  $A^+$  上的一个加性泛函  $f$ , 在  $[0, +\infty]$  中取值, 对于用正数的乘法是齐性的且对所有的  $x \in A$  满足条件  $f(xx^*) = f(x^*x)$ . 迹  $f$  称为有限的

(finite), 如果对所有的  $x \in A^+$ ,  $f(x) < +\infty$ ;  $f$  称为半有限的 (semi-finite), 如果对所有的  $x \in A^+$ ,  $f(x) = \sup \{f(y): y \in A, y \leq x, f(y) < +\infty\}$ .  $A$  上的有限迹是使得对所有  $x, y \in A$ ,  $\varphi(xy) = \varphi(yx)$  的那些  $A$  上正线性泛函  $\varphi$  到  $A^+$  上的限制. 设  $f$  是  $A$  上的一个迹, 设  $\mathfrak{N}_f$  是使得  $f(xx^*) < +\infty$  的元素  $x \in A$  的集合, 又设  $\mathfrak{M}_f$  是  $\mathfrak{N}_f$  中元素对之积的线性组合的集合. 则  $\mathfrak{N}_f$  和  $\mathfrak{M}_f$  是  $A$  的自伴双边理想, 且存在唯一的  $\mathfrak{M}_f$  上线性泛函  $\varphi$  与  $f$  在  $\mathfrak{M}_f \cap A^+$  上一致. 设  $f$  是  $C^*$  代数  $A$  上一个下半连续半有限迹. 则公式  $s(x, y) = \varphi(y^*x)$  定义  $\mathfrak{N}_f$  上的一个 Hermite 型, 对于此型从  $\mathfrak{N}_f$  到其自身中的映射  $\lambda_f(x): x \mapsto xy$  对任意  $x \in A$  是连续的. 令  $N_f = \{x \in \mathfrak{N}_f: s(x, x) = 0\}$ , 又设  $H_f$  是商空间  $\mathfrak{N}_f/N_f$  关于型  $s$  定义的标量积的完全化. 通过转移到商空间随后作完全化, 算子  $\lambda_f(x)$  定义了 Hilbert 空间  $H_f$  上的某个算子  $\pi_f(x)$ , 且映射  $x \mapsto \pi_f(x)$  是  $C^*$  代数  $A$  在  $H_f$  中的一个表示. 映射  $f \mapsto \pi_f$  建立了  $A$  上下半连续半有限迹的集合与具有迹的  $A$  的表示的集合之间的一一对应, 精确到拟等价是确定的.

#### 参考文献

- [1] Dixmier, J.,  $C^*$  algebras, North-Holland, 1977 (译自法文). А. И. Штерн 撰

【补注】亦见  $C^*$  代数 ( $C^*$ -algebra); 迹 (trace); 拟等价表示 (quasi-equivalent representations).

#### 参考文献

- [A1] Bratteli, O. and Robinson, D. W., Operator algebras and quantum statistical mechanics, 1, Springer, 1979. 葛显良 译 鲁世杰 校

#### 曳物线 [tractrix; трактриса]

一条平面超越曲线, 它在 Descartes 直角坐标系中的方程是

$$x = \pm a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2}.$$

曳物线关于原点对称的 (见图),  $x$  轴是它的渐近线, 点  $(0, a)$  是一个带有垂直切线的尖点 (cusp). 从点  $x = 0$  量起的弧长是

$$l = a \ln \frac{a}{y}.$$

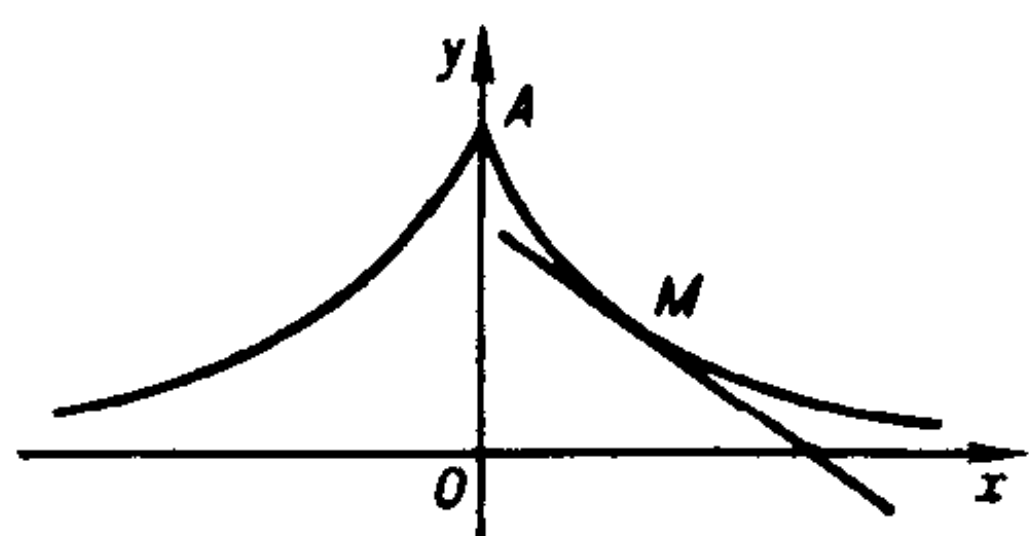
曲率半径是

$$r = a \cot \frac{x}{y}.$$

由曳物线和它的渐近线所围面积是

$$S = \frac{\pi a^2}{2}.$$

把曳物线绕  $x$  轴旋转后就形成了伪球面 (pseudo-sphere). 从曳物线一条切线的切点  $M$  到该切线与  $x$  轴的交点之间的线段的长度是常值. 由于这一性质可



把曳物线看成是长度为  $a$  的线段的一端沿  $x$  轴移动后, 另一端所形成的轨道. 曳物线的概念可以推广到当线段的一端不是沿一直线, 而是沿某给定曲线移动的情形; 称这样所得到的曲线为给定曲线的轨道 (trajectory).

#### 参考文献

- [1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988 (译自法文).  
 [A2] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1-3, Chelsea, reprint, 1971.  
 [A3] Greenberg, M., Euclidean and non-Euclidean geometries, Freeman, 1974.  
 [A4] Spivak, M., Differential geometry, 1-5, Publish or Perish, 1979.  
 [A5] Fladt, K., Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad. Verlagsgesellschaft, 1962.  
 [A6] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972. 沈纯理 译

#### 轨道 [trajectory; траектория]

此词的原意是一点在运动中所描绘出的曲线 (此点的轨道). 在质点组的运动中每点都沿自己的轨道运动. 同时, 整个系统的状态由相空间 (phase space) 中之一点表示, 它也沿相空间中某一轨道运动. 如果有必要强调所讨论的是后一种轨道, 就说讨论的是相轨道 (phase trajectory). (对于仅由一个质点  $M$  构成的“质点组”, 它在通常空间中的“几何”轨道和相轨道的区别仍然存在, 因为状态不仅指  $M$  的几何位置, 同时也包括了它的速度.)

在比较抽象的动力系统 (dynamical system) 理论中, 轨道通常是指相轨道 (这更多是由于, 在一般情况下讨论其他意义下的轨道是不合适的; “系统”一词不一定具有质点组那样的物理意义). 严格说来, 相轨道不一定是一曲线而可以成为一个点 (即一平衡位置 (equilibrium position)). 最后, “轨道” (trajectory) 一词同时也是 orbit 的译名, 其意义相同, 但后者是用于动力系统的抽象概念, 即作为变换的群或半群的轨道, 而不一定指单参数群或半群的轨道 (即是说, 轨道

不一定是一曲线).

对于由不可逆映射  $S$  的迭代而生成的瀑布 (cascade), 所谓一点  $x$  的轨道 (或称完全轨道 (complete trajectory)) 有时是指其象  $S^n x$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , 以及这些象在映射  $S^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , 下的原象的全体.

Д. В. Аносов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, М., 1974 (中译本: В. И. Арнольд, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992).  
 [A2] Arnol'd, V. I. and Avez, V., Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, 1968 (译自法文).

齐民友 译

超越性的度量 [transcendancy, measure of 或 transcendence measure; трансцендентности мера], 简称超越度

刻画一个给定的超越数 (transcendental number) 与高和次数均有界的代数数的集合之间, 当这些参数的界值变化时产生的偏差的函数. 对于超越数  $\omega$  及自然数  $n$  和  $H$ , 超越性度量是

$$w_n(\omega; H) = \min |P(\omega)|,$$

其中极小值取自所有次数不超过  $n$  且高不超过  $H$  的非零多项式. 由 Dirichlet “抽屉”原理 (见 Dirichlet 原理 (Dirichlet principle)) 可推出下列估值始终成立:

$$w_n(\omega; H) < c_1^n H^{-n},$$

其中  $c_1$  仅与  $\omega$  有关. 在许多情况下, 不仅可以得到数  $\omega$  的超越性的证明, 而且能够通过次数及  $n$  和  $H$  的对数或指数函数给出超越性度量的下界. 例如, 证明  $e$  的超越性的 Hermite 方法可以得到不等式

$$w_n(e; H) > H^{-n - (c_2 n^2 \ln n) / \ln \ln H},$$

此处  $c_2 > 0$  是一个绝对常数, 而  $H \geq H_0(n)$ . 对任何固定的  $n$  及  $\varepsilon > 0$ , 对几乎所有 (在 Lebesgue 意义下) 实数  $\omega$  有

$$w_n(\omega; H) > c_3 H^{-n - \varepsilon}, \quad c_3 = c_3(\omega; n, \varepsilon)$$

(见 Mahler 问题 (Mahler problem)). 超越数可以基于在  $n$  和  $H$  不加限制地变化时  $w_n(\omega; H)$  的渐近性状的差别而加以分类 (见 [3]).

#### 参考文献

- [1] Гельфонд, А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952. (英译本: Gel'fond, A. O., Transcendental and algebraic numbers, Dover, 1960).  
 [2] Cijssouw, P. L., Transcendence measures, Dissertation, Univ. Amsterdam, 1972.



[3] Baker, A., Transcendental number theory, Cambridge Univ. Press, 1975. В. Г. Спринджук 撰

【补注】

参考文献

[A1] Шидловский, А. Б., Трансцендентные числа, М., 1987. (英译本: Shidlovskii, A. B., Transcendental numbers, de Gruyter, 1989).

朱尧辰 译 戚鸣皋 校

**超越分支点** [transcendental branch point; трансцендентная точка ветвления], 解析函数  $f(z)$  的

不是代数分支点 (algebraic branch point) 的分支点 (branch point). 换言之, 它或是有限  $k (> 0)$  阶分支点  $a$ , 但在该点处不存在有限或无穷极限

$$\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \neq a}} f(z),$$

或是无穷阶对数分支点 (logarithmic branch point).

例如, 第一种可能性出现于函数  $\exp(1/z^{1/k})$  的超越分支点  $a = 0$  处, 第二种可能性出现于函数  $\ln z$  的超越分支点  $a = 0$  处.

在第一种情形下, 函数  $f(z)$  在  $a$  的邻域中可展开为 **Puiseux 级数** (Puiseux series)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^{n/k},$$

且此级数对无穷多个负下标  $n$  具有非零系数  $c_n$ .

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957, 第八章). Е. Д. Соломенцев 撰 沈永欢 译

**超越曲线** [transcendental curve; трансцендентная кривая]

一条平面曲线, 其在直角 Descartes 坐标系下的方程不是代数的. 和代数曲线 (algebraic curve) 相对照, 超越曲线和一条直线能有无穷多个相交点, 而且自身可以有无穷多个拐点. 在超越曲线上存在着具有特殊属性的点, 而这在代数曲线上是不存在的: 终结点 (points of termination)——以该点为中心、半径充分小的圆与曲线只交于一点; 角点 (corner points) (折点 (points of fracture))——在该点曲线的两个分支重合, 而且每个分支在该点都有一条切线; 渐近点 (asymptotic points)——曲线的一个分支连续地逼近它, 且形成围绕该点的一个无穷次的旋转. 某些超越曲线还有其他形式的特性 (例如, 它们有一个点化的分支, 包含着无穷多个孤立点).

一个将超越曲线予以分类的企图是基于下列事实: 对已知超越曲线中的绝大多数 (如同对所有的代

数曲线), 曲线在每一点处的切线的斜率  $y'$  是一个代数方程的根, 该方程的系数是  $x$  和  $y$  的多项式. 换句话说, 大多数已知超越曲线的微分方程是一个形如

$$\sum_{r=0}^n f_r(x, y) (y')^{n-r} = 0$$

的一阶方程, 其中  $f_0, \dots, f_n$  是无公共因子的多项式. 这就使得能将所有的代数曲线及几乎所有的超越曲线 (除去譬如说 **Cornu 螺线** (Cornu spiral)) 分类成一群所谓的泛代数曲线 (pan-algebraic curves), 它们是用度  $n$  和秩  $v$  来区分, 这里秩  $v$  是多项式  $f_0, \dots, f_n$  的次数的最大值. 例如, 对三阶曲线,  $n = 1, v = 2$ ; 对 **Archimedes 螺线** (Archimedean spiral),  $n = 2, v = 4$ . 泛代数曲线具有许多代数曲线所固有的性质, 例如, **Hesse 曲线** (代数曲线的) (Hessian (algebraic curve)) 和极线 (polar) 的概念都可以推广到泛代数曲线上. 关于对泛代数曲线的更进一步的分类, 见 [1].

超越曲线的例子有: **螺线** (spirals), **悬链线** (catenary), **Dinostratus 割圆曲线** (Dinostratus quadratrix), **摆线** (cycloid), 还有超越函数 (指数的, 对数的, 三角的, 等等) 的图 (见超越函数 (transcendental function)).

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Fladt, K., Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad. Verlagsgesellschaft, 1962.

沈纯理 译

**超越扩张** [transcendental extension; трансцендентное расширение]

非代数的域扩张 (见域的扩张 (extension of a field)). 扩张  $K/k$  是超越的, 当且仅当域  $K$  包含有在  $k$  上超越 (transcendental over  $k$ ) 的元素, 即它不是任一系数在  $k$  中的非零多项式的根.

集合  $X \subset K$  中的元素称为在  $k$  上代数无关 (algebraically independent over  $k$ ), 如果对任意有限个元素  $x_1, \dots, x_m \in X$  及任一系数在  $k$  中的非零多项式  $F(X_1, \dots, X_m)$ , 有

$$F(x_1, \dots, x_m) \neq 0.$$

集合  $X$  中的元素在  $k$  上是超越的. 如  $X \subset K$  是在  $k$  上代数无关的最大集合, 则称  $X$  为  $K$  在  $k$  上的超越基 (transcendence basis).  $X$  的基数称为  $K$  在  $k$  上的超越次数 (transcendence degree), 它是扩张  $K/k$  的不变量. 对于域塔 (tower of fields)  $L \supset K \supset k$ ,  $L/k$

的超越次数等于  $L/K$  的超越次数与  $K/k$  超越次数之和.

如果集合  $X$  中所有元素都在  $k$  上代数无关, 则扩张  $k(X)$  称为纯超越的 (purely transcendental). 此时, 域  $k(X)$  同构于  $k$  上以集合  $X$  的元为变量的有理函数域. 任一域扩张  $L/k$  可表成一个扩张的塔  $L \supset K \supset k$ , 其中  $L/K$  是代数的,  $K/k$  是纯超越的. 如果可选择  $K$ , 使  $L/K$  为可分扩张 (separable extension), 则扩张  $L/k$  称为可分生成的 (separable generated), 且  $K$  在  $k$  上的基称为分离基 (separating basis). 如果  $L$  在  $k$  上是可分生成的, 则  $L$  在  $k$  上是可分的. 当扩张  $L/K$  为有限生成时, 其逆也成立. 由定义, 扩张  $K/k$  是可分的, 当且仅当  $k$  的任一导子 (见环中的导子 (derivation in a ring)) 可扩展到  $K$  上. 这样的扩张对任一导子是唯一确定的, 当且仅当扩张  $K/k$  是代数的.

#### 参考文献

- [1] Zariski, O., and Samuel, P., Commutative algebra, 1, Springer, 1975.
- [2] Bourbaki, N., Algebra, Elements of Mathematics, Springer, 1988, Chapt. 4 - 6 (译自法文).

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 Noether 正规化引理 (Noether normalization lemma) 指出: 如果  $A$  是一整环, 作为域  $k$  上的环是有限生成的, 则存在  $x_1, \dots, x_r \in A$ , 它们在  $K$  上代数无关, 而  $A$  在  $k[x_1, \dots, x_r]$  上是整的.

#### 参考文献

- [A1] Cohn, P. M., Algebra, Wiley, 1989, Vol. 2, 350. Vol. 3, 168. 冯绪宁 译

**超越函数** [transcendental function; трансцендентная функция]

狭义地说是复  $z$  平面  $C$  中非有理函数 (rational function) 的亚纯函数 (meromorphic function). 特别地, 整超越函数即不是多项式的整函数 (entire function) 属于这一类, 例如指数函数  $e^z$ , 三角函数  $\sin z$ ,  $\cos z$ , 双曲函数  $\sinh z$ ,  $\cosh z$  以及函数  $1/\Gamma(z)$  ( $\Gamma(z)$  是 Euler  $\Gamma$  函数 (gamma function)) 等. 整超越函数只在无穷远处有一个本质奇点. 真正的亚纯超越函数由下列事实刻画: 在有限平面  $C$  中出现极点构成的有限或无穷集, 而且在无穷远处分别出现本质奇点或极点的极限点; 属于此种类型的有, 例如, 三角函数  $\tan z$ ,  $\cot z$ , 双曲函数  $\tanh z$ ,  $\coth z$  以及  $\Gamma$  函数  $\Gamma(z)$ . 上述超越函数的定义可推广到多复变量  $z = (z_1, \dots, z_n)$  的空间  $C^n$  ( $n \geq 2$ ) 中的亚纯函数  $f(z)$ .

广义地说, 超越函数是任一这样的 (单值或多值) 解析函数, 其值的计算除自变量的代数运算外, 还需要某种形式的极限过程. 对于超越函数, 典型的是尽

管出现奇点, 此奇点也不是极点或代数分支点; 例如对数函数  $\ln z$  有两个超越分支点  $z = 0$  和  $z = \infty$ . 解析函数是超越函数当且仅当其 Riemann 曲面 (Riemann surface) 是非紧的.

重要的超越函数类由经常遇到的特殊函数组成: Euler  $\Gamma$  函数 (gamma-function) 和 B 函数 (beta-function), 超几何函数 (hypergeometric function) 和汇合型超几何函数 (confluent hypergeometric function) 特别是其特殊情形球面函数 (spherical function), 柱函数 (cylinder functions) 和 Mathieu 函数 (Mathieu functions).

#### 参考文献

- [1] Krazer, A., Franz, W., Transzendente Funktionen, Akademie-Verlag, 1960.
- [2] Whittaker, E. T., Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952, Chapt. 2.
- [3] Стоилов, С., Теория функций комплексного переменного, т. 1, М., 1962 (译自罗马尼亚文).

Л. Д. Кудрявцев, Е. Д. Соломенцев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Nevanlinna, R., Analytic functions Springer, 1970, (译自德文).
- [A2] Caratheodory, C., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, reprint, 1983, 170 (中译本: C. Caratheodory, 复变函数论, 第一卷, 高等教育出版社, 1985).
- [A3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957).

沈永欢 译

**超越数** [transcendental number; трансцендентное число]

不是任何整系数非零多项式的根的数. 这种数的定义的区域是实数、复数或  $p$  进数的域. 超越数的存在性及明显构造是 J. Liouville ([1]) 基于他所指出的下列事实而给出的. 代数无理数不能“很好”地被有理数逼近 (见 Liouville 定理 (Liouville theorem)). 类似的考虑能够构造  $p$  进超越数. G. Cantor ([2]) 发现所有代数数组成的集合的可数性及全部实数组成的集合的不可数性后, 从而证明了实超越数形成一个具有连续统基数的集合. E. Borel ([3]) 在引进了测度论的初始概念后确立了“几乎所有”的实数是超越数. 后来还发现 Liouville 超越数形成实数轴上一个处处稠密的子集, 它有连续统基数而 Lebesgue 测度为零. 尽管在 18 世纪中叶就已出现关于诸如  $e$ ,  $\pi$ ,  $\ln 2$ ,  $2^{\sqrt{2}}$ , 等等这样一些数的超越性的猜测, 但并没



有得到它们的证明.  $e$  的超越性是 Ch. Hermite ([4]) 证明的,  $\pi$  的超越性以及更一般的, 代数数的对数的超越性是 C. L. F. Lindemann ([5]) 证明的,  $2^{\sqrt{2}}$  的超越性是 A. O. Гельфонд ([6]) 证明的; C. L. Siegel ([7]) 发展了一个一般性方法, 用以证明一类特殊的满足多项式系数线性微分方程的整函数 ( $E$  函数) 在代数点上的值的超越性和代数无关性 (见 Siegel 法 (Siegel method)). Гельфонд ([8]) 和 T. Schneider ([9]) 同时、独立地证明了: 若  $\alpha \neq 0, 1$  是代数数而  $\beta$  是代数无理数, 则  $\alpha^\beta$  是超越数 (它称为 Hilbert 第七问题 (Hilbert seventh problem)). A. Baker ([10]) 在自然限制下证明了  $\alpha^\beta$  形式的数的乘积的超越性. 类似的结果也对  $p$  进超越数得到 (包括 Siegel 的  $E$  函数理论). 超越数论的方法的发展表现出对 Diophantus 方程 (Diophantine equations) 的新研究有强烈的影响 ([10], [11]).

#### 参考文献

- [1] Liouville, J., Sur des classes de très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, *C. R. Acad. Sci.*, 18 (1844), 883 – 885, 910 – 911.
  - [2] Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Olm, 1962.
  - [3] Borel, E., *Leçons sur les fonctions discontinues*, Gauthier-Villars, 1898.
  - [4] Hermite, Ch., Sur la fonction exponentielle, *C. R. Acad. Sci.*, 77 (1873), 18 – 24, 74 – 79, 221 – 233, 285 – 293.
  - [5] Lindemann, C. L. F., Über die Zahl  $\pi$ , *Math. Ann.*, 20 (1882), 213 – 225.
  - [6] Gel'fond, A. O., Sur les nombre transcendants, *C. R. Acad. Sci.*, 189 (1929), 1224 – 1226.
  - [7] Siegel, C. L., Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, *Abhandl. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Kl.*, 1 (1929), 1 – 70.
  - [8] Гельфонд, А. О., «Докл. АН СССР», 2 (1934), 4 – 6.
  - [9] Schneider, T., Transzendenzuntersuchungen periodischer Functionen I, II, *J. Reine Angew. Math.*, 172 (1934), 65 – 69, 70 – 74.
  - [10] Baker, A., *Transcendental number theory*, Cambridge Univ. Press, 1975.
  - [11] Спринджук, В. Г., Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных, М., 1982 (英译本: Sprindzhuk, V. G., *Classical diophantine equations*, Lecture Notes in Math., 1559, Springer, 1993).
  - [12] Фельдман, Н. И., Седьмая проблема Гильберта, М., 1982. В. Г. Спринджук 撰
- 【补注】 Гельфонд 和 Schneider 的结果蕴含了对任何  $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{Q}} \setminus \{0, 1\}$ ,  $\log \alpha / \log \beta \notin \mathbb{Q}$  蕴含  $\log \alpha / \log \beta \notin \bar{\mathbb{Q}}$ . Baker 的推广断言, 对于任何  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \bar{\mathbb{Q}}$ ,  $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$  的  $\mathbb{Q}$  线性无关性蕴含  $1, \log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$  的  $\bar{\mathbb{Q}}$  线性无关性. 此外, 可以对这种线性型给出有效性下界. 它对 Diophantus 方程理论有许多深刻的推论 (见 [10]). Гельфонд 和 Schneider 的方法还被进一步推广, 使椭圆曲线的周期和拟周期的  $\bar{\mathbb{Q}}$  线性无关性被包括进来, 并且通过 G. Wüstholz, P. Philippon 和 M. Waldschmidt 的工作, 它最终形成了定义在  $\bar{\mathbb{Q}}$  上的交换代数群上的  $\bar{\mathbb{Q}}$  线性无关性的非常一般的陈述.

#### 参考文献

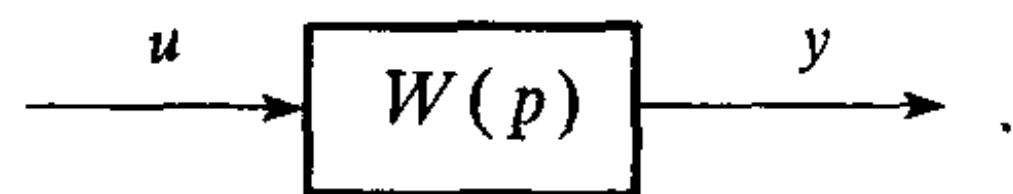
- [A1] Mahler, K., *Lectures on transcendental numbers*, Lecture Notes in Math., 546, Springer, 1976.
- [A2] Гельфонд, А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952 (英译本: Gel'fond, A. O., *Transcendental and algebraic numbers*, Dover, 1960).
- [A3] Bertrand, D., et al., Les nombres transcendants, *Mem. Soc. Math. France*, 13 (1984), 1 – 60.
- [A4] Шидловский, А. Б., Трансцендентные числа, М., 1987 (英译本: Shidlovskii, A. B., *Transcendental numbers*, de Gruyter, 1989).
- [A5] André, Y., *G-functions and geometry*, Vieweg, 1988. 朱尧辰 译 戚鸣皋 校

传递函数 [transfer function; передаточная функция], 线性定常控制系统 (自动控制系统) 的

在  $t = 0$  时零初始条件下单位脉冲函数 (unit pulse function) ( $\delta$  函数)  $\delta(t)$  的响应的 Laplace 变换 (Laplace transform) (这一响应称为权函数 (weighting function), 脉冲传递函数 (pulse transfer function) 或者脉冲特征 (pulse characteristic)). 一种等价的定义是, 传递函数是零初始条件下输出和输入信号的 Laplace 变换 (见算子演算 (operational calculus)) 之比. 传递函数是复变量  $p$  的一个有理分式函数  $W(p)$ ; 它是零初始条件下线性关系

$$Y(p) = W(p)U(p) \quad (1)$$

中的系数, 这个式子把零初始条件下系统输入 (作用, 控制)  $u(t)$  的 Laplace 变换  $U(p)$  和输出 (响应, 反应)  $y(t)$  的 Laplace 变换  $Y(p)$  关联起来. 在控制理论中, 关系 (1) 用图象表示成:



例如, 设控制系统由一常系数线性常微分方程描述:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}, \quad a_n = 1 \quad (2)$$

(在实际系统中通常  $m \leq n$ ). 于是

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0} \quad (3)$$

如果使用 (2) 的算子形式和微分算子  $p$ ,

$$A(p)y = B(p)u.$$

把传递函数定义成输入算子 (input operator)  $B(p)$  与本征算子 (eigenoperator)  $A(p)$  之比, 则可得到同样的表达式; (2) 的传递函数 (3) 具有如下解释: 若选择控制  $u = e^{st}$ , 其中  $s$  为使  $A(s) \neq 0$  的复数, 则线性齐次方程 (2) 有特解  $y = W(s)e^{st}$ .

不应该把传递函数与阶梯响应 (step response) 相混淆, 后者表示系统对单位阶梯函数 (unit step function):

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

在零初始条件下的响应.

传递函数是线性定常控制系统理论中的基本概念之一. 它与施加在系统上的控制作用无关, 仅仅由系统本身的参数所决定, 从而为系统提供一种固有的动态特性. 纯虚变量的函数  $W(i\omega)$  在控制理论中起着特殊的作用, 它称为振幅-相位特性 (amplitude-phase characteristic), 或者频率特性 (frequency characteristic). 传递函数概念已经被推广到别种类型线性控制系统 (矩阵系统, 非定常系统, 离散系统, 分布参数系统, 等等) 的线性控制系统.

#### 参考文献

- [1] Ройтенберг, Я. Н., Автоматическое управление, 2 изд., М., 1978.
- [2] Математические основы теории автоматического регулирования, М., 1971.
- [3] Kalman, R. E., Falb, P. L. and Arbib, M. A., Topics in mathematical systems theory, McGraw-Hill, 1969.
- [4] Бутковский, А. Г., Характеристики систем с распределенными параметрами. Справочное пособие, М., 1979. Н. Х. Розов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Kwakernaak, H. and Sivan, R., Linear optimal control systems, Wiley (Interscience), 1972.
- [A2] Kailath, T., Linear systems, Prentice-Hall, 1980.

冯德兴 译

#### 转移定理 (Diophantus 逼近中的) [transference theorem in Diophantine approximation; переноса теорема]

关于一个不等式组的整数可解性与另一个以确定方式与前者相联系的不等式组的可解性之间的关系. 线性转移定理的一个经典的例子是 Хинчин 的转移原则 (见 Diophantus 逼近 (Diophantine approximations)). 更一般的线性转移定理涉及具有非奇异方阵

的齐次线性不等式组的整数解和与之对应的具有逆转置阵的不等式组的解之间的关系: 一个不等式组的非平凡解的存在性保证了另一个不等式组的非平凡解的存在性, 并且反过来也正确. 在齐次和非齐次的线性不等式组之间存在着这样的关系: 齐次组不存在非平凡解保证了相应的非齐次组的解的存在, 并且反过来命题也成立. 此外还知道对于非线性问题也存在类似的关系, 不过它们表达得不够明确而且研究也较少. Diophantus 逼近论中转移定理的基本原理可以通过数的几何 (geometry of numbers) 中的转移定理显示出来: 对于一个凸集, 该集及其对偶集中整点的存在性之间有着一定的关系.

#### 参考文献

- [1] Cassels, J. W. S., An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ. Press, 1957.
- [2] Cassels, J. W. S., An introduction to the geometry of numbers, Springer, 1959.

В. Г. Спринджук 撰 朱尧辰 译 戚鸣皋 校

#### 超限直径 [transfinite diameter; трансфинитный диаметр], 紧集的

复平面内紧集  $E$  的特征  $d = d(E)$ , 它为该集的容量 (capacity) 提供了几何解释. 设  $E$  是  $z$  平面内一无限紧集. 则称量

$$d_n(E) = \left\{ \max_{z_k, z_l \in E} \prod_{1 \leq k < l \leq n} [z_k, z_l] \right\}^{2/(n-1)} \quad n = 2, 3, \cdots \quad (1)$$

为  $E$  的  $n$  阶直径 ( $n$ -th diameter), 其中  $[a, b] = |a - b|$  是  $a$  与  $b$  之间的 Euclid 距离. 特别,  $d_2(E)$  就是  $E$  的 Euclid 直径.  $E$  中使 (1) 式右端达到最大值的点  $z_{n,1}, \cdots, z_{n,n}$  称为  $E$  的 Fekete 点组 (Fekete points) (或 Vandermonde 结点组 (Vandermonde nodes)). 量  $d_n(E)$  的序列非增:  $d_{n+1}(E) \leq d_n(E)$ ,  $n = 2, 3, \cdots$ , 故存在如下极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(E) = d(E).$$

量  $d(E)$  亦称为  $E$  的超限直径 (transfinite diameter). 若  $E$  是有限集, 则有  $d(E) = 0$ . 超限直径  $d(E)$ , Чебышев 常数  $\tau(E)$  与容量  $C(E)$  相等:

$$d(E) = \tau(E) = C(E).$$

集合  $E$  的超限直径具有如下性质: 1) 若  $E_1 \subset E$ , 则  $d(E_1) \leq d(E)$ ; 2) 若  $a$  是固定的复数,  $E_1 = \{w: w = az, z \in E\}$ , 则  $d(E_1) = |a|d(E)$ ; 3) 若  $E_\epsilon$  是同  $E$  的距离至多为  $\epsilon$  的那些点组成的集合, 则  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} d(E_\epsilon) = d(E)$ ; 4) 若  $E^*$  是由方程

$$Q(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_k = w$$

的根组成的集合, 其中  $Q(z)$  是给定的多项式,  $w$



取遍整个  $E$ , 则  $d(E^*) = \{d(E)\}^{1/k}$ . 圆周的超限直径等于它的半径; 线段的超限直径等于它的长度的四分之一.

设  $E$  是有界连续统,  $D$  是  $E$  关于扩充平面的余集包含点  $\infty$  的分支. 则  $E$  的超限直径等于  $D$  的 (关于  $\infty$  的) 共形半径 (见共形半径 (conformal radius)).

对于双曲及椭圆平面中的集合, 相应的概念定义如下. 作为双曲平面的一个模型, 考虑圆盘  $|z| < 1$ , 其度量由线元素  $ds_h = |dz|/(1 - |z|^2)$  确定, 且假定  $E$  是  $|z| < 1$  内的无限闭集. 则  $E$  的  $n$  阶双曲直径 ( $n$ -th hyperbolic diameter)  $d_{n,h}(E)$  由 (1) 式定义, 但其中

$$[a, b] = \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| \quad (2)$$

是  $a$  与  $b$  之间的双曲伪距离 (hyperbolic pseudo-distance), 即  $[a, b] = \tanh \rho_h(a, b)$ , 其中  $\rho_h(a, b)$  是  $|z| < 1$  中  $a$  与  $b$  之间的双曲距离 (见双曲度量 (hyperbolic metric)). 如同 Euclid 的情形, 序列  $d_{n,h}(E)$  非增且存在如下极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{n,h}(E) = d_h(E).$$

称其为  $E$  的双曲超限直径 (hyperbolic transfinite diameter). 模仿用  $z$  平面的点之间的 Euclid 距离定义 Чебышев 常数  $\tau(E)$  与容量  $C(E)$ , 用  $|z| < 1$  的点之间的双曲伪距离 (2) 定义双曲 Чебышев 常数 (hyperbolic Chebyshev constant)  $\tau_h(E)$  与双曲容量 (hyperbolic capacity)  $C_h(E)$ . 从而得到

$$d_h(E) = \tau_h(E) = C_h(E).$$

双曲超限直径是关于双曲等距完全群的不变量.

若  $E$  是连续统, 则在双曲超限直径  $d_h(E)$  与共形映射之间存在简单的关系. 即: 设  $E$  是圆盘  $|z| < 1$  内的连续统使得  $E$  关于该圆盘的余集共形等价于圆环  $r < |w| < 1/r$ ,  $0 < r < 1$ . 则  $r = d_h(E)$ .

作为椭圆平面的一个模型, 考虑扩充复数  $z$  平面, 具有直径为 1 且与  $z$  平面相切于  $z=0$  的 Riemann 球面  $K$  的度量, 即其度量由线元素

$$ds_e = \frac{|dz|}{1+|z|^2}$$

确定, 且设点  $z$  与  $z^* = -1/\bar{z}$  被视为同一点: 在扩充  $z$  平面到  $K$  的球极平面投影下, 它们对应于  $K$  的直径的两端. 设  $E$  是扩充  $z$  平面内的闭无限集,  $E \cap E^* = \emptyset$ , 其中  $E^* = \{-1/\bar{z} : z \in E\}$ . 则  $E$  的  $n$  阶椭圆直径 ( $n$ -th elliptic diameter)  $d_{n,e}(E)$  由 (1) 式定义, 但其中

$$[a, b] = \left| \frac{a-b}{1+\bar{a}b} \right| \quad (3)$$

是  $E$  中的点  $a$  与  $b$  之间的椭圆伪距离 (elliptic pseudo-distance), 即  $[a, b] = \tan \rho_e(a, b)$ , 其中  $\rho_e(a, b) (< \pi/2)$  是  $a$  与  $b$  之间的椭圆距离. 如前面的情形, 序列  $d_{n,e}(E)$  非增且存在称之为  $E$  的椭圆超限直径 (elliptic transfinite diameter) 的如下极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{n,e}(E) = d_e(E).$$

用椭圆伪距离 (3) 定义  $E$  的椭圆 Чебышев 常数 (elliptic Chebyshev constant)  $\tau_e(E)$  及椭圆容量 (elliptic capacity)  $C_e(E)$ . 则得到

$$d_e(E) = \tau_e(E) = C_e(E).$$

椭圆超限直径  $d_e(E)$  是关于扩充  $z$  平面到自身的分式线性变换

$$z \mapsto \frac{pz+q}{-\bar{q}z+p}, \quad |p|^2 + |q|^2 = 1$$

所组成的且经关于椭圆直线的反射群所增补的群的不变量. 第一个这样的群, 同构于  $K$  关于过其中心的平面的反射群. 根据这一定义,  $E$  的椭圆超限直径以如下方式同共形映射相关联. 若  $E$  是扩充  $z$  平面内的连续统,  $E \cap E^* = \emptyset$ , 并且  $E \cup E^*$  关于扩充平面的余集共形等价于圆环  $r < |w| < 1/r$ ,  $0 < r < 1$ , 则  $r = d_e(E)$ .

超限直径的概念可推广到多维 Euclid 空间  $\mathbf{R}^m$  ( $m \geq 2$ ) 中的紧集  $E$ , 并且同位势理论 (potential theory) 相联系. 对于点  $x \in \mathbf{R}^m$ , 设

$$H(|x|) = \begin{cases} \ln \frac{1}{|x|}, & \text{当 } m=2, \\ \frac{1}{|x|^{m-2}}, & \text{当 } m \geq 3, \end{cases}$$

是 Laplace 方程 (Laplace equation) 的基本解, 且对于点集  $(x_j)_{j=1}^n \subset E$ , 令

$$\chi_n(E) = \inf \left\{ \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n H(|x_j - x_k|) : (x_j)_{j=1}^n \subset E \right\}.$$

则对于  $m=2$  有

$$d(E) = C(E) = \exp \left\{ - \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(E) \right\}$$

同时对于  $m \geq 3$ , 取

$$d(E) = C(E) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(E)}$$

是较为有利的 (见 [4]).

#### 参考文献

- [1] Fekete, M., Ueber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen

Koeffizienten, *Math. Z.*, 17 (1923), 228 – 249.

[2] Pólya, G. and Szegő, G., Ueber den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen, *J. Reine Angew. Math.*, 165 (1931), 4 – 49.

[3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[4] Carleson, L., Selected problems on exceptional sets, v. Nostrand., 1967.

[5] Смирнов, В. И., Лебедев, И. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М. - Л., 1964 (英译本: Smirnov, V. I. and Lebedev, N. A., Functions of a complex variable: constructive theory, M. I. T., 1968).

[6] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, Chelsea, reprint, 1959.

[7] Kühnau, R., Geometrie der konformen Abbildung auf der hyperbolischen und der elliptischen Ebene, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1974.

Г. В. Кузьмина, Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】外半径 (outer radius) 是超限直径的另一术语. 关于  $\mathbb{R}^2$  或  $\mathbb{R}^n$  中的超限直径, Robin 常数 (Robin constant) 及容量 (capacity) 之间的关系可见 [A1].

超限直径的概念在多复变中亦有重要意义, 如果以正确的方式解释如下: 取  $[a, b] = |a - b|$ , (1) 是 Vandermond 行列式的一个根:

$$d_n(E) = \left( \max_{x^{(n)} \in E^n} |V(x^{(n)})| \right)^{2/n(n-1)},$$

其中

$$V(x^{(n)}) = \det [x_i^j]_{j=0, \dots, n-1}^{i=1, \dots, n}.$$

在  $\mathbb{C}^n$  中, 设  $e_1, \dots, e_m$  是次数  $\leq n$  的单项式有序系,  $x^{(n)}$  是  $E^n \subset \mathbb{C}^m$  中一点. 则  $V(x^{(n)})$  定义为  $\det [e_i(x_j)]$ ,  $x^n = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $d_n(E) = (\max_{x^{(n)} \in E^n} V(x^{(n)}))^{1/\deg V(x^{(n)})}$ . 相关的容量为一相伴于复 Monge-Ampère 算子的量.

参考文献

[A1] Hsiao, G. C. and Kleinman, R. E., On a unified characterization of capacity, in J. Král, et al. (ed.): Potential theory (Praag, 1987), Plenum, 103 – 120.

[A2] Klimek, M., Pluripotential theory, Cambridge Univ. Press, 1991.

[A3] Siciak, J. Extremal plurisubharmonic functions and capacities in  $\mathbb{C}^n$ , Sophia Kokyuroku in Math., 14, Dept. Math. Sophia Univ. Tokyo, 1982.

杨维奇 译

超限归纳法 [transfinite induction; трансфинитная ин-

дукция]

保证性质  $A(x)$  对良序类  $E$  上每个元素  $x$  都成立的原理, 这里  $A(x)$  和  $E$  满足下列条件: 对每个  $z \in E$ , 对每个  $y < z$ ,  $A(y)$  为真蕴涵  $A(z)$  为真, 即

$$\forall z (\forall y (y < z \rightarrow A(y)) \rightarrow A(z)) \rightarrow \forall A(x).$$

当  $E$  是由小于  $\alpha$  的序数组成的区间时 (参见序数 (ordinal number)), 下列是一个等价的公式: 如果  $A(0)$ ,  $A(\sigma) \rightarrow A(\sigma + 1)$  成立, 而且  $A(\sigma)$  在极限序数保持真, 即:

$$(\sigma = \sup \{\sigma_i\} \wedge \forall i A(\sigma_i)) \rightarrow A(\sigma).$$

则对任何  $\sigma < \alpha$ ,  $A(\sigma)$  成立. 超限归纳法的一个特殊情况是数学归纳法 (mathematical induction). 如果关系  $<$  在类  $E$  上定义一个良基树 (well-founded tree) (即树的每个分支都可以终止), 则对这样的  $E$  的超限归纳法等价于坝归纳 (bar induction): 如果  $A$  对于所有最终结点为真, 并且这个性质向根的方向遗传, 则  $A$  在根上也为真. 这种形式的归纳法在直觉主义数学中是很重要的. 一个形式系统的演绎能力通常可以用它能否证明在各种序数上的超限归纳法来衡量.

Г. Е. Минц 撰

【补注】

参考文献

[A1] Feferman, S., Theories of finite type related to mathematical practice, in J. Barwise (ed.): Handbook of Mathematical logic, North-Holland, 1977, 913 – 972. 何青译 罗里波校

超限数 [transfinite number; трансфинитное число]

有限良序集 (well-ordered set) 的序型 (order type). 亦见序数 (ordinal number); 基数 (cardinal number).

超限递归 [transfinite recursion; трансфинитная рекурсия]

在序数 (ordinal number) 上, 或者更一般地, 在赋予了序数结构的集合上定义函数的一种方法. 超限递归的定义方程具有形式

$$F(x) = G(x, F \upharpoonright x), \quad (*)$$

其中  $F \upharpoonright x$  是在  $x$  的前节上函数  $F$  的定义的片段,  $G$  是某一给定的函数. 在集合论中许多重要的函数和类 (例如, Gödel 可构造集类, 见 Gödel 构造集 (Gödel constructive set)) 是用超限递归定义的. 在这个集合论构造法和数值函数的递归定义之间的相似性从算法理论产生的最初起就是研究的一个对象 (见算法论 (algorithms, theory of)). 特别地, 这种相似性是一



般递归函数 (见 [1]) 的种种分类所依赖的基础。

在数理逻辑的一些分支 (证明论、递归分层理论) 中有重要意义的递归序数和超限递归的变型与它有关 (递归序数 (recursive ordinal number)) 是可数序数的算法的相似物; 由此提出了较大基数的序数的相似性)。在这情况下, 超限递归被称为 Rogers 引理 (Rogers lemma)。这里等式 (\*) 归之于如下的变型: 函数  $G$  替换成任意递归函数且  $F|x$  用它的 Gödel 数 (即算法描述的编码来代替, 亦见算术化 (arithmetization))。

#### 参考文献

[1] Peter, R., Recursive functions Acad. Press, 1967 (译自德文)。

[2] Rogers, Jr. H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

[3] Barwise, J., Admissible sets and structures, Springer, 1975. Н. В. Белякин 撰

【补注】 J. von Neumann 是第一个证明了超限递归合理性的人。

#### 参考文献

[A1] Levy, A., Basic set theory, Springer, 1979.

杨东屏 译

**超限序列** [transfinite sequence; трансфинитная последовательность], 一给定集合  $X$  中元素的

(超限) 序数的区间  $[0, \beta)$  到  $X$  内的映射 (亦见序数 (ordinal number))。超限序列  $f: [0, \beta) \rightarrow X$  的一个元素 (element) 或项 (term) 是一个序对  $(\alpha, x)$ , 其中  $\alpha \in [0, \beta)$  且  $x = f(\alpha)$ ; 该项通常记为  $x_\alpha$ 。

Л. Д. Кудрявцев 撰 赵希顺 译

**变换** [transformation; преобразование]

集合  $M$  (一般被赋予某种结构) 到其自身的一个映射  $u$ 。元素  $\alpha \in M$  在变换  $u$  下的象, 记为  $u(\alpha)$ ,  $u\alpha$ ,  $\alpha u$  或  $\alpha^u$ 。集合  $M$  到其自身的所有变换的集合关于乘法 (合成) 构成一个变换半群, 称为  $M$  上的对称变换半群 (transformation semi-group)。这个半群的可逆元称为置换 (见集合的置换 (permutation of a set))。集合  $M$  上的所有置换构成对称半群的一个子群——对称群 (symmetric group)。

亦见置换群 (permutation group); 变换群 (transformation group)。

О. А. Иванова 撰 杜小杨 译

**变换群** [transformation group; преобразований группа]

作用在集合  $M$  上的置换群 (permutation group)  $(G; M)$ 。如果  $M$  被赋予确定的结构, 并且  $G$  的元素保持这个结构, 那么通常就说  $G$  是这个结构的变换

群。变换群的名称在某种程度上反映了  $M$  上所赋予结构的名称。例如, 若  $M$  是除环上的向量空间, 则保持这个结构的群称为线性群 (linear group)。此外, 不同环上模的自同态群, 常常也称为线性群。特别地, 若  $M$  是整数环  $\mathbb{Z}$  上自由有限维模, 就称为晶体群 (crystallographic group)。若  $M$  是拓扑空间,  $G$  由  $M$  的自同态组成, 就称为连续变换群。若  $M = K$  是一个域,  $G$  是  $K$  的有限自同态群, 则  $G$  是扩张  $K/L$  的 Galois 群, 其中  $L$  是在  $G$  的元素作用下不变的那些元素的子域。还可以研究这种情形,  $G$  与  $M$  被赋予相同类型的结构, 且  $G$  在  $M$  上的作用是对应范畴中的态射。例如, 若  $G$  是连续作用在拓扑空间  $M$  上的拓扑群, 就称为拓扑变换群 (见拓扑群 (topological group)); 可以类似地定义 Lie 变换群和代数变换群 (见 Lie 变换群 (Lie transformation group); 变换的代数群 (algebraic group of transformations))。

#### 参考文献

[1] Алесандров, А. А., Математика, ее содержание, методы и значение, т. 3, М., 1956, гл. 20 (中译本: А. А. 亚历山大洛夫等著, 数学——它的内容、方法和意义, 第三卷, 科学出版社, 1962)。

Л. А. Калужнин 撰 罗嵩龄 译

**变换半群** [transformation semi-group; преобразований полугруппа]

对称半群 (semi-group)  $T_\Omega$  的任意子半群, 其中  $T_\Omega$  是集合  $\Omega$  的所有变换的集合。变换半群的特殊情况是变换群 (transformation group)。

两个变换半群  $P_1 \subset T_{\Omega_1}$ ,  $P_2 \subset T_{\Omega_2}$  称为相似的 (similar), 如果存在一一映射  $\varphi: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  和  $\psi: P_1 \rightarrow P_2$  使得  $u\alpha = \beta$  ( $\alpha, \beta \in \Omega_1$ ,  $u \in P_1$ ) 蕴涵  $(\psi u)(\varphi\alpha) = \varphi\beta$ 。相似的变换半群是同构的。反之, 一般不成立。但是, 某些变换半群类中, 同构必相似。例如, 包含使得  $u\Omega$  由一个元素组成的所有变换  $u$  的变换半群类是这样的。具体指明一个半群为变换半群比半群的精确到同构的陈述包含更多的信息。

显示变换半群在同构下不变的性质是头等重要的。关于给定的变换半群类  $\Gamma$ , 半群  $S$  同构于  $\Gamma$  中的某个半群的那些条件称为类  $\Gamma$  的抽象特征 (abstract characteristics of the class)。已经得到某些重要的变换半群类的抽象特征。每个半群同构于某个变换半群。半群  $S$  同构于某个对称半群  $T_\Omega$ , 如果  $S$  是满足恒等式  $xy = x$  的任一半群  $A$  的极大完全理想扩张 (见半群的扩张 (extension of a semi-group))。

在具有变换集  $\Omega$  的变换半群的一般理论中, 若干方向由于  $\Omega$  被附加了某种结构 ( $\Omega$  中的一个拓扑, 一个作用, 一个关系等) 而被区分出来, 与这种结构有联系的变换半群 (半群的自同态, 连续变换或线性变

换, 半群的平移 (translations of semi-groups), 等) 被讨论.  $\Omega$  的结构性质和相应变换半群的性质之间的关系的研究是 Galois 理论的推广. 特别地, 已经知道这样一些情况, 其中一个半群的结构被它的指出的平移半群 (见自同态半群 (endomorphism semi-group)) 所完全确定. 在一般半群理论中, 半群的左、右平移的性质常被应用.

部分变换 (partial transformation) ( $\Omega$  的部分变换指  $\Omega$  的某个子集  $\Omega' \subset \Omega$  到  $\Omega$  中的一个映射) 是变换概念的一个推广. 集合  $\Omega$  上的二元关系有时视为  $\Omega$  的多值 (一般地, 部分) 变换. 单值和多值部分变换在变换的合成运算 (作为二元关系的乘积) 下也形成半群. 将其作为带有附加结构 (例如, 二元关系的包含关系, 定义域的包含或相等关系, 值域的包含或相等关系, 等) 的半群来研究是适当的.

#### 参考文献

- [1] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960 (英译本: Lyapun, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974).
- [2] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1-2, Amer. Math. Soc., 1961-1967.
- [3] Глускин, Л. М., «Матем. сб.», 55 (1961), 421-428.
- [4] Schein, B. M., Relation algebras and function semigroups, Semigroup Forum, 1 (1970), 1, 1-62.

Л. М. Глускин Е. С. Ляпин 撰  
郑恒武 田振际 译 郭聿琦 校

超渡 [transgression; трансгрессия], 纤维空间中的

纤维与底空间的上同调类之间的一种特殊对应. 更准确地说, 若  $E$  是连通纤维空间 (fibre space), 底空间为  $B$ , 纤维是  $F$ ,  $A$  是交换群, 则  $E$  中的超渡是对应

$$\tau \subset H^s(F, A) \times H^{s+1}(B, A),$$

它的定义是

$$\tau = \{(x, y): \delta x = q^* y\},$$

其中  $\delta: H^s(F, A) \rightarrow H^{s+1}(E, F, A)$  是上边缘同态,  $q^*: H^{s+1}(B, A) \rightarrow H^{s+1}(E, F, A)$  是投影  $E \rightarrow B$  定义的同态. 对应  $\tau$  的定义域  $T^s(F, A)$  中的元素称为超渡的 (transgressive); 满足  $x \tau y$  的元素  $y \in H^{s+1}(B, A)$  称为元素  $x \in T^s(F, A)$  在超渡同态下的象 (image). 超渡可看作群  $T^s(F, A)$  到  $H^{s+1}(B, A)$  的某个商群中的同态. 可以用纤维空间  $E$  的谱序列  $(H_r)$  对超渡作一较好的解释: 本质上, 它就是微分  $d_{s+1}^{0,s}: H_{s+1}^{0,s} \rightarrow H_{s+1}^{s+1,0}$ .

纤维的超渡上同调类的刻画在纤维丛的上同调结

构的研究中起着非常重要的作用. 这里非常重要的一项是 Borel 超渡定理 (Borel transgression theorem): 若  $A$  是域,  $H^n(E, A) = 0$  对  $n > 0$ ,  $H^*(F, A) = \bigwedge P$  是子空间  $P$  上的外代数, 子空间  $P$  中元素的分次是奇数, 并且纤维的上同调空间构成  $B$  上的简单层, 则可以选择  $P$  使之满足  $P^s = T^s(F, A)$ , 对任意  $s > 0$ ; 此外,  $H^*(B, A)$  是多项式代数, 其生成元是  $P$  的齐次基的元素在超渡下的象. 特别地, 若  $G$  是连通 Lie 群,  $G$  没有  $p$  挠,  $\text{char } A = p$ , 则  $H^*(G, A) = \bigwedge P$ , 其中  $P$  的齐次元的分次为奇数, 且在群  $G$  的任何主纤维丛上是超渡的. 这里  $P$  与本原上同调类的空间相同.

#### 参考文献

- [1] Borel, A., Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts, Ann. of Math., 57 (1953), 115-207.
- [2] Serre, J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. Ann. of Math., 54 (1951), 425-505.

А. Л. Онишик 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Switzer, R. M., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975, p. 360 ff.
- [A2] Dieudonné, J., A history of algebraic and differential topology: 1900-1960, Birkhäuser, 1989.

潘建中 译 沈信耀 校

转移函数 [transition function; переходная функция], 转移概率 (transition probability)

在 Марков 过程论中为了从在以前时间的已知状态决定将来的瞬间分布而使用的一族测度. 设可测空间  $(E, \mathscr{B})$  使得  $\sigma$  代数  $\mathscr{B}$  包括  $E$  中一切单点集,  $T$  是实直线  $\mathbf{R}$  的一个子集. 对  $s, t \in T, s \leq t, x \in E$  及  $B \in \mathscr{B}$  给定的函数  $P(s, x; t, B)$ , 称为对  $(E, \mathscr{B})$  的转移函数 (transition function), 如果: a) 对给定的  $s, x$  和  $t$ , 它是  $\mathscr{B}$  上的测度, 且  $P(s, x; t, B) \leq 1$ ; b) 对给定的  $s, t$  和  $B$ , 它是点  $x$  的  $\mathscr{B}$  可测函数; c)  $P(s, x; s, \{x\}) \equiv 1$  且对  $\mathbf{R}$  的拓扑中  $T$  的所有右极限点  $s$ ,

$$\lim_{\substack{t \uparrow s \\ t \in T}} P(s, x; t, E) = 1;$$

以及 d) 对一切  $x \in E, B \in \mathscr{B}$  和  $T$  中的  $s \leq t \leq u$ , Колмогоров-Chapman 方程 (Kolmogorov-Chapman equation)

$$P(s, x; u, B) = \int_E P(s, x; t, dy) P(t, y; u, B) \quad (*)$$

成立 (在某些情形, 要求 c) 可省去或减弱). 如果  $P(s, x; t, E) \equiv 1$ , 称转移函数为 Марков 转移函数 (Markov transition function), 否则称为次 Марков 转



移函数 (subMarkov transition function). 如果  $E$  是至多可数的, 则转移函数用转移概率矩阵

$$P^{st} = \| P_{xy}(s, t) \|$$

确定 (见转移概率 (transition probabilities); 转移概率矩阵 (matrix of transition probabilities)). 常常发生对任何容许的  $s, x$  和  $t$ , 测度  $P(s, x; t, \cdot)$  关于某个测度具有密度  $p(s, x; t, \cdot)$ . 如果在这种情形方程 (\*) 的下述形式

$$p(s, x; u, z) = \int_E p(s, x; t, y) p(t, y; u, z) dy$$

对任何  $E$  中的  $x$  和  $z$  及  $T$  中的  $s \leq t \leq u$  满足, 则称  $p(s, x; t, y)$  为转移密度 (transition density).

在非常一般的条件下 (见 [1], [2]), 转移函数可以同一个 Марков 过程  $X = \{x_t, \zeta, \mathcal{F}_t, P_{s,x}\}$  相联系, 对于它  $P_{s,x}\{x_t \in B\} = P(s, x; t, B)$  (在 Марков 转移函数的这种情形, 这个过程不中止于有限时刻, 即  $\zeta = \infty$ ,  $P_{s,x} - a.s.$ ). 另一方面, 随机过程的 Марков 性一般地能够把过程同一个转移函数相对应 ([3]).

设  $T$  是齐次的, 即对  $T$  中的  $s \leq t, t-s$  的值的集合形成一个依  $\mathbf{R}$  中的加法成一个半群  $\tilde{T}$  (例如,  $T = \mathbf{R}$ ,  $T = \{t \in \mathbf{R}, t \geq 0\}$ ,  $T = \{0, 1, \dots\}$ ). 进一步, 如果转移函数  $P(s, x; t, B)$  只依赖于差  $t-s$ , 即  $P(s, x; t, B) = P(t-s, x, B)$ , 其中  $P(t, x, B)$  是  $t \in \tilde{T}$ ,  $x \in E$ ,  $B \in \mathcal{B}$  满足条件 a) - d) 相应形式的函数, 则称  $P(s, x; t, B)$  为齐次转移函数 (homogeneous transition function). 对函数  $P(t, x, B)$  也用这一名字. 这时 (\*) 取下述形式:

$$P(t+s, x, B) = \int_E P(t, x, dy) P(s, y, B)$$

$$s, t \in \tilde{T}, x \in E, B \in \mathcal{B}.$$

为了某些目的 (诸如规则化转移函数) 有必要扩展定义. 例如, 取定可测空间族  $(E_t, \mathcal{B}_t)$ ,  $t \in T$ , 定义满足适当修改了的条件 a) - d) 的函数  $P(s, x; t, B)$ , 其中  $s, t \in T$ ,  $s \leq t$ ,  $x \in E_s$ ,  $B \in \mathcal{B}_t$ .

#### 参考文献

- [1] Neveu, J., Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, 1970.
- [2] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, 2, М., 1973 (英译本: Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., The theory of stochastic processes, 2, Springer, 1975).
- [3] Кузнецов, С. Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 25 (1980), 2, 389 - 393. М. Г. Шур 撰

【补注】另外的参考文献亦见 Марков 链 (Markov chain); Марков 过程 (Markov process).

#### 参考文献

- [A1] Dellacherie, C. and Meyer, P. A., Probabilities and potential, 1 - 3, North-Holland, 1978 - 1988, Chaps. XII - XVI (译自法文).
- [A2] Sharpe, M. J., General theory to Markov processes, Acad. Press, 1988.
- [A3] Albeverio, S. and Ma, Z. M., A note on quasi-continuous kernels representing quasilinear positive maps, Forum Math., 3 (1991), 389 - 400.

刘秀芳 译 陈培德 校

转移算子半群 [transition-operator semi-group; переходных операторов полугруппа]

由 Марков 过程 (Markov process) 的转移函数 (transition function) 所生成的算子半群 (semi-group of operators). 从状态空间  $(E, \mathcal{B})$  上的齐次 Марков 过程  $X = (X_t, \zeta, \mathcal{F}_t, P_x)$  的转移函数  $P(t, x, A)$ , 可以构造一个作用在某个 Banach 空间  $B$  上的线性算子  $P^t$  半群 ([1]). 经常,  $B$  是  $E$  中有界实值可测函数  $f$  依一致范数所形成的空间  $B(E)$  (或者, 对 Feller 过程 (Feller process)  $X$ , 是在  $E$  中具有同样范数的连续函数空间  $C(E)$ ), 或者是  $\mathcal{B}$  上有限的可数可加函数  $\varphi$  依全变差范数的空间  $V(E)$ . 在前两种情形, 令

$$P^t f(x) = \int_E f(y) P(t, x, dy);$$

在第三种情形, 令

$$P^t \varphi(A) = \int_E P(t, y, A) \varphi(dy)$$

(此处  $f$  和  $\varphi$  属于相应的空间,  $x \in E$ ,  $A \in \mathcal{B}$ ). 在所有这些情况下半群性成立:  $P^t P^s = P^{t+s}$ ,  $s, t \geq 0$ , 而三个半群  $\{P^t\}$  的任何一个都称为转移算子半群 (transition-operator semi-group).

下面只考虑第一种情形. 通常半群  $\{P^t\}$  的无穷小生成元 (infinitesimal generator)  $A$  (也是过程的无穷小生成元) 定义如下: 对所有使得这个极限存在且属于  $B(E)$  的  $f \in B(E)$ ,

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (P^t f - f).$$

假定对  $A \in \mathcal{B}$ ,  $P(t, x, A)$  是变量  $(t, x)$  的可测函数, 引入过程  $X$  的预解式  $R^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,

$$R^\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P^t f dt, f \in B(E). \quad (*)$$

如果当  $t \downarrow 0$  时  $\|P^t f - f\| \rightarrow 0$ , 则  $Ag = \alpha g - f$ , 其中  $g = R^\alpha f$ . 在某些假定下积分 (\*) 对  $\alpha = 0$  也存在且  $g = R^0 f$  满足 "Poisson 方程"

$$Ag = -f$$

(为了这个理由, 特别把  $R^0 f$  称为  $f$  的位势 (potential)).

无穷小生成元的知识使得能够导出原始过程的重要特征; Марков 过程的分类相当于对它们的相应的无穷小生成元的描述 ([2], [3]). 使用无穷小生成元也使得能够求得各种函数的平均值. 例如, 在某些假定下, 函数

$$v(t, x) = E_x \left[ \exp \left\{ \int_0^{t \wedge \zeta} c(x_s) ds \right\} f(x_{t \wedge \zeta}) \right],$$

$$t \geq 0, x \in E,$$

是对  $v_t' = Av + cv$ ,  $v(0, x) = f(x)$ , 的唯一解, 它是增长不太快的  $t$  的函数. 此处  $E_x$  是相应于  $P_x$  的数学期望, 而  $t \wedge \zeta = \min(t, \zeta)$ .

算子  $A$  与特征算子  $\mathfrak{A}$  有关 ([2]). 设  $X$  是在拓扑空间  $E$  中右连续的 Марков 过程. 对 Borel 函数  $f$ , 令

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{U \downarrow x} \left[ \frac{E_x f(x_\tau) - f(x)}{E_x \tau} \right],$$

如果对所有  $x \in E$  极限都存在, 其中  $U$  跑遍收缩到  $x$  的点  $x$  的一个邻域系, 而  $\tau$  是  $X$  离开  $U$  的首出时刻 (如果  $E_x \tau = \infty$ , 在极限中的分数置为零). 在许多情况下  $Af$  的计算相当于  $\mathfrak{A}f$  的计算.

#### 参考文献

- [1] Feller, W., The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, *Ann. of Math.*, **55** (1952), 468 – 519.
- [2] Дынкин, Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959 (中译本: Е. Б. 邓肯, 马尔科夫过程论基础, 科学出版社, 1962).
- [3] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, 2, М., 1973 (英译本: Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., The theory of stochastic processes, 2, Springer, 1975). М. Г. Шур 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Blumenthal, R. M. and Gettoor, R. K., Markov processes and potential theory, Acad. Press, 1968.
- [A2] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984.
- [A3] Dynkin, E. B., Markov processes, 1, Springer, 1965 (译自俄文).
- [A4] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, I – II, Wiley, 1957 – 1971.
- [A5] Loève, M., Probability theory, II, Springer, 1978.
- [A6] Dellacherie, C. and Meyer, P. A., Probabilities and potentials, 1 – 3, North-Holland, 1978 – 1988, Chaps. XII – XVI (译自法文).
- [A7] Sharpe, M. J., General theory of Markov processes,

Acad. Press, 1988.

- [A8] Alberverio, S. and Ma. Zh. M., A note on quasi-continuous kernels representing quasilinear positive maps, *Forum Math.*, **3** (1991), 389 – 400.

刘秀芳 译 陈培德 校

**转移概率** [transition probabilities; переходные вероятности]

**Марков 链** (Markov chain) 在时间区间  $[s, t]$  内从状态  $i$  转移到状态  $j$  的概率

$$p_{ij}(s, t) = P \{ \xi(t) = j | \xi(s) = i \}, s < t.$$

鉴于 Марков 链的基本性质, 对任意  $i, j \in S$  (此处  $S$  是该链的所有状态的集合) 和任意  $s < t < u$ ,

$$p_{ij}(s, u) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s, t) p_{kj}(t, u).$$

通常考虑齐次 Марков 链, 即其转移概率  $p_{ij}(s, t)$  只依赖于区间  $[s, t]$  的长度不依赖于它在时间轴上的位置:

$$p_{ij}(s, t) = p_{ij}(t - s).$$

离散时间齐次 Марков 链对任意状态  $i$  和  $j$  序列  $p_{ij}(n)$  具有 Cesàro 极限, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}(k) \geq 0.$$

加上某些附加条件 (对连续时间的链也一样), 极限在通常意义下也存在. 见遍历 Марков 链 (Markov chain, ergodic); Марков 链的正状态类 (Markov chain, class of positive states of a).

离散时间 Марков 链的转移概率  $p_{ij}(t)$  由  $p_{ij}(1)$ ,  $i, j \in S$  的值确定; 对任意  $t > 0$ ,  $i \in S$

$$\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1.$$

在连续时间 Марков 链的情形通常假定转移概率满足下述附加条件: 所有的  $p_{ij}(t)$  作为  $t \in (0, \infty)$  的函数是可测的,

$$\lim_{t \downarrow 0} p_{ij}(t) = 0 \ (i \neq j), \lim_{t \downarrow 0} p_{ii}(t) = 1, i, j \in S.$$

在这些假定之下, 下述转移速率存在:

$$\lambda_{ij} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (p_{ij}(t) - p_{ij}(0)) \leq \infty, i, j \in S. \quad (1)$$

如果所有的  $\lambda_{ij}$  是有限的且如果  $\sum_{j \in S} \lambda_{ij} = 0$ ,  $i \in S$ , 则  $p_{ij}(t)$  满足 Колмогоров-Чапман 微分方程组 (Kolmogorov-Chapman system of differential equations):

$$p_{ij}'(t) = \sum_{k \in S} \lambda_{ik} p_{kj}(t), p_{ij}'(t) = \sum_{k \in S} \lambda_{kj} p_{ik}(t) \quad (2)$$



连同初始条件  $p_{ii}(0) = 1, p_{ij}(0) = 0, i \neq j, i, j \in S$  (亦见 Колмогоров 方程 (Kolmogorov equation); Колмогоров - Chapman 方程 (Kolmogorov-Chapman equation)).

如果 Марков 链由转移速率 (1) 确定, 则转移概率满足条件

$$p_{ij}(t) \geq 0, \sum_{j \in S} p_{ij}(t) \leq 1, i, j \in S, t > 0;$$

对某个  $i \in S, t > 0, \sum_{j \in S} p_{ij}(t) < 1$  的链称之为亏损的 (defective) (在这种情形 (2) 的解不唯一); 如果对一切  $i \in S$  和  $t > 0$  有  $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$ , 则此链称为正常的 (proper).

例. 具有状态集  $\{0, 1, \dots\}$  和转移密度

$$\lambda_{i,i+1} = -\lambda_{ii} = \lambda_i > 0, \lambda_{ij} = 0 (i \neq j \neq i+1)$$

的 Марков 链  $\xi(t)$  (即纯生过程 (pure birth process)) 是亏损的, 当且仅当

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty.$$

设

$$\tau_{0n} = \inf \{t > 0: \xi(t) = n (\xi(0) = 0)\},$$

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{0n};$$

则

$$E\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}$$

且由  $E\tau < \infty$  有  $P\{\tau < \infty\} = 1$ , 即  $\xi(t)$  的路径“在有限时间内以概率 1 趋于无穷” (亦见分支过程的正则性 (branching processes, regularity of)).

#### 参考文献

[1] Chung, K. L., Markov chains with stationary probability densities, Springer, 1967. A. M. Зубков 撰

【补注】另外的参考文献见 Марков 链 (Markov chain); Марков 过程 (Markov process).

在 (1) 中, 如果  $i \neq j, \lambda_{ij} \geq 0; \lambda_{ii} \leq 0$ .

#### 参考文献

[A1] Iosifescu, M., Finite Markov processes and their applications, Wiley, 1980.

[A2] Revuz, D., Markov chains, North-Holland, 1984.

刘秀芳 译 陈培德 校

带禁忌的转移 [transition with prohibitions; переход с запрещениями], 带禁忌状态的转移 (transition with taboo states), 对于 Марков 链的

在给定的时间区间内从未进入一个特定的状态集的 Марков 链 (Markov chain) 的轨道集. 例如, 令  $\xi(t)$  是离散时间 Марков 链, 其状态集为  $S$ , 而  $H$  是“禁忌”状态集 (禁忌集) (taboo set), 则禁忌概率 (taboo probabilities)  ${}_H p_{ij}(t)$  是

$${}_H p_{ij}(t) = P\{\xi(k) \notin H (k = 1, \dots, t-1),$$

$$\xi(t) = j | \xi(0) = i\}, i, j \in S.$$

禁忌概率  ${}_H p_{ij}(t)$  的性质类似于通常的转移概率 (transition probabilities)  $p_{ij}(t)$  的性质, 因为矩阵族  $P(t) = \|p_{ij}(t)\|_{i,j \in S}$  和  $P_H(t) = \|{}_H p_{ij}(t)\|_{i,j \in S \setminus H}, t \geq 0$ , 形成乘法半群; 不过,  $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$ , 而  $\sum_{j \in S \setminus H} {}_H p_{ij}(t) \leq 1$ . 各种各样的问题, 例如, 对 Марков 链首次进入给定集合的时间或对分支过程 (branching process) 在非灭绝条件下的极限定理的研究, 事实上相当于对禁忌概率各种性质的研究.

#### 参考文献

[1] Chung, K. L., Markov chains with stationary transition probabilities, Springer, 1960. A. M. Зубков 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., The theory of stochastic processes, 1, Springer, 1975 (译自俄文).

刘秀芳 译 陈培德 校

#### 传递群 [transitive group; транзитивная группа]

置换群 (permutation group)  $(G, X)$ , 使得  $X$  的每个元素  $x$  可用适当的元素  $\gamma \in G$  带到任意元  $y \in X$ , 即  $x^\gamma = y$ . 换句话说,  $X$  是群  $(G, X)$  的唯一轨道 (orbit). 若轨道数大于 1, 则  $(G, X)$  称为非传递的 (intransitive). 非传递群的轨道有时称为传递性区域 (domain of transitivity). 设非传递群  $(G, X)$  具有轨道  $X_i$ , 则

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_s,$$

且群作用限制在  $X_i$  上是传递的.

令  $H$  是群  $G$  的子群且令

$$G = H \cup Hx_1 \cup \dots \cup Hx_{s-1}$$

是  $G$  对于  $H$  的右陪集的分解. 进而令  $X = \{Hx_i\}$ . 则由  $(Hx_i)^g = Hx_i g$  就定义了  $(G, X)$  的作用. 该作用是传递的, 且反之, 每个传递作用, 有  $G$  的适当子群  $H$ , 使它具有上述类型.

作用  $(G, X)$  称为  $k$  传递的,  $k \in \mathbb{N}$ , 若对任何两个有序子集  $(x_1, \dots, x_k)$  和  $(y_1, \dots, y_k)$ , 它们都具有  $k$  个不同的元素  $x_i$  和  $y_i \in X$ , 则有元素  $\gamma \in G$  使得  $y_i = x_i^\gamma$ , 对所有  $i = 1, \dots, k$ . 换句话说,  $(G, X)$  恰具有一个非自反的  $k$  轨道. 对  $k \geq 2$ ,  $k$  传递群称为多重传递的 (multiply transitive). 某域  $K$  上仿射变换  $x \mapsto ax + b, a \neq 0, b \in K$ , 作成的群是双传递群的例子. 域  $K$  上射影直线的分式线性变换, 即形式为

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}, a, b, c, d, x \in K \cup \{\infty\},$$

其中

$$\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

的变换所成的群是三重传递群的例子.

$k$  传递群  $(G, X)$  称为严格  $k$  传递的 (strictly  $k$ -transitive), 如果仅有恒等置换才能使  $k$  个不同的元素全不动. 仿射变换群及分式线性变换群是严格的双传递和三重传递的置换群的例子.

有限对称群 (symmetric group)  $S_n$  (作用在  $\{1, 2, \dots, n\}$  上) 是  $n$  传递的. 有限交错群 (alternating group)  $A_n$  是  $(n-2)$  传递的. 多重传递群的这两个系列是显然的系列. 还知道两个 4 传递群, 即  $M_{11}$  和  $M_{23}$ , 同样有两个 5 传递群, 即  $M_{12}$  和  $M_{24}$  (参见 [3], 亦见 Mathieu 群 (Mathieu group)). 有个猜想: 除去这 4 个群外, 对  $k \geq 4$ , 没有非平凡的  $k$  传递群. 这猜想已被证明, 使用了有限非 Abel 单群的分类 ([6]). 进一步使用有限单群分类, 完成了多重传递群的分类.

对分数  $k = m + 1/2$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , 也定义了  $k$  传递群. 即, 置换群  $(G, X)$  称为  $1/2$  传递的, 若或有  $|X| = 1$  或者  $(G, X)$  的轨道有大于 1 的相同长度. 对  $n > 1$ , 群  $(G, X)$  是  $(n + 1/2)$  传递的, 如果  $(G, X)$  是传递的且稳定化子  $(G_x, X \setminus \{x\})$  是  $n - 1/2$  传递的.

#### 参考文献

- [1] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.
- [2] Hall, M., Theory of groups, Macmillan, 1959 (中译本: M. 赫尔, 群论, 科学出版社, 1982).
- [3] Wielandt, H., Finite permutation groups, Acad. Press, 1968 (中译本: H. 维兰特, 有限置换群, 科学出版社, 1984).
- [4] Passman, D., Permutation groups, Benjamin, 1968.
- [5] Higman, D. G., Lecture on permutation representations, Math. Inst. Univ. Giessen, 1977.
- [6] Cameron, P. J., Finite permutation groups and finite simple groups, Bull. London Math. Soc., 13 (1981), 1 - 22.

Л. А. Колужнин 撰

【补注】置换群  $(G, X)$  的次数 (degree of a permutation group) 是  $X$  的元素数目. (抽象) 群  $G$  称为  $k$  传递群 ( $k$ -transitive group), 如果它能实现为某  $k$  重传递置换群  $(G, X)$ .

由于有限单群的分类, 已经找出了所有 2 传递置换群. 见 [A1] 中的表和文献.

对传递置换群有一个重要的概念: 置换秩 (permutation rank), 它可定义成  $G$  在  $X \times X$  上的轨道数.

用了有限单群的分类已经将置换秩  $\leq 3$  的本原置

换群几乎完全地进行了分类 ([A2]).

#### 参考文献

- [A1] Cohen, A. and Zantema, H., A computation concerning doubly transitive permutation groups, J. Reine Angew. Math., 347 (1984), 196 - 211.
  - [A2] Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A., Distance regular graphs, Springer, 1989, p. 229.
- 【译注】全体 2 传递置换群的表及其有关的文献也可以在 [6] 中找到.

置换秩  $\leq 3$  的本原置换群已经全部被确定 (参见 [B4], [B5] 和 [B8]), 进一步地, 置换秩  $\leq 5$  的非仿射型本原置换群, 除了个别例外, 也已被确定 (参见 [B1], [B3]).

利用有限单群分类的结果, 近年来本原置换群的研究取得了一系列重要成果. 例如: 确定了全部  $kp$  次本原置换群, 这里  $p$  为素数且  $k < p$  (文献 [B6]); 确定了全部奇数次本原置换群 ([B7]) 等. 著名的 Sims 猜想说: 存在一个定义在自然数集合上的函数  $f$ , 使得对  $\Omega$  上任意本原置换群  $G$ , 如果  $G_\alpha$ ,  $\alpha \in \Omega$ , 在  $\Omega - \{\alpha\}$  上有一条长度为  $d$  的轨道, 则  $|G_\alpha| < f(d)$ . 这个猜想已被证明是真的 ([B2]). 这一结果的直接推论是: 对于任意给定的度数 ( $> 2$ ), 只有有限多个有限连通距离传递图 ([B2, 定理 2]).

#### 参考文献

- [B1] Bannai, E., Maximal subgroups of low rank of finite symmetric and alternating groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 18 (1972), 475 - 486.
- [B2] Cameron, P. J., Praeger, C. E., Saxl, J. and Seitz, G. M., On the Sims conjecture and distance transitive graphs, Bull. Lond. Math. Soc., 15 (1983), 499 - 506.
- [B3] Cuypers, H., Geometries and permutation groups of small ranks, Thesis, Rijksuniversiteit, Utrecht, 1989.
- [B4] Kantor, W. M. and Liebler, R. A., The rank 3 permutation representations of the finite classical groups, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1982), 1 - 71.
- [B5] Liebeck, M. W., The affine permutation groups of rank 3, Proc. Lond. Math. Soc. (3), 54 (1987), 477 - 516.
- [B6] Liebeck, M. W. and Saxl, J., Primitive permutation groups containing an element of large prime order, J. Lond. Math. Soc. (2), 31 (1985), 237 - 249.
- [B7] Liebeck, M. W. and Saxl, J., The primitive permutation groups of odd degree, J. Lond. Math. Soc. (2), 31 (1985), 250 - 264.
- [B8] Liebeck, M. W. and Saxl, J., The finite primitive permutation groups of rank three, Bull. Lond. Math. Soc., 18 (1986), 165 - 172.

石生明 译 王 杰 校



## 传递性 [transitivity; транзитивность]

二元关系 (binary relation) 的最重要的性质之一. 称集合  $A$  上的关系  $R$  是传递的 (transitive), 如果对任意  $a, b, c \in A$ , 条件  $aRb$  和  $bRc$  蕴涵  $aRc$ . 等价关系和序关系是传递关系的例子.

Т. С. Фофанова 撰 赵希顺 译

## 平移 [translation; трансляция]

代数系统到其自身上的一个映射, 它或是恒等映射, 或者可以表示成有限个主平移 (principal translation) (也称初等平移 (elementary translation)) 的积. 一个代数系统上的等价关系是一个合同 (代数学中的) (congruence (in algebra)), 当且仅当它对所有平移 (或者只对主平移) 都是封闭的.

## 参考文献

- [1] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.  
[2] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973). О. А. Иванова 撰 郝柄新 译

## 平移不变度量 [translation-invariant metric; трансляционная инвариант метрика], 不变度量 (invariant metric)

【补注】 向量或线性空间  $X$  上的一个度量 (metric)  $\rho$  满足  $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$  对所有的  $x, y, z \in X$ . 一个范数 (norm) 或  $F$  范数,  $\| \cdot \|$  (关于此概念的定义见万有空间 (universal space) 的补注) 定义一个平移不变度量  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ . 如果  $(X, \rho)$  是一度量线性空间 (metric linear space), 即具有度量的向量空间使得加法和标量乘法是连续的, 则存在  $X$  上一个不变度量  $\rho'$  等价于原来的那个度量, [A2].  $X$  上两个度量  $\rho, \rho'$  是等价的, 如果它们导出同样的拓扑.

## 参考文献

- [A1] Rolewicz, S., Metric linear spaces, Reidel, 1987, § 1.1.  
[A2] Kakutani, S., Über die Metrisation der topologischen Gruppen, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 12 (1936), 82 – 84. 葛显良 译 鲁世杰 校

## 程序的翻译 [translation of programs; трансляция программ]

1) 程序设计 (programming) 中程序的翻译, 也称为程序的编译 (compilation of programs), 是一个系统过程, 它把用输入 (input) 算法语言 (algorithmic language)  $LI$  编写的程序  $ip$  变换成用目标 (object) 语言  $LO$  编写的某个程序  $op$ ; 进一步, 两个程序  $ip$  和  $op$  应该实现同样的功能, 即如果  $d$  是程序的输入

数据, 则  $ip(d) = op(d)$ .

2) 在可计算函数 (computable function) 理论和算法理论 (algorithms, theory of) 中, 程序的翻译是从可计算函数的一个枚举 (enumeration) 到另一个枚举的任何映射, 它保持这样的性质: 图象和预图象是同一函数的数目 (一个有效的翻译映射的存在也称为从一个枚举到另一个枚举的可归约性 (reducibility)).

在程序设计实践中, 人们使用的程序设计语言 (programming language) 通常是输入语言, 而目标语言通常是由机器程序直接执行的语言. 程序翻译本身, 通常是自动执行的, 即用某个实现语言  $LR$  写的程序  $t$ , 称为翻译程序 (translator) (或编译程序 (compiler)), 使  $t(ip) = op$ . 对某些类语言中的任何输入语言  $LI$  的翻译程序的系统开发构成自动程序设计 (automatic programming), 这种开发的对应手段称为编译程序构造系统 (systems of compiler construction) 或编译程序的编译程序 (compilers of compilers),  $tt(LI) = t$ . 这里, 实现语言或者包含目标语言或者和它相符合:  $LO \subseteq LR$ .

在可计算函数的理论中程序翻译 (可归约性) 的概念导致主枚举 (principal enumerations) 的概念, 即某个类的任何其他枚举能被归约到主枚举. 已经证明对所有可计算函数的具体模型存在主可计算枚举; 特别对部分递归函数和对 Turing 机. 再有, 主可计算枚举的存在来源于可计算函数执行所谓部分计算 (partial computations) 的能力, 即存在一般递归函数 (在程序设计中, 部分计算机 (partial computer); 在可计算函数理论中, 一个  $s-m-n$  函数)  $S^m(x_0, \dots, x_m)$ , 使得如果  $U^n(x_0, \dots, x_n)$  是对  $n$  个变量的可计算函数的一个通用函数, 则对任何  $m+n$  个变量的可计算函数  $F$  和数  $NF$ , 有恒等式

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_{m+n}) &= U^{m+n}(NF, x_1, \dots, x_{m+n}) = \\ &= U^n(S^m(NF, x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n}). \end{aligned}$$

从这个恒等式可见, 部分计算机由  $m+n$  个变量的函数的程序和  $m$  个变量的给定值构成  $n$  个变量的函数的程序, 它是由原来的程序通过把它的  $m$  个变元同这些给定值联系起来而得到的. 部分计算的结果称为程序  $NF$  在它的  $m$  个变元的给定值  $x_1, \dots, x_m$  上的投影 (projection)  $NF_{x_1, \dots, x_m}$ . 主可计算枚举 (见 [1] 第 1 章, 第 2 节) 和部分计算机 (见 [2], 第 65 节) 的存在性以及它们的联系 (见 [3], 第 11 节, 定理 3) 是可计算函数理论的基本方面之一.

在程序设计的实际翻译问题和部分计算 (见 [4]) 之间有一个直接关系. 假定实现语言  $LR$  有主可计算枚举, 设  $NS$  是用同样语言表达的  $LR$  的部分计算机的程序. 进一步假定输入语言  $LI$  是由用一

个  $LR$  的目标子集  $LO$  表达的通用函数的程序  $NLI$  定义的, 即  $NLI(ip, d) = ip(d)$ . (在程序设计中, 这种程序称为输入语言的解释程序 (interpreter).) 则下列关系成立:

$$\forall d NS(NLI, ip, d) = op(d),$$

$$\forall ip NS(NS, NLI, ip) = t(ip),$$

$$\forall NLI NS(NS, NS, NLI) = it(NLI),$$

即, 对象程序是输入语言的解释程序在输入程序上的投射; 编译程序是部分计算机在输入语言解释程序上的投射; 而编译程序的编译程序是部分计算机在它自身上的投射.

#### 参考文献

- [1] Ершов, Ю. Л., Теория нумераций, М., 1977.
- [2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951.
- [3] Успенский, В. А., Лекций о вычислимых функциях, М., 1960.
- [4] Ершов, А. П., в кн.: Всесоюзная конференция. Методы математической логики в проблемах искусственного интеллекта и систематическое программирование, Паланга, 3-5 сент. 1980, ч. 2, Вильнюс, 1980, 26-55. А. П. Ершов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Jones, N. D., Partial evaluation, self-application and types, in M. S. Paterson (ed.): Automata, Languages and Programming (Proc. ICALP 17, Warwick, July 1990), Lecture notes comp. sc., Vol. 443, Springer, 1990, 639-659.

程 虎 译 刘椿年 校

#### 平移曲面 [translation surface; переноса поверхность]

曲线  $L_1$  按如下方式经过平行位移所形成的曲面:  $L_1$  上某一点  $M_0 \in L_1$  沿另外一条曲线  $L_2$  滑动, 如果  $r_1(u)$  和  $r_2(v)$  分别是  $L_1$  和  $L_2$  的位置向量, 则平移曲面的位置向量为

$$r = r_1(u) + r_2(v) - r_1(u_0),$$

其中  $r_1(u_0) = r_2(v_0)$  是  $M_0$  点的位置向量. 曲线  $u = \text{常数}$  和  $v = \text{常数}$  构成了一个迁移网 (transport net). 每个直纹曲面都有  $\infty^1$  个迁移网 (Reidemeister 定理 (Reidemeister theorem)), 而包络平移曲面只能是柱面或平面. 如果曲面有两个迁移网, 则这些网中曲线的切线的非奇异点位于一条四次代数曲线上. 平移曲面的一个不变特性是共轭 Чебышев网 (conjugate Chebyshev net) (一个迁移网) 的存在. 例如, 在极小曲面上的迷向网是一个迁移网, 因而此曲面是一个

平移曲面. 人们也可以用如下事实来刻画平移曲面, 即该曲面上一条迁移曲线在单参数平行位移运动群作用下变成位于同一曲面上的另外一条迁移曲线. 若用任意单参数群  $G$  来替代平行位移运动群, 便导致了广义平移曲面 (generalized translation surfaces) ([1]).

#### 参考文献

- [1] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963. И. Х. Сабитов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Darboux, D., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 1-4, Chelsea, reprint, 1972, 218.
- [A2] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, Affine Differentialgeometrie, 2, Springer, 1923.
- [A3] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, Affine Differentialgeometrie, 3, Springer, 1930.
- [A4] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Dover, 1988, 103; 109; 184. 沈纯理 译

#### 半群的平移 [translations of semi-groups; сдвиги полугрупп]

半群的满足如下特殊条件的变换: 半群 (semi-group)  $S$  的右平移 (right translation) 是使得对任意  $x, y \in S$  有  $(xy)\rho = x(y\rho)$  的变换  $\rho$ ; 左平移可类似定义. 为方便计, 左平移通常写作左算子. 于是,  $S$  的左平移 (left translation) 是使得对任意  $x, y \in S$  有  $\lambda(xy) = (\lambda x)y$  的变换  $\lambda$ . 两个左平移 (见变换半群 (transformation semigroup)) 的连续作用从右到左写. 半群的两个左 (右) 平移的积自身也是左 (右) 平移, 从而  $S$  的所有左 (右) 平移的集合  $\Lambda(S)$  ( $P(S)$ ) 形成对称半群  $\mathcal{S}_S$  的一个子半群. 对任意  $a \in S$ , 由  $\lambda_a x = ax$  ( $x\rho_a = xa$ ) 定义的变换  $\lambda_a$  ( $\rho_a$ ) 是相应于  $a$  的左 (右) 平移, 称为内左 (右) 平移 (inner left (right) translation).  $S$  的所有内左 (右) 平移的集合  $\Lambda_0(S)$  ( $P_0(S)$ ) 形成  $\Lambda(S)$  ( $P(S)$ ) 的一个左 (右) 理想.

$S$  的左平移  $\lambda$  和左平移  $\rho$  称为连接的 (linked), 如果对任意  $x, y \in S$  有  $x(\lambda y) = (x\rho)y$ ; 此时, 偶对  $(\lambda, \rho)$  称为  $S$  的双平移 (bi-translation). 对任意  $a \in S$ ,  $(\lambda_a, \rho_a)$  是一个双平移, 称为相应于  $a$  的内双平移 (inner bi-translation). 在且仅在具有恒等元的半群中, 每个双平移是内的.  $S$  的所有双平移的集合  $T(S)$  形成 Descartes 积  $\Lambda(S) \times P(S)$  的一个子半群, 称为  $S$  的平移包 (translation hull). 所有内双平



移的集合  $T_0(S)$  形成  $T(S)$  的一个理想, 称为  $T(S)$  的内部 (inner part). 由  $\tau(a) = (\lambda_a, \rho_a)$  定义的映射  $\tau: S \rightarrow T_0(S)$  是  $S$  到  $T_0(S)$  上的同态, 称为典范同态 (canonical homomorphism). 半群  $S$  称为弱约化的 (weakly reductive), 如果对任意  $a, b \in S$ , 由关系  $ax = bx$  与  $xa = xb$  关于所有  $x \in S$  成立可推出  $a = b$ , 即  $S$  的典范同态是一个同构. 若  $S$  是弱约化的, 则  $T(S)$  等于  $T_0(S)$  在  $\Lambda(S) \times P(S)$  中的理想化子, 即  $\Lambda(S) \times P(S)$  的包含  $T_0(S)$  作为理想的最大子半群.

半群的平移, 特别地, 平移包在半群的理想扩张 (见半群的扩张 (extension of a semi-group)) 的研究中起着重要作用, 其中平移包的作用在一定程度上类似于群论中群的全形 (holomorph of a group) 的作用.

#### 参考文献

- [1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semi-groups, I, Amer. Math. Soc., 1961.
- [2] Petrich, M., Introduction to semigroups, C. Merrill, 1973.
- [3] Petrich, M., The translational hull in semigroups and rings, *Semigroup Forum*, 1 (1970), 283 - 360.

Л. Н. Шеврин 撰 郑恒武 田振际 译 郭聿琦 校

#### 求和法的传递性 [translativity of a summation method; транслятивность метода суммирования]

将级数增加或减少有限项后, 仍保持可和性的求和法的一个性质. 更具体地说, 求和法  $A$  称为传递的 (translative), 如果级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

可和于  $S$ , 蕴涵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

依同样方法可和于  $S - a_0$ , 反之亦然. 对于将序列  $\{S_n\}$  变成序列或者函数这种变换所定义的求和法  $A$ , 传递性这个性质就是下面两个条件

$$A - \lim S_n = S$$

与

$$A - \lim S_{n+1} = S$$

等价. 若求和法由正则矩阵  $\|a_{nk}\|$  (见正则求和法 (regular summation methods)) 所定义, 则它意味着

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k = S \quad (1)$$

总是蕴涵

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_{k+1} = S, \quad (2)$$

反之亦然. 这时, 如果上式仅在一个方向成立, 那么当 (1) 蕴涵 (2) 而反之不成立时, 称这个方法为右传递的 (right translative), 当 (2) 蕴涵 (1) 而反之不成立时, 称之为左传递的 (left translative).

传递性被相当广泛地应用于求和法中; 例如,  $k > 0$  时的 Cesàro 求和法 (Cesàro summation methods)  $(C, k)$ ,  $k > 0$  时的 Riesz 求和法 (Riesz summation method)  $(R, n, k)$  及 Abel 求和法 (Abel summation method) 都是传递的; Borel 求和法 (Borel summation method) 是左传递的.

#### 参考文献

- [1] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, MacMillan, 1950.
- [2] Барон, С., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Таллин, 1977.

И. И. Волков 撰 罗嵩龄 译

#### 传输条件 [transmission, condition of; трансмиссионное условие]

对有边光滑流形上的伪微分算子 (pseudo-differential operator) 所加的一个条件, 其作用是, 若一函数在流形边缘之外拓展为 0 后能够光滑到边, 此条件保证在以伪微分算子作用后仍能光滑到边. 这里拓展为 0 只需在原流形之某个邻域中进行即可, 原流形被看作是嵌入在一个较大的无边流形之中, 因而原流形边上之点是较大流形的内点.

若已给的伪微分算子的象征在边缘的某邻域的一个局部坐标中可以用正齐次函数  $a_\alpha(x, \xi)$  作渐近展开 ( $\alpha$  是齐次性次数), 则传输条件可以写成关于函数  $a_\alpha$  的如下条件:

$$\partial_x^\gamma \partial_\xi^\beta [a_\alpha(x, \xi', \xi_n) + e^{-i\pi\alpha} a_\alpha(x, -\xi', -\xi_n)] \Big|_{x_n=0, \xi'=0} = 0,$$

$\gamma, \beta$  是任意的重指标, 在边界点邻域中  $x$  的坐标要这样选取, 使  $\{x_n = 0\}$  是边缘的方程,  $x_n \geq 0$  即流形自身; 而  $\xi = (\xi', \xi_n)$  是对偶于  $x = (x', x_n)$  的坐标.

#### 参考文献

- [1] Эскин, Г. И., Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, М. 1973 (英译本: Eskin, G. I., Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations, Amer. Math. Soc. 1986).
- [2] Boutet de Monvel, L., Boundary problems for pseudo-differential operators, *Acta Math.*, 126 (1971), 1/2, 11 - 51.
- [3] Rempel, S. and Schulze, B. -W., Index theory of elliptic boundary problems, Akademie-Verlag, 1982.
- [4] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential

operators, 3. Springer, 1985.

[5] Grubb, G., Functional calculus of pseudo-differential boundary problems, Birkhäuser, 1986.

М. А. Шубин 撰 齐民友 译

信道传输速率 [transmission rate of a channel; канала пропускная способность]

信息论中, 关于通信信道 (communication channel) 信息传输能力的度量. 设  $\eta$  和  $\tilde{\eta}$  为通信信道 ( $Q, V$ ) 中的一对相连接的随机变量. 这时, 这个信道的传输速率  $C$  定义为:

$$C = \sup I(\eta, \tilde{\eta}), \quad (1)$$

其中,  $I(\eta, \tilde{\eta})$  为  $\tilde{\eta}$  中含有的  $\eta$  的信息量 (information, amount of), 上确界是在信道 ( $Q, V$ ) 中所有相连接的随机变量对  $(\eta, \tilde{\eta})$  上取的. 当输入信号  $\eta = \{\eta(t): -\infty < t < \infty\}$  和输出信号  $\tilde{\eta} = \{\tilde{\eta}(t): -\infty < t < \infty\}$  为连续或离散时间的随机过程时, 信道传输速率通常解释为单位时间内或传输信号中单位符号上的信道平均传输速率 (mean transmission rate of the channel), 即令

$$C = \lim_{T-t \rightarrow \infty} \frac{1}{T-t} \sup I(\eta_t^T, \tilde{\eta}_t^T), \quad (2)$$

如果这种极限存在的话. 其中, 上确界是在给定信道的相应时间段上相连接的所有可能随机过程对  $\eta_t^T = \{\eta(s): t < s \leq T\}$ ,  $\tilde{\eta}_t^T = \{\tilde{\eta}(s): t < s \leq T\}$  上取的. (2) 式中极限的存在性已在很广泛的一类信道上得到证实, 例如, 对一个具有非零转移概率 (transition probabilities) 的齐次有限记忆信道 (channel with a finite memory).

已经知道对充分广泛的一类信道 (例如前面提到的有限记忆信道), 下面的公式是成立的:

$$C = \sup \left( \lim_{T-t \rightarrow \infty} \frac{1}{T-t} I(\eta_t^T, \tilde{\eta}_t^T) \right), \quad (3)$$

其中, 上确界是对所有平稳相关随机过程对  $\eta(t)$ ,  $\tilde{\eta}(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) 而取的, 而对任何  $-\infty < t < \infty$ , 随机变量  $\eta_t^T = \{\eta(s): t < s \leq T\}$  和  $\tilde{\eta}_t^T = \{\tilde{\eta}(s): t < s \leq T\}$  在所考虑的信道相应时间段上是相连接的. 因此, (3) 式表明信道传输速率与这条信道上的最大信息传输速率 (information, transmission rate of) 是相同的.

传输速率的精确计算是相当有趣的. 例如, 设信道 ( $Q, V$ ) 的输入、输出信号分别取值于  $n$  维 Euclid 空间  $\mathbf{R}^n$ , 转移函数  $Q(y, \cdot)$  由密度  $q(y, \tilde{y})$  (Lebesgue 可测) 决定,  $y, \tilde{y} \in \mathbf{R}^n$ , 约束  $V$  指输入信号均方能量有界, 即  $E|\eta|^2 \leq S$  (其中  $|\eta|$  指  $\mathbf{R}^n$  中向量  $\eta$  的长度), 常数  $S > 0$ . 这时有下面的结果

(见 [1]):

1) 令  $q(y, \tilde{y}) = q(\tilde{y} - y)$ , 即这里考虑的是一种带可加噪声的信道, 输出信号  $\tilde{\eta}$  为输入信号  $\eta$  与噪声  $\zeta$  ( $\eta$  与  $\zeta$  相互独立) 之和:  $\tilde{\eta} = \eta + \zeta$ , 令  $E|\zeta|^2 = N$ . 则  $N \rightarrow 0$  时 (在一个弱的附加条件下), 有下面的渐近公式:

$$C = -h(\zeta) + \frac{n}{2} \log \frac{2\pi e S}{n} + \frac{n \log e}{2S} N + o(N),$$

其中,  $h(\zeta)$  为  $\zeta$  的微分熵 (differential entropy), 且当  $N \rightarrow 0$  时,  $o(N)/N \rightarrow 0$ . 这个公式是在小噪声的条件下成立的.

2) 令  $q(y, \tilde{y})$  是任意的, 但  $S \rightarrow 0$ . 则

$$C = \left( \sup_y \frac{\varphi(y)}{|y|} \right) S + o(S),$$

其中

$$\varphi(y) = \int_{\mathbf{R}^n} q(y, \tilde{y}) \log \frac{q(y, \tilde{y})}{q(0, \tilde{y})} d\tilde{y}.$$

#### 参考文献

[1A] Прелов, В. В., «Пробл. передачи информ.», 5 (1969), 2, 31 - 36.

[1B] Прелов, В. В., «Пробл. передачи информ.», 8 (1972), 4, 22 - 27.

亦见通信信道 (communication channel) 中引用的 [1], [3] - [6]. Р. Л. Добрушин В. В. Прелов 撰【补注】

#### 参考文献

[A1] Billingsley, P., Ergodic theory and information, Wiley, 1965.

[A2] Ash, R. B., Information theory, Interscience, 1965.

[A3] Yaglom, A. M. and Yaglom, I. M., Probabilité et information, Dunod, 1959 (译自俄文).

【译注】参考文献见 Shannon 定理 (Shannon theorem) 译注之参考文献. 骆源 符方伟 沈世镒 译

输运方程, 数值方法 [transport equations, numerical methods; переноса уравнения, численные методы решения] (输运方程亦称迁移方程)

关于描述粒子或辐射输运的积分微分方程的求解方法.

对于定态问题, 方程取下列形式

$$\Omega \cdot \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \int dv' \int d\Omega' \varphi w(\mathbf{x}, \Omega, \Omega', v, v') + f, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ,  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  是单位向量,  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \Omega, v)$  是具有速度  $v$  的粒子在点  $\mathbf{x}$  的粒子流, 正函数  $\Sigma$  和  $w$  描述粒子与物质的相互作用



用, 而  $f$  是源. 考虑下列两个基本方面: 1) 在 (凸) 区域  $D(x, y, z)$  中求 (1) 的解, 使得在区域边界  $\Gamma$ ,

$$\varphi(\mathbf{x}, \Omega, v) = 0 \text{ 对 } (\Omega, \mathbf{n}) < 0, \quad (2)$$

其中  $\mathbf{n}$  是对  $\Gamma$  的外法线; 和 2) 寻求 (1) - (2) 的最大本征值  $\lambda_1$  及其相应本征函数, 其中

$$f = \frac{1}{\lambda} \int d v' \int d \Omega' \varphi w_1(\mathbf{x}, \Omega, \Omega', v, v'). \quad (3)$$

方程 (1) 包含六个独立变量; 因为它本质上是高维方程, 必须将其化为较简单方程. 在 (1) 和 (3) 中将对  $v'$  的积分代之以含  $N$  项的求积公式, 并假定散射是各向同性的, 它给出一组所谓多速方程 (multi-velocity equations):

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \varphi_i + \Sigma_i \varphi_i &= \\ &= \sum_{j=1}^N \Sigma_s^{ij} \varphi_{j0} + f_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{x}, \Omega), \quad \varphi_{i0} = \frac{1}{4\pi} \int \varphi_i d\Omega'$$

是零阶矩, 而系数  $\Sigma_i$ ,  $\Sigma_s^{ij}$  和  $f_i$  通过运用求平均法和应用对共轭问题的解而获得. 对于问题 2) 类似地得到

$$f_i = \frac{1}{\lambda} \chi_i Q(\varphi) = \frac{1}{\lambda} \chi_i \sum_{j=1}^N \Sigma_{fj} \varphi_{j0}. \quad (5)$$

对于  $N=1$ , 得到对于函数  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \Omega)$  的单速方程 (single-velocity equation)

$$\Omega \cdot \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \Sigma_s \varphi_0 + f. \quad (6)$$

对于平面层  $0 \leq x \leq H$ , 方程 (6) 取下列形式

$$\begin{aligned} \mu l \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi &= \\ &= c \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x, \mu') d\mu' + f_1(x, \mu), \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $l = 1/\Sigma$ ,  $c = \Sigma_s/\Sigma$ ,  $f_1 = f/\Sigma$ ; 这里的解仅依赖于一个坐标  $x$  和一个角变量  $\mu$ ,  $|\mu| \leq 1$ . (6) 式左边的特征线全是直线  $x = x_0 + \xi \Omega$ ,  $x_0 \in D$ , 并且沿每条特征线, (6) 取下列形式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \Sigma \varphi = \Sigma_s \varphi_0 + f. \quad (8)$$

如果在 (6) 中作代换  $u = (\varphi(x, \Omega) + \varphi(x, -\Omega))/2$ , 它变成

$$[-l\Omega \cdot \nabla]^2 u + u = c u_0 + F. \quad (9)$$

对 (9) 的解使二次 Владимиров 泛函 (Vladimirov functional)

$$G(u) = (l\Omega \cdot \nabla u, l\Omega \cdot \nabla u) + (u, u) - (c u_0, u) +$$

$$+ \int_{\Gamma \times \Omega} |(\Omega, u)| u^2 d\Omega d\Gamma - 2(u, F) \quad (10)$$

为极小, 其中

$$(u, v) = \int_D \int_{\Omega} u v d x d \Omega.$$

令边值问题写成算子形式:

$$L\varphi = S\varphi + f. \quad (11)$$

输运问题的一个特征性质, 数值算法中要应用的是  $L^{-1}\psi$  的值可通过涉及将 (8) 沿特征线积分的直接方法由给定  $\psi$  求出. 在此基础上, 由 (11) 得到对于零阶矩  $S\varphi$  的 Peierls 积分方程 (Peierls integral equation)

$$S\varphi = S L^{-1}(S\varphi + f). \quad (12)$$

为了求解输运问题, 球面调和函数法 (method of spherical harmonics) (Галеркин 方法的一种形式) 得到极重要发展. 求得一个近似解 ( $P_n$  近似) 形式为

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(\mathbf{x}, \Omega) &= \\ &= \sum_{l=0}^n (2l+1) \sum_{m=-l}^l \varphi_{lm}(\mathbf{x}) Y_{lm}(\Omega), \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $\varphi_{lm}(\mathbf{x})$  是未知函数而  $Y_{lm}(\Omega)$  是  $l$  阶球面调和函数. 将 (13) 代入 (6), 其结果乘以  $Y_{lm}$  并对  $\Omega$  积分, 导致关于  $\varphi_{lm}(\mathbf{x})$  的偏微分方程组 (见球面调和函数法 (spherical harmonics, method of)). 在  $P_1$  近似, 方程组取下列形式

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \varphi_1 + \Sigma \varphi_0 &= f_0, \quad \frac{1}{3} \nabla \varphi_0 + \varphi_0 + \Sigma \varphi_1 = f_1, \\ 2(\varphi_1, \mathbf{n}) - \varphi_0|_{\Gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\varphi_0 = \varphi_{00}$ ,  $\varphi_1 = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13})$ . 对于  $f_1 \equiv 0$ , (14) 蕴含扩散近似

$$-\operatorname{div}(D \nabla \varphi_0) + \Sigma \varphi_0 = f_0, \quad 2D \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi_0|_{\Gamma} = 0, \quad (15)$$

其中  $D = 1/(3\Sigma)$ , 它是一个椭圆型问题, 可用变分法或网格法予以求解.

为了求解一维情况, 曾经发展了基于将解用广义本征函数展开的解析方法. 为了寻求复杂多维问题解的泛函, 采用蒙特卡罗方法 (Monte-Carlo method).

有限差分近似方法广泛用于输运方程. 例如, 可应用对区域  $D$  的求积公式将 (12) 用线性方程组代替. 方程 (4)、(5)、(6) 或 (8) 中的积分算子可通过对球域的求积公式予以近似. 对球域的 Gauss 求积公式 (Gauss quadrature formula) 直至 35 阶代数精度是已知的. 在特征线法 (method of characteristics) 中, 通过空间网格每一点, 沿着对应于对球域求积的结点的方向画出一族特征线, 而将 (8) 中的微分算子  $L$  用相应差分代替.  $S_n$  方法 ( $S_n$  method) 的差分方程,

通过将 (6) 对相空间网格胞腔积分得到, 假定在胞腔内解对独立变量是线性的. 在 Галеркин 法 (Galerkin method) 中, 寻求下列形式的解:

$$\varphi = \sum_{n=1}^N g_n(\Omega) \varphi_n(\mathbf{x}). \quad (16)$$

如果给定  $\varphi_n(\mathbf{x})$ , 则得到对  $g_n(\Omega)$  的退化积分方程组; 如果  $\varphi_n(\mathbf{x})$  是紧支撑函数, 则得到有限元法 (finite element method); 如果  $g_n(\Omega)$  是给定紧支撑函数, 并且 (16) 使 (10) 为极小, 则得到所谓  $P_{NJ}$  方程 ( $P_{NJ}$  equations).

求解差分输运问题的迭代法具有其特点, 当  $c \rightarrow 1$  ( $c \leq 1$ ) 时迭代收敛性通常变得更慢, 而为推导下一近似  $\varphi^{k+1}$ , 人们仅应用关于前一近似 (实质上很少维数的)  $\varphi^k$  的部分信息——人们仅存储和应用  $\varphi_0^k$  的值. 在迭代法中一个中间运算 (运算  $K$ ) 经常是求解下列问题:

$$L\Phi^k = S\varphi^k + f, \quad \Phi_0^k = \frac{1}{4\pi} \int \Phi^k d\Omega'. \quad (17)$$

于是误差  $\varphi - \Phi^k$  满足 (11) 带有源为  $S(\Phi^k - \varphi^k)$ , 它像误差一样也不依赖于  $\Omega$ . 这个特点使人们能加速其收敛性. 考虑对于 (7) 的周期性问题, 带有恒定系数, 带有源对  $\mu$  是偶函数, 并令  $H = 2\pi$ . 在这个应用中, 下面来考虑下列迭代法. 对于 (7) 构造这样的网格,  $x$  上有  $N$  个结点而  $\mu$  上有  $M$  个角方向. 令

$$r(t) = t^{-1} \arctan t, \quad 0 \leq r(t) \leq 1,$$

$$\varepsilon_0^k = \varphi_0 - \varphi_0^k = \sum_n \varepsilon_n^k e^{inx}$$

$$\|\varepsilon_0^k\| = \max_n |\varepsilon_n^k|.$$

对于收敛的迭代法,  $\|\varepsilon_0^{k+1}\| \leq q \|\varepsilon_0^k\|$ , 其中  $0 \leq q < 1$ . 令  $P_0$  为运算  $K$  中的价值 (运算数), 而  $P$  为完全迭代的价值及  $\Delta = P - P_0$ . 适用于各种方法的有下列关系

1) 简单迭代 (simple iteration):  $\varphi_0^{k+1} = \Phi_0^k$ , 其中  $\Delta = 0$  和  $q = c$ .

2) Люстерник 法 (Lyusternik method): 对于某个  $k$ , 应用简单迭代

$$\varphi_0^{k+1} = \Phi_0^k + (\lambda_1 - 1)^{-1} (\Phi_0^k - \varphi_0^k),$$

其中  $\lambda_1 > 1$  是  $L\varphi = \lambda S\varphi$  的最大本征值; 于是  $\Delta = O(N)$  和  $q = cr(l)$  ( $q \rightarrow 1$  对  $c \rightarrow 1, l \rightarrow 0$ ).

3) 估计迭代偏差的方法 (method of estimating iterative deviations):  $\varphi_0^{k+1} = \Phi_0^k + W_0^k$ , 其中  $W^k$  是方程

$$l\mu \frac{\partial W^k}{\partial x} + (1-c)W^k = c(\Phi_0^k - \varphi_0^k)$$

的解; 于是

$$\Delta = O(NM), \quad q = \max \left[ cr(l), \frac{\pi\sqrt{2}c^2}{12} \right]$$

( $q \rightarrow 1$  当  $c \rightarrow 1, l \rightarrow 0$ ).

4) 平衡乘子法 (balancing multiplier method):  $\varphi_0^{k+1} = \delta^k \Phi_0^k$ , 其中

$$\delta^k = \frac{\int_0^H f_0 dx}{\int_0^H (1-c)\Phi_0^k dx}.$$

这里  $\Delta = O(N)$  和  $q = cr(l)$  ( $q \rightarrow 1$  当  $c \rightarrow 1, l \rightarrow 0$ ).

5) 平均流法 (mean-flux method) (重平衡法 (rebalancing method)):

$$\varphi_0^{k+1}(x, \mu) = (1 + v^k(x))\Phi^k,$$

其中选择函数  $v^k$  使泛函 (10) 为极小或者使它在某个有限维子空间中为极小:  $v^k = \sigma_i a_i \psi_i$ , 于是  $a_i$  满足一定的方程组.

6) 拟扩散法 (quasi-diffusion method):

$$-l \frac{d}{dx} l \frac{d}{dx} D^k \varphi_0^{k+1} + (1-c)\varphi_0^{k+1} = f_0,$$

其中

$$D^k = \frac{\int_{-1}^1 \Phi^k \mu^2 d\mu}{\Phi_0^k};$$

于是  $\Delta = O(NM)$ .

7) 分裂法 (splitting methods):

$$(I + \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_1)\varphi^{k+1} =$$

$$= (I + \tau\Lambda_2)(I - \tau\Lambda_1)\varphi^k + 2\tau f;$$

其中

$$\Lambda_1 = I - \frac{c}{2} \int_{-1}^1 (\cdots) d\mu, \quad \Lambda_2 = l\mu \frac{d}{dx}.$$

方法 4)–6) 是非线性的, 当  $c \rightarrow 1$  和  $l \rightarrow 0$  时, 其收敛性可能变慢; 方法 7) 要求  $\varphi^k(x, \mu)$  的存储 ( $q \rightarrow 1$  当  $c \rightarrow 1, l \rightarrow 0$ ).

8) KP 法 (KP-methods): 校正  $W^k$  作为边值问题在  $D$  中的解予以确定

$$Q_n W^k = P_n c(W^k + \Phi_0^k - \varphi_0^k), \quad (18)$$

其中  $Q_n, P_n$  是二阶线性微分算子, 并令  $\varphi_0^{k+1} = \Phi_0^k W^k$ . 在 KP 方法的一种变型中, (18) 取下列形式

$$-\frac{g_k}{3} \left( l \frac{d}{dx} \right)^2 W^k + (1-c)W^k = c(HI_0^k - \varphi_0^k). \quad (19)$$

于是对 (19) 有  $\Delta = O(N)$ ; 对  $g_k = 0.843$  有  $q =$



0.186c, 而对  $g_k = (1 + y_k)/2$ , 其中  $y_k$  是 Jacobi 多项式  $P^{(-1/2, 2(N+\beta)-2/3)}$ ,  $\beta > 0$ ,  $q$  对  $N$  次迭代的几何平均接近于  $0.15c$ . 在  $KP$  方法中, 迭代的收敛性当  $c \rightarrow 1$ ,  $l \rightarrow 0$  时并不减慢.

为了求解多速问题 (4) 应用 Seidel 迭代法 (Seidel iteration method):

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \varphi_i^{k+1} + \Sigma_i \varphi_i^{k+1} = \\ = \sum_{j=1}^i \Sigma_s^{ij} \varphi_{j0}^{k+1} + \sum_{j=i+1}^N \Sigma_s^{ij} \varphi_{j0} + f, \\ i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (20)$$

而 (20) 的每个方程中的解  $\varphi_i^{k+1}$  通过单速方程的一个迭代法予以求解.

为了求解 (4) 和 (5) 的本征值的多速问题, 这两个迭代循环还要补充一个外循环用以求最大本征值  $\lambda = \lambda_1$  及相应本征函数  $\varphi$ . 如果  $x = Q(\varphi)$  和  $A = Q(L - S)^{-1} \chi$ , 则问题 (4), (5) 变成

$$Ax = \lambda x. \quad (21)$$

为了求  $\lambda_1$  和  $\varphi$ , 应用带有 Чебышев 参数的迭代法

$$u^{k+1} = Ax^k - \beta_{k+1} x^k, \quad x^{k+1} = \frac{u^{k+1}}{Q(u^{k+1})}, \quad (22)$$

其中

$$\beta_k = \frac{1}{2} (M + m + (M - m) \cos \pi \omega_k), \quad (23)$$

$\omega_k \in [0, 1]$  而  $M$  和  $m$  是参数. 假定谱是非负的, 首先求  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 它们是 (21) 的最大本征值, 认为  $m = 0$ ,  $M = a$ , 其中  $a \geq 0$  是  $\lambda_1$  的下界, 并取  $\omega_k$  为一个  $T$  序列 (见下面).  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的值由考虑到位移  $\beta_k$  的广义 Aitken 法 (generalized Aitken method) 予以确定. 当求得  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  后, 则由 (22) 和 (23) 取  $M = \lambda_2$  来求  $\varphi$ . 无穷  $T$  序列 ( $T$ -sequence) 相应地则由第一类 Чебышев 多项式的根的特定顺序形成  $T_{2 \cdot 3^n}(\cos \pi \omega)$ , 而长度  $2 \cdot 3^n$  的  $T$  线段的初始线段包括形式为  $(2j_k - 1)/4 \cdot 3^n$ ,  $1 \leq j_k \leq 2 \cdot 3^n$  的所有数:

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{12}, \frac{11}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{36}, \dots$$

长度  $2 \cdot 3^n$  的  $T$  序列的任一线段保证迭代法 (22), (23) 中误差的一定意义上的最优抑制以及其迭代稳定性.

对于求解非定态问题

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + L\varphi - S\varphi = f,$$

应用下列方法:  $(x, t)$  空间中的特征线法, Галеркин 法, 有限差分方法, 后者相当于显式或隐式差分格式, 或者相当于算子分裂法. 在隐格式的情况, 上层的解可由  $KP$  方法求得.

#### 参考文献

- [1] Владимиров, В. С., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 61 (1961), 1 - 158.
- [2] Марчук, Г. И., Лебедев, В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981.
- [3] Лебедев, В. И., Финогонов, С. А., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 16 (1976), 895 - 907.
- [4] Лебедев, В. И., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 17 (1977), 100 - 108. В. И. Лебедев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Davison, B., Neutron transport theory, Oxford Univ. Press, 1957 (中译本: B. 戴维逊, 中子迁移理论, 科学出版社, 1961).
- [A2] Bell, G. and Glasstone, S., Nuclear reactor theory, v. Nostrand, 1971. 徐锡申 译

#### 迁移网 [transport net; переноса сеть]

仿射 (或 Euclid) 空间中的二维曲面上的一个共轭的 Чебышев 网 (Chebyshev net). 带有迁移网的曲面称为迁移曲面 (translation surface).

关于迁移网, 有 Lie 定理 (Lie theorem): 如果一曲面带有两个迁移网, 则这些网中的线的切线相交于非奇异的四次平面曲线 ([1]).

#### 参考文献

- [1] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963. В. Т. Базылев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Affine Differentialgeometrie, 2, Springer, 1923. 沈纯理 译

#### 运输问题 [transport problem 或 transportation problem; транспортная задача]

线性规划 (linear programming) 一般问题的最重要特殊类之一. 运输问题陈述如下.

假设在点  $A_1, \dots, A_m$  生产某种同样的商品, 其中在  $A_i$  产出的商品量为  $a_i$  个单位,  $i = 1, \dots, m$ . 在这些生产点上生产的货物应该发送到消费点  $B_1, \dots, B_n$  去, 其中在  $B_j$  消费的数量为  $b_j$  个货物单位. 假定最终产品的运输可能从任何生产点到任何消费点, 而从  $A_i$  到  $B_j$  运送单位货物所必须的运输费用为  $c_{ij}$  个货币单位. 于是问题为制定怎样的装运计划, 使得总运输费用最小.

形式上, 问题是以下列方式提出的. 设  $x_{ij}$  是从  $A_i$  到  $B_j$  装运的货物量. 要求确定  $mn$  个量  $x_{ij}$ , 满

足条件

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

且使线性形式

$$L(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

最小。

约束 (1) 反映的事实是从每个生产点装运的量恰好等于在该点的生产量, 而在一个消费点收到的量恰好对应其需求量。在这些约束下, 运输问题可解的充要条件是下列平衡条件 (balance condition) 成立:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (2)$$

下列两个情况是运输问题特有的: a) 每个变量  $x_{ij}$  进入组 (1) 的两个方程; b) 变量在约束中的所有系数取值 0 或 1。条件 a) 和 b) 使得人们能设计出求解运输问题的算法在本质上比单纯形法 (simplex method) 简单, 后者是解线性规划问题的基本方法之一。

这些算法中最著名的是位势法和所谓匈牙利法。位势法 (method of potentials) 是利用验证最优性的二次对偶性定理来逐次改进 (装运) 计划的方法 ([1])。匈牙利方法 (Hungarian method) 是逐次构造容许的计划, 使它自动转化为最优计划。匈牙利算法的基础是交替链法 ([2])。

已知有下列两种经典运输问题的推广; 它们反映实际中遇到的情况。运输问题的开模型 (open model): 这是平衡条件 (2) 不成立的运输问题; 它意味着或者总生产量超过总需求量, 或者相反。这个问题通过引入其生产 (或消费) 能力等于总生产量与总需求量的差的虚拟生产 (或消费) 点, 归结为经典的运输问题。

多指标运输问题 (multi-index transportation problem) 仍然是一般的运输费用最小的问题, 但是考虑货物 (产品) 的不一致性和运输手段的不一致性。

在非俄文文献中, 运输问题有时称为 Hitchcock 问题 (Hitchcock problem)。

#### 参考文献

- [1] Гольштейн, Е. Г., Юдин, Д. Б., Задачи линейного программирования транспортного типа, М., 1969.
- [2] Ore, O., Theory of graphs, Amer. Math. Soc., 1963.
- [3] Емеличев, В. А., Ковалев, М. М., Кравцов, М. К., Многогранники. Графы. Оптимизация, М., 1981. В. К. Леонтьев 撰

【补注】

#### 参考文献

- [A1] Schrijver, A., Theory of linear and integer programming, Wiley, 1986.
- [A2] Nemhauser, G. L. and Wolsey, L. A., Integer and combinatorial optimization, Wiley, 1988.

【译注】关于运输问题的解法应该提到中国运筹学工作者有许多深入研究的表作业法。这种算法与上述位势法密切相关, 数学上也等价于单纯形法。但是当变量较少时, 它可以在运输计划表上直接操作, 有其方便之处。参看, 例如, [B1], [B2]。

#### 参考文献

- [B1] 李德, 钱颂迪主编, 运筹学, 清华大学出版社, 1982.
- [B2] 管梅谷, 郑绍鼎, 线性规划, 山东科学技术出版社, 1984. 史树中 译

#### 转置方程 (组) [transposed equations; транспонированные уравнения]

1) 一个线性代数系的转置方程 (组) 是以转置矩阵 (transposed matrix) 作为系数矩阵的线性方程 (组)。

2) 在线性积分方程 (见积分方程 (integral equation)) 的情况下, 转置方程是具有核  $K(x, y)$  与核  $K(y, x)$  的方程。

转置方程 (组) 也称为伴随方程 (组) (adjoint equations) 或者相伴方程 (组) (associated equations)。

【补注】一个积分方程的转置方程在 Fredholm 抉择定理 (Fredholm alternative) 中起重要作用。

#### 参考文献

- [A1] Jörgens, K., Lineare Integraloperatoren, Teubner, 1970.
- [A2] Smirnov, V. I., A course of higher mathematics, 4, Addison-Wesley, 1964 (译自俄文)。蒋滋梅 译

#### 转置矩阵 [transposed matrix; транспонированная матрица]

对换所给 (长方或正方) 矩阵  $A = \|a_{ik}\|$  ( $i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$ ) 的行与列的位置后所得的矩阵 (matrix), 即矩阵  $\|a'_{ik}\|$ , 其中  $a'_{ik} = a_{ki}$  ( $i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$ )。转置矩阵的行数等于  $A$  的列数, 而其列数等于  $A$  的行数。矩阵  $A$  的转置通常记作  $A^T$  或  $A'$ 。

О. А. Иванова 撰

【补注】矩阵转置的若干基本性质是  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ,  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ ,  $(AB)^T = B^T A^T$ ,  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ 。

#### 参考文献

- [A1] Gantmacher, F. R. (Gantmakher, F. R.), The theory of matrices, 1, Chelsea, reprint, 1959, 19 (译自俄文) (中译本: Ф. Р. 甘特马赫, 矩阵论, 高等教育出版社, 1955)。蒋滋梅 译



平延 [transvection; трансвекция]

除环  $K$  上 (右) 向量空间  $V$  的一个线性映射  $f$  具有性质:

$$\operatorname{rk}(f - E) = 1 \text{ 与 } \operatorname{Im}(f - E) \subset \ker(f - E),$$

其中  $E$  是恒等线性变换. 一个平延可表为形式

$$f(x) = x + a\alpha(x),$$

其中  $a \in V$ ,  $\alpha \in V^*$  及  $\alpha(a) = 0$ .

向量空间  $V$  的一切平延生成特殊线性群 (special linear group) 或幺模群 (unimodular group)  $SL(V)$ . 除  $\dim V = 1$  或  $\dim V = 2$  且  $K$  是二元域的情况外, 这个群等同于  $GL(V)$  的换位子群. 如果  $K$  是一个域, 那么  $SL(V)$  是行列式为 1 的矩阵所组成的群. 在一般情况下 (只要  $\dim V \neq 1$ ),  $SL(V)$  是满同态

$$GL(V) \rightarrow K^*/(K^*, K^*)$$

的核, 称为 Dieudonné 行列式 (Dieudonné determinant) (见行列式 (determinant)).

#### 参考文献

- [1] Dieudonné, J. A., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1955. Э. Б. Винберг 撰

【补注】在射影空间  $P(V)$  里, 它的点都是  $V$  的一维子空间, 上述一个平延  $f$  诱导了一个以  $aK$  为中心及  $\ker(f - E)$  为轴的 (射影 (projective)) 平延 (transvection). 如果取  $\ker(f - E)$  为  $P(V)$  里一个无限远超平面, 那么这样一个平延在剩余仿射空间 (解释为一个线性空间) 里诱导了一个平移  $x \mapsto x + b$ . 亦见移位 (shear). 蒋滋梅 译

横截椭圆型算子 [transversal (或 transversally) elliptic operator; трансверсально эллиптический оператор]

一个微分算子或伪微分算子 (pseudo-differential operator) (亦见微分算子 (differential operator)) 而与作用在一流形上的某个 Lie 群可交换, 此算子即定义在此流形上, 且在该群轨道的法方向上是椭圆型的. 若此算子作用于向量丛的截面上, 则也假设此 Lie 群  $G$  的作用可以提升到每一个丛上, 且可进一步拓展到丛的截面上. 若此群是离散的, 则横截椭圆型算子就是与  $G$  的作用可交换的通常的椭圆型算子. 若  $G$  在流形  $X$  上的作用是传递的, 则任一个与  $G$  的作用可交换的微分算子或伪微分算子都是横截椭圆型算子. 若  $G$  和  $X$  为紧的, 则对于横截椭圆型算子可以定义并计算指标. 它是  $G$  上的一个广义函数. (见指标公式 (index formulas)). 对于自伴的横截椭圆型算子, 可以考虑  $G$  的作用而得出其精密的谱特性.

#### 参考文献

- [1] Atiyah, M. F., Elliptic operators and compact groups,

Lecture notes in math., 401, Springer, 1974.

- [2] Brüning, J. and Heintze, E., Representations of compact Lie groups and elliptic operators, *Invent. Math.*, **50** (1979), 169 - 203.  
[3] Шубин, М. А., Спектральные свойства и функция расположения спектр одного трансверсального эллиптического оператора, «Труды Семинара им. Петровского», **8** (1982), 239 - 258.  
[4] Смагин, С. А., Шубин, М. А. Цета функция одного-трансверсально эллиптического оператора, «Сибирск. Матем. Ж.», **25** (1984), 6, 158 - 166.

М. А. Шубин 撰

【补注】于是, 一个 (伪) 微分算子如果与一群的无穷小作用所定义的向量场之组合构成一个超定椭圆型方程组, 则它是横截椭圆型的 (亦见椭圆型偏微分方程 (elliptic partial differential equation)). 齐民友 译

横截映射 [transversal mapping; трансверсальное отображение], 横截正则映射 (transversally-regular mapping)

具有一般位置 (general position) 的某些性质的映射.

设  $\xi$  是有限胞腔空间 (cellular space)  $X$  上的一个向量丛 (vector bundle), 而  $\xi$  的全空间作为开子集嵌入在某个拓扑空间  $Z$  中. 则连续映射  $f: M \rightarrow Z$  ( $M$  是一光滑流形) 称为  $X$  的横截映射 (transversal mapping), 如果  $V = f^{-1}(X)$  是  $M$  中具有法丛 (normal bundle)  $\nu$  的一个光滑子流形及如果  $f$  限制到  $V$  在  $M$  中的管状邻域 (tubular neighbourhood) 上定义了丛的态射  $\nu \rightarrow \xi$ .

例如, 设  $f: M \rightarrow N$  是光滑流形的一个光滑映射, 又设  $X$  是  $N$  的光滑子流形. 如果微分  $df: \tau_M \rightarrow \tau_N$  (其中  $\tau$  是切丛) 在它的象中包含了在 (丛  $\xi$  的)  $N$  中垂直于  $X$  的所有向量, 则  $f$  是横截映射 (也见横截性 (transversality)).

逼近定理 (approximation theorem) ([1]): 横截映射形成了在所有的连续映射  $M \rightarrow Z$  的集合中的第二范畴的一个集合. 此外, 任何的连续映射同伦于一个横截映射. 这个定理使得人们可将代数不变量 (映射的同伦类) 与描述几何形式 (在横截映射下是原象的流形的某些等价类) 相结合. 这个结合也用于其他方面, 即从几何到代数. 沿着这条线, 例如, 各种下配边 (bordism) 群已经算出, 给定同伦型的光滑流形已被分类, 等等.

横截映射的概念可以被引伸到分片线性和拓扑流形的范畴以及  $\mathbf{R}^n$  丛中. 更进一步, 在分片线性范畴中, 逼近定理成立; 见 [3]. 还有, 在拓扑范畴中, 每个连续映射同伦于一个横截映射; 此结果, 根据后来证明的困难的结果 ([6]), 对  $\dim M \neq 4 \neq \dim M -$

$\dim \xi$ , 在 [4] 中已经证明, 而对  $\dim M = 4$ , 在 [5] 中被证明. 横截映射的概念对无限维流形也可系统地阐述.

#### 参考文献

- [1] Thom, R., Un lemme sur les applications différentiables, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 1 (1956), 59 – 71.
- [2] Browder, W., *Surgery on simply connected manifolds*, Springer, 1972.
- [3] Williamson, R., Cobordism of combinatorial manifolds, *Ann. of Math.*, 83 (1966), 1 – 33.
- [4] Kirby, R. and Siebenmann, L., *Foundational essays on topological manifolds, smoothing, and triangulations*, Princeton Univ. Press, 1977.
- [5] Sharlemann, M., Transversality theories at dimension 4, *Invent. Math.*, 33 (1976), 1 – 14.
- [6] Freedman, M., The topology of four-dimensional manifolds, *J. Diff. Geom.*, 17 (1982), 357 – 453.

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】横截性 (transversality) 的概念对光滑流形之间的任意光滑映射  $f: M \rightarrow N$  被定义. 如果  $A$  为  $N$  的一个光滑子流形, 则  $f$  横截于  $A$ , 如果对  $A$  的原象  $V$  中的每个  $x$ ,  $N$  在  $f(x)$  的切空间由  $A$  在  $f(x)$  处的切空间和  $M$  在  $x$  处的切空间在  $f$  的微分下的象张成. 当这些成立时, 则  $V$  是  $M$  的光滑子流形,  $V$  在  $M$  中的法丛是  $A$  在  $N$  中的法丛在  $f$  下的拉回. 逼近定理对这样的映射是有效的. 横截性在拓扑中的应用见 [A1] – [A3].

#### 参考文献

- [A1] Pontryagin, L. S., *Smooth manifolds and their applications in homotopy theory*, Amer. Math. Soc., 1959 (译自俄文).
- [A2] Thom, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comment. Math. Helvetica*, 28 (1954), 17 – 86.
- [A3] Hirsch, M. W., *Differential topology*, Springer, 1976. 徐森林 译

横截系 [transversal system; трансверсальная система], 横截设计 (transversal design), 横截概形 (transversal scheme),  $T$  系 ( $T$ -system).

基数为  $t$  的  $m$  个两两不交的子集  $S_1, \dots, S_m$  所确定的一组集合  $T_0(m, t)$ . 即一个横截系  $T_0(m, t)$  是  $t^2$  个子集  $Y_1, \dots, Y_{t^2}$  (区组 (block) 或横截 (transversals)) 构成的一个系统, 每个子集含有  $m$  个元素并且满足

1.  $|Y_j \cap S_i| = 1; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, t^2;$
2.  $|Y_j \cap Y_k| \leq 1, j \neq k.$

在一个横截设计中, 任意两个元素  $a \in S_i$  和  $b \in S_j$ ,  $i \neq j$ , 同时出现在一个且仅一个区组里. 横截设计

$T_0(m, t)$  的存在性, 等价于正交阵列 (orthogonal array)  $OA(t, m)$  的存在性.

横截设计被用于区组设计的递归构造 (见区组设计 (block design)).

$T_0(m, t)$  的  $t$  个横截的集合称为平行的 (parallel), 如果这  $t$  个横截两两不相交. 如果一个横截设计  $T_0(m, t)$  含有  $e$  (或更多) 个平行集, 则记为  $T_e(m, t)$ .

横截系的一些基本性质:

a) 如果  $T_d(m, s)$  和  $T_e(m, t)$  存在, 则  $T_{de}(m, st)$  存在;

b)  $T_r(m-1, t)$  存在, 当且仅当  $T_0(m, t)$  存在.

#### 参考文献

- [1] Hall, M., *Combinatorial theory*, Wiley, 1986.
- [2] Hanani, H., The existence and construction of balanced incomplete block designs, *Ann. Math. Stat.* 32 (1961), 361 – 386. B. E. Тараканов 撰

【补注】组成设计的有限集  $S_1, \dots, S_m$  称为点类 (point classes) 或点群 (point groups).

存在横截设计  $T_0(m, t)$  等价于存在  $m-2$  个  $t$  阶相互正交拉丁方 (orthogonal Latin squares). 如果  $T_0(m, t)$  存在且  $t > 1$ , 则  $m \leq t+1$ .

横截设计 (及其推广具有空缺的横截设计 [A2]) 的递归构造和存在性的结果见 [A1] – [A3].

关于横截设计的递归构造的重要结果之一 (归功于 R. M. Wilson ([A4]), 亦见 [A1]) 如下:

设  $D$  是具有点类  $P_1, \dots, P_k$  和  $Q_1, \dots, Q_m$  的  $T_0(k+m, s)$ ,  $T$  是  $Q_1 \cup \dots \cup Q_m$  的  $t$  元子集, 并且令  $t_i = |T \cap Q_i|$  ( $i = 1, \dots, m$ ), 并对  $D$  的每一个区组  $B$ , 令  $u_B = |B \cap T|$ . 假设  $T_0(k, t_i)$  对  $i = 1, \dots, m$  存在, 并且对  $D$  的每一个区组  $B$ ,  $T_{u_B}(k, n+u_B)$  存在, 则  $T_0(k, ns+t)$  也存在.

横截设计 (及其对偶结构, 网 (net)) 也具有相当重要的几何和代数意义. 例如, 一个  $T_0(s+1, s)$  等价于一个  $s$  阶的仿射或射影平面, 并且一个  $T_0(3, s)$  在根本上和一个  $s$  阶的拟群 (quasi-group) 相同. 因此, 横截设计的几何和代数性质 (包括对其自同构群的研究) 相当有意义, 见 [A4].

#### 参考文献

- [A1] Beth, Th., Jungnickel, D. and Lenz, H., *Design theory*, Cambridge Univ. Press, 1986.
- [A2] Brouwer, A. E., Recursive constructions of mutually orthogonal Latin squares, *Ann. Discr. Math.*, 46 (1991), 149 – 168.
- [A3] Jungnickel, D., Latin squares, their geometries and their groups: a survey, in D. Ray-Chaudhuri (ed): *Coding theory and Design theory*, IMA Vol. Math.



and its Appl., Vol. 21, Springer, 1990, 166 – 225.

[A4] Wilson, R. M., Concerning the number of mutually orthogonal Latin squares, *Discr. Math.*, **9** (1974), 181 – 198.

[A5] Hanani, H., Balanced incomplete block designs and related designs, *Discrete Math.*, **11** (1975), 255 – 369. 刘振宏译 李乔校

### 横截性 [transversality; трансверсальность]

对一般位置 (general position) 的某些思想的一般名字 (也见横截映射 (transversal mapping)); 线性代数、微分和几何拓扑学中的一个概念.

a) 有限维向量空间  $C$  的两个向量子空间  $A, B$  称为彼此横截的 (transversal), 如果  $A$  和  $B$  生成  $C$ , 即如果

$$\dim(A \cap B) + \dim C = \dim A + \dim B.$$

b) 在可微分状态下, 流形  $N$  的两个子流形  $L, M$  称为在点  $x \in L \cap M$  处横截的, 如果在该点的切空间  $T_x L, T_x M$  生成了  $T_x N$ . 几何上 (对狭义意义下和无边的子流形), 这意味着可以将局部坐标  $x_1, \dots, x_n$  引进到  $x$  在  $N$  中的某个邻域  $U$  中, 按照它,  $L \cap U$  和  $M \cap U$  被表示为  $\mathbf{R}^n$  的横截向量子空间.

映射  $f: L \rightarrow N$  在点  $x \in f^{-1}(M)$  处横截于子流形 (transversal to a submanifold)  $M \subset N$  (见横截映射 (transversal mapping)), 如果  $T_x L$  在  $f$  的微分下的象在  $T_{f(x)} N$  中横截于  $T_{f(x)} M$ . 两个映射  $f: L \rightarrow N$  和  $g: M \rightarrow N$  在点  $(x, y) \in L \times M$  是相互横截的 (transversal to each other) (其中  $f(x) = g(y)$ ), 如果  $T_x L$  和  $T_y M$  的象生成  $T_{f(x)} N$ . 后两个定义也可从几何上重述 ([1]). 称  $L$  横截于  $M$ ,  $f$  横截于  $M$  (在旧的专有名词中,  $f$  沿  $M$  是  $t$  正则的),  $f$  横截于  $g$ , 如果相应的横截性在所有可能论及的点都成立. 这些概念, 容易相互导出. 例如  $L$  和  $M$  的横截性等价于  $L$  和  $M$  在  $N$  中的恒同嵌入的横截性. 共用记号  $L \pitchfork M, f \pitchfork M$ , 等等.

关于带边流形的横截性, 有时需要用到某些加强条件才成立 (见 [3]). 横截性也引伸到无限维的情形 (见 [1], [2]).

在所有这些情形中, 横截性的作用联系到“一般性”和联系到交  $L \cap M$  的“好”性质, 原象  $f^{-1}(M)$  和类似的对象 (它形变到相同的“好”对象, 如果在原对象的形变下横截性被保留) (见 [4]).

c) 在分片线性和拓扑的状况中, 子流形的横截性类似于 b) 中的几何定义 (特别普遍的是对余维数子流形的分片线性的描述, 见 [5]). 一般地, 得不到具有 b) 中横截性的性质的完全的模拟 (见 [6], [8]), 因此, 横截性的进一步加以限制的修改已经提出 (见

[7], [9]).

最后, 流形的范畴被说成有横截性的性质, 如果其中的任何映射可由横截映射 (transversal mapping) 逼近.

### 参考文献

- [1] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967.
- [2] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Differentiable and analytic manifolds, Addison-Wesley, 1966 (译自法文).
- [3] Рохлин, В. А., Фукс, Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977 (英译本: Rokhlin, V. A. and Fuks, D. B., Beginner's course in topology Geometric chapters, Springer, 1984).
- [4] Hirsch, M., Differential topology, Springer, 1976.
- [5] Rourke, C. P. and Sanderson, B. J., Introduction to piecewise-linear topology, Springer, 1972.
- [6] Lickorish, W. and Rourke, C. P., A counter-example to the three balls problem, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **66** (1969), 13 – 16.
- [7] Rourke, C. P. and Sanderson, B. J., Block bundles II, transversality, *Ann. of Math.*, **87** (1968), 256 – 278.
- [8] Hudson, J. F. P., On transversality, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **66** (1969), 17 – 20.
- [9] Marin, A., La transversalité topologique, *Ann. of Math.*, **106** (1977), 2, 269 – 293.

Д. В. Аносов 撰 徐森林 译

### 横截性条件 [transversality condition; трансверсальности условие]

具有可变端点的变分问题中最优性的一个必要条件. Euler 方程 (Euler equation) 的解依赖的任意常数借助于横截性条件而被决定. 横截性条件是泛函的一阶变分为零的一个必要条件.

对具有可变端点的变分法中最简单的问题,

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}) dt,$$

其中点

$$(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = (t_1, x_1, t_2, x_2)$$

是不固定的但可属于某一确定的流形, 横截性条件可写成关系式

$$[(F - \dot{x} F_{\dot{x}}) dt + F_{\dot{x}} dx]_1^2 = 0 \quad (1)$$

的形式, 对边界条件流形的切向微分  $dt_1, dx_1, dt_2, dx_2$  的任何值它必须被满足.

如果极值曲线的左的和右的端点可以沿着指定曲线  $x = \varphi_1(t)$  和  $x = \varphi_2(t)$  移动, 则由于

$$dx_1 = \dot{\varphi}_1(t)dt_1, dx_2 = \dot{\varphi}_2(t)dt_2$$

且变分  $dt_1$  和  $dt_2$  是独立的, (1) 蕴涵

$$\left. \begin{aligned} &F(t_1, x_1, \dot{x}_1) + \\ &- [\dot{\varphi}_1(t_1) - \dot{x}_1] F_{\dot{x}}(t_1, x_1, \dot{x}_1) = 0, \\ &F(t_2, x_2, \dot{x}_2) + \\ &+ [\dot{\varphi}_2(t_2) - \dot{x}_2] F_{\dot{x}}(t_2, x_2, \dot{x}_2) = 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

如果左和右的端点沿着它移动的曲线的方程由隐式  $\omega_1(t, x) = 0$  和  $\omega_2(t, x) = 0$  给出, 则横截性条件 (1) 可写成形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{F - \dot{x} F_{\dot{x}}}{\omega_{1t}} &= \frac{F_{\dot{x}}}{\omega_{1x}} \text{ 在左端点,} \\ \frac{F - \dot{x} F_{\dot{x}}}{\omega_{2t}} &= \frac{F_{\dot{x}}}{\omega_{2x}} \text{ 在右端点.} \end{aligned} \right\} (3)$$

如果在一个端点上没有约束, 则在此端点, 由于相应的切微分  $dt$  和  $dx$  的独立性, 横截性条件取形式

$$F = 0, F_{\dot{x}} = 0. \quad (4)$$

关系式 (2), (3), (4) 称为横截性条件.

以下, 在对条件极值的变分问题的更一般情况下, 给出横截性条件. 考虑 **Bolza 问题** (Bolza problem), 即在出现等式型的微分约束

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, \dot{x}) &= 0, \varphi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m, \\ m &< n, \end{aligned} \quad (5)$$

以及边界条件

$$\psi(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = 0, \quad (6)$$

$$\psi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p, p \leq 2n + 2$$

时, 使泛函

$$\left. \begin{aligned} J(x) &= \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x}) dt + g(t_1, x(t_1), \\ &\quad t_2, x(t_2)), \\ f: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R}, g: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \\ &\quad \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbf{R} \end{aligned} \right\} (7)$$

极小化. 在这问题中当  $p < 2n + 2$  时, 极值曲线的端点  $(t_1, x_1^1, \dots, x_1^n)$  和  $(t_2, x_2^1, \dots, x_2^n)$  是不固定的, 可沿给定超曲面  $\psi_\mu = 0$  ( $\mu = 1, \dots, p$ ) 移动.

按照横截性条件, 存在常数 (Lagrange 乘子 (Lagrange multipliers))  $e_\mu, \mu = 1, \dots, p$ , 以及乘子  $\lambda_0$

和  $\lambda_i(t), i = 1, \dots, m$ , 使得除了边界条件 (6) 以外, 对由 (6) 定义的流形的切微分

$$dt_1, dx_1^i, dt_2, dx_2^i, i = 1, \dots, n \quad (8)$$

的任何选取, 以下关系式在极值曲线的端点成立:

$$\begin{aligned} &\left[ \left( F - \sum_{i=1}^n \dot{x}^i F_{\dot{x}^i} \right) dt + \sum_{i=1}^n F_{\dot{x}^i} dx^i \right]_1^2 + \\ &+ \lambda_0 dg + \sum_{\mu=1}^p e_\mu d\psi_\mu = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

在 (9) 中,  $F$  指表达式

$$\begin{aligned} F &= F(t, x, \dot{x}, \lambda) = \lambda_0 f(t, x, \dot{x}) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \varphi_i(t, x, \dot{x}). \end{aligned} \quad (10)$$

在大多数实际问题中, 由设  $\lambda_0 = 1$  使 Lagrange 乘子规范化 (值  $\lambda_0 = 0$  对应于非规范的情形, 见 [1]).

乘子  $\lambda_i(t) (i = 1, \dots, m)$  由 Euler 微分方程组

$$F_{x^i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}^i} = 0, i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

和  $m$  个形如 (5) 的方程

$$\varphi_i(t, x, \dot{x}) = 0, i = 1, \dots, m,$$

的解与  $x^i(t) (i = 1, \dots, n)$  一起被确定. 这个含有  $n + m$  个未知函数  $x^i(t), i = 1, \dots, n$ , 和  $\lambda_i(t), i = 1, \dots, m$  的  $n$  个二阶微分方程和  $m$  个一阶微分方程的方程组的通解依赖于  $2n$  个任意常数. 事实上, 如果令

$$\dot{x}^i = u_i, i = 1, \dots, n, \quad (12)$$

则得到  $2n$  个一阶常微分方程的组 (11), (12) 和  $m$  个有限关系式

$$\varphi_i(t, x, u) = 0, i = 1, \dots, m. \quad (13)$$

利用 (13) 函数  $u_i$  中有  $m$  个可用其他的函数来表示 (在相应的函数行列式不为零的假设下), 再将这些代入 (11), (12), 得到一个有  $2n$  个未知函数的  $2n$  个一阶微分方程的组, 其通解依赖于  $2n$  个任意常数. 与值  $t_1$  和  $t_2$  一起, 给出了  $2n + 2$  个任意常数, 决定变分问题 (5) - (7) 的解. 然后借助于横截性条件, 得到同样个数的关系式使得能够确定这些任意常数.

在最优控制问题和在 **Понтрягин 最大值原理** (Pontryagin maximum principle) 中, 必要的横截性条件可类似于 (9) 写出, 只是取代

$$F - \sum_{i=1}^n \dot{x}^i F_{\dot{x}^i} \text{ 和 } F_{\dot{x}^i},$$

必须在 (9) 中代入 Hamilton 函数  $H$ , 取相反符号,



以及共轭变量  $\psi_i$ .

为了得出由解带可变端点的变分问题而化成的一个封闭边值问题, 必要的横截性条件给出了不足的边界条件.

#### 参考文献

- [1] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.  
 [2] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).

И. Б. Вапнярский 撰

#### 【补注】

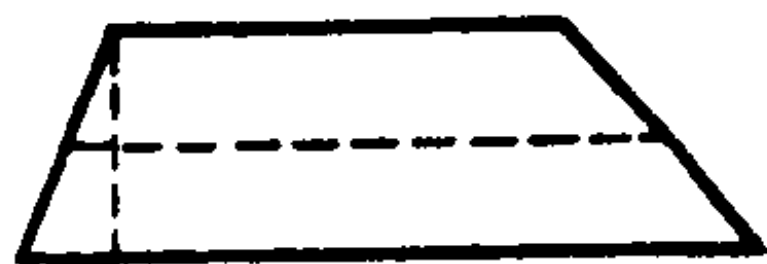
#### 参考文献

- [A1] Cesari, L., Optimization-theory and Applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.  
 [A2] Berkovitz, L. D., Optimal control theory, Springer, 1974.  
 [A3] Elsgolc, L. E., Calculus of variations, Pergamon, 1961 (译自俄文) (中译本: Л. Е. 艾利斯哥尔兹, 变分法, 高等教育出版社, 1960).  
 [A4] Fleming, W. H. and Rishel, R. H., Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975.

葛显良 译 吴绍平 校

#### 梯形 [trapezium 或 trapezoid; трапеция]

一个凸四边形 (见完全四边形 (quadrangle, complete)), 其中两边平行, 另两边不平行 (见图). 平行的两边称为梯形的底 (bases), 不平行的两边称为它的腰 (lateral sides); 连接梯形两腰中点的线段称为中线 (median line); 梯形的中线平行于两底, 并且等于两底之和的一半. 梯形的面积等于梯形中线长度与其高之积, 或者等于两对角线之积乘以对角线夹角正弦的二分之一. 两腰相等的梯形称为等腰梯形 (equilateral trapezium).



БСЭ-3 杜小杨 译

#### 梯形公式 [trapezium formula; трапеций формула]

Newton-Cotes 求积公式 (Newton-Cotes quadrature formula) 的特殊情况, 即取两个结点的情况:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]. \quad (1)$$

如果被积函数与线性函数差别很大, 则公式 (1) 不是

很精确的. 在这种情况下, 将区间  $[a, b]$  分成  $n$  个子区间  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , 其步长为  $h = (b-a)/n$ , 而且用梯形公式

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \cong \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

计算  $[x_i, x_{i+1}]$  上的积分, 然后将这个近似方程的左边和右边从 0 到  $n-1$  对  $i$  求和, 则可得复合梯形公式:

$$\int_a^b f(x) dx \cong h \left[ \frac{f(a)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2} \right], \quad (2)$$

其中  $x_j = a + jh$ ,  $j = 0, \dots, n$ , 求积公式 (2) 也称为梯形公式 (不加“合成”这个词). 求积公式 (2) 以及 (1) 的代数精度等于 1. 对三角函数

$$\cos \frac{2\pi}{b-a} kx, \sin \frac{2\pi}{b-a} kx, k = 0, \dots, n-1,$$

求积公式 (2) 是精确的. 在  $b-a = 2\pi$  时, 对不超过  $n-1$  阶的所有三角多项式, 公式 (2) 都是精确的; 而且, 它的三角精度等于  $n-1$ .

如果被积函数  $f$  在  $[a, b]$  上二次连续可微, 则求积公式 (2) 的误差  $R(f)$ , 即积分和求积和之差由公式

$$R(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

给出, 其中  $\xi$  是  $[a, b]$  中的一个点.

И. П. Мысовских 撰

#### 【补注】 完全公式

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[ \frac{f(a)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2} \right] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

常常称为梯形法则 (trapezoidal rule).

#### 参考文献

- [A1] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, Dover, reprint, 1974, 95 ff.  
 [A2] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, W. A. and Vetterling, W. T., Numerical recipes, Cambridge Univ. Press, 1986, 105 ff. 袁国兴 张宝琳 译

#### 行进管法 [travelling-tube method; блуждающей трубки метод]

求在相坐标和控制函数上具有约束的最优控制 (optimal control) 问题的数值解的一种直接方法. 原来的最优控制问题经离散化 (关于时间  $t$  和相向量  $x$ ) 可简化成形如

$$I(x_0, \dots, x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i(x_i, x_{i+1})$$

的一个函数的极小化, 其中  $x_i$  是由方程  $t = t_i$  给出的  $(t, x)$  空间中的超平面的结点上向量  $x$  的值. 关于  $t$  和  $x$  的离散化由给定步长  $\Delta t$  和  $\Delta x$  产生. 对每一个向量  $(x_0, \dots, x_N)$  的集合对应一个通过这些结点的折线, 它是原最优控制问题的轨道  $x(t)$  的逼近表示. 这折线的长度  $I(x_0, \dots, x_N)$  是各段 (广义) 长度  $\varphi_i(x_i, x_{i+1})$  之和. 有最短长度的折线是借助于递归关系

$$l_s(i+1) = \min_k (l_k(i) + l_{ks}(i))$$

找到的 (见变分学的数值方法 (variational calculus, numerical methods of)).

在这样得到的图象上寻找总体极小值需要大的运算存储和长的计算时间 (特别为得到要求精度的解时与  $\Delta x$  和  $\Delta t$  的减小相关).

如果放弃求总体极值的企图, 则所需存储量和运算次数可相当地减少. 这时所用方法具有逐次逼近法的特征; 最优轨道不是在整个图象上找, 而在由包含初始折线的一个“管”中给定的子图象上找; 这是初始逼近. 该管的每一横截面包含给定数量的结点. 被找到的折线取作逐次逼近, 此后计算在一个新的子图象上重复.

估算表明在行进管法中运算次数线性地随着关于  $x$  的网格结点数 (随着步长  $\Delta x$  的减小) 的增加而增加, 而总体选取法中其增加是按平方的.

行进管法的一个特殊情形是局部变分方法 (local variations, method of), 其中每个横截面中的结点数是极小的 (且等于二).

#### 参考文献

- [1] Моисеев, Н. Н., Элементы теории оптимальных систем, М., 1975.

И. Б. Вапнярский, И. А. Ватель 撰  
葛显良 译 吴绍平 校

行进波法 [travelling-wave method; бегущей волны метод]

变分学 (variational calculus) 问题的数值解的一种直接方法. 它是用以解小维数而在相坐标和控制函数上具有约束的最优控制 (optimal control) 问题. 在该泛函和微分方程组离散化后, 原问题化成泛函

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} F^0(x_k, x_{k+1}, u_k, t_k, t_{k+1}), \quad (1)$$

$$x_{k+1} - x_k = \tau F(x_k, x_{k+1}, u_k, t_k, t_{k+1}), \quad (2)$$

$$k = 0, \dots, N-1,$$

$$(x_k, u_k) \in G_k, \quad k = 0, \dots, N \quad (3)$$

的极小化. 这里  $x_k, u_k$  分别是在结点  $t_k$  的相坐标和控制的向量 (分别地具有维数  $n$  和  $m$ ),  $u_k$  在每一区间  $(t_k, t_{k+1})$  上看成常量,  $G_k$  是在一个  $(n+m)$  维空间中的给定区域 ( $G_0$  和  $G_N$  描述边界条件), 且  $\tau = (T - t_0)/N$  是初始区间  $T - t_0$  的细分步长.

行进波法用于  $n \geq m$  的情形, 这情形在实际问题中是典型的, 且由于确定控制函数中的困难工作对它用基于空间状态变分的其他方法是困难的.

给定的满足 (2) 和 (3) 的初始逼近  $(x_0^0, \dots, x_N^0, u_0^0, \dots, u_{N-1}^0)$ , 在  $t_k$  和  $t_{k+p}$  之间每一段  $(x_k, x_{k+p})$  是给定的) 上在准则 (1) 的意义下被改进, 且每次从该轨道的起点到其终点这一段移动一个结点然后再重复 (因此“行进波”这名称).

对每一个波得到一个非线性规划问题: 具有  $p$  个 (2) 型约束下且在条件 (3) 下极小化

$$\Delta I_k = \sum_{l=k}^{k+p-1} F^0(x_l, x_{l+1}, u_l, t_l, t_{l+1}). \quad (4)$$

在行进波法的实际实现中并不试图去解决问题 (4); 取而代之, 对  $r$  个自由参数中的每一个, 给出增量  $\pm h_i$ , 且如果  $\Delta I_k$  (方程 (4) 中) 减小, 条件 (3) 被满足, 则得到一个新的轨道. 如果该轨道在该波的一个完全周期中不改变, 则  $h_i$  被它的一个分数取代.

如果  $m = n$ , 行进波法就与局部变分法一致.

#### 参考文献

- [1] Моисеев, Н. Н., Элементы теории оптимальных систем, М., 1975.  
[2] Ватель, И. А., Кононенко, А. Ф., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 10 (1970), 1, 67-73.  
[3] Ватель, И. А., Кононенко, А. Ф., Алгоритмы и программы (Информационный бюллетень), М., 1972, No. 2, 7.

И. Б. Вапнярский, И. А. Ватель 撰 葛显良 译  
吴绍平 校

树 [tree; дерево], 图论中的

一个连通无向不含圈的图 (graph)  $G$ . 一棵树没有重边也没有环. 因为它们是最简单的连通图, 所以在研究图论中各种问题时, 树就成为恰当的模式.  $n$  个顶点的树包含  $n-1$  条边.  $n$  个标号顶点的不同树的个数是  $n^{n-2}$ . 具有一个特殊顶点的树称为有根树 (rooted tree).

具有  $n$  个顶点的不同构有根树的数目  $T_n$  的枚举级数



$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n$$

满足函数方程

$$T(x) = x \exp \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} T(x^r).$$

具有  $n$  个顶点的不同构树的数目  $t_n$  的枚举级数

$$t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n$$

可以用有根树的枚举级数表示为

$$t(x) = T(x) - \frac{T^2(x) - T(x^2)}{2}.$$

对于  $n$  的具体数值,  $T(x)$  和  $t(x)$  的函数方程能得到  $T_n$  和  $t_n$  的值 (例如见 [1]).

已经证明, 当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$t_n \sim C \frac{\alpha^n}{n^{5/2}}.$$

其中  $C = 0.534948 \dots$ ,  $\alpha = 2.95576 \dots$  ([2]). 一类特殊类型树的枚举问题产生于化学中同分异构性的研究.

用 0, 1 序列可以相当简单地给树编码. 例如, 考虑一棵树  $D$  按常规 (边不交地) 嵌入到平面上 (见图的嵌入 (graph imbedding)). 从任一顶点出发, 沿  $D$  的边前进, 到达每一顶点后转向其右面的第一条边, 当到达树的端点再退回来. 在沿某边移动时, 若这条边是第一次通过, 则记下 0; 若是第二次通过 (沿相反方向), 则记下 1. 如果  $m$  是树的边数, 那么进行  $2m$  步后就回到了出发点, 其间每边经过两次. 这样得到的长度为  $2m$  的 0, 1 序列 (树的码), 不仅能用来唯一地重构树  $D$  自身, 并且也给出它的平面嵌入. 一棵特定的树对应于若干不同的码. 由编码的方式可得下述估计:  $t_n < T_n < 4^n$ .

一棵  $n$  个顶点的树  $G$ , 可以由它的  $n-1$  个顶点的子图  $G-v$  的集合 (在同构意义下) 唯一地复原出来, 其中  $n-1$  个顶点的子图  $G-v$  是由  $G$  去掉一个顶点  $v$  而得到.

一棵树也能由它的 (1 度) 端点之间的距离 (最短路长) 唯一地确定.

一个图的生成树 (spanning tree of a graph) 是包含其所有顶点的子图, 而该子图本身是一棵树. 任意一个无环无重边的连通图的生成树的个数可计算如下: 设  $M$  是将  $G$  的邻接矩阵中每一元素变为其相反数, 然后用  $v_i$  的度代替主对角线上的第  $i$  个元素而得到的矩阵, 那么  $M$  的主对角线上每一元素的余子式都相等, 并且等于  $G$  的生成树的个数. 例如生成树被用于在电路中求独立圈这样的问题.

在每边赋权的连通图中, 求其边权之和最小的生成树问题在应用上具有重要意义. 例如, 在设计通信

网络时就出现这样的问题. [3], [4] 给出了求解最短生成树问题 (shortest spanning tree problem) 的算法. 从顶点  $v_0$  长出一棵树是对有向图而言的, 它是 (不计定向的) 一棵根为  $v_0$  的有根树, 其中对每个顶点  $v_i$ , 连接  $v_0$  到  $v_i$  的唯一的链是  $v_0$  到  $v_i$  的有向路.

这类树被用于诸如确定性函数的描述、信息搜索系统中的信息表示等问题.

森林的概念是树的概念的推广. 一个森林 (forest) 就是一个无圈 (但不一定连通的) 图.

#### 参考文献

- [1] Harary, F., Graph Theory, Addison-Wesley, 1969.
- [2] Otter, R., The number of trees, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 3, 583 - 599.
- [3] Prim, R. C., Shortest connection networks and some generalizations, *Bell Systems Techn. J.*, **36** (1957), 6, 1389 - 1401.
- [4] Kruskal, J. B., On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 48 - 50.

В. Б. Алексеев 撰

【补注】一棵有向树 (directed tree) 就是这样一个有向图, 它是以  $r$  为根的树, 使得对每一顶点  $v$ , 从  $r$  到  $v$  有一条有向路. 因此除  $r$  外, 每一顶点的入度恰为 1, 而  $r$  的入度为 0 且称为源 (source). 另一种等价的定义 (反转方向) 是, 一棵有向树是以  $r$  为根的树, 使得每一个顶点的出度为 1 (而  $r$  的出度为 0 且称为汇 (sink)). 在文献中这两种定义都有. 有时用有根树 (rooted tree) 这个词表示有向树.

#### 参考文献

- [A1] Chen, W. K., Applied graph theory, North-Holland, 1971.
- [A2] Comtet, L., Advanced combinatorics, Reidel, 1974 (译自法文).
- [A3] Goudran, M. and Minoux, M., Graphes et algorithmes, Eyrolles, 1979, Chapt. 4.

【译注】树的概念和若干性质已推广到拟阵里, 而求最小权树等价于求一个拟阵的最小权基 (见 [B1]). 求最小有向树的算法可见 [B2]. 求最小权有向树可化为求两个拟阵的最小权最大交.

#### 参考文献

- [B1] Welsh, D. J. A., Matroid theory, Acad. Press, 1976.
- [B2] Chu Y. J. and Liu C. H., The shortest arborescence of a directed graph, *Sci. Sinica* **14** (1965), 1394 - 1400.
- [B3] Tarjan, R. E. Finding Optimum branchings, *Networks*, 1977, 25 - 35. 刘振宏 译 李 乔 校

Trefftz 法 [Trefftz method; Треффа метод]

解边值问题的一种变分法. 假定人们要求解的边值问题是

$$\Delta u = 0, u|_S = \varphi, \quad (*)$$

其中  $S$  是区域  $\Omega \subset \mathbf{R}^m$  的边界. 问题  $(*)$  的解就是在满足边界条件  $u|_S = \varphi$  的所有函数中使泛函

$$J(u) = \int_{\Omega} (\text{grad } u(x))^2 dx$$

达到极小的函数. Trefftz 法可叙述如下: 假定在  $\Omega$  中给出一个调和函数序列  $w_1, w_2, \dots$ , 它们和它们的一阶导数在  $\Omega$  中平方可和. 为寻找形如

$$u_n = \sum_{j=1}^n c_j w_j$$

的近似解, 可由条件  $J(u_n - u)$  达极小来确定系数  $c_j$ , 其中  $u$  是  $(*)$  的精确解. 这样就得到下面关于  $c_1, \dots, c_n$  的方程组:

$$\sum_{j=1}^n c_j \int_S w_j \frac{\partial w_i}{\partial v} dS = \int_S \varphi \frac{\partial w_i}{\partial v} dS, i = 1, \dots, n,$$

其中  $v$  是  $S$  的外法向.

Trefftz 法可以推广到各种边值问题 (见 [2] - [4]).

这个方法是由 E. Trefftz 提出的 (见 [1]).

#### 参考文献

- [1] Trefftz, E., Ein gegenstück zum ritzschen verfahren, in verhandl. 2er Internat. Kongress, Techn. Mechanik Zürich, 1926, 12 - 17 Sept., Füssli, 1927, 131 - 137.
- [2] Михлин, С. Г., Вариационные методы в математической физике, 2 изд., М., 1970.
- [3] Крылов, В. И., Бобков, В. В., Монастырный, П. И., Вычислительные методы высшей математики, т. 2, Минск, 1975.
- [4] Бирман, М. Ш., «Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ. и астр.», 13 (1956), 3, 69 - 89.

Г. М. Вайникко 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Rektorys, K., Applicable mathematics, Iliffe, 1969, 1056 - 1058. 袁国兴 张宝琳 译

#### 三角组 [triads; триада], 亦称三联组

四元组  $(X; A, B, x_0)$ , 其中  $X$  是拓扑空间 (topological space),  $A$  和  $B$  是  $X$  的子空间, 并且满足  $X = A \cup B, x_0 \in A \cap B$ . 三角组的同伦群  $\pi_n(X; A, B, x_0), n \geq 3$  ( $n = 2$  时, 它仅是一个集合), 有定义, 并被用于证明同伦切除定理. 也有一个正合 Mayer-Vietoris 序列连接空间  $X, A, B, A \cap B$  的同调群 (homology group). Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 若在空间的三元组  $(X; A, B)$  中,  $A, B$  是  $X$

的两个子空间, 则定义道路空间  $\Omega(X; A, B)$  为  $X$  中起点与终点分别落在  $A$  和  $B$  中的所有道路的全体:

$$\Omega(X; A, B) = \{p: [0, 1] \rightarrow X: p(0) \in A, p(1) \in B\}.$$

若在  $A \cap B$  指定一个点  $*$ ,  $*$  处的常值道路便指定为  $\Omega(X; A, B)$  中的基点 (也记为  $*$ ).

相对同伦群 (homotopy group)  $\pi_n(X, A, *)$ ,  $*$   $\in A \subset X$ , 也可定义为  $\pi_n(\Omega(X; A, B), *)$ . 若  $(X; A, B, *)$  为三角组, 则它的同伦群定义为相对同伦群

$$\pi_n(X; A, B, *) =$$

$$= \pi_{n-1}(\Omega(X; B, *), \Omega(A; A \cap B, *), *).$$

用三元组  $(\Omega(X; B, *), \Omega(A; A \cap B, *), *)$  的同伦长正合列可得到三角组的 (第一个) 同伦正合列 (homotopy sequence of a triad)

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(X; A, B, *) &\xrightarrow{\partial} \pi_n(A, A \cap B, *) \rightarrow \\ \cdots \rightarrow \pi_n(X; B, *) &\rightarrow \pi_n(X; A, B, *) \xrightarrow{\partial} \cdots, \end{aligned}$$

因此三角组的同伦群在同伦切除同态 (homotopy excision homomorphism)

$$\pi_n(A, A \cap B, *) \rightarrow \pi_n(X, B, *)$$

不是同构时, 可以提供新信息. 三角组的同伦群也可定义为

$$\pi_n(X; A, B, *) = \pi_{n-1}(\Omega(X; A, B), *).$$

#### 参考文献

- [A1] Hu, S.-T., Homotopy theory, Acad. Press, 1955, Chapt. V, § 10.
- [A2] Gray, B., Homotopy theory. An introduction to algebraic topology, Acad. Press, 1975, p. 88.
- [A3] Switzer, R. M., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975, § 6.17.

潘建中 译 沈信耀 校

#### 三角形 [triangle; треугольник], Euclid 平面上的

三个点 (顶点) 和以这三个点为端点的三条直线段 (边). 有时把三角形定义为平面上由三角形的边围成的凸区域 (实心三角形 (solid triangle)).

在一些不同于 Euclid 平面的流形中也能引入三角形的概念. 三角形通常定义为三个点和以这三个点为端点的三条测地线段. 例如, 球面几何学 (spherical geometry) 中的球面三角形, 以及双曲平面或 Лобачевский 平面上的三角形, 都是如此 (见非 Euclid 几何学 (non-Euclidean geometries)).

#### 参考文献

- [1] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L., Geometry



revisited, Math. Assoc. Amer., 1975.

[2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969.

[3] Зетель, С. И., Новая геометрия треугольника, 2 изд., М., 1962.

[4] Hadamard, J., Leçons de géométrie élémentaire, Géométrie plane, J. Gabay, reprint, 1990.

[5] Ефремов, Д., Новая геометрия треугольника, Одесса, 1902.

А. Б. Иванов 撰 杜小杨 译

三角角腭[triangle, defect of a 或 angular defect; дефект треугольника]

Лобачевский 平面上的三角形内角之和小于两直角所差之量. 三角形的角腭正比于此三角形的面积. 如果一个三角形的所有顶点都在无穷远点处, 则其角腭达到最大值, 此最大值等于两直角.

А. Б. Иванов 撰

【补注】对于一般负曲率曲面上测地三角形的相应概念包含于 Gauss-Bonnet 公式中(见 Gauss-Bonnet 定理(Gauss-Bonnet theorem)).

球面几何学(spherical geometry)中的三角形情形相反, 其内角之和大于两直角, 所差之量为球面角盈(spherical excess)或角盈(angular excess).

三角角腭也称双曲角腭(hyperbolic defect).

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, II, Springer, 1987, § 19.5 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第二卷, 科学出版社, 1989).

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969, § 16.5. 沈永欢 译

三角阵列[triangular array; серий схема]

同级数序列(sequence of series).

三角形元[triangular element; треугольный элемент]

见可三角化元(trigonalizable element).

三角形群[triangular group; треугольная группа], 可三角化群(triangulable group).

同超可解 Lie 群(Lie group, supersolvable).

三角形矩阵[triangular matrix; треугольная матрица]

主对角线以下(或以上)的所有元素均为零的方阵(见矩阵(matrix)). 在第一种情况下, 该矩阵称为上三角形矩阵(upper triangular matrix), 在第二种情况下, 该矩阵称为下三角形矩阵(lower triangular matrix). 一个三角形矩阵的行列式等于它的对角线上

所有元素的乘积.

О. А. Иванова 撰

【补注】一个能使之成为三角形形式的矩阵称为可三角化矩阵(trigonalizable matrix), 见可三角化元(trigonalizable element).

任意秩为  $r$  的  $(n \times n)$  矩阵  $A$ , 如果它的前  $r$  个顺序的主子式均不为零, 那么  $A$  可以表成一个下三角形矩阵  $B$  与一个上三角形矩阵  $C$  的乘积,  $([A1])$ .

任一实矩阵  $A$  可以分解为形如  $A = QR$ , 其中  $Q$  是正交矩阵,  $R$  是上三角形矩阵, 称为  $QR$  分解( $QR$ -decomposition), 或者分解为形如  $A = \tilde{Q}\tilde{L}$ , 其中  $\tilde{Q}$  是正交的,  $\tilde{L}$  是下三角形的, 称为  $QL$  分解( $QL$ -decomposition). 这样的分解在数值算法中起重要作用,  $([A2])$ 、 $([A3])$  (例如对于计算本征值).

如果  $A$  是非奇异的, 且要求  $R$  的对角线上的元素均为正数, 那么  $QR$  分解  $A = QR$  是唯一的,  $([A3])$ , 且由 Gram-Schmidt 标准正交化过程给出, 见正交化(orthogonalization); 岩沢分解(Iwasawa decomposition).

参考文献

[A1] Gantmacher, F. R. [Gantmakher, F. R.], The theory of matrices, Chelsea, reprint, 1959, p. 33ff (译自俄文)(中译本: Ф. Р. 甘特马赫尔, 矩阵论, 高等教育出版社, 1955).

[A2] Young, D. M. and Gregory, R. T., A Survey of numerical mathematics, 2, Addison-Wesley, 1973, p. 921 ff.

[A3] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T., Numerical recipes, Cambridge Univ. Press, 1986, p. 357 ff. 蒋滋梅 译

三角形数[triangular number; треугольное число]

见等差数列(arithmetic series).

三角求和法[triangular summation method; треугольный метод суммирования]

用三角形矩阵(triangular matrix)

$$A = \|a_{nk}\|, n, k = 1, 2, \dots$$

定义的一种矩阵求和法(matrix summation method), 三角形矩阵就是当  $k > n$  时  $a_{nk} = 0$  的矩阵. 三角求和法是行有限求和法(row-finite summation method)的一种特殊情形. 三角形矩阵  $A$  称为正规的(normal), 如果对于所有  $n$ ,  $a_{nn} \neq 0$ . 由正规三角形矩阵  $A$  得到的变换

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} s_k$$

有一个逆

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_{nk}^{-1} \sigma_k,$$

其中  $A^{-1} = \|a_{nk}^{-1}\|$  是  $A$  的逆. 这个事实可从由正规三角形矩阵所决定的矩阵求和法若干定理的证明中看出. 与三角求和法有关的, 例如 Cesàro 求和法 (Cesàro summation methods) 及 Voronoi 求和法 (Voronoi summation method).

#### 参考文献

- [1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.
- [2] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, MacMillan, 1950.
- [3] Барон, С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977.

И. И. Волков 撰 罗嵩龄 译

#### 三角剖分 [triangulation; триангуляция]

1) 多面体的三角剖分 (triangulation of a polyhedron) 或直线三角剖分 (rectilinear triangulation), 是作为几何的单纯复形 (simplicial complex)  $K$  的空间的多面体 (见抽象多面体 (polyhedron, abstract)) 的一个表示, 即它到闭单形中的一个分解, 使得任何两个单形或者不相交或者沿一个公共面相交. 多面体的直线三角剖分作为研究它们的主要工具. 任何的多面体有三角剖分, 它的任何两个三角剖分有共同的重分.

单形  $\sigma$  在三角剖分  $T$  中的闭星形 (closed star)  $St(\sigma, T)$  是  $T$  的包含  $\sigma$  的单形的并. 存在单形  $\sigma \in T$  的闭星形的表示—— $\sigma$  和它的链环 (link) 的并 (或统联, 见集合的并 (union of sets)):  $St(\sigma, T) = \sigma \cup lk(\sigma, T)$ . 特别地, 一个顶点的星形是它的链环的锥 (cone). 如果单形  $\sigma \in T$  被表示为它的两个面  $\delta$  和  $\gamma$  的统联, 则  $lk(\sigma, T) = lk(\delta, lk(\gamma, T))$ . 单形的链环不依赖于  $T$ : 如果  $\sigma$  是同一个多面体直线三角剖分  $T_1, T_2$  中的一个单形, 那么, 多面体  $|lk(\sigma, T_1)|$  和  $|lk(\sigma, T_2)|$  是 PL 同胚的. 单形  $\sigma \in T$  的开星形 (open star) 定义成包含  $\sigma$  作为一个面的那些单形的内点的并. 多面体  $P$  的三角剖分的顶点的开星形形成  $P$  的一个开覆盖. 覆盖神经 (见集族的神经 (nerve of a family of sets)) 单纯地同构于三角剖分. 多面体  $P_1$  和  $P_2$  的两个三角剖分  $T_1$  和  $T_2$  是组合等价的, 如果它们的某个重分是单纯同构的. 为使两个三角剖分  $T_1$  和  $T_2$  组合等价,  $P_1$  和  $P_2$  PL 同胚是必要和充分的. 一个流形的三角剖分说成是组合的, 如果它的顶点的任何一个星形组合等价于一个单形. 在此情形中, 三角剖分的任何单形的星形也组合等价于一个单形.

如果  $P$  是多面体  $Q$  的一个闭子多面体, 则  $P$  的任何一个三角剖分  $K$  可以扩张成  $Q$  的某个三角剖分

$L$ . 这种情形就称几何单纯复形对  $(L, K)$  三角剖分了. 偶对  $(Q, P)$ . 两个单形  $\sigma \in \mathbf{R}^m, \delta \in \mathbf{R}^n$  的直积  $\sigma \times \delta \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$  的三角剖分可如下构造. 三角剖分的顶点是点  $c_{ij} = (a_i, b_j)$ ,  $0 \leq i \leq \dim \sigma, 0 \leq j \leq \dim \delta$ , 其中  $a_i$  是  $\sigma$  的顶点,  $b_j$  是  $\delta$  的顶点. 顶点  $c_{i_0 j_0}, \dots, c_{i_k j_k}$ , 其中  $i_0 \leq \dots \leq i_k$  张成  $k$  维单形, 当且仅当这些顶点没有一个是重合的以及  $j_0 \leq \dots \leq j_k$ . 两个具有有序顶点的单纯复形的直积的三角剖分可用同样的方法产生.

2) 拓扑空间的三角剖分 (triangulation of a topological space) 或曲线三角剖分 (curvilinear triangulation) 是一对  $(K, f)$ , 其中  $K$  是几何的单纯复形,  $f: |K| \rightarrow X$  是同胚. 空间  $X$  的两个三角剖分  $(K, f)$  和  $(L, g)$  相合, 如果  $g^{-1}f: |K| \rightarrow |L|$  是一个单纯同构. 如果  $\sigma$  是复形  $K$  的一个单形,  $(K, f)$  是  $X$  的一个三角剖分, 则赋于同胚  $f|_{\sigma}: \sigma \rightarrow f(\sigma)$  的空间  $f(\sigma)$  称为拓扑单形 (topological simplex). 一个三角剖分的拓扑空间的拓扑单形的星形和链环是用与在直线三角剖分的情形下同样的方法定义的. 如果点  $a \in X$  是  $X$  的三角剖分  $(K, f)$  和  $(L, g)$  的一个顶点, 那么, 在这些三角剖分中, 它的链环是同伦等价的.

#### 参考文献

- [1] Александров, П. С., Комбинаторная топология, М.-Л., 1947 (英译本: Aleksandrov, P. S., Combinatorial topology, Graylock, Rochester, 1956).
- [2] Рохлин, В. А., Фукс, Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977 (英译本: Fuks, D. B. and Rokhlin, V. A., Beginner's course in topology, Geometric chapters, Springer, 1981).

С. В. Матвеев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Zeeman, E. C., Seminar on combinatorial topology, IHES, 1963.
- [A2] Seifert, H. and Threlfall, W., Lehrbuch der Topologie, Chelsea, reprint, 1970.
- [A3] Singer, I. M. and Thorpe, J. A., Lecture notes on elementary topology and geometry, Springer, 1967.
- [A4] Glaser, L. C., Geometric combinatorial topology, 1-2, V. Nostrand, 1970.

徐森林 译

#### Tricomi 方程 [Tricomi equation; Трикоми уравнение]

形如

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0$$

的微分方程, 它是具有两个自变量和一个抛物退化的非特征开区间的二阶椭圆-双曲混合型偏微分方程的简单模型. Tricomi 方程对  $y > 0$  是椭圆的, 对  $y < 0$  是双曲的, 且在  $y = 0$  线上退化为抛物型方程 (见 [1]). Tricomi 方程是 Chaplygin 方程 (Chaplygin equa-



tion)

$$k(y)u_{xx} + u_{yy} = 0$$

的原型, 其中  $u = u(x, y)$  是平面平行定态气流的流函数,  $k(y)$  和  $y$  是流速的函数, 它们在亚音速时为正, 在超音速时为负,  $x$  是速度向量的倾角 (见 [2], [3]).

连续介质力学中许多重要问题都可化为 Tricomi 方程的边值问题, 特别是带有形成局部亚音速区的混合流动 (见 [3], [4]).

#### 参考文献

- [1] Tricomi, F., Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto, Mem. Lincei, 1923, ser. VIX fasc. VII, 134 - 247 (中译本: F. 特里谷米, 论二阶混合型线性偏微分方程, 科学出版社, 1957).
- [2] Чаплыгин, С. А., О газовых струях, М.-Л., 1949.
- [3] Франкль, Ф. И., Избр. труды по газовой динамике, М., 1973.
- [4] Бицадзе, А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981 (英译本: Bitsadze, A. V., Some classes of partial differential equations, Gordon & Breach, 1988). A. M. Нахушев 撰
- 【补注】其他参考文献亦见 Tricomi 问题 (Tricomi problem) 和混合型微分方程 (mixed-type differential equation).

#### 参考文献

- [A1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特著, 数学物理方法 II, 科学出版社, 1977).

孙和生 译 陆柱家 校

#### Tricomi 问题 [Tricomi problem; Трикоми задача]

有关两个自变量的椭圆—双曲混合型微分方程在特殊形状的开域  $\Omega$  中的解的存在性问题. 区域  $\Omega$  可以被一光滑的简单曲线  $AB$  分解为两个子域  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  的并, 曲线  $AB$  的端点  $A$  和  $B$  是  $\partial\Omega$  上不同的点. 方程在  $\Omega_1$  中是椭圆型的, 在  $\Omega_2$  中是双曲型的, 且在曲线  $AB$  上退化为抛物型. 边界  $\partial\Omega_1$  是曲线  $AB$  和一光滑简单曲线  $\sigma$  的并, 而边界  $\partial\Omega_2$  则是特征线  $AC$ ,  $BC$  和曲线  $AB$  的并. 要求的解必须在  $\sigma$  上和只在特征线  $AC$  和  $BC$  之一上取给定值 (见混合型微分方程 (mixed-type differential equation)).

#### Tricomi 方程 (Tricomi equation)

$$Tu \equiv yu_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1)$$

的 Tricomi 问题是由 F. Tricomi ([1], [2]) 首先提出并研究的. 区域  $\Omega$  由具有端点  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$  的

光滑曲线  $\sigma \subset \{(x, y): y > 0\}$  和特征线  $AC$ ,  $BC$ :

$$AC: x = \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad BC: 1 - x = \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$$

所围.

在关于已给函数的光滑性和解  $u$  的导数  $u_y$  在点  $A$  及点  $B$  处的指定的限制下, 方程 (1) 的 Tricomi 问题

$$u|_{\sigma} = \varphi, \quad u|_{AC} = \psi \quad (2)$$

可化为求方程 (1) 的解  $u = u(x, y)$ , 它在区域  $\Omega^+ = \Omega \cap \{(x, y): y > 0\}$  中是正则的, 且满足边界条件

$$u|_{\sigma} = \varphi, \quad (3)$$

$$u_y(x, 0) = \alpha D_{0x}^{2/3} u(x, 0) + \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

其中  $\alpha = \text{常数} > 0$ ,  $\psi_1(x)$  由  $\psi$  唯一确定,  $D_{0x}^{2/3}$  是 (在 Riemann-Liouville 意义下的)  $2/3$  阶分数阶微分算子 (fractional differentiation operator):

$$D_{0x}^{2/3} \tau(x) = \frac{1}{\Gamma(1/3)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau(t) dt}{(x-t)^{2/3}},$$

$\Gamma(z)$  是 Euler  $\Gamma$  函数 (gamma-function).

解问题 (1), (3) 化为从某个奇异积分方程 (singular integral equation) 求函数  $v(x) = u_y(x, 0)$ . 在  $\sigma$  是曲线

$$\sigma_0 = \{(x, y): (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{4}{9}y^3 = \frac{1}{4}, y \geq 0\}$$

的情形下, 这个奇异积分方程具有形式

$$v(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x-2xt}\right) v(t) dt = f(x),$$

其中  $f(x)$  是用  $\varphi$  和  $\psi$  明显地表达的, 且积分是理解为在 Cauchy 主值意义下的 (见 [1] - [4]).

在 Tricomi 问题解的唯一性和存在性的证明中, 除了 Бицадзе 极值原理 (见混合型微分方程 (mixed-type differential equation)) 和积分方程方法外, 还使用了所谓的  $abc$  方法 ( $abc$  method), 它的本质是对一个具有定义域  $D(L)$  的已给的二阶微分算子  $L$  (例如,  $T$ ) 去构造一个一阶微分算子

$$l = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

它使得

$$\int_{\Omega} l u \cdot L u dx dy \geq C \|u\|^2, \quad \text{对所有 } u \in D(L),$$

其中  $C = \text{常数} > 0$ ,  $\|\cdot\|$  是某个范 (见 [5]).

Tricomi 问题已被同时推广到具有抛物退化曲线的混合型微分方程情形 (见 [6]) 和双曲 - 抛物混合型方程情形 (见 [7]).

#### 参考文献

- [1] Tricomi, F., Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto, *Mem. Lincei*, 1923, ser. VIX fasc. VII, 134 - 247 (中译本: F. 特里谷米, 论二阶混合型线性偏微分方程, 科学出版社, 1957).
- [2] Tricomi, F., Equazioni a derivate parziale, Cremonese, 1957.
- [3] Бицадзе, А. В., К проблеме уравнений смешанного типа, М., 1953 (中译本: А. В. 比察捷, 混合型微分方程, 科学出版社, 1955).
- [4] Бицадзе, А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959 (英译本: Bitsadze, A. V., Equations of the mixed type, Pergamon, 1964).
- [5] Bers, L., Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, Wiley, 1958.
- [6] Нахушев, А. М., «Докл. АН СССР», 170 (1966), 38 - 40.
- [7] Джураев, Т. Д., Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов, Ташкент, 1979.

А. М. Нахушев 撰

【补注】 S. Agmon ([A5]) 利用泛函分析方法研究了更一般的方程. R. J. P. Groothuizen ([A2]) 利用了 Fourier 积分算子.

其他的参考文献亦见混合型微分方程 (mixed-type differential equation).

#### 参考文献

- [A1] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1964.
- [A2] Groothuizen, R. J. P., Mixed elliptic hyperbolic partial differential operators: a case study in Fourier integral operators, Free University Amsterdam, 1985, Thesis.
- [A3] Smirnov, M. M., Equations of mixed type, Amer. Math. Soc., 1978 (译自俄文).
- [A4] Gramtcheff, T. V., An application of Airy functions to the Tricomi problem, *Math. Nachr.*, 102 (1981), 169 - 181.
- [A5] Agmon, S., Boundary value problems for equations of mixed type, in G. Sansone (ed.): *Convegno Internaz. Equazioni Lineari alle Derivate Parziali* (Trieste, 1954), Cremonese, 1955, 65 - 68.

孙和生 译 陆柱家 校

可三角化元 [trigonalizable element; треугольный элемент], 三角形元 (triangular element)

1) 域  $k$  上有限维向量空间  $V$  的自同态代数  $\text{End } V$  的一个可三角化元, 是其一切本征值都属于  $k$  的元素

$X \in \text{End } V$ . 如果  $k$  是代数闭的, 则  $\text{End } V$  的每一个元素都是可三角化的. 对于一个可三角化元  $X$  (并且只对于这样的元素) 来说, 在  $V$  中存在一个基, 自同态  $X$  关于这个基的矩阵是三角形的 (或者, 同样的说法是, 在  $V$  中存在一个对  $X$  不变的完全旗). 一个可三角化元在  $k$  上有一个 **Jordan 分解** (Jordan decomposition).  $\text{End } V$  中可三角化元的概念在  $V$  是无限维的情形下有若干推广 (见 [2]).

2) 域  $k$  上有限维代数  $A$  的一个可三角化元  $a \in A$  是这样—个元素, 用  $a$  右乘 (或左乘, 视所考虑的情形而定) 算子是代数  $\text{End}_k A$  内一个可三角化元. 如果  $A$  同构于域  $k$  上某—有限维向量空间  $V$  上自同态代数  $\text{End } V$ , 则这两个 (形式上是不同的) 定义归结为同一概念.

在 Lie 代数里, 一个元素  $x \in A$  可三角化, 意味着自同态  $\text{ad}_x$  可三角化 (这里  $\text{ad}_x(y) = [x, y]$ ). 一般来说, 一个 Lie 代数里所有可三角化元的集合对于加法和换位运算不是封闭的 (例如, 对于迹为 0 的 2 阶实矩阵所构成的单 Lie 代数  $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{R})$ ). 然而, 在一个可解 Lie 代数  $A$  的情形下, 这个集合甚至还是  $A$  的一个特征理想.

3) 在一个连通有限维 Lie 群  $G$  内, 一个可三角化元  $g \in G$  指的是,  $\text{Ad}_g$  是  $\text{End } \mathfrak{g}$  内的可三角化元 (这里  $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$  是 Lie 群  $G$  在它的 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  的自同构群  $\text{Aut } \mathfrak{g} \subset \text{End } \mathfrak{g}$  内的伴随表示). 如果  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  是指数映射而  $X \in \mathfrak{g}$  是一个可三角化元 (在 2) 的意义下), 则  $\exp(X)$  是  $G$  的一个可三角化元. 反过来一般不成立.

Lie 代数和 Lie 群, 如果其中所有元素都是可三角化的, 就分别称为可三角化代数和可三角化群. 对于超可解 Lie 代数也有相应的概念 (见超可解 Lie 代数 (Lie algebra, supersolvable); 超可解 Lie 群 (Lie group, supersolvable)).

#### 参考文献

- [1] Borel, A., Linear algebraic groups, Second enlarged ed., Springer, 1991.
- [2] Плоткин, Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966 (英译本: Plotkin, B. I., Groups of automorphisms of algebraic systems, Wolters-Noordhoff, 1972).
- [3] Постников, М. М., Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, М., 1979.

В. В. Горбачевич 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975 (译自法文).
- 郝钢新 译



三角函数 [trigonometric functions; тригонометрические функции]

一类初等函数, 包括正弦、余弦、正切、余切、正割、余割; 它们分别记为:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  (或  $\operatorname{tg} x$ ),  $\cot x$  (或  $\operatorname{ctg} x$ ),  $\sec x$ ,  $\csc x$  (或  $\operatorname{cosec} x$ ).

**实变量的三角函数.** 设  $\alpha$  是一个实数, 而  $A = (x_\alpha, y_\alpha)$  是单位圆  $x^2 + y^2 = 1$  上起点为  $B = (1, 0)$ 、长度为  $|\alpha|$  的弧的终点 (见图 1). 如果  $\alpha \geq 0$ , 则从  $B$  到  $A$  的弧  $\widehat{BA}$  取反时针方向; 如果  $\alpha < 0$ , 则  $\widehat{BA}$  取顺时针方向; 如果  $\alpha = 0$ , 则  $A = B$ . 例如, 如果  $\alpha = (-7\pi)/2$ , 则  $A = (0, 1)$ .

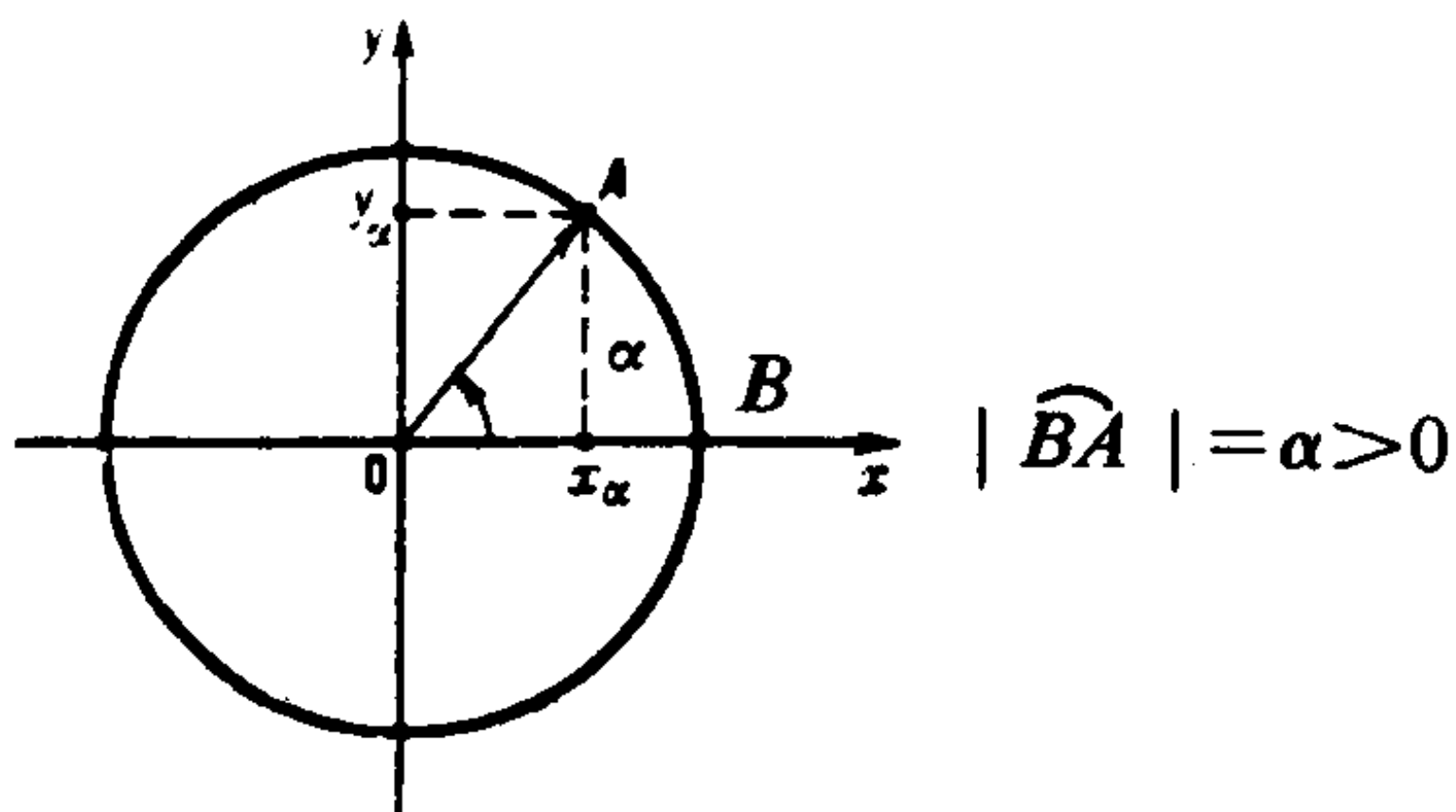


图 1

基本三角函数正弦和余弦在  $\alpha$  处由公式

$$\sin \alpha = y_\alpha, \cos \alpha = x_\alpha$$

来定义. 其余的三角函数可以由公式

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

来定义.

所有的三角函数都是周期的. 三角函数的图形如图 2 所示.

三角函数的主要性质: 定义域、值域、奇偶性、单调区间, 在下表中给出.

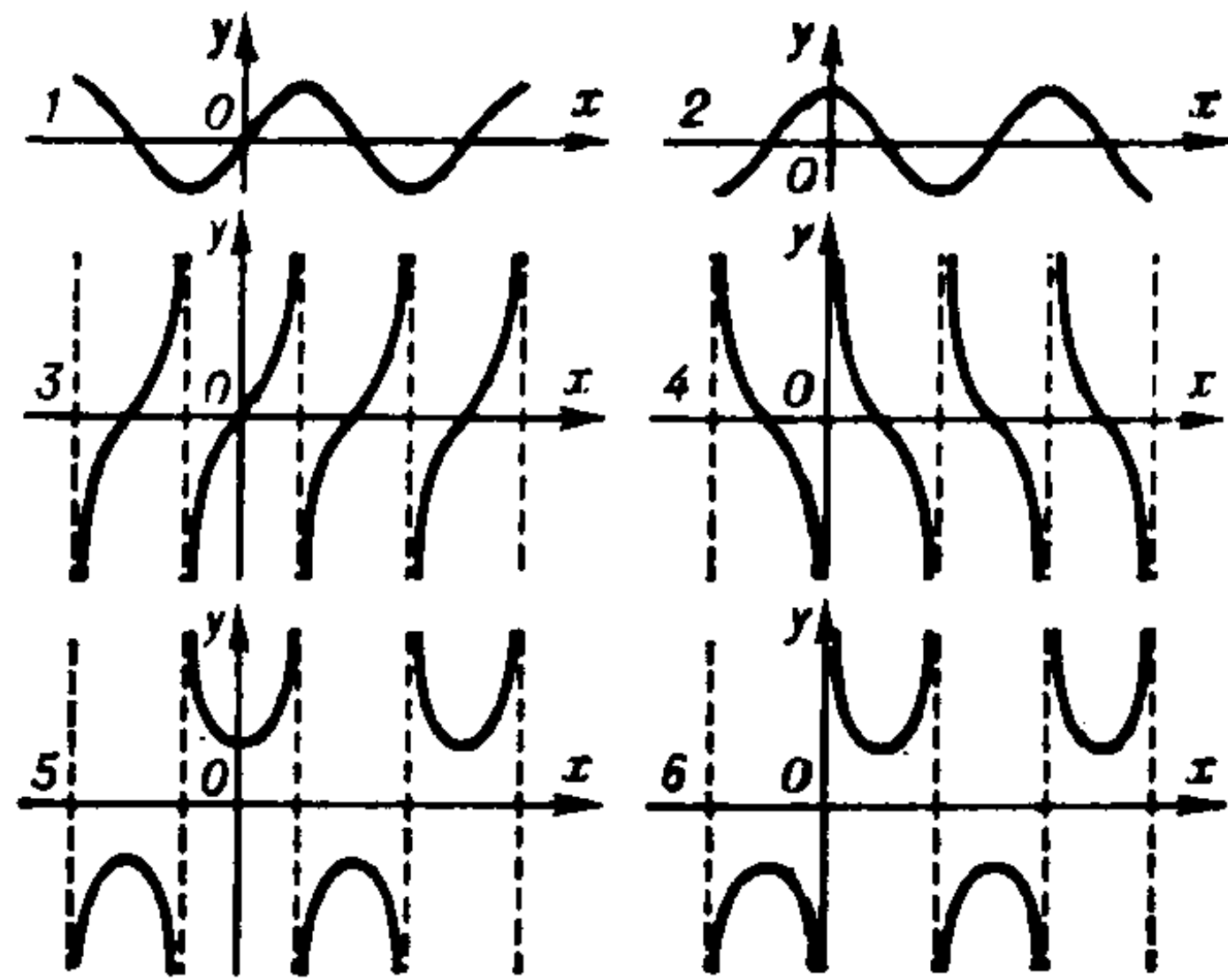


图 2

每个三角函数在其定义域的每一点上都是连续的、无限可微的; 三角函数的导数是

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x, (\cos x)' = -\sin x, \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

三角函数的积分是

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C,$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C.$$

所有的三角函数都具有幂级数展开式:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \\ &+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, |x| < \infty; \end{aligned}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots +$$

函 数	定 义 域	值 域	奇 偶 性	单 调 区 间
$\sin x$	$-\infty < x < +\infty$	$[-1, +1]$	奇	当 $x \in ((4n-1)\pi/2, (4n+1)\pi/2)$ 时增加 当 $x \in ((4n+1)\pi/2, (4n+3)\pi/2)$ 时减小
$\cos x$	$-\infty < x < +\infty$	$[-1, +1]$	偶	当 $x \in ((2n-1)\pi, 2n\pi)$ 时增加 当 $x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$ 时减小
$\tan x$	$x \neq \pi/2 + n\pi$	$(-\infty, +\infty)$	奇	当 $x \in ((2n-1)\pi/2, (2n+1)\pi/2)$ 时增加
$\cot x$	$x \neq n\pi$	$(-\infty, +\infty)$	奇	当 $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$ 时减小
$\sec x$	$x \neq \pi/2 + n\pi$	$(-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$	偶	当 $x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$ 时增加 当 $x \in ((2n-1)\pi, 2n\pi)$ 时减少
$\csc x$	$x \neq n\pi$	$(-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$	奇	当 $x \in ((4n+1)\pi/2, (4n+3)\pi/2)$ 时增加 当 $x \in ((4n-1)\pi/2, (4n+1)\pi/2)$ 时减小

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, |x| < \infty;$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{7}{315} x^7 + \dots$$

$$+ \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_n|}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots, |x| < \pi/2;$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \left[ \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \dots + \frac{x^7}{4725} + \dots + \frac{2^{2n}|B_n|}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots \right],$$

$0 < |x| < \pi$  ( $B_n$  是 **Bernoulli 数** (Bernoulli numbers)).

函数  $x = \sin y$  的反函数  $y$  定义为一个  $x$  的多值函数, 记为  $y = \arcsin x$ . 其他三角函数的反函数也类似地定义; 它们都称为**反三角函数** (inverse trigonometric functions).

**复变量的三角函数.** 复变量  $z = x + iy$  的三角函数定义为相应的实变量的三角函数在复平面上的解析延拓 (analytic continuation).

例如,  $\sin z$  和  $\cos z$  可以借助于上面给出的  $\sin x$  和  $\cos x$  的幂级数来定义. 这些级数在整个复平面上收敛, 因此  $\sin z$  和  $\cos z$  是**整函数** (entire function).

三角函数正切和余切由下列公式来定义:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

三角函数  $\tan z$  和  $\cot z$  是**亚纯函数** (meromorphic function).  $\tan z$  的极点都是 (一阶) 单极点, 并且处于点  $z = \pi/2 + n\pi, n = 0, \pm 1, \dots$ .

关于实变量的三角函数的一切公式, 对于复变量三角函数仍然成立.

与实变量的三角函数不同, 函数  $\sin z$  和  $\cos z$  取一切复数值: 对于任何复数  $a$ , 方程  $\sin z = a$  和  $\cos z = a$  都有无穷多个解:

$$z = \arcsin a = -i \ln(ia \pm \sqrt{1-a^2}),$$

$$z = \arccos a = -i \ln(a \pm \sqrt{a^2-1}).$$

三角函数  $\tan z$  和  $\cot z$  取除  $\pm i$  以外一切复数值: 对于任何复数  $a \neq \pm i$ , 方程  $\tan z = a$  和  $\cot z = a$  都有无穷多个解:

$$z = \arctan a = \frac{i}{2} \ln \frac{1-ia}{1+ia},$$

$$z = \operatorname{arccot} a = \frac{i}{2} \ln \frac{ia+1}{ia-1}.$$

三角函数可以通过**指数函数** (exponential function) 来表示:

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}),$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \tan z = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}},$$

和通过**双曲函数** (hyperbolic functions) 来表示:

$$\sin z = -i \sinh iz, \cos z = \cosh iz, \tan z = -i \tanh iz.$$

В. Н. Битюцков 撰

【补注】 三角函数也称为**圆函数** (circular functions).

$\sin z$  和  $\cos z$  的 (不依赖于图形的) 形式定义可由幂级数给出如下. 首先, 不难证明, 由上述  $\sin x$  和  $\cos x$  的直观定义可以得出

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

这可取作  $\arcsin x$  的形式定义, 而  $\arcsin x$  的反函数可以取作  $\sin x$  的形式定义.

如果  $z$  是复数  $x + iy$ , 其中  $x$  和  $y$  是实数, 则可定义  $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ , 然后对于复数  $z$ , 定义

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

#### 参考文献

- [A1] Apostol, T. M., Calculus, I, Blaisdell, 1967.
- [A2] Churchill, R. V., Brown, J. W. and Verhey, A. R. F., Complex variables and applications, McGraw-Hill, 1974.
- [A3] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (eds.), Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1972.

杜小杨 张鸿林 译

#### 三角插值 [trigonometric interpolation; тригонометрическое интерполирование]

用形式

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

的**三角多项式** (trigonometric polynomial) 近似表示函数  $f$ , 并要求在预先指定的一些点上, 它的值与函数  $f$  的值相同. 事实上, 总能选取  $n$  阶三角多项式  $T$  的  $2n+1$  个系数  $A, a_k, b_k (k=1, \dots, n)$ , 使得它在事先给定的区间  $[0, 2\pi)$  中的  $2n+1$  个点  $x_k$  上的值等于函数值  $y_k$ . 此时, 三角多项式  $T(x)$  的形式为

$$T(x) = \sum_{k=0}^{2n} y_k t_k(x), \quad (*)$$

其中,

$$t_k(x) = \frac{\Delta(x)}{\Delta'(x_k) 2 \sin(x - x_k)/2},$$

$$\Delta(x) = \prod_{k=0}^{2n} 2 \sin \frac{x - x_k}{2}.$$

在等距节点  $x_k = 2k\pi/(2n+1)$  的情形, 多项式的



形式将特别简单, 它的系数由下面的公式给出:

$$A = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} y_k,$$

$$a_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} y_k \cos m x_k,$$

$$b_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} y_k \sin m x_k, \quad 1 \leq m \leq n.$$

В. И. Битюцков 撰

【补注】上面给出的在节点  $x_k$  处取预先给定的值  $y_k$  的三角多项式的公式 (\*), 称为 Gauss 三角插值公式 (Gauss formula of trigonometric interpolation) ([A2]).

参考文献

[A1] Zygmund, A., Trigonometric series, 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

[A2] Davis, Ph. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975, p. 29, 38. 朱学贤 译

三角多项式 [trigonometric polynomial; тригонометрический полином], 有限三角和 (finite trigonometric sum)

形式为

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

的表示式, 具有实系数  $a_0, a_k, b_k, k=1, \dots, n$ ; 数  $n$  称为三角多项式的阶 (order of the trigonometric polynomial) (如果  $|a_n| + |b_n| > 0$ ). 三角多项式能写成复数形式:

$$T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

其中

$$2c_k = \begin{cases} a_k - ib_k, & k \geq 0 \ (b_0 = 0), \\ a_{-k} + ib_{-k}, & k < 0. \end{cases}$$

三角多项式是函数逼近 (approximation of functions) 的一种重要工具.

В. И. Битюцков 撰

【补注】亦见三角级数 (trigonometric series).

杜小杨 译

三角级数 [trigonometric series; тригонометрический ряд]

由倍角的正弦和余弦构成的级数, 即形式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

的级数, 或者写成复数形式, 即级数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

其中的  $a_k, b_k$  及相应的  $c_k$  称为三角级数的系数 (coe-

fficients of the trigonometric series).

三角级数首先出现在 L. Euler (1744) 的工作中. 他得到了下列展开式:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$$

$$(0 < x < 2\pi),$$

$$\frac{1 - r \cos x}{1 - 2r \cos x + r^2} = 1 + r \cos x + r^2 \cos 2x + \dots,$$

$$\frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} = r \sin x + r^2 \sin 2x + \dots.$$

18 世纪中叶, 与弦的自由振动问题的研究有关, 出现了这样一个问题: 是否可以将刻画弦的初始位置的函数“表示”成三角级数的和的形式? 这一问题在当时的一些最优秀的分析学者, 例如 D. Bernoulli, J. d'Alembert, J. L. Lagrange 和 Euler 之间引发了一场激烈的争论并持续了数十年. 他们的争论涉及到函数概念的本质. 在那个时代, 函数通常是与它们的解析表达式联系在一起的, 因而导致了只考虑解析的或分段解析的函数. 但这里出现的要求是构造一个三角级数, 用以“表示”一个函数, 而这个函数的图象可能是一条相当随意的曲线.

但是, 这场争论的意义极为重大. 事实上, 由于这些讨论, 引出了许多主要是与数学分析最重要的概念和思想有关的问题. 例如, 用 Taylor 级数 (Taylor series) “表示”函数, 函数的解析延拓 (analytic continuation), 发散级数 (divergent series) 的应用, 交换极限次序, 无穷方程组, 用多项式插值函数, 等等.

随后, 如同在这初始时期一样, 三角级数理论成了数学分析新思想的源泉并影响了它的其他分支的发展. 在 Riemann 积分和 Lebesgue 积分的建立过程中, 三角级数的研究起了重要的作用. 实变函数论的诞生及其以后的发展都与三角级数理论紧密相关. 作为三角级数理论的推广, 出现了 Fourier 积分、殆周期函数、一般正交级数以及抽象调和分析. 对于三角级数的深入研究成为集合论创立的一个出发点. 三角级数是表示函数和研究函数的一个强有力的工具.

在 18 世纪引发数学家们争论的问题是由 J. Fourier 于 1807 年解决的, 他给出了计算应该用以“表示”  $(0, 2\pi)$  上的函数  $f$  的三角级数 (1) 中的系数的公式:

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

并将它们应用于解热传导问题. 虽然在更为早些的时

候, A. Clairaut (1754) 和 Euler (1777) 利用逐项积分已经得到了公式 (2), 但它仍被称为 Fourier 公式 (Fourier formulas). 系数由 (2) 定义的三角级数 (1) 称为函数  $f$  的 Fourier 级数 (Fourier series), 数  $a_k, b_k$  称为  $f$  的 Fourier 系数 (Fourier coefficients).

所得结果的性质依赖于如何理解用一个级数“表示”函数以及如何理解 (2) 中的积分. 三角级数理论的现代形式是在 Lebesgue 积分 (Lebesgue integral) 出现之后建立起来的.

三角级数理论可以按条件分成两个主要分支: Fourier 级数 (Fourier series) 理论和一般三角级数理论, 前者假定级数 (1) 是某个函数的 Fourier 级数, 而后者没有这个假定. 下面给出一般 Fourier 级数理论中的一些主要结果 (其中, 集合的测度以及函数的可测性都是 Lebesgue 意义下的).

B. Riemann (1853) 的论文是对三角级数的第一次系统研究, 而且其中没有假定这些级数是 Fourier 级数. 因此, 一般三角级数理论有时也称为 Riemann 三角级数理论 (Riemann theory of trigonometric series).

为了研究系数趋于零的任意三角级数 (1) 的性质, Riemann 考虑了连续函数  $F$ , 它是一致收敛的三角级数

$$\frac{a_0}{4} x^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k^2}$$

的和函数, 而这一级数是由对级数 (1) 作两次逐项积分后得到的. 如果级数 (1) 在某点  $x$  处收敛到  $s$ , 则  $F$  在该点的对称导数 (symmetric derivative) 存在且等于  $s$ , 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h)}{4h^2} = s.$$

因为

$$\begin{aligned} & \frac{F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h)}{4h^2} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\sin kh}{kh} \right)^2 (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \end{aligned}$$

所以这就导得了由因子  $(\sin kh/kh)^2$  产生的级数 (1) 的和, 称为 Riemann 求和法 (Riemann summation method). 利用函数  $F$ , Riemann 提出了局部化原理 (localization principle), 根据这一原理, 级数 (1) 在  $x$  点的性质仅与函数  $F$  在该点的一个任意小的邻域内的性质有关.

如果三角级数在一个正测度集上收敛, 则它的系数收敛到零 (Cantor-Lebesgue 定理 (Cantor-Lebesgue theorem)). 也可从三角级数在一个第二范畴集上收敛推出它的系数收敛到零 (W. Young, 1909).

一般三角级数理论的核心问题之一是用三角级数“表示”一个任意函数. 对 Н. Н. Лузин (1915) 的关于函数用按 Abel-Poisson 求和法和 Riemann 求和法都几乎处处可和的三角级数表示的结果进行强化, 对于  $f$  的表示理解为三角级数几乎处处收敛到  $f$  这一最重要的情形, Д. Е. Меньшов (1940) 证明了下面的定理: 对于任意几乎处处有限的以  $2\pi$  为周期的可测函数  $f$ , 都存在一个几乎处处收敛到它的三角级数 (Меньшов 定理 (Men'shov theorem)). 应该注意到, 即使函数  $f$  是可积的, 一般说来也不能选择  $f$  的 Fourier 级数作为此级数, 因为存在几乎处处发散的 Fourier 级数.

Меньшов 定理能改进如下: 如果以  $2\pi$  为周期的函数  $f$  可测且几乎处处有限, 则存在连续函数  $\varphi$  使得  $\varphi' = f$  几乎处处成立, 而且逐项求导  $\varphi$  的 Fourier 级数后所得的级数几乎处处收敛到  $f$  (Н. К. Бари, 1952).

直至 1984 年, 仍不知道是否可以将 Меньшов 定理中  $f$  几乎处处有限这一条件去掉, 特别地, 仍不知道是否存在几乎处处发散到  $+\infty$  的三角级数.

因此, 关于在正测度集上取无穷值的函数的表示问题, 是对于这样一种情形进行研究的: 几乎处处收敛被更弱的条件即依测度收敛代替. 依测度收敛于能取无穷值的函数的定义如下: 三角级数的部分和序列  $s_n$  依测度收敛于函数  $f$ , 如果

$$s_n(x) = f_n(x) + \alpha_n(x),$$

其中,  $f_n$  几乎处处收敛到  $f$  而序列  $\alpha_n$  依测度收敛到零. 在这种提法下, 函数用三角级数表示的问题被彻底地解决了: 对于任意以  $2\pi$  为周期的可测函数, 存在一个依测度收敛到它的三角级数 (Меньшов, 1948).

有许多研究是讨论三角级数的唯一性问题的: 两个不同的三角级数有否可能收敛到同一个函数? 或者换一种提法: 如果一个三角级数收敛到零, 是否可以推出它的所有系数都是零? 这里指的可以是在所有的点或除了某个集合以外的所有点上收敛. 设级数在某个集合的外部收敛, 则上述问题的回答本质上依赖这个集合的性质.

以下术语已经建立. 集合  $E \subset [0, 2\pi]$  称为唯一性集 (uniqueness set, 或 set of uniqueness) 或  $U$  集 ( $U$ -set), 如果一个三角级数在  $[0, 2\pi]$  的也许除了  $E$  以外的每个点上都收敛到零, 则它的系数全为零. 不是  $U$  集的集合称为多重性集 (set of multiplicity) 或  $M$  集 ( $M$ -set). G. Cantor (1872) 证明: 空集和有限集是  $U$  集. 任意可数集也是  $U$  集 (Young, 1909). 但是, 每一个正测度集都是  $M$  集.

存在零测度的  $M$  集, 这是由 Меньшов (1916) 建立的, 他构造了第一个具有这种性质的完满集 (per-



fect set). 这是唯一性问题中最重要的结果. 由零测度  $M$  集的存在性推出: 如果函数用几乎处处收敛的三角级数表示, 则这些级数当然不是唯一确定的.

完满集也可以是  $U$  集 (H. K. Бари; A. Rajchman, 1921). 在唯一性问题中, 非常准确地刻画零测度集的特征是十分重要的. 区分零测度集是  $U$  集还是  $M$  集的一般性的问题仍没有解决 (1984). 同样的问题甚至对完满集也没有解决.

下面的问题与唯一性问题有关. 如果一个三角级数收敛到函数  $f \in L(0, 2\pi)$ , 那么它是否一定是  $f$  的 Fourier 级数? 在  $f$  是 Riemann 可积而且级数在所有点上都收敛到  $f$  的情形, P. du Bois-Reymond (1877) 对于这一问题给出了正面的回答. 从 Ch. J. de la Vallée-Poussin (1912) 的结论可以推出: 如果级数除了一个可数点集外处处收敛到一个有限和, 则问题的回答也是肯定的.

如果三角级数在点  $x_0$  绝对收敛, 则它的收敛点以及它的绝对收敛点是关于  $x_0$  对称分布的 (P. Fatou, 1906).

根据 Denjoy-Лужин 定理 (Denjoy-Luzin theorem), 如果三角级数 (1) 在一个正测度集上绝对收敛, 则级数  $\sum_k (|a_k| + |b_k|)$  收敛, 因而 (1) 对所有  $x$  绝对收敛. 第二范畴的集合以及某些零测度集也具有这一性质.

以上只是概述了一维三角级数 (1) 的有关内容. 对于多元一般三角级数, 有许多不一样的结果. 但在许多场合中同样需要找到问题的最自然的提法.

#### 参考文献

- [1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).
- [2] Zygmund, A., Trigonometric series, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1988.
- [3] Лужин, Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.-Л., 1951.
- [4] Riemann, B., Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, in H. Weber (ed.), Mathematische Werke, Dover, reprint, 1953, 227-265.

С. А. Теляковский 撰

【补注】关于 Fourier 级数 (Fourier series) 的收敛性, 也见 Carleson 定理 (Carleson theorem).

上文中提到, 与 Меншов定理 (Men'shov theorem) 有关的一些问题直至 1984 年还未解决, 但现在已经解决了. 在 [A1] 中, С. В. Конягин 证明了下面这一非常漂亮的定理中的必要性部分 (充分性部分已由 Д. Е. Меншов 证明 (见 [A2] 或 [1] 的第 II 卷第 437 页)).

Меншов-Конягин 定理 (Men'shov-Konyagin

theorem). 设  $F$  和  $g$  是  $[-\pi, \pi] \rightarrow [-\infty, +\infty]$  的可测函数. 存在三角级数 (1) ( $S_n$  是其部分和) 使得

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad F(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

对几乎处处  $x \in [-\pi, \pi]$  成立的充分必要条件是: 存在可测集  $E \subset [-\pi, \pi]$ , 对于几乎处处  $x \in E$  有  $-\infty < g(x) \leq F(x) < \infty$ , 同时对于几乎处处  $x \in [-\pi, \pi] \setminus E$  有  $g(x) = -\infty$  和  $F(x) = +\infty$ .

特别地, 不存在一个三角级数在一个正测度集的每一点上都发散到  $+\infty$ .

#### 参考文献

- [A1] Konyagin, S. V., Limits of indeterminacy of trigonometric series, Math. Notes, 44 (1988), 910-920. (Mat. Zametki, 44 (1988), 770-784).
- [A2] Men'shov, D. E., On limits of indeterminacy of Fourier series, Mat. Sb. 30 (1952), 601-650 (俄文).

朱学贤 译 程民德 校

三角和 [trigonometric sum; тригонометрическая сумма]

形如

$$S = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i F(x)}$$

的有限和  $S$ , 其中  $P \geq 1$  为整数,  $F$  为  $x$  的实值函数. 下形之更一般的和  $\tilde{S}$  也称为三角和:

$$\tilde{S} = \sum_{x_1=1}^{P_1} \cdots \sum_{x_r=1}^{P_r} \Phi(x_1, \dots, x_r) e^{2\pi i F(x_1, \dots, x_r)},$$

其中  $F$  为一实值函数, 而  $\Phi$  为任意复值函数.

若  $F$  为一多项式, 则  $S$  称为 Weyl 和 (Weyl sum); 若多项式  $F$  有有理系数,

$$F(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x}{q}, \quad (a_n, \dots, a_1, q) = 1,$$

则  $S$  称为有理三角和 (rational trigonometric sum);

若  $P = q$ , 则  $\tilde{S}$  称为完全三角和 (complete trigonometric sum); 若  $r = 1$  且当  $x_1$  为素数时有  $\Phi(x_1) = 1$ , 而当  $x_1$  为合数时有  $\Phi(x_1) = 0$ , 那么  $\tilde{S}$  就称为过素数的三角和 (trigonometric sum over prime numbers); 若  $r \geq 1$ ,  $\Phi \equiv 1$  且  $F$  为多项式, 则  $\tilde{S}$  称为多重 Weyl 和 (multiple Weyl sum). 三角和理论中的一个基本问题是求  $S$  与  $\tilde{S}$  的模之上界.

#### 参考文献

- [1] Виноградов, И. М., Избранные труды, М., 1952 (英译本: Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985).
- [2] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (中译本: 伊·马·维诺格拉多夫, 数论中的三角和方法, 数学进展, 1 (1955), 3-106).

- [3] Виноградов, И. М., Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976.
- [4] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, Teubner, 1959. Heft 13, Teil 1 (中译本: 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963).
- [5] Titchmarsh, E. C., The theory of the Riemann zeta-function, 2nd edition (revised by D. R. Heath-Brown), Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [6] Архипов, Г. И., Карацуба, А. А., Чубариков, В. Н., Кратные тригонометрические суммы, М., 1980 (英译本: Archipov, G. I., Karatsuba, A. A. and Chubarikov, V. N., Multiple trigonometric sums, Amer. Math. Soc., 1982).

A. A. Карацуба 撰

【补注】“三角和”也称为“指数和”(exponential sum). 二次完整指数和

$$S(q) = \sum_{x=1}^q e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}}$$

称为 Gauss 和 (Gauss sum). Kloosterman 和 (Kloosterman sum) 是形如

$$K(u, v, q) = \sum_{\substack{x=1 \\ (x, q)=1}} \exp\left(\frac{2\pi i}{q} \left(ux + \frac{v}{x}\right)\right), \\ u, v \in \mathbb{Z}$$

的一种指数和. 对它有 Weil 估计 (Weil estimate)  $|K(u, v, p)| \leq 2\sqrt{p}$ .

除了在数论中 (亦见三角和法 (trigonometric sums, method of)), 指数和在其他领域 (如代数几何、模函数、求积公式及单值化) 中也起着重要的作用, 见 [A1], [A2] 及 [A3].

#### 参考文献

- [A1] Коробов, Н. М., Тригонометрические суммы и их приложения, Москва, Наука, 1989 (英译本: Korobov, N. M., Exponential sums and their applications, Kluwer, 1992).
- [A2] Katz, N. M., Sommes exponentielles, Soc. Math. de France, 1980.
- [A3] Katz, N. M., Gauss sums, Kloosterman sums, and monodromy groups, Princeton Univ. Press, 1988.

张明尧 译 戚鸣皋 校

三角和法 [trigonometric sums, method of; тригонометрических сумм метод]

解析数论 (analytic number theory) 中一种一般性的方法. 三角和方法的产生源于数论中的两大问题: 多项式的分数部分的分布问题 (见分数部分 (fractional part)) 和表正整数为指定形式的项之和的问题 (加性

数论问题, 见加性数论 (additive number theory)).

设  $f(x)$  为一实值函数,  $x = 1, \dots, P, P \rightarrow +\infty$ . 称  $f(x)$  的分数部分是一致分布的, 如果对任何  $\alpha$  与  $\beta$  ( $0 \leq \alpha < \beta < 1$ ),  $f(x)$  的分数部分在区间  $(\alpha, \beta)$  中出现的个数  $\sigma$  都与此区间之长度成比例, 即

$$\sigma = (\beta - \alpha)P + o(P).$$

现在令  $\psi(x)$  为区间  $(\alpha, \beta)$  之特征函数, 即

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \alpha < x < \beta, \\ 0, & \text{若 } 0 \leq x \leq \alpha, \beta \leq x \leq 1. \end{cases}$$

把  $\psi(x)$  周期延拓到整个实轴上, 即令  $\psi(x+1) = \psi(x)$ , 就得到

$$\sigma = \sum_{x=1}^P \psi(f(x)).$$

把  $\psi(x)$  展成 Fourier 级数 (Fourier series) 即得

$$\psi(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c(m) e^{2\pi i m x}, \quad c(0) = \beta - \alpha.$$

从而

$$\sigma = (\beta - \alpha)P + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} c(m) \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m f(x)}. \quad (1)$$

最后这个关系式一般不成立, 因为可能有  $x$  使  $\{f(x)\} = \alpha$  或  $\{f(x)\} = \beta$ ; 但是  $\alpha$  和  $\beta$  可用很接近的  $\alpha'$  与  $\beta'$  代替之, 对它们有:  $\{f(x)\} \neq \alpha'$  与  $\{f(x)\} \neq \beta'$  对一切  $x = 1, \dots, P$  成立; 这种替代实际上不改变公式的精确程度, 从而公式为真. 完全同样地可将函数  $\psi(x)$  “光滑化” (“矫正”), 以使  $\sigma$  的大小实际上不改变, 且其 Fourier 级数的系数  $c(m)$  随  $m$  增加而迅速减少, 即使得级数

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c(m)|$$

迅速收敛.

等式 (1) 中第二项的绝对值不超过  $\kappa$ , 其中

$$\kappa = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} |c(m)| \left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m f(x)} \right|.$$

如果已知

$$|S| = \left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m f(x)} \right| \leq P\Delta, \quad (2)$$

其中  $\Delta = \Delta(P) \rightarrow 0$  (当  $P \rightarrow +\infty$  时), 那么可对  $\sigma$  得到

$$\sigma = (\beta - \alpha)P + o(P), \quad o(P) = cP\Delta,$$

这就是说,  $f(x)$  的分数部分是一致分布的. 于是, 必须对三角和的模给出上界估计. 由于  $S$  中每一项的模为 1,  $|S|$  的一个平凡上界就是  $P$ , 此即和  $S$  中



的项数. 一个形如 (2) 的估计称为是非平凡的, 如果  $\Delta < 1$ , 此时的  $\Delta$  称为一个约化因子 (reducing factor).

在  $f(x)$  的分数部分这个问题中, 在必要时可把  $\psi(x)$  光滑化, 使得仅对  $m$  的“比较少”的值有估计式 (2) 成立, 比方说对区间  $0 < |m| < (\ln P)^A$  中的  $m$ , 这里  $A > 0$  是一个常数.

类似的方法适用于求和式

$$\sum_{x=1}^P \{f(x)\}$$

的渐近公式, 这种和式出现在平面及空间区域中整点个数的中.

在加性数论问题中, 三角和以下列方式出现.

对整数  $m$  成立下述公式:

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha m} d\alpha = \begin{cases} 1 & \text{若 } m = 0, \\ 0 & \text{若 } m \neq 0. \end{cases}$$

因此, 若  $I(N)$  表示方程

$$N = u_1 + \cdots + u_k, u_v \in U_v, v = 1, \cdots, k,$$

的解数, 其中  $U_v$  是某种自然数的集合, 那么

$$I(N) = \int_0^1 S_1(\alpha) \cdots S_k(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha,$$

其中  $S_v(\alpha) = \sum_{u_v \in U_v} e^{2\pi i \alpha u_v}, v = 1, \cdots, k$ .

特别地, 令  $U_v = U = \{1^n, 2^n, \cdots\}$  就得到 **Waring 问题** (Waring problem); 对  $k = 3$ , 令  $U_v = U = \{2, 3, 5, 7, 11, \cdots, p, \cdots\}$ , 就得到三元 **Goldbach 问题** (Goldbach problem) 等等. 如同在关于分数部分的分布问题中那样, 这里的主要问题是寻求  $S_v(\alpha)$  的模的上界, 此即  $|S_v(\alpha)|$  的上界问题.

因此, 数论中的各种问题都可以统一地用三角和的语言来表述.

第一个非平凡的三角和出现在 1811 年 C. F. Gauss 关于二次互反律 (quadratic reciprocity law) 的一个证明之中:

$$S = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i F(x)}, F(x) = \frac{ax^2}{P}.$$

Gauss 计算了  $S$  的精确值:

$$S = \begin{cases} (1+i)\sqrt{P}, & \text{若 } P \equiv 0 \pmod{4}; \\ \sqrt{P}, & \text{若 } P \equiv 1 \pmod{4}; \\ 0, & \text{若 } P \equiv 2 \pmod{4}; \\ i\sqrt{P}, & \text{若 } P \equiv 3 \pmod{4}; \end{cases}$$

20 世纪初出现了一系列应用三角和的相互独立的文章.

H. Weyl 研究了实系数  $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$  的多项式

$$f(x) = \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$$

的分数部分之分布, 并考虑了带有形如  $F(x) = mf(x)$  的函数  $F(x)$  的和  $S$ , 其中  $m$  为一非零整数. 1917 年 И. М. Виноградов 在研究平面及空间区域中的整点分布时, 考虑了带函数  $F(x)$  的和  $S$ , 对  $F(x)$  仅要求其二阶导数满足条件

$$\frac{c_1}{A} \leq F''(x) \leq \frac{c_2}{A},$$

其中  $c_1$  与  $c_2$  是正的绝对常数, 而  $A = A(P) \rightarrow +\infty$ . 1918 年 G. H. Hardy 与 J. E. Littlewood 在求得 Riemann  $\zeta$  函数的近似函数方程时, 研究了带有形如

$$F(x) = t \ln x$$

的函数  $F(x)$  的和  $S$ , 其中  $t$  是实参数,  $t = t(P)$ .

在所有这些论文中, 都需要求出和  $S$  的模的最好可能的界限.

用三角和方法研究数论中这些问题的一般方案如下. 把要研究的方程之解数, 或所研究的函数的分数部分落在给定区间中的个数, 或给定区域中之整点个数的精确表达式用三角和之积分, 或系数为三角和之级数表示出来. 这一精确表达式表成两项之和: 主项和次要项 (例如, 如果考虑的是一个区间的特征函数之 Fourier 级数, 那么主项即为 Fourier 级数中零系数所给出的项); 主项给出渐近公式的主要项, 而次要项则给出余项. 在诸如 Waring 问题、Goldbach 问题等这样的问题中, 主项是用与 Hardy-Littlewood-Ramanujan 的圆法很接近的方法来研究的 (此法称为 Виноградов 三角和形式下的圆法 (circle method)). 在大多数其他问题中 (分数部分之分布及区域中整点等), 主项均可平凡地求得. 这就提出了估计余项的问题. 如果能证明余项的大小比主项有较低的阶, 那么渐近公式就证明了.

估计余项的主要问题是有可能对三角和得到更精确的估计. 关于估计三角和的方法, 见三角和 (Trigonometric sum), 也见 Виноградов 法 (Vinogradov method); Waring 问题 (Waring problem); Goldbach 问题 (Goldbach problem) 及加性问题 (additive problem).

参考文献见三角和 (trigonometric sum).

А. А. Карацуба 撰 张明尧 译 戚鸣皋 校

**三角函数系** [trigonometric system; тригонометрическая система]

最重要的正交函数系之一 (见正交系 (orthogonal system)). 三角函数系中的函数

$$1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

在任何形如  $[a - \pi, a + \pi]$  的区间上是正交的, 而函

数

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

在这个区间上是规范正交的. 三角函数系在空间  $L_p[-\pi, \pi]$  ( $1 \leq p < \infty$ ) 中是完全的和闭的, 在周期为  $2\pi$  的连续周期函数的空间  $C_{2\pi}$  中也是连续的和闭的. 这一函数系构成空间  $L_p[-\pi, \pi]$  ( $1 < p < \infty$ ) 中的基 (basis). 在三角级数 (trigonometric series) 的理论中, 研究三角函数系构成的级数.

除三角函数系外, 复三角函数系  $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$  也有广泛应用. 这两个函数系中的函数由 Euler 公式 (Euler formulas) 彼此相联系.

#### 参考文献

- [1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K., A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).  
[2] Zygmund, A., Trigonometric series, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1988.

Б. И. Голубов 撰 杜小杨 译

#### 三角学 [trigonometry; тригонометрия]

几何学的一个分支, 其中用三角函数来描述三角形的元素之间的度量关系 (例如见余弦定理 (cosine theorem); 正弦定理 (sine theorem); 正切公式 (tangent formula)), 并且建立了三角函数之间的一些公式 (所谓的测角术 (goniometry)). 三角学既可在 Euclid 几何学中又可在非 Euclid 几何学 (non-Euclidean geometries) 中来考虑. Euclid 空间中球面上的三角学称为球面三角学 (spherical trigonometry).

А. Б. Иванов 撰

【补注】亦见平面三角学 (plane trigonometry).

杜小杨 译

#### 三重正交曲面系 [triorthogonal system of surfaces; три-ортогональная система поверхностей]

三维空间中的一个曲面集, 它可分裂成三个单参数族, 使得属于不同族的任意两个曲面在其交线的每一点处构成直角. 假定三重正交系的曲面是正则曲面, 在这种情况下, 三重正交系中的曲面相交于曲面的曲率线 (Dupin 定理 (Dupin theorem)).

三重正交曲面系是由空间的正交曲线坐标系中的坐标曲面系给出的. 因此, 在球面坐标系中, 一个三重正交曲面系构成如下: 以坐标原点为球心的一族球面, 第二族曲面是旋转锥面, 其顶点在原点, 其旋转轴被第三个坐标曲面族中的平面所通过. 每一个三重正交曲面系都与空间的某些正交曲线坐标系相联系着. 在正交坐标  $u, v, w$  中, 空间的线元具有下列形式:

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2,$$

这里  $H_i(u, v, w)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 是所谓的 Lamé 函数 (Lamé functions), 此时空间形式的 Riemann 张量恒为零. 一个三重正交曲面系由上述函数决定, 至多差一个平移 (或反射). 一个三重正交曲面系可以与任何正则曲面相联系, 而后者可以呈现为曲面系的组成部分. 如果在三重正交曲面系的组合中出现的一个单参数正则曲面族已经给定, 而且这个曲面族中至少有一个曲面既不是平面也不是球面, 那么包含此单参数正则曲面族的整个三重正交曲面族被完全确定.

Euclid 空间中的一个二次曲面的共焦曲面构成了一个三重正交曲面系; 在 Descartes 坐标系中此三重正交曲面系的方程为

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 1,$$

这里  $a, b, c$  是常数, 且  $0 < c < b < a$ ,  $\lambda$  是一个参数. 对  $\lambda < c$ , 此方程定义了一族椭圆面, 对  $c < \lambda < b$ , 定义了一族单叶双曲面, 对  $b < \lambda < a$ , 定义了一族双叶双曲面. 此曲面系的三种曲面 (单叶双曲面、双叶双曲面和椭圆面) 通过空间中的每一点. 球面变换是 Euclid 空间中三重正交曲面系的自同构.

#### 参考文献

- [1] Darboux, G., Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, Gauthier-Villars, 1910.  
[2] Каган, В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1-2, М.-Л., 1947-1948.

Л. А. Сидоров 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988 (译自法文).  
[A2] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952 (译自德文).

沈纯理 译

三元组 [triple; тройка], 单子 (monad), 范畴  $\mathfrak{R}$  上的

范畴  $\mathfrak{R}$  上全体自同态函子范畴 (category) 中的一个幺半群 (monoid). 换言之, 范畴  $\mathfrak{R}$  上的一个三元组是一个共变函子  $T: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ , 连同两个自然变换  $\eta: \text{Id}_{\mathfrak{R}} \rightarrow T$ , 以及  $\mu: T^2 \rightarrow T$  (此处  $\text{Id}_{\mathfrak{R}}$  记  $\mathfrak{R}$  上的恒等函子), 使得下面的图形交换:

$$\begin{array}{ccccc} T(X) & \xrightarrow{T(\eta_X)} & T^2(X) & \xleftarrow{\eta_{T(X)}} & T(X) \\ & \searrow I_{T(X)} & \downarrow \mu_X & & \swarrow I_{T(X)} \\ & & T(X) & & \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc}
 T^3(X) & \xrightarrow{T(\mu_X)} & T^2(X) \\
 \downarrow \mu_{T(X)} & & \downarrow \mu_X \\
 T^2(X) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X)
 \end{array}$$

一个三元组有时称为一个标准构造 (standard construction), 见 [2].

对于任意一对伴随函子  $F: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{Q}$ , 和  $G: \mathfrak{Q} \rightarrow \mathfrak{R}$  (见伴随函子 (adjoint functor)), 设它们带有伴随单位  $\eta: \text{Id}_{\mathfrak{R}} \rightarrow GF$ , 和余单位  $\varepsilon: FG \rightarrow \text{Id}_{\mathfrak{R}}$ , 函子  $T = GF: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ , 连同  $\eta: \text{Id}_{\mathfrak{R}} \rightarrow T$ , 和  $\mu = G(\varepsilon_F): T^2 \rightarrow T$  是  $\mathfrak{R}$  上的一个三元组. 反之, 给出任意一个三元组  $(T, \eta, \mu)$ , 必存在伴随函子  $F$  和  $G$  的对, 使得  $T = GF$ , 且变换  $\eta$  和  $\mu$  由上面刻画的伴随单位及余单位得到. 一个三元组的这种不同的分解可以组成一个真类. 在这个类中, 存在一个最小元 (Kleisli 构造 (Kleisli construction)), 和一个最大元 (Eilenberg-Moore 构造 (Eilenberg-Moore construction)).

例 1) 在集范畴中, 将任意集合送到它的全体子集集的函子有三元组结构. 一个集合  $X$  自然地嵌入它的子集集中, 且  $X$  的每一个子集集可以对应到这些子集集的并.

2) 在集范畴中, 每一个表示函子  $H_A(X) = H(A, X)$  给出了一个三元组: 映射  $\eta_X: X \rightarrow H(A, X)$ , 将任意  $x \in X$  送到值为  $x$  的常函数  $f_x: A \rightarrow X$ ; 映射  $\mu_X: H(A, H(A, X)) \simeq H(A \times A, X) \rightarrow H(A, X)$  将每一个双变元函数送到它在对角线上的限制函数.

3) 在拓扑空间范畴中, 任意有单位元  $e$  的拓扑群  $G$  可以定义一个函子  $T_G(X) = X \times G$ , 它给出一个三元组: 元素  $x \in X$  对应到  $(e, x)$ , 而映射  $\mu: X \times G \times G \rightarrow X \times G$  定义为  $\mu_X(x, g, g') = (x, gg')$ .

4) 在交换环  $R$  上的模范畴中, 每一个 (结合的, 有 1 的)  $R$  代数  $A$  给出一个函子  $T_A(X) = X \otimes_R A$ , 它可与例 3) 类似定义一个三元组结构.

#### 参考文献

- [1] Adams, J. F., Infinite loop spaces, Princeton Univ. Press, 1978.
- [2] Godement, R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958.
- [3] Итоги науки и техники, Алгебра. Топология. Геометрия, т. 13, М., 1975.
- [4] MacLane, S., Categories for working mathematician, Springer, 1971.
- [5] Manes, E. G., Algebraic theories, Springer, 1976.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】本条目中非描述性的名称“三元组”现已普遍被“单子”一词取代, 尽管有少数固执的范畴学家仍继续使用它. 范畴  $\mathfrak{R}$  上的一个余单子 (comonad)

(或余三元组 (cotriple)) 是  $\mathfrak{R}^{\text{op}}$  上的一个单子, 换言之, 它是一个函子  $T: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ , 连同自然变换  $\varepsilon: T \rightarrow \text{Id}_{\mathfrak{R}}$ , 和  $\delta: T \rightarrow T^2$ , 满足上述交换图的对偶图. 每一个函子伴随对  $(F \dashv G)$  给出合成  $FG$  上的余单子结构, 以及  $GF$  上的单子结构.

给出余单子结构的函子的一个重要例子是  $\Lambda: \text{Ring} \rightarrow \text{Ring}$ ,  $\Lambda(A) = 1 + tA[[t]]$ , 或等价地, 大 Witt 向量函子, 见  $\lambda$  环 ( $\lambda$ -ring); Witt 向量 (Witt vector). 自然变换  $W(A) \rightarrow \Lambda(W(A))$  在代数数论中的一个特殊情况是 Artin-Hasse 指数 (Artin-Hasse exponential), [A5].

集范畴中的单子可以等价地用  $n$  元算子集来刻画, 其中  $n$  是任意基数 (或集合);  $\eta_n: n \rightarrow T(n)$  给出投影算子  $(x_1, x_2, \dots) \mapsto x_i$ , 而  $\mu$  给出了算子的合成法则. 见 [5] 或 [A1]. 这种方法可拓广至任意范畴的单子, 但在一般情况下, 它不像在集范畴或接近集范畴时那样有用.

上文所述从一个给定的单子构造伴随对两种典型方法中, Eilenberg-Moore 构造 (或  $T$  代数范畴 (category of  $T$ -algebras)) 是最重要的. 给出范畴  $\mathfrak{R}$  上的一个单子  $(T, \eta, \mu)$ ,  $\mathfrak{R}$  中的一个  $T$  代数是一个对  $(A, \alpha)$ , 其中  $\alpha: TA \rightarrow A$  是一个态射, 使得图

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & TA & \xleftarrow{\mu_A} & T^2A \\
 & \searrow \alpha & \downarrow & & \downarrow T_A \\
 & & A & \xleftarrow{\alpha} & TA
 \end{array}$$

是交换的. 一个  $T$  代数同态  $(A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$  是  $\mathfrak{R}$  中的一个态射  $f: A \rightarrow B$  使得图形

$$\begin{array}{ccc}
 TA & \xrightarrow{Tf} & TB \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

是交换的; 这样就有一个  $T$  代数范畴  $\mathfrak{R}^T$ , 和一个显然的遗忘函子  $G^T: \mathfrak{R}^T \rightarrow \mathfrak{R}$ . 函子  $G^T$  有左伴随  $F^T$ , 将  $\mathfrak{R}$  的对象  $A$  送到  $T$  代数  $(TA, \mu_A)$ , 且由伴随对  $(F^T \dashv G^T)$  诱导的单子就是最初给定的单子.

$(T, \eta, \mu)$  的 Kleisli 范畴 (Kleisli category) 是由对象  $F^T(A)$  组成的  $\mathfrak{R}^T$  的满子范畴: 自由代数范畴 (category of free algebras) (亦见范畴).

对于  $\mathfrak{R}$  上的单子  $(T, \eta, \mu)$ , 在 Kleisli 构造中, 范畴  $\mathfrak{Q}$  的对象与  $\mathfrak{R}$  的对象一致, hom 集是

$$\mathfrak{Q}(A, B) = \mathfrak{R}(A, TB).$$

给出  $f \in \mathfrak{Q}(A, B)$ ,  $g \in \mathfrak{Q}(B, C)$ ,  $\mathfrak{Q}$  中的合成法则由  $\mathfrak{R}$  中的合成

$$[A \xrightarrow{f} TB \xrightarrow{T(g)} TTC \xrightarrow{\mu_C} TC] \in \mathfrak{Q}(A, C)$$

确定; 恒等映射  $1_A \in \mathfrak{Q}(A, A) = \mathfrak{R}(A, TA)$  是  $\mathfrak{R}$  态射  $\eta_A: A \rightarrow TA$ .

伴随对  $F: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{Q}$ ,  $U: \mathfrak{Q} \rightarrow \mathfrak{R}$  给出如下: 对  $A \in \mathfrak{R}$ ,  $F(A) = A$ , 对  $f \in \mathfrak{R}(A, B)$ ,

$$F(f) = \eta_B \circ f: A \rightarrow B \rightarrow TB \in \mathfrak{R}(A, TB) = \mathfrak{Q}(A, B),$$

对  $B \in \mathfrak{Q}$ ,  $U(B) = TB$ , 对  $g \in \mathfrak{Q}(B, C) = \mathfrak{R}(B, TC)$ ,  $U(g) = \mu_C \circ T(g)$ .

此时  $\eta$  是伴随对的单位, 而余单位  $\varepsilon: FU \rightarrow \text{Id}_{\mathfrak{Q}}$  由

$$\varepsilon_B = \text{Id}_{T(B)} \in \mathfrak{R}(TB, TB) = \mathfrak{Q}(FUB, B)$$

给出.

余代数 (co-algebras) 可用同样的方法定义. 特别地, 余代数经常重叠在代数上出现; 在某类代数范畴  $\mathfrak{R}$  上构造的余单子  $G$  可导出一个双代数 (bi-algebra) 范畴  ${}^G\mathfrak{R}$ . 这种情况的一个重要类型由定义在同一范畴  $\mathfrak{R}$  上的单子  $T$  和余单子  $G$  给出.  $G$  在  $\mathfrak{R}^T$  上有一个标准提升, 得到  $\mathfrak{R}^T$  上的余单子  $G^*$ . 一个  $TG$  双代数 ( $TG$ -bi-algebra) 意味着  ${}^G(\mathfrak{R}^T)$  中的一个对象, 相反的顺序也有可能, 但极少出现, 且对象不叫双代数.

余单子在 (代数的) 上调理论中的作用见代数的上调 (cohomology of algebras) 和 [A2], [A3]; 特别是 [A2] 中有明确的解释.

一个伴随对叫作可单子化的 (monadic 或 monadable), 是指它所诱导的单子的 Eilenberg-Moore 构造导出的伴随对等价于原来给定的伴随对. 许多重要的伴随对是可单子化的; 例如对任意泛代数簇 (variety of universal algebras), 从簇到集范畴的遗忘函子及其左伴随 (自由代数函子) 构成一个可单子化的伴随对.

若  $\mu$  是一个同构, 则单子  $(T, \eta, \mu)$  叫作幂等的 (idempotent). 在这种情况下, 对象  $A$  的任意  $F$  代数结构  $\alpha$  必须是  $\eta_A$  的双边逆. 因此  $\mathfrak{R}^T$  同构于满子范畴  $\text{Fix}(T) \subseteq \mathfrak{R}$ ,  $\text{Fix}(T)$  由使  $\eta_A$  是同构的所有对象  $A$  组成.  $\text{Fix}(T)$  是  $\mathfrak{R}$  的自反子范畴 (reflective subcategory), 嵌入函子的左伴随是  $T$  本身. 反之, 对  $\mathfrak{R}$  的任意自反子范畴, 由嵌入函子及其左伴随诱导的  $\mathfrak{R}$  上的单子是幂等的; 于是, 对应于自反子范畴的伴随对是可单子化的.

#### 参考文献

- [A1] Barr, M., Wells, C., Toposes, monads, and theories, Springer, 1985.
- [A2] Duskin, J. W.,  $K(\pi, n)$ -torsors and the interpretation of "monad" cohomology, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 71 (1974), 2554 - 2557.
- [A3] Duskin, J. W., Simplicial methods and the interpre-

tation of "monad" cohomology, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 3 (1975).

- [A4] Adamek, J., Herrlich, H. and Strecker, G. E., Abstract and concrete categories, Wiley-Interscience, 1990.
- [A5] Hazewinkel, M., Formal groups, Acad. Press, 1978, Sects. 14.5; 16.2, E2.
- [A6] Appelgate, H., et al. (eds.), Seminar on monads and categorical homology theory ETH 1966/7, Lecture notes in math., 80, Springer, 1969.
- [A7] Eilenberg, S. and Moore, J. C., Adjoint functors and monads, III. *J. Math.*, 9 (1965), 381 - 398.
- [A8] Eilenberg, S., et al. (eds.), Proc. conf. categorical algebra (La Jolla, 1965), Springer, 1966.

张英伯 译

#### 三等分角问题 [trisection of an angle; трисекция угла]

把任意角  $\varphi$  分成三个相等的部分; 古代三大经典尺规作图问题之一. 三等分角问题的解决归结为求三次方程  $4x^3 - 3x - \cos \varphi = 0$  (其中  $x = \cos(\varphi/3)$ ) 的有理根; 一般地说, 这个方程是不能用根式求解的. 因此, 正如 P. Wantzel 于 1837 年所证明的, 三等分角问题不能用直尺和圆规来解决. 但是, 对于角  $m90^\circ/2^n$ , 其中  $n, m$  是整数, 或者采用其他作图工具 (例如, **Dinostratus** 割圆曲线 (Dinostratus quadratrix) 或蚌线 (conchoid), 这种作图是可能的.

#### 参考文献

- [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963.

Е. Г. Соболевская 撰

【补注】同倍立方问题 (duplication of the cube) 一样, 三等分角问题是 **Galois** 理论 (Galois theory) 中研究的问题之一, 亦见 [A3].

关于三等分三角形三个角的一个著名结果是 F. Morley 定理 (F. Morley theorem) (1899): 对于任意三角形三个角的三等分线, 其中相邻的三等分线的三个交点构成一个等边三角形 (见 [A1]).

#### 参考文献

- [A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1961.
- [A2] Ball, W. W. R. and Coxeter, H. S. M., Mathematical recreations and essays, Dover, reprint, 1987.
- [A3] Stewart, I., Galois theory, Chapman & Hall, 1973.

杜小杨 张鸿林 译

#### 三向量 [trivector; тривектор]

仿射空间  $A$  中从一个共同原点发出的三个向量  $u, v, w$  的有序族  $[u, v, w]$ . 一个三向量等于零, 如果定义它的向量是共面的 (线性相关). 一个非零的三向量决定了支撑它的三维空间. 如果  $A$  具有有限维



数  $n$  且在某个基  $e = (e_1, \dots, e_n)$  下这三个向量是

$$u = \sum_{i=1}^n u^i e_i, v = \sum_{i=1}^n v^i e_i, w = \sum_{i=1}^n w^i e_i,$$

那么量

$$a^{ijk} = \begin{vmatrix} u^i & v^i & w^i \\ u^j & v^j & w^j \\ u^k & v^k & w^k \end{vmatrix} = 3! u^{[i} v^j w^{k]} \quad (1 \leq i, j, k \leq n)$$

称为三向量  $[u, v, w]$  关于基  $e$  的坐标. 这个坐标关于任何一对指标是反对称的; 在  $A$  的基变换时, 它们和一个三次反变张量的坐标一样变换. 这些坐标中,  $n(n-1)(n-2)/6$  个是本质的. 如果两个三向量在  $A$  的任何基下的坐标是相等的, 则称它们是相等的. 相等的三向量的一个类称为一个自由三向量 (free trivector).

在  $A$  中存在标量积的情形下, 向量代数的一些度量概念能够应用于三向量. 三向量  $[u, v, w]$  的测度 (measure of a trivector) 是从一个共同原点发出的形如  $h = xu + yv + zw$  (这里  $0 \leq x, y, z \leq 1$ ) 的向量的端点的集合所形成的平行六面体的三维体积. 当  $\dim A = 3$  的情形, 三向量的测度等于向量  $u, v, w$  的三重标量积. 两个三向量的标量积 (scalar product of two trivectors) 是一个数值等于它们的测度与支撑它们的平面之间夹角的余弦的乘积. 标量积是其因子的坐标的一个双线性型. 如果  $\dim A = 4$ , 那么三向量  $[u, v, w]$  可以等同于  $A$  的一个向量, 称为  $u, v, w$  的向量积 (vector product).

张量分析中的三向量 (trivector in tensor calculus) 是任意三阶反变斜对称张量 (即  $(3, 0)$  型张量). 每个这种张量可以表示为一些张量的和, 它们对应于具有不同支撑平面的三向量.

亦见双向量 (bivector); 外积 (exterior product); 多向量 (poly-vector); Plücker 坐标 (Plücker coordinates).

Л. П. Купцов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schouten, J. A., Ricci-calculus, Springer, 1954, § 1.7.

[A2] Hestenes, D. and Sobszyk, G., Clifford algebra to geometric calculus, Reidel, 1984, p. 4.

[A3] Sauer, R. and Szabo, I. (eds), Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, III, Springer, 1970, p. 174.

林向岩 译 陆珊年 校

### 次摆线 [trochoid; трохонда]

一条平面曲线, 它是当一个圆沿着另一个固定的圆滚动时, 滚动圆内或外的一点  $M$  所描绘的平面曲线. 一条次摆线称为长短幅圆外摆线 (epitrochoid) (图 1a, 1b) 还是长短幅圆内摆线 (hypotrochoid) (图

2a, 2b), 取决于滚动圆在固定圆的外部还是内部与其相切触.

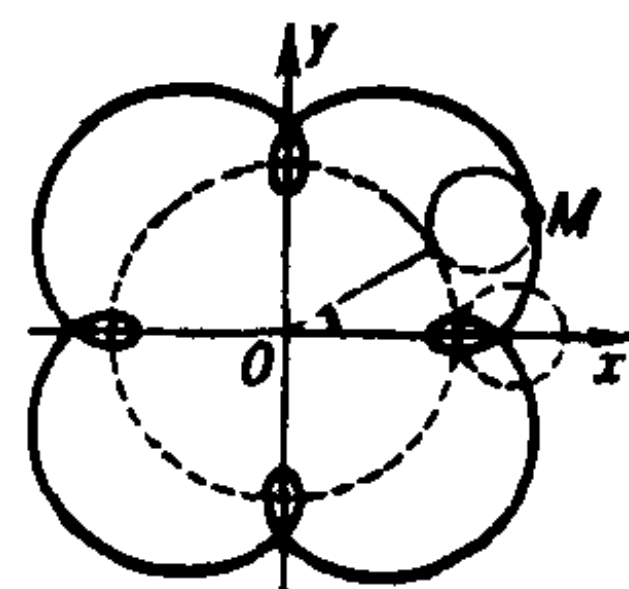


图 1a

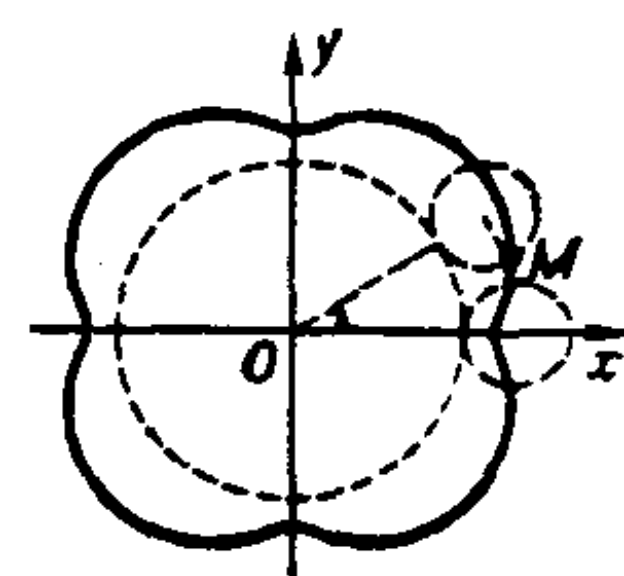


图 1b

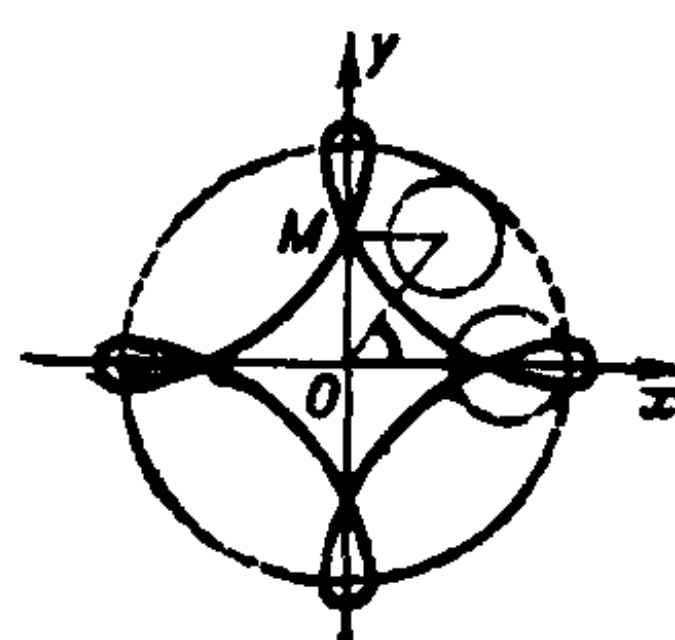


图 2a

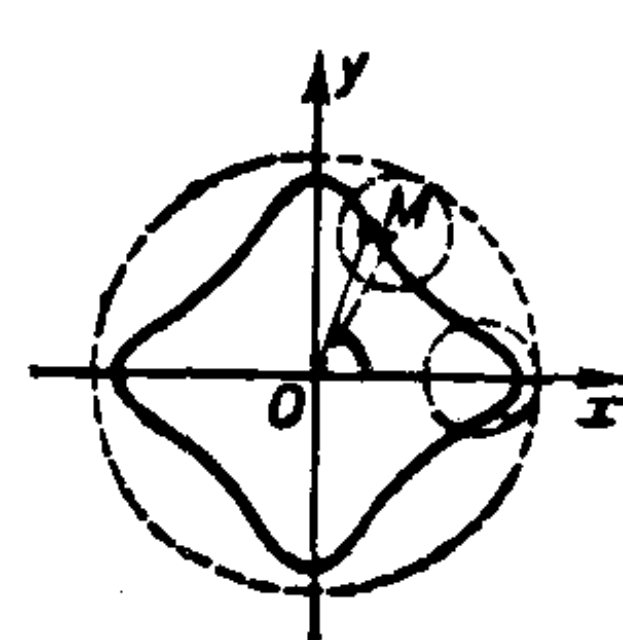


图 2b

长短幅圆外摆线的方程是

$$\begin{aligned} x &= (R + mR) \cos mt - h \cos(t + mt), \\ y &= (R + mR) \sin mt - h \sin(t + mt); \end{aligned}$$

长短幅圆内摆线的方程是

$$\begin{aligned} x &= (R - mR) \cos mt + h \cos(t - mt), \\ y &= (R - mR) \sin mt - h \sin(t - mt); \end{aligned}$$

其中  $r$  是滚动圆的半径,  $R$  是固定圆的半径,  $m = R/r$  是次摆线的模数 (modulus),  $h$  是描绘出次摆线的点  $M$  与滚动圆中心的距离. 如果  $h > r$ , 则次摆线称为长幅的 (elongated) (图 1a, 2a); 如果  $h < r$ , 则称为短幅的 (shortened) (图 1b, 2b); 如果  $h = r$ , 则称为外摆线 (epicycloid) 或内摆线 (hypocycloid).

如果  $h = R = r$ , 则该次摆线称为次摆线玫瑰线 (trochoidal rosette); 在极坐标中它的方程是

$$\rho = a \sin \mu \varphi.$$

对于有理值  $\mu$ , 次摆线玫瑰线是代数曲线 (algebraic curve). 如果  $R = r$ , 则次摆线称为 Pascal 蚶线 (Pascal limaçon); 如果  $R = 2r$ , 则为椭圆 (ellipse).

次摆线与旋轮类曲线 (cycloidal curve) 有关. 次摆线有时也称为长幅的或短幅的摆线.

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】次摆线在运动学中起着重要作用. 它们被用于齿轮和发动机设计 (见 [A2]). 在历史上, 在 N.

Copernicus 和 J. Kepler 成功地确立太阳系动力学以前, 次摆线曾是用来描述行星运动的工具.

#### 参考文献

- [A1] Fladt, K., Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad. Verlagsgesellschaft, 1962.
- [A2] Müller, H.-R., Kinematik, de Gruyter, 1963.
- [A3] Lawrence, J. D., A catalog of plane curves, Dover, reprint, 1972.
- [A4] Berger, M., Geometry, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一—五卷, 科学出版社, 1987—1991).
- [A5] Gomes Teixeira, F., Traite des courbes, 1—3, Chelsea, reprint, 1971. 杜小杨 张鸿林 译

#### Trotter 积公式 [Trotter product formula]

【补注】两个不必交换的算子的指数公式:

$$\exp(A+B) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(A/n) \exp(B/n))^n. \quad (A1)$$

最容易的是将此视为  $Q$  上以  $A$  和  $B$  为变量的自由结合代数 (关于增广理想) 的完全化中的 (形式) 恒等式, 这里  $A$  和  $B$  给定次数 1.

当  $A$  和  $B$  是  $(n \times n)$  矩阵时, (A1) 由 S. Lie 给出, 并简称为 矩阵指数的积公式 (product formula for matrix exponentials).

在理论物理中重要的型

$$\begin{aligned} \exp(it(A+B)) &= \\ &= s - \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(itA/n) \exp(itB/n))^n \end{aligned}$$

中公式成立, 例如当  $A$  和  $B$  是可分 Hilbert 空间上的自伴算子, 且定义在  $A$  和  $B$  的定义域的交上的算子  $A+B$  是本质自伴随的. 在形式

$$\begin{aligned} \exp(-t(A+B)) &= \\ &= s - \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(-tA/n) \exp(-tB/n))^n \end{aligned}$$

中, 当  $A$  和  $B$  有下界时 (对正数  $t$ ), 公式成立.

所有这些结果 (及更不同的一些) 通常称为 Trotter-加藤定理 (Trotter-Kato theorem).

Trotter 积公式可以在量子论的理论和模拟研究中找到许多应用 (例如量子自旋系统).

#### 参考文献

- [A1] Trotter, H., On the product of semigroups of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 (1959), 545—551.
- [A2] Kato, T., Trotter's product formula for an arbitrary pair of self-adjoint contraction semigroups, in I. Gohberg and M. Kac (eds.), *Topics in Functional Analysis*, Acad. Press, 1978, 185—195.
- [A3] Simon, B., *Functional integration and quantum physics*, Acad. Press, 1979.
- [A4] Davies, E. B., *One-parameter semigroups*, Acad.

Press, 1980.

蔡传仁 译

#### 槽谷 [trough; желоб]

一个环形的双连通曲面  $S$ , 它包含一条平面闭曲线  $L$ , 且在  $L$  的所有点处,  $L$  所在的平面  $P$  与  $S$  相切. 沿着  $L$ , 曲面  $S$  的 Gauss 曲率 (Gaussian curvature)  $K$  为零. 在此情况下, 如果  $L$  将  $S$  分成 Gauss 曲率为常号的两部分, 那么,  $S$  的这两部分称为正半槽谷和负半槽谷. 槽谷的一个例子是环面沿着它的一条闭的抛物平行线的一个窄带.

槽谷在“整体”和“局部”几何学的研究对象中处于一个中间的位置, 由于槽谷包含一条特殊闭曲线  $L$ , 因此槽谷不能任意小, 但在与  $L$  横截的方向, 其维数可以任意小. 对槽谷研究的兴趣来自于下列事实: 沿着一闭抛物线具有交错曲率的曲面的足够窄的带常常是槽谷, 由于这个原因, 知道了槽谷在各种形变下的性质, 有时能够得到关于曲面“全局”的相应信息.

对所谓的平面槽谷 (这时曲线  $L$  是凸的, 而槽谷  $S$  本身沿着  $P$  的一边以一阶切触的方式放置) 和旋转槽谷 (这时  $L$  是旋转曲面的一条平行线) 已有了更为详尽的研究. 对于平面解析槽谷, 有关二阶无穷小解析形变的刚性也已被证明. 对于旋转槽谷, 有关一阶和二阶无穷小形变的研究已推广到  $C^1$  正则类 ([4]). 从微分方程的观点来看, 槽谷的研究可化为混合型方程的研究.

#### 参考文献

- [1] Ефимов, Н. В., «Успехи матем. наук», 3 (1948), 2, 47—158.
- [2A] Кон-Фоссен, С. Э., «Успехи матем. наук», 1 (1936), 33—76.
- [2B] Cohn-Vossen, S. E., Die parabolische Kurve, *Math. Ann.*, 99 (1928), 273—308.
- [3A] Rembs, E., Über die Verbiegbarkeit der Rinnen, *Math. Z.*, 71 (1959), 1, 89—93.
- [3B] Rembs, E., Über die Verbiegbarkeit der Rinnen II, *Math. Z.*, 73 (1960), 4, 330—332.
- [4A] Сабитов, И. Х., «Матем. сб.», 98 (1975), 1, 113—129.
- [4B] Сабитов, И. Х., «Матем. сб.», 99 (1976), 1, 49—57. И. Х. Сабитов 撰

【补注】关于槽谷的原始 (德文) 术语是 “Flächenrinne” (曲面槽). 沈纯理 译

#### 截尾分布 [truncated distribution; усеченное распределение]

由给定的概率分布把给定区间外部的负荷转到这个区间的内部所得到的一种概率分布 (probability distribution). 设用分布函数  $F$  给定了直线上一个概率



分布, 与  $F$  所对应的截尾分布 (truncated distribution) 理解为分布函数

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b, a < b. \end{cases} \quad (1)$$

在  $a = -\infty$  ( $b = \infty$ ) 的特殊情形截尾分布称为右截尾的 (right truncated) (左截尾的 (left truncated)).

与 (1) 一起还考虑如下的截尾分布函数:

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ F(x) - F(a), & a < x < c, \\ F(x) + 1 - F(b), & c \leq x < b, \\ 1, & x \geq b, \end{cases} \quad (2)$$

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ F(x), & a \leq x < b, \\ 1, & x \geq b, \end{cases} \quad (3)$$

在 (1) 中分布在  $[a, b]$  之外的负荷分配在整个区间  $[a, b]$  上, 在 (2) 中放在了点  $c \in (a, b]$  上 (在这种情形, 当  $a < 0 < b$  时, 通常取  $c = 0$ ), 而在 (3) 中负荷放在两个端点  $a$  和  $b$  上.

可如下解释形如 (1) 的截尾分布: 设  $X$  是具有分布函数  $F$  的随机变量, 截尾分布与该随机变量在给定条件  $a < x \leq b$  之下的条件分布相同.

截尾分布的概念与截尾随机变量的概念紧密相连: 如果  $X$  是一随机变量, 则截尾随机变量理解为

$$X^d = \begin{cases} X, & \text{如果 } |X| \leq d, \\ 0, & \text{如果 } |X| > d. \end{cases}$$

$X^d$  的分布是与  $X$  分布对应的 (2) 型截尾分布, 在 (2) 中取  $a = -d$ ,  $b = d$ , 而  $c = 0$ .

截尾运算——取截尾分布或截尾随机变量, 是一个非常广为使用的技巧性手法. 它通过对初始分布作较小的改变便可能得到分析性质——各阶矩的存在.

#### 参考文献

- [1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд, М., 1973 (英译本: Prohorov, Yu. V. and Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).
- [2] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1960).
- [3] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1-2, Wiley, 1957-1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 第一卷, 上、下册, 科学出版社, 1964, 1979; 第二卷, 科学出版社, 1994).
- [4] Loève, M., Probability theory, Springer, 1977 (中译本: M. 洛易甫, 概率论, 上册, 科学出版

社, 1965).

Н. Г. Ушаков 撰

【译注】俄文文献中, 分布函数多为左连续的; 西方 (尤其是近代) 文献中多为右连续的. 本条在定义截尾分布函数时有些混淆: (1) 具有和  $F$  相同的单侧连续性, (2) 破坏了  $F$  的单侧连续性, 而 (3) 则只保持  $F$  的右连续性.

刘秀芳 译 陈培德 校

#### 真假值表 [truth table; истинностная таблица]

用构成复合命题的简单命题的真假值表示复合命题真假值的表 (见真假值 (truth value)). 真假值表有如下形式, 其中  $T$  表示“真”,  $F$  表示“假”. 表中  $A_1, \dots, A_n$  是命题变元,  $\mathfrak{A}(A_1, \dots, A_n)$  是命题公式 (propositional formula), 并且  $\mathfrak{A}(A_1, \dots, A_n)$  的真假值由  $A_1, \dots, A_n$  的真假值确定. 表中每行对应于  $n$  个命题的真假值的  $2^n$  种可能组合中的一种. 而且  $V_i$  是  $\mathfrak{A}(A_1, \dots, A_n)$  的真假值, 如果  $A_1, \dots, A_n$  有第  $i$  行表示的真假值.

$A_1$	$\dots$	$A_n$	$\mathfrak{A}(A_1, \dots, A_n)$
$T$	$\dots$	$T$	$V_1$
$T$	$\dots$	$F$	$V_2$
$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\cdot$
$F$	$\dots$	$F$	$V_{2^n}$

在数理逻辑中, 对应于逻辑联结词如否定、合取、析取、蕴涵和等价的真假值函数是用真假值表定义的. 在经典命题演算中, 真假值表用于验证公式的普遍有效性: 一个公式是普遍有效的, 当且仅当其真假值表的最后一列所有  $V_i$  均为  $T$ .

В. Е. Плиско 撰

#### 【补注】

##### 参考文献

- [A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).
- [A2] Hatcher, W. S., Foundations of mathematics, Saunders, 1968. 别荣芳 译 罗里波 校

真假值表可归约性 [truth-table reducibility; табличная сводимость],  $tt$  可归约性 ( $tt$ -reducibility), 图表可归约性 (diagram reducibility)

一种特殊类型的算法可归约性 (algorithmic reducibility). 设  $A$  和  $B$  是两个自然数的集合. 称  $A$  真假值表可归约 (truth-table reducible) 到  $B$  (记为  $A \leq_{tt} B$ ), 是指存在一个算法  $f$ , 使得对于任何自然数  $a$ , 该算法构造一个 Boole 函数  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  (例如, 这个函数由它的表给出: 这个函数的变元数目可以依赖于  $a$ ) 和数  $b_1, \dots, b_n$ , 使得  $a \in A$  等价于  $\varphi(b_1 \in$

$B, \dots, b_n \in B$ ) 的真假值.

关系  $\leq_{tt}$  是自然数集所有子集的集上的拟序. 关系  $\leq_{tt}$  对应于等价关系  $\equiv_{tt}$ , 即如果  $A \leq_{tt} B$  且  $B \leq_{tt} A$  则  $A \equiv_{tt} B$ . 这种关系的等价类被称为真假值表度 (truth-table degrees) (或  $tt$ -度 ( $tt$ -degrees)); 它们形成一个上半格.

在算法理论中还有许多特殊类型的  $tt$  可归约性被研究, 例如, 有界的  $tt$  可归约性 (bounded  $tt$ -reducibility) ( $btt$  可归约性 ( $btt$ -reducibility)), 其定义是附加函数  $\varphi$  的变元个数不依赖于  $a$  的条件. 如果简单地将函数  $\varphi$  取为  $x_1$ , 这种可归约性被称为多一可归约性 (many-one reducibility) (记号  $\leq_m$ ). 在  $\leq_{tt}$  和  $\leq_m$  之间的中间可归约性 (intermediate reducibility), 特别是上面所有提到的可归约性, 有时被称为真假值表型的可归约性 (reducibilities of truth-table type) ([2]).

#### 参考文献

[1] Rogers, jr., H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

[2] Дегтев, А. Н., «Успехи матем. наук», 34 (1979), 3, 137 - 168. А. Л. Семенов 撰

【补注】递归论中各种可归约性概念均可在计算复杂性理论中找到它们资源有界的类似的概念. 在这些理论中算法  $f$  满足它可在多项式时间内或甚至在对数空间内计算的进一步的要求.

#### 参考文献

[A1] Ladner, R. E., Lynch, N. A. and Selman, A. L., A comparison of polynomial time reducibilities, Theor. Comp. Sc., 1 (1975), 103 - 123.

[A2] Soare, R. I., Recursively enumerable sets and degrees, Springer, 1987. 丁德成 译

#### 真假值 [truth value; истинностное значение]

“真” ( $T$ ) 或“假” ( $F$ ) 之一, 是给定逻辑公式在所考虑的解释 (模型) 中可能的取值. 有时在文献中真假值  $T$  用 1 或  $t$  表示,  $F$  用 0 或  $f$  表示. 如果初等公式的真假值在模型  $\mathfrak{M}$  中已定义, 那么任意公式  $A$  的真假值  $\|A\|$  可如下递归确定 (对经典逻辑):

$$\|B \& C\| = T \Leftrightarrow \|B\| = T \text{ 和 } \|C\| = T,$$

$$\|B \vee C\| = T \Leftrightarrow \|B\| = T \text{ 或 } \|C\| = T,$$

$$\|B \supset C\| = T \Leftrightarrow \|B\| = F \text{ 或 } \|C\| = T,$$

$$\|\neg B\| = T \Leftrightarrow \|B\| = F,$$

$$\|\forall x B(x)\| = T \Leftrightarrow \text{对 } \mathfrak{M} \text{ 中任何 } a: \|B(a)\| = T,$$

$$\|\exists x B(x)\| = T \Leftrightarrow \text{对 } \mathfrak{M} \text{ 中某个 } a: \|B(a)\| = T.$$

有时需要考虑另外的解释, 在其中逻辑公式的取值除  $T$  和  $F$  外还有其他“中间”值. 在这种解释中, 公式

的真假值可以是诸如 Boole 代数元素 (对经典逻辑亦称 **Boole 值模型** (Boolean-valued model)), 伪 Boole 代数元素 (亦称 Heyting 代数, 见伪 **Boole 代数** (pseudo-Boolean algebra)), 拓扑空间的开集 (对直觉主义逻辑) 或拓扑 Boole 代数元素 (对模态逻辑 (modal logic S4) (见 [2])). 在 Boole 值模型中, 如果初等公式的真假值已定义, 那么复合公式的真假值如下确定:

$$\|B \& C\| = \|B\| \cap \|C\|,$$

$$\|B \vee C\| = \|B\| \cup \|C\|, \|B \supset C\| = \overline{\|B\|} \cup \|C\|,$$

$$\|\neg B\| = \overline{\|B\|}, \|\forall x B(x)\| = \bigcap_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|,$$

$$\|\exists x B(x)\| = \bigcup_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|,$$

其中  $\overline{\|B\|}$  是元素  $\|B\|$  的补. 例如在直觉主义逻辑的拓扑模型中, 复合公式的真假值如下确定:

$$\|B \& C\| = \|B\| \cap \|C\|, \|B \vee C\| =$$

$$\|B\| \cup \|C\|, \|B \supset C\| = \text{Int}(\overline{\|B\|} \cup \|C\|),$$

$$\|\neg B\| = \text{Int}(\overline{\|B\|}),$$

$$\|\forall x B(x)\| = \text{Int}\left[\bigcap_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|\right],$$

$$\|\exists x B(x)\| = \bigcup_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|,$$

其中  $\text{Int}(X)$  表示集合  $X$  的内部.

#### 参考文献

[1] Новиков, П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973 (英译本: Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Oliver & Boyd and Acad. Press, 1964).

[2] Rasiowa, H. and Sikorski, R., The mathematics of metamathematics, PWN, 1963.

С. К. Соболев 撰 别荣芳 译 罗里波 校

#### Цирелсон пространство [Tsirelson space; Цирелсона пространство]

【补注】自反 **Banach 空间** (Banach space) (见自反空间 (reflexive space)) 的一个特殊的例子, 它不包含一个嵌入的  $l_p$  空间或嵌入的  $c_0$  空间. 另一方面, 经典的 Banach 空间, 如其  $p$  次幂可积的可测函数的等价类的空间  $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$  和具有上确界范数的  $K$  上连续标量值函数的空间  $C(K)$  都包含  $c_0$  或  $l_p$  的一个拷贝, 以及所有 **Orlicz 空间** (Orlicz space) 也是如此.

关于不包含  $l_p$  或  $c_0$  的 Banach 空间的结果的选录见 [A3], Sect. 2e.



## 参考文献

- [A1] Tsirelson, B. S., Not every Banach space contains an imbedding of  $l_p$  or  $c_0$ , *Funct. Anal. Appl.*, 8 (1974), 2, 138 – 141 (*Funkts. Anal. Prilozhen.*, 8 (1974), 2, 57 – 60).
- [A2] Casazza, P. G. and Shura, Th. J., Tsirelson's space, *Lecture notes in math.*, 1363, Springer, 1989.
- [A3] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., *Classical Banach spaces*, 1, Sequence spaces, Springer, 1977.
- [A4] Dulst, D. van, *Characterization of Banach space not containing  $L$* , CWI, Amsterdam, 1989.

葛显良 译 鲁世杰 校

管状区域 [tube domain; трубчатая область], 管 (tube)

复空间  $C^n$  中的区域  $T$

$$T = B + i\mathbf{R}^n = \{z = x + iy : x \in B, |y| < \infty\},$$

其中  $B$  是实子空间  $\mathbf{R}^n \subset C^n$  中的一区域, 称为管状区域  $T$  的底 (base of the tube domain  $T$ ). 形如  $\mathbf{R}^n + iB$  的区域也称为管状区域. 任一管状区域的全纯包络 (holomorphic envelope) 和它的凸包是相同的; 特别地, 每一在管状区域  $T$  全纯的函数都可拓展到一在  $T$  的凸包是全纯的函数. 一管状区域称为径向的 (radial), 如果它的底是  $\mathbf{R}^n$  中的一连结锥.

## 参考文献

- [1] Владимир, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., *Methods of the theory of functions of many complex variables*, М. I. T., 1966).

Е. М. Чирка 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Hörmander, L., *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland, 1973.

钟同德 译

管状邻域 [tubular neighbourhood; трубчатая окрестность]

光滑子流形  $N$  在光滑流形  $M$  中的一个邻域, 即是一个  $N$  上具有纤维  $\mathbf{R}^d$  的纤维化, 其中

$$d = \dim M - \dim N.$$

假设在  $M$  中, 选定一个 Riemann 度量, 并考虑从  $N$  中开始且垂直于  $N$  的测地线段. 如果  $N$  是紧的, 则存在  $\varepsilon > 0$ , 使得没有从  $N$  中不同的点出发的长度  $\leq \varepsilon$  的两条线段相交. 所有这样长度  $< \varepsilon$  的线段的并是  $N$  的开邻域  $U$ , 称为  $N$  的管状邻域. 对一个非紧的  $N$ , 通过用可数个紧体族覆盖  $N$  和当覆盖的

元素数目增加时, 减少  $\varepsilon$  来构造一个管状邻域是可能的. 存在一个形变收缩核 (deformation retract)  $r: U \rightarrow N$ , 它将  $U$  的每个点联系到含该点的测地线的始点. 该收缩决定了一个具有纤维  $\mathbf{R}^d$  的向量丛, 这个向量丛同构于嵌入  $N \rightarrow M$  的法丛 (normal bundle)  $\nu$ . 在此方法中, 商空间  $\bar{U}/\partial\bar{U}$  同胚于  $\nu$  的 Thom 空间 (Thom space).

对拓扑流形, 也可引进管状邻域的概念的类似物 (这里, 必须考虑局部平坦嵌入, [2]).

## 参考文献

- [1] Thom, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comm. Math. Helv.*, 28 (1954), 17 – 86.
- [2] Kirby, R. and Siebenmann, L., *Foundational essays on topological manifolds*, Princeton Univ. Press, 1977.

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】管状邻域是由 H. Whitney 在他的微分流形的论述中引进的 (关于一些历史, 见 [A2]).

## 参考文献

- [A1] Hirsch, M., *Differential topology*, Springer, 1976.
- [A2] Dieudonné, J., *A history of algebraic and differential topology: 1900 – 1960*, Birkhäuser, 1989, Chapt, III.

薛春华 译

多元组 [tuple; кортеж]

某一集合  $X$  中元素的一个有限序列 (允许重复). 一个多元组记作  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ,  $(x_i)$ ,  $(x_i)_{i=1}^n$ ,  $(x_i)_1^n$ ,  $(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  或  $x_1, \dots, x_n$ . 数  $n$  称为它的长度 ( $n \geq 0$ ),  $x_i$  称为这个  $n$  元组的第  $i$  项而  $x_i \in X$  ( $1 \leq i \leq n$ ). 对于  $n = 0$ , 就得到空多元组, 它不含有项.

多元组这个术语有如下的同义语: 在字母表 (alphabet)  $X$  内的一个字 (word) (这时常假定  $X$  是有限的); 集合  $X$  的某个 Descartes 幂的一个元素; 由  $X$  生成的有单位元的自由半群中一个元素; 定义在前  $n$  个自然数 ( $n \geq 0$ ) 上取值在  $X$  内的一个函数.

В. Н. Гришин 撰

【补注】多元组的典型性质是, 一个多元组  $(x_1, \dots, x_n)$  等于另一个多元组  $(y_1, \dots, y_m)$ , 仅当  $n = m$  且  $x_i = y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 时. 在数学的集合论基础的论述中 (例如, Zermelo-Frankel 集合论 (set theory)), 每一个对象都必须是一个集合或一个类, 多元组常用以下的归纳过程作为集合来构造: 当  $n = 0$  时  $(x_1, \dots, x_n)$  是空集, 而  $(x_1, \dots, x_{n+1}) = \{(x_1, \dots, x_n), \{x_{n+1}\}\}$ .

郝钢新 译

湍流的数学问题 [turbulence, mathematical problems in; турбулентности математические задачи]

描述流体和气体的湍流流动 (即这样的紊乱流动, 其热力学的和流体力学的性质因存在无数各种尺寸的涡旋而经历着无序的起伏, 并从而在空间和时间上极无规则地变化着) 之方程的推导、分析和求解。

湍流流动的具体实现是由通常的粘性液体的流体力学方程描述的。它们的 Cauchy 问题的唯一性并未得到证明 (只对二维流动和在关于运动粘性  $\nu$  的变化的专门假设下得到了证明)。对应层流流动的定常解, 形式上对任何 Reynolds 数  $Re = UL/\nu$  (这里  $L$  和  $U$  是长度和速度的尺度) 都存在, 但当  $Re > Re_{cr}$  时它们是不稳定的。关于形式为

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \exp(\lambda t)$$

的速度场的小扰动的流体力学不稳定性是被作为  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  的相应线性化方程 (所谓的 Orr-Sommerfeld 方程 (Orr-Sommerfeld equation)) 的本征值问题研究的。

对  $Re_{cr}$  的某邻域中的 Reynolds 数  $Re$  的值, 在流动的相空间中存在封闭轨迹的单参数族。若这只发生在  $Re > Re_{cr}$  时, 则分岔称为正规的 (normal), 且封闭轨迹是具有  $(Re - Re_{cr})^{1/2}$  量级的有限振幅和任意相位的  $t$  的周期解所对应的极限环。按 Л. Д. Ландау (1944) 的假设, 湍流是一系列正规分岔的结果而形成的并是具有众多数量的不可比振动频率和相应自由度即振动相位的准周期的各态历经的流动。

如果在  $Re < Re_{cr}$  时也出现封闭的相轨迹族, 则分岔称为反的 (inverse), 且极限环是不稳定的 (即轨迹从它们上松开); 当  $Re \rightarrow Re_{cr} - 0$  时, 它们紧缩并在极限时消失, 而当  $Re > Re_{cr}$  时, 扰动随时间而增长并看来迅速具有非周期性质。可能在这情况下相空间里有奇怪吸引子 (strange attractor) 即非游荡点的集合  $\Lambda$  (诸点的每个邻域都被某轨迹相交至少两次), 这些点有别于不动点和封闭轨迹, 并有这样的邻域, 在那里所有出现的轨迹都渐近地趋向  $\Lambda$ 。

有一个假说, 在四个分岔之后在液体流动的相空间中出现局部地是二维曲面的 Cantor 集的奇怪吸引子, 它到达时就引起流动的混乱即湍流。但是, 流体力学系统的分岔理论还尚未建立 (见 [3])。

不可压缩流体的湍流流动的最完全的统计学描述是可能速度场  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  在泛函空间上的概率量度  $P(\omega)$  或者它的称为特征泛函的泛函 Fourier 变换 (例如, 在谱表示中的  $\Psi[\mathbf{z}(\mathbf{k}, t)]$ , 见 [1])。对该泛函由 Navier-Stokes 方程 (Navier-Stokes equations) 推导出变分微分表示的线性方程 (所以湍流的统计动力学便是线性的), 它应该对给定的

$$\Psi_0[\mathbf{z}(\mathbf{k})] = \Psi[\mathbf{z}(\mathbf{k})\delta(t - t_0)]$$

求解。特别是, 对于给出固定时刻速度场的完全统计

描述之空间特征泛函  $\Psi[\mathbf{z}(\mathbf{k}), t]$ , 得到了 Hopf 方程 (Hopf equation):

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= (H_0 + H_1) \Psi; \\ H_0 &= -i\nu \int d\mathbf{k} \mathbf{k}^2 z_\alpha(\mathbf{k}) D_\alpha(\mathbf{k}); \\ H_1 &= \iint d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' B_{\alpha, \beta\gamma}(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') z_\beta \cdot \\ &\quad \cdot (u' + u'') D_\alpha(\mathbf{k}') D_\gamma(\mathbf{k}''), \end{aligned}$$

其中

$$B_{\alpha, \beta\gamma}(\mathbf{k}) = ik_\alpha (\delta_{\beta\gamma} - k_\beta k_\gamma k^{-2}),$$

和  $D_\alpha(\mathbf{k})$  是对于  $z_\alpha(\mathbf{k})$  的变分微分算子。这个方程类似于在具有专门类型强相互作用 (两个玻色子合并为一个) 的量子化 Bose 场的 Schrödinger 表示中的态  $\Psi$  的方程:  $z_\alpha(\mathbf{k})$  和  $D_\alpha(\mathbf{k})$  是具有动量  $\mathbf{k}$  的量子生成和消亡算子, 而 Reynolds 数  $Re$  充当相互作用常数。求解变分微分的线性方程的一般方法还未建立。当  $Re \gg 1$  时, 扰动理论不起作用, 虽然对 Feynman 图的部分求和是可能的 (见 [2])。解  $\Psi$  可以写成泛函积分的形式, 但计算这种积分的一般方法还没有。尽管如此, 可以用对 Navier-Stokes 方程的 Галеркин 近似构造概率量度  $P_\epsilon(\omega)$  来当作求找描述湍流流动的概率量度  $P(\omega)$  的一般方法: 对量度族  $\{P_\epsilon\}$  已证明了弱紧密性 (见 [6]), 特别是, 用这方法已证明了解  $\Psi$  的某些唯一性和存在定理。

湍流流动的完全统计描述的等价表述在于对空一时点  $M_m(\mathbf{x}_m, t_m)$  的所有可能有限集合上速度场的值  $\mathbf{u}_m = \mathbf{u}(M_m)$  确定所有有限维的概率密度  $f_n = P_{m_1 \dots m_n}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ 。对它们由 Navier-Stokes 方程 (见 [5]) 导出线性方程

$$\frac{\partial f_n}{\partial t_k} = - \left[ \frac{\partial u_{k\alpha} f_n}{\partial x_{k\alpha}} + \frac{\partial w_{k\alpha} f_n}{\partial u_{k\alpha}} \right],$$

其中  $w_k$  是在值  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(M_1), \dots, \mathbf{u}_n = \mathbf{u}(M_n)$  固定的条件下点  $(\mathbf{x}, t_k)$  上的加速度变换到点  $M_k$  的条件数学期望。量  $w_{k\alpha} f_n$  包含  $f_{n+1} du_{n+1}$  的积分, 所以  $f_n$  的方程组成一个无穷系列 (类似于 Боголюбов 方程系列 (Bogolyubov chain of equations))。对  $\partial f_n / \partial t_k$  的方程相对于  $F(u_1, \dots, u_n) d\mathbf{u}_1 \dots d\mathbf{u}_n$  求积分就得到广义 Freedman-Keller 方程 (generalized Freedman-Keller equation)

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t_k} = \frac{\partial u_{k\alpha} \bar{F}}{\partial x_{k\alpha}} + w_{k\alpha} \frac{\partial \bar{F}}{\partial u_{k\alpha}},$$

式中横线代表数学期望。这方程是对  $F = u_{1\alpha_1}^{m_1} \dots u_{n\alpha_n}^{m_n}$  导出的, 所以  $\bar{F}$  是  $N = m_1 + \dots + m_n$  阶速度场的  $n$  点的统计动量。动量的方程组成无穷链 (它的可求解



性借助 Navier-Stokes 方程的 Галеркин 近似可得到证明)。

当  $N = 1$  时, 这些方程 (Reynolds 方程 (Reynolds equations)) 由直接平均 Navier-Stokes 方程得到, 并因出现附加未知量即所谓的 Reynolds 应力 (Reynolds stresses) —— 一点的第二动量  $\tau_{ji} = -\rho \overline{u'_j u'_i}$  (其中  $\rho$  是流体密度, 撇代表对数学期望的偏差) 而不同于平均速度场  $\bar{u}$  的同样方程。封闭 Freedman-Keller 方程组的最简单方法是将  $\tau_{ji}$  表示为  $\partial \bar{u}_i / \partial x_k$  的函数形式。在所谓的半经验湍流理论中这些函数取为线性的, 它们的系数 (有湍流粘性系数的意义) 遵从一些附加假设 (例如, 正比于  $lb^{1/2}$ , 这里  $l$  和  $b$  是单位质量湍流的尺度和动能, 对它们构造了补充方程: 这使平均流动的描述是非线性的和产生特别的效应)。

当  $N = 2$  时, 得到速度场的两点相关函数  $\overline{u'_{1\alpha} u'_{2\beta}}$  的方程 (或它们的关于  $(M_1 - M_2)$  谱函数的 Fourier 变换)。为使其封闭, 必须有关于出现的第三动量的补充假设 (见 [1], [5])。为构造湍流谱封闭方程的最自然的方法是由截断部分求和的 Feynman 图获得。

实质性的几何简化是在均匀的和各向同性的湍流情况下得到的。这模型重要, 因为任何具有大 Reynolds 数的实际湍流原来就是局部稳定的、局部均匀的和局部各向同性的。而且, 在动能  $\varepsilon$  的固定耗散速率下, 具有非常大 Reynolds 数的三维湍流流动的统计结构在足够小尺度时完全由两个参量  $\varepsilon$  和  $\nu$  决定, 所以, 例如在  $r \ll L$  时速度的结构函数应有形式

$$\overline{[u_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_\alpha(\mathbf{x}, t)]^2} = (\varepsilon r)^{2/3} \varphi\left(\frac{r}{\lambda}\right),$$

其中  $L$  是整体上流动的尺度,  $\lambda = \varepsilon^{1/4} \nu^{-3/4}$  是 Колмогоров 内尺度; 在所谓的惯性区域  $L \gg r \gg \lambda$  内, 参量  $\nu$  消失, 函数  $\varphi$  变为常数。另一方面, 如果考虑场  $\varepsilon$  的起伏, 则 Колмогоров 相似性变成不完全的且结构函数获得一个带小指数  $m$  的修正因子  $(r/L)^m$ 。

在二维流动中, 除能量外还有均方涡量即涡似能 (enstrophy) 也是运动的绝热积分 (所以涡线不拉伸), 除了参量  $\varepsilon$  和  $\nu$ , 还出现涡似能的衰变率  $\varepsilon_\omega$ 。在这里按 Колмогоров 定律能量由供能涡的尺度传向大尺度区域, 而按非局部谱定律涡似能则是传向小尺度区域 (见 [4]):

$$E(k) = C_\omega \varepsilon_\omega^{2/3} k^{-3} \left[ \ln \frac{k}{k_0} \right]^{-1/3}.$$

由天气涡旋和 Rossby 波形成的大气中和在海洋里大尺度准二维湍流就具有这些性质。二维流动的涡旋的作用在这里由所谓的有势涡旋即绝对速度的涡旋与熵的梯度之标量积来实现。它的方程在类地转近似时得到形式

$$\frac{\partial \mathcal{L} \psi}{\partial t} + J(\psi, \mathcal{L} \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = F;$$

$$\mathcal{L} = \Delta + \frac{\partial}{\partial z} \frac{H^2}{L_R^2} \frac{\partial}{\partial z},$$

其中  $\psi$ ,  $\Delta$ ,  $J$  分别是水平向流函数、Laplace 算子和 Jacobi 式,  $z$  是纵向坐标,  $H$  和  $L_R = HN/f$  分别是层的厚度和 Rossby “形变半径” ( $N$  是 Waissala-Brent 频率,  $f$  是 Coriolis 参量),  $x$  是赤道圆的弧,  $\beta$  是  $f$  沿经线的导数,  $F$  描述非绝热因素。在  $L \ll L_R$  区域内, 获得了二维湍流的常微分方程, 波数  $k_\beta = ((\beta/2)U)^{1/2}$  (其中  $U$  是典型速度) 把涡旋 ( $k > k_\beta$ ) 与 Rossby 波 ( $k < k_\beta$ ) 分开。初始小涡旋有随时间的增长而沿垂线拉直的趋势 (“正压化”), 朝西面移动和沿纬线圆延伸。

不可压缩流体中的湍流的重要普遍化是有浮力的成层流体中的湍流和磁流体力学湍流。

#### 参考文献

- [1] Монин, А. С., Яглом, А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1–2, М., 1965–1967 (英译本: Monin, A. S. and Yaglom, A. M., Fluid mechanics, 1–2, M. I. T., 1971–1975).
- [2] Гледзер, Е. Б., Монин, А. С., «Успехи матем. наук», 29 (1974), 3, 111–159.
- [3] Монин, А. С., «Успехи физич. наук», 125 (1978), 1, 97–122.
- [4] Мирабель, А. П., Монин, А. С., «Успехи механики», 2 (1979), 3, 47–95.
- [5] Монин, А. С., Озмидов, Р. В., Океанская турбулентность, Л., 1981 (英译本: Monin, A. S. and Ozmidov, R. V., Turbulence in the ocean, Reidel, 1985).
- [6] Вишик, М. И., Фурсиков, А. В., Математические задачи статистической гидромеханики, М., 1980 (英译本: Vishik, M. I. and Fursikov, A. V., Mathematical problems of statistical hydromechanics, Kluwer, 1988).

А. С. Монин 撰

【补注】在 1883 年 O. Reynolds 用实验研究了圆截面管道中的流体流动, 发现了由定常层流流动向后来称为湍流 (turbulent) 的无规则流动的过渡。但是, 所有后来按线性稳定性分析所做的计算表明, 基本层流到无限小扰动时是稳定的。所以, 以下结论不对: 对任何层流都有一个临界的  $Re_{cr}$ , 大于它则流动不稳定。事实上, 基础的 Reynolds 实验还难以就分岔分析做所有的尝试。

Orr-Sommerfeld 方程不是线性流体力学稳定性分析的普遍方程, 它只适用于所谓的剪切流动 (例如见 [A10])。

Ландау 关于向湍流转变的假设有历史的意义, 而现在 (1991) 一般已被放弃了。

关于均匀湍流的公认的参考文献仍是 [A11]。

在最近十年里下列主要课题有所发展。在统计近

似方面沿 Колмогоров 开创的路线有贡献, 见 [A1], [A2]. 假定动能  $e(t) \approx U^2$  以常速率  $e'(t) = -\varepsilon$  衰减, 就有 Колмогоров 关系  $\varepsilon \approx U^3/L$ , 这里  $L$  和  $U$  是涡旋的长度和速度的尺度, 涡旋衰减的时间尺度等于  $L/U$ .

Navier-Stokes 方程中非线性性对自由边界的波形形状的影响由诸如 Boussinesq 方程 (Boussinesq equation) 和 Burgers 方程 (Burgers equation) 等近似方程研究, 后一方程有形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

这方程有严格解. 动用布线模型可由 Kelvin-Helmholtz 问题 (Kelvin-Helmholtz problem) 得以理解: 在有切向流的自由边界上线性波表明是不稳定的. 不稳定性 (Eckhaus 不稳定性 (Eckhaus instability)) 的非线性分析已用非线性调制方程作为起点做过了. 关于所谓的 Ginzburg-Landau 方程 (Ginzburg-Landau equation) 的理论见 [A3].

湍流是由于在流动的动力学中存在奇怪吸引子所致. 想法是第一次在 [A4] 中表达的, 关于这话题的介绍说明还可见 [A5]. 在 [A6] 中给出了估计吸引子部分尺寸的方法.

#### 参考文献

- [A1] Tennekes, H. and Lumley, J. L., A first course in turbulence, M. I. T., 1972.
- [A2] Hinze, J. O., Turbulence, McGraw-Hill, 1975.
- [A3] Iooss, G., Mielke, Y. and Denay, Y., Theory of steady Ginzburg-Landau equation in hydrodynamic stability problems, *Eur. J. Mech. B. / Fluid*, 8 (1989), 229 - 268.
- [A4] Ruelle, D. and Takens, F., On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.*, 20 (1971), 167 - 192.
- [A5] Berge, P., Pomeau, Y. and Vidal, C., Order within chaos, Wiley, 1984.
- [A6] Constantin, P. and Foias, C., Navier-Stokes equations, Univ. Chicago Press, 1988.
- [A7] Lesieur, M., Turbulence in fluids, Kluwer, 1990.
- [A8] Lander, B. E. and Spalding, D. B., Mathematical models of turbulence, Acad. Press, 1972.
- [A9] Landahl, M. T. and Mollo-Christensen, E., Turbulence, Cambridge Univ. Press, 1986.
- [A10] Lin, C. C., The theory of hydrodynamic stability, Cambridge Univ. Press, 1955.
- [A11] Batchelor, G. K., The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press, 1956. 李维新 译

湍流系统 [turbulent system; бушующая система], 激流系统 (surging system)

状态空间含有湍流流形 (turbulence manifold) 的

动力系统 (dynamical system). 湍流流形就是这样的流形, 穿过它以后, 控制该系统的运动的规律将发生变化.  $\mathbf{R}^n$  中的湍流系统  $S$  由几个微分方程组

$$(S_i): \dot{x} = f_i(t), x \in \mathbf{R}^n, \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

和几个曲面

$$M_i \subset \mathbf{R}^n, i = 1, 2, \dots, m$$

来表示. 当  $S$  的一个轨道在区域  $(S_i)$  中与  $M_i$  相遇时, 就发生一个湍流 (turbulence), 即系统  $(S_i)$  要由  $(S_{i+1})$  代替, 而  $(S_{m+1})$  与  $(S_1)$  相同 (详见 [3]). 在湍流系统的定义中出现了几个微分方程组  $(S_i)$  使得这种系统的相图十分多种多样. 例如, 设一个湍流系统由两个定常的线性微分方程组

$$\dot{x}_1 = a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2, i = 1, 2,$$

给出, 且以直线  $x_2 = 0$  作为湍流流形  $M_1 = M_2$ , 它就可能有限环 (limit cycle) ([3], [4]). 湍流系统给出了非线性振动的特定的模型, 使人们可以描述“滞后现象”.

#### 参考文献

- [1] Vogel, T., Sur les systèmes déferlants, *Bull. Soc. Math. France*, 81 (1953), 63 - 75.
- [2] Vogel, T., Systèmes déferlants, systèmes héréditaires, systèmes dynamiques, in *Qualitative Methods in Nonlinear Vibration Theory* (Proc. Internat. Symp. Nonlinear Vibrations, 1961) Vol. 2, Kiev, 1963, 123 - 130.
- [3] Мышкис, А. Д., Хохряков, А. Я., «Матем. сб.», 45 (1958), 3, 401 - 414.
- [4] Gh'derman, J. I., On the limit cycles of piecewise affine systems, *Soviet Math. Dokl*, 17 (1976), 5, 1328 - 1332 (《Докл. АН СССР》, 230 (1976), 3, 512 - 515).

Ю. С. Богданов 撰

【补注】“湍流系统”一词在英文文献中并不用来表示上述概念. (事实上, 除了在 [1] - [3] 中以外, 上面讲的系统并没有专门的名词.)

关于流体中的湍流, 见湍流中的数学问题 (turbulence, mathematical problems in).

在控制理论与统计学中有类似的概念. 在控制理论中要考虑这样的控制系统, 它在状态空间的不同的体制 (regime) 下, 其动力学由不同的 (微分) 方程给出, 而这不同的方程又常是同一个非线性控制系统在状态空间的不同部分用不同的线性化来近似. 在这种情况下, 有时用“滑动控制” (sliding control) 或“控制安排” (control scheduling) 这样的名词.

在统计学和控制理论中, 都要考虑由几个可能的规律来控制的随机过程, 而且可能由一个规律突然转变到另一个规律. 在统计学中, 察觉这种变化是否发



生就称为变化点侦察 (change-point detection)。

【译注】译者认为英译本把标题译错了。俄文 бушующая 是由 бушовать 一词变来，是波涛汹涌之意。因此英文另译为 surging system 是对的，中文译“激变系统”与原意较合，而与湍流 (turbulent) 没有关系。所引文献 [1] 称为 déferlant，是由法文 déferler 一词变来，原意也是汹涌激荡。英译法使人与流体力学的湍流混淆，补注中有说明。 齐民友 译

### Turing 机 [Turing machine; Тьюринга машина]

与一种特殊类型的抽象计算机 (computer, abstract) 相联系的机器的名称。这种类型的机器概念起源于 20 世纪 30 年代中期 A. M. Turing 的 [1]，此文是 Turing 分析一个人根据预先设计的计划实行某种计算行为的结果，所谓计算机就是对符号的复合逐次施行变换。他做这种分析的目的是为了对于算法 (algorithm) 的笼统直观思想找到一个确切的等价的数学定义，以解决当时紧迫的问题。在算法理论 (algorithms, theory of) 的发展过程中，Turing 原来的定义经过了若干次修改。此处给出的定义可以追溯到 E. Post ([2])；Turing 机的这种定义是广泛流行的形式 (Turing 机已有详细的刻画，例如在 [3] 和 [4] 中)。

把 Turing 机视为一个具有有限内部状态 (internal state) 和无穷个外部存储 (称为带子 (tape)) 能力的自动工作系统是方便的。有两种特殊的状态：初始状态 (initial state) 和终止状态 (final state)。带子分成许多方格，并且左右皆无界。某一个有限字母表 (alphabet)  $A$  的任一字母都可以打印到带子的每一方格内 (为了一致起见，可把空格看作打印了一个空白字母是方便的)。在离散时间的每一时刻，Turing 机处于它的一个状态，当它扫描到带子上的一个方格时，就接受打印在该方格内的符号 (字母表  $A$  的一个字母或空白字母)。

如果 Turing 机在某一时刻处于非终止状态，那么它完成由它当时的状态和当时在带子上接受的符号所完全决定的一个步骤 (step)。一个步骤由下列内容构成：1) 在扫描的方格内打印一个新符号，这个新符号可能与原有符号相同，也可能是一个空白；2) 过渡到一个新状态，这个新状态可能与原有状态相同，也可能是一个终止状态；3) 把带子左移或右移一个方格，或带子保持不动。Turing 机所有可能的步骤的清单依赖于“非终止状态 + 接受的符号”所能表达的当时的组合，例如，给定 Turing 机可用具有两个输入的一个特殊的表称为程序 (program) 或模式 (scheme) 给出。机器对应于步骤的码称为它的指令 (command)，置于这个表的方格中。Turing 机的程序是具有特定结构的一种对象，并且人们可以约定 Turing 机与其程序是等同

的。如果希望强调该 Turing 机与字母表的联系，那么人们通常说这个机器是字母表  $A$  上的一个 Turing 机 (Turing machine in the alphabet)。

Turing 机的瞬时状态由其构形 (configuration) 完全刻画出，给定时刻的构形由下列信息构成：1) 印在带子的方格中的实际符号；2) 机器当时扫描的方格；3) 机器的内部状态。对应于 Turing 机终止状态的构形也称终止的 (final)。

如果 Turing 机的某一非终止的构形和初始构形一样是固定的，那么这个机器的运行将由 (逐步的) 序列变换构成，根据 Turing 机的程序变换由一个初始构形开始，直到达到一个终止构形。这以后，Turing 机的运行终止，并且把终止构形的出现视为机器运行的结果。一般说来，自然不是对每一个初始构形 Turing 机的运行都会终止的。

Turing 机的概念可以用来使得一个给定字母表上的算法的一般思想精确化，做法如下：字母表  $A$  上的一个 Turing 算法 (Turing algorithm in an alphabet  $A$ ) 是指如下类型的任意算法  $\mathfrak{A}$ 。在字母表  $A$  上取一个固定的 Turing 机  $\mathfrak{M}$ 。设  $\mathscr{S}$  是  $A$  中对于算法  $\mathfrak{A}$  作为原始数据的字。机器  $\mathfrak{M}$  的初始构形为：1) 字  $\mathscr{S}$  无空格地印在带子上，其余方格空着 (即保留空白字母)；2) 机器  $\mathfrak{M}$  准备扫描字  $\mathscr{S}$  的第一个字母所在的方格；3)  $\mathfrak{M}$  处于初始状态 (如果  $\mathscr{S}$  是空字，那么带子也是空的，并且可以扫描任一方格)。假定  $\mathfrak{M}$  从这个初始构形开始完成其运行，考虑在终止构形下  $\mathfrak{M}$  扫描带子上的方格，如果打印在这个方格上的是空白字母，那么  $\mathfrak{A}(\mathscr{S})$  是空字。否则， $\mathfrak{A}(\mathscr{S})$  是打印在带子上的字，它包含其扫描的方格上的字母，但不含任一空白字母的最大截段的字。

有种种强有力的理由认为，用 Turing 机概念使字母表上算法 (algorithm) 的一般概念精确化是适宜的。即它保证了，对于某些字母表上的每一个算法  $\mathfrak{A}$ ，可以构造一个 Turing 算法，使得在与算法  $\mathfrak{A}$  有相同初始数据下得到相同结果。这个约定在算法论中称为 Turing 论题 (Turing thesis)。Turing 论题的可接受性等价于对于部分递归函数的 Church 论题 (Church thesis) 或对于正规算法 (normal algorithm) 的正规化原理的可接受性。然而，与后面两个论题相比较，Turing 论题有更强的说服力。事实上，根据一个选好的计划进行计算，数学家的行为在某种程度上类似于 Turing 机：在考虑他的某些书写位置和某种现有“意向状态”时，由于受到新的“意向状态”的刺激，他在书写中作出必要的改变，并且进一步仔细考虑下一步的书写，他完成了比 Turing 机更复杂的步骤这个事实原则上似乎没有重要意义。

根据描述的结构和运行的类型，Turing 机是非常



一般的一类自动机，因此 Turing 机的思想在很大程度上促进了抽象自动机理论的产生，并且大量地预见它们特有的性质（见自动机 (automaton)；自动机理论 (automata, theory of)）。

Turing 机有过多次修改。流行最广的是多带 Turing 机 (multi-tape Turing machine)，它的每一条带上有一个或几个读头。读头的运动和在带子上打印字母是依据控制系统的程序同时进行的。多带 Turing 机用于相对算法的形式化是方便的。于是一个函数  $f$  相对于一个函数  $g$  是 (算法) 可计算的，如果存在一个计算  $f$  的多带 Turing 机，而这个计算是在任一初始构态下， $g$  的所有值按一个固定次序打印于一条带子上的条件下进行的。用这种方式，依据相对计算，人们可以引进算法论中的重要概念：Turing 可归约性，以及算法可归约性 (algorithmic reducibility) 的其他形式。用多带 Turing 机形式化概率算法 (probabilistic algorithm) 概念是自然的。通常的方法是：一个随机序列打印在多带 Turing 机的一条带子上；Turing 机每一个时刻恰好处理这个序列的一个符号。另一个方法是 Turing 机的控制系统的程序允许存在左侧相同的几个指令，选择指令中的这个或那个用于处理给定的概率。非确定性 Turing 机 (non-deterministic Turing machine) 概念基于类似的思想。这里仍旧是控制系统的程序可以有几个左侧相同的指令。在这两种情况下，代替对给定输入的单独计算，还考虑与程序相容的所有可能的计算的类。对于概率 Turing 机，这种计算的概率是要考虑的；对于非确定性 Turing 机，计算自身的可能性要考虑。

亦见算法的描述复杂性 (algorithm, complexity of description of an)；算法的计算复杂性 (algorithm, computational complexity of an)；可计算函数 (computable function)；机器 (machine)。

#### 参考文献

- [1A] Turing, A. M., On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.*, (2), **42** (1937), 230 – 265.
- [1B] Turing, A. M., On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem, a correction, *Proc. London Math. Soc.* (2), **43** (1937), 544 – 546.
- [2] Post, E. L., Finite combinatory processes - formula 1, *J. Symbolic Logic*, **1** (1936), 3, 103 – 105.
- [3] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论 (上、下), 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985)。
- [4] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions, Wolters-Noordhoff, 1970)。

[5] Mendelson, E., Introduction to mathematical logic, v. Nostrand, 1964.

[6] Minsky, M. L., Computation: finite and infinite machines, Prentice-Hall, 1967.

[7] Машины Тьюринга и рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1972 (译自德文)。

Н. М. Нагорный, С. С. Марченко 撰

【补注】亦见复杂性理论 (complexity theory)；形式语言和自动机 (formal languages and automata)；不可判定性 (undecidability)。对于 Turing 机作为直观算法概念的形式化和 Church 论题的重要性参阅 [A1] 和 [A2]，对于 Turing 机和复杂性理论的关系也参阅 [A1] 和 [A2]。

#### 参考文献

- [A1] Salomaa, A., Formal languages, Acad. Press, 1973.
- [A2] Salomaa, A., Computation and automata, Cambridge Univ. Press, 1985.
- [A3] Davis, M., Computability and unsolvability, McGraw-Hill, 1958 (中译本: M. 戴维斯, 可计算性与不可解性, 北京大学出版社, 1984)。
- [A4] Hopcroft, J. E. and Vllman, J. D., Introduction to automata theory, languages and computation, Addison Wesley, 1979.
- [A5] Lewis, H. R. and Papdimitriou, C. H., Elements of the theory of computation, Prentice-Hall, 1981.

卢景波 译 罗里波 校

#### 孪生素数 [twins 或 prime twins; близнецы]

一对素数，相差为 2。广义孪生素数 (generalized twins) 是一对相继的素数，相差为  $2m$ ，其中  $m$  为给定的自然数。查阅素数表，很容易发现孪生素数的例子。例如，3 和 5，5 和 7，11 和 13，17 和 19。广义孪生素数，对于  $m = 2$ ，例如有 13 和 17，19 和 23，43 和 47。直到现在，还不知道孪生素数的集合，甚至对于任何给定的  $m$ ，广义孪生素数的集合，是否为无穷的。这就是孪生素数问题 (twin problem)。

#### 参考文献

- [1] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, Teubner, 1959, Heft 13, Teil 1 (中译本: 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963)。
- [2] Trost, E., Primzahlen, Birkhäuser, 1953.

Н. И. Климов 撰

【补注】已经知道，无穷和  $\sum 1/p$  是有限的，其中  $p$  取遍所有孪生素数对中的第一个素数，见 Brun 筛法 (Brun sieve)；Brun 定理 (Brun theorem)。

【译注】已有的大量资料说明，似乎存在无穷多对孪生素数，例如，已知在小于  $10^5$  的自然数中有 1224



对孪生素数, 当小于  $10^6$  时有 8169 对, 当小于  $3.3 \times 10^7$  时有 152, 892 对. 目前已知当小于  $1.37 \times 10^{14}$  时共有 182, 312, 485, 795 对孪生素数, 而目前已知的最大孪生素数对是

$$570918348 \times 10^{5120} \pm 1,$$

共 5129 位 (见 [B1]).

#### 参考文献

[B1] Ribenboim, P., The new book of prime number records, Springer, 1996.

[B2] 王元, 素数, 九章出版社, 1997.

杜小杨 张鸿林 译

#### 二体问题 [two-body problem; двух тел задача]

两个分别具有质量  $m_1$  和  $m_2$  的质点  $P_1$  和  $P_2$  在 Newton 引力的相互作用下, 在三维 Euclid 空间  $E^3$  中运动的问题. 这个问题是  $n$  体问题的一个特例.  $n$  体问题可用  $6n$  个常微分方程的方程组来描写, 有 10 个独立积分: 即 6 个积分描写惯性中心的运动, 3 个积分描写面积定律 (相当于角动量守恒定律), 和一个积分描写能量守恒定律 ([1]). 二体问题还有三个 Laplace 积分 (其中一个独立于上面列出的积分的), 而且是完全可积的 ([2]).

在特殊的坐标系内采用这些积分会使二体问题的积分变得容易. 如果将 Descartes 坐标  $x, y, z$  的原点置于质心  $(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) / (m_1 + m_2)$  而  $z$  轴指向相对的角动量向量, 则相对位置向量  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (x, y, z)$  的运动就处于  $z = 0$  的平面之内, 并满足下面的方程:

$$\mu \ddot{x} = -fxr^{-3}, \mu \ddot{y} = -fyr^{-3}, \quad (1)$$

其内  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  为折合质量,  $f$  为引力常数. (1) 式有四个积分:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c \text{ (面积定律)},$$

$$\frac{1}{2} \mu (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - fr^{-1} = h \text{ (能量)},$$

$$\mu^2 c \dot{y} - \mu f x r^{-1} = \lambda_1 \text{ 和 } \mu^2 c \dot{x} - \mu f y r^{-1} = -\lambda_2$$

(Laplace).

这些方程之间有如下关系:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2\mu^3 h c^2 + \mu^2 f^2.$$

这里

$$c^2 = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \mu r, \quad (2)$$

也就是说, 相对位置向量的轨道是参数为  $p = c^2/\mu$  的圆锥截线, 其长半轴  $a = -\mu/(2h)$ , 偏心距为  $e =$

$\mu^{-1} \sqrt{1 + 2hc^2}$ , 近中心点黄经 (longitude of pericentre) 为  $\omega$  ( $\lambda_1 = \mu e \cos \omega$ ,  $\lambda_2 = \mu e \sin \omega$ ), 而焦点在坐标原点. 相对位置向量在轨道上的位置由真近点距 (true anomaly)  $v$  确定, 从其指向近中心点 (pericentre) 的方向计算; 于是 (2) 式意味着  $r = p/(1 + e \cos v)$ . 如果  $c \neq 0$ , 则可能有下面三种轨道:

I) 当  $h < 0$  当为椭圆.

II) 当  $h > 0$  当为双曲线.

III) 当  $h = 0$  当为抛物线.

如果  $c = 0$ , 则运动轨道是直线. 二体问题描写了行星相对于太阳或卫星相对于行星等等的未受干扰的 Kepler 运动.

#### 参考文献

[1] Siegel, C. L., Vorlesungen über Himmelmeechanik, Springer, 1956.

[2] Абалакин, В. К. (и др.), Справочник по небесной механике и астродинамике, М., 1971.

А. Д. Брюно 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Poincaré, H., Les methodes nouvelles de la mécanique celeste, Gauthiers-Villars, 1899.

[A2] Siegel, C. L. and Moser, J., Lectures on celestial mechanics, Springer, 1971.

[A3] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (中译本: В. И. Арнольд, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992).

[A4] Abraham, R. and Marsden, J. E., Foundations of mechanics, Benjamin, 1978.

王克仁 译 诸德超 校

#### 二常数定理 [two-constants theorem; двух констант теорема]

设  $D$  是  $z$  平面内一有限连通 Jordan 区域,  $w(z)$  是  $D$  内的正则解析函数满足不等式  $|w(z)| \leq M$ , 且在边界  $\partial D$  的某个弧  $\alpha$  上满足关系式

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} |w(z)| \leq m < M, \quad z \in D, \quad \zeta \in \alpha.$$

则在集合

$$\{z \in D: 0 < \lambda \leq \omega(z; \alpha, D) < 1\}$$

的每一点  $z$  有不等式

$$|w(z)| \leq m^\lambda \cdot M^{1-\lambda},$$

其中  $\omega(z; \alpha, D)$  是弧  $\alpha$  关于  $D$  在  $z$  点的调和测度 (harmonic measure). 若对 (满足条件  $\omega(z; \alpha, D) = \lambda$ ) 的某点  $z$  等号成立, 则对所有的  $z \in D$  及所有的  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , 等式均成立, 而且在这种情形函数  $w(z)$  具有如下形式:

$$w(z) = e^{ia} m^{\varphi(z)} M^{1-\varphi(z)},$$

其中  $a$  是实数,  $\varphi(z)$  是  $D$  内的解析函数, 满足  $\operatorname{Re} \varphi(z) = \omega(z; \alpha, D)$  ([1], [2]).

二常数定理给出解析函数由其边界值所唯一确定的定量表达式, 并且在函数论中有重要应用 ([3]). Hadamard 的三圆定理可作为一种特殊情形从该定理得出 (见 **Hadamard 定理** (Hadamard theorem)). 对于二常数定理在空间调和函数情形的令人满意的类似结果可见 [4], [5].

#### 参考文献

- [1] Nevanlinna, F. and Nevanlinna, R., Über die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, *Acta Soc. Sci. Fennica*, 5 (1922), 5.
  - [2] Ostrowski, A., Über allgemeine Konvergenzsätze der komplexen Funktionentheorie, *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.*, 32 (1923), 9 – 12, 185 – 194.
  - [3] Nevanlinna, R., *Analytic functions*, Springer, 1970 (译自德文).
  - [4] Мергелян, С. Н., «Успехи матем. наук», 11 (1956), 5, 3 – 26.
  - [5] Соломенцев, Е. Д., «Докл. АН Арм. ССР», 42 (1966), 5, 274 – 278. Е. Д. Соломенцев 撰
- 【补注】 有一个更为一般的  $n$  常数定理 ( $n$ -constants theorem) ([A2]): 设  $f(z)$  在区域  $D$  内全纯, 该区域的边界是  $n$  条不同的可求长弧  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  的并集; 假定对每个  $j$  存在常数  $M_j$  使得当  $z$  趋于  $\alpha_j$  的任一点时,  $f(z)$  的绝对值的极限不超过  $M_j$ . 则对于每个  $z \in D$  有

$$\log |f(z)| \leq \sum_{j=1}^n \omega(z; \alpha_j, D) \log M_j.$$

#### 参考文献

- [A1] Markushevich, A. I., *Theory of functions of a complex variable*, 2, Chelsea. reprint, 1977, 210 – 214 (译自俄文).
- [A2] Hille, E., *Analytic function theory*, 2, Chelsea, reprint, 1987, 409 – 410. 杨维奇 译

**二维圆环** [two-dimensional annulus; двумерное кольцо], 拓扑学中的

平面上含在两个非恒同的同心圆之间的闭的部分的拓扑象. 二维圆环是具有两个边界分支的亏格零的可定向二维流形 (two-dimensional manifold).

A. B. Чернавский 撰

【补注】 因此, 一个 2 维圆环同胚于  $S^1 \times I$ , 其中  $S^1$  是圆,  $I$  是区间. 一个  $n$  维圆环 ( $n$ -dimensional annulus) 是同胚于  $S^{n-1} \times I$  的空间.  $n$  维圆环猜想 (annulus conjecture) 指出, 对任何使得  $h(B^n) \subset \operatorname{Int}(B^n)$

( $B^n$  的内部) 的同胚  $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , 闭差

$$B^n \setminus h(\operatorname{Int}(B^n))$$

同胚于圆环  $S^{n-1} \times I$ . 这里  $B^n = \{x \in \mathbf{R}^n: \|x\| \leq 1\}$ .

**稳定同胚猜想** (stable homeomorphism conjecture) 断言, 任何保持定向的同胚  $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  可以写成有限积  $h = h_1 \cdots h_m$ , 其中每个  $h_i$  在  $\mathbf{R}^n$  的某个开子集上为恒同.

对维数  $n$  的稳定同胚猜想蕴涵着维数  $n$  的圆环猜想.

稳定同胚猜想 (因此圆环猜想) 最后已对所有的  $n$  建立:  $n = 1$ , 经典的;  $n = 2$  ([A6]);  $n = 3$  ([A4]);  $n \geq 5$  ([A3]) 和最后  $n = 4$  ([A2]) 作为维数 5 中特殊的受控  $h$  配边 ( $h$ -cobordism) 理论的应用, 称为薄  $h$  配边定理 (thin  $h$ -cobordism theorem) 或 Quinn 薄  $h$  配边定理 (Quinn thin  $h$ -cobordism theorem).

#### 参考文献

- [A1] Edwards, R. D., The solution of the 4-dimensional annulus conjecture (after Frank Quinn), *Contemporary Math.*, 35 (1984), 211 – 264.
- [A2] Quinn, F., Ends of maps III: dimensions 4 and 5, *J. Diff. Geom.*, 17 (1982), 503 – 521.
- [A3] Kirby, R., Stable homeomorphisms and the annulus conjecture, *Ann. of Math.*, 89 (1969), 575 – 582.
- [A4A] Moise, E. E., Affine structures in 3-manifolds I, *Ann. of Math.*, 54 (1951), 506 – 533.
- [A4B] Moise, E. E., Affine structures in 3-manifolds II, III, *Ann. of Math.*, 55 (1952), 172 – 176, 203 – 222.
- [A4C] Moise, E. E., Affine structures in 3-manifolds IV, *Ann. of Math.*, 56 (1953), 96 – 114.
- [A5] Brown, M. and Gluck, H., Stable structures on manifolds I – III, *Ann. of Math.*, 79 (1974), 1 – 58.
- [A6] Radó, T., Über den Begriff der Riemannsche Fläche, *Acta Univ. Szeged*, 2 (1924 – 1926), 101 – 121.

徐森林 译

**二维胞腔** [two-dimensional cell; двумерная клетка]

圆盘 (disc) 的拓扑象 (亦见拓扑圆盘 (disc, topological)).

**二维纽结** [two-dimensional knot; двумерный узел]

二维球面  $S^2$  在四维球面  $S^4$  中的合痕嵌入的类. 局部可平面化的条件通常被强加上. 研究的方法在于通过三维平行平面的丛考虑  $S^2$  的截面. 基本的问题是: 当纽结的群  $\pi_1(S^4 \setminus S^2)$  同构于  $\mathbf{Z}$  时, 该纽结是否会是平凡的. 已经知道, 在这样的情况中, 余集  $S^4 \setminus S^2$  有  $S^1$  的同伦型.



$S^4$  中的一个 3 带 (ribbon) 是浸入  $\varphi: \Delta^3 \rightarrow S^3$  的象  $D^3$ , 其中  $\Delta^3$  是三维圆盘, 使得: 1)  $\varphi|_{\partial\Delta^3}$  是一个嵌入; 2)  $\varphi$  的自交由有限个两两不交的二维圆盘  $D_1, \dots, D_n$  所组成; 3) 每个圆盘  $D_i$  的原象  $\varphi^{-1}(D_i)$  是两个圆盘  $D'_i$  和  $D''_i$  的并, 使得

$$D'_i \cap D''_i = \emptyset, D'_i \subset \text{int } \Delta^3, \partial D''_i = D'_i \cap \partial\Delta^3.$$

边界  $\partial\Delta^3$  的象是  $S^4$  中的二维纽结. 这样得到的纽结称作带状纽结 (ribbon knots). 这是最彻底地研究二维纽结的类的一种. 任何二维带状纽结是球面  $S^4$  上的某个三维子流形的边界, 它或者同胚于圆盘  $\Delta^3$  或者同胚于一些  $(S^1 \times S^2) \setminus \Delta^3$  的连通和. 二维带状纽结是平凡的, 当且仅当它的余集的基本群同构于  $\mathbb{Z}$ . 群  $G$  是  $S^4$  中某个二维带状纽结的群, 当且仅当它有 Wirtinger 表现 (Wirtinger presentation) (即表现  $|x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m|$ , 其中每个关系有形式  $x_i = \omega_{i,j} x_j \omega_{i,j}^{-1}$ ), 在表现中, 关系的数目小于生成元个数且  $G/[G, G] = \mathbb{Z}$ .

所有二维纽结的群的类还没有完全被描述. 已知这类广于  $S^3$  中的一维纽结的类但小于  $S^{k+2}$  ( $k \geq 3$ ) 中的  $k$  维纽结的群的类. 后面的类已被完全刻画了特征 (见多维纽结 (multi-dimensional knot)). 下面的性质由二维纽结群所展示 (但一般不被  $S^5$  中的三维纽结的群所展示):

$$\dim H_2(G', \mathbb{Q}) \leq \dim H_1(G', \mathbb{Q}),$$

其中  $G' = [G, G]$  是换位子群: 在有限群  $T = \text{Tors}(G'/G'')$  上, 存在一个非退化对称形式  $L: T \otimes T \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , 使得对任何  $m \in G, x, y \in T$  有  $L(x, y) = L(\tau x, \tau y)$ , 其中  $\tau: T \rightarrow T$  是  $G$  中由与元素  $m$  共轭导出的自同构.

$\pi_2(S^4 \setminus S^2)$  的计算只对特殊类型的二维纽结做过, 例如那些通过 Artin 构造得到的带状纽结和纤维纽结.

A. B. Чернавский, M. Ш. Фарбер 撰 徐森林 译

**二维流形** [two-dimensional manifold; двумерное многообразие]

一个拓扑空间 (topological space), 它的每一个点都有一个同胚于平面或闭半平面的邻域. 它是最容易想象的一类流形; 它包括球面, 圆盘, Möbius 带, 射影平面, Klein 瓶等等.

只有同胚于一个半平面邻域的那些点 (如果有) 形成了流形的边界 (boundary of the manifold).

最重要的一类二维流形是闭可定向的二维流形 (closed orientable two-dimensional manifolds), 或闭曲面 (closed surface). 最简单的二维流形, 球面  $S^2$ , 是亏格零的曲面 (见曲面的亏格 (genus of a surface)).

一个亏格  $g$  的曲面从  $S^2$  通过将  $2g$  对不交圆盘的切除和将每对边界圆与弯曲的圆柱面的边界叠合而得到 (图 1). 这个过程就是熟知的环柄的粘合 (glueing of handles), 而亏格  $g$  的闭曲面就是有  $g$  个环柄的球面 (sphere with  $g$  handles) (图 2).

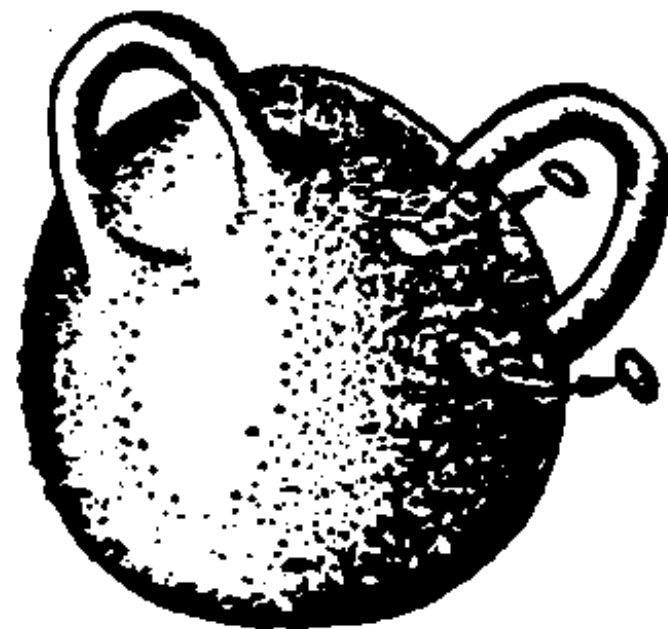


图 1



图 2

更广泛的二维流形类由紧可定向二维流形 (compact orientable two-dimensional manifolds), 或带边界曲面 (surface with boundary) 组成, 该带边曲面可以从任何闭曲面通过切除有限个不交圆盘的点得到. 它们的边界形成了这样产生的二维流形的边界. 这个流形的亏格被认为是原来曲面的亏格 (图 3). 亏格零的带边二维流形是一个圆盘或有孔圆盘.



图 3

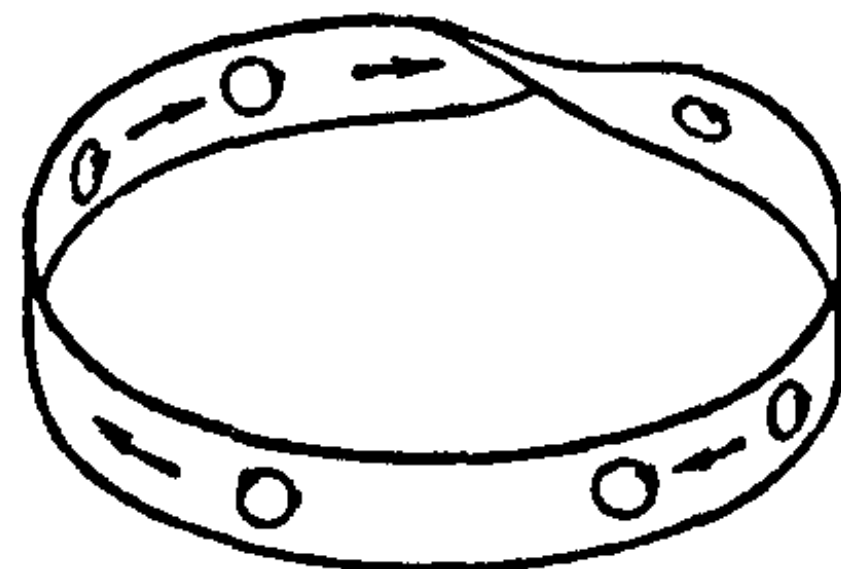


图 4

另一类二维流形是紧不可定向二维流形 (compact non-orientable two-dimensional manifolds), 它们也可以是闭的或有边界的. 最简单的这样的流形是 Möbius

带 (Möbius strip) (图 4). 它不能定向, 即不可能在这条带上同时围绕每一点转一圈而选定一个方向使得这些方向连续地彼此从一个进入另一个. 另一个例子是射影平面 (projective plane)  $\mathbf{R}P^2$ .  $\mathbf{R}P^2$  中的任何射影直线的每一个邻域包含 Möbius 带, 并且因为这个理由,  $\mathbf{R}P^2$  也是不可定向的. 在一般情形中, 紧不可定向二维流形可从闭曲面通过消除不交的圆盘的内点和用 Möbius 带代替它们中的某些 (或全部) (图 5 表示作为交叉覆叠的 Möbius 带, 即在线段上有自交). 射影平面  $\mathbf{R}P^2$  可以从球面上用 Möbius 带代替圆盘之一得到. 如果用 Möbius 带代替两个圆盘, 就得到一个 Klein 曲面 (Klein surface) (图 6), 它也能方便地表示为一个具有不同定向的环柄的球

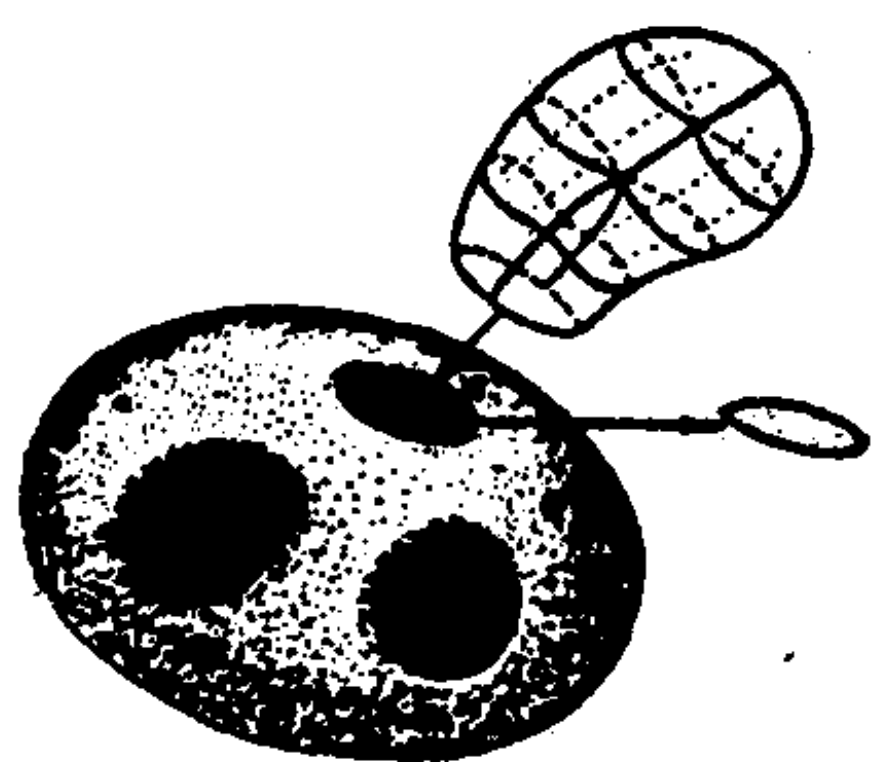


图 5

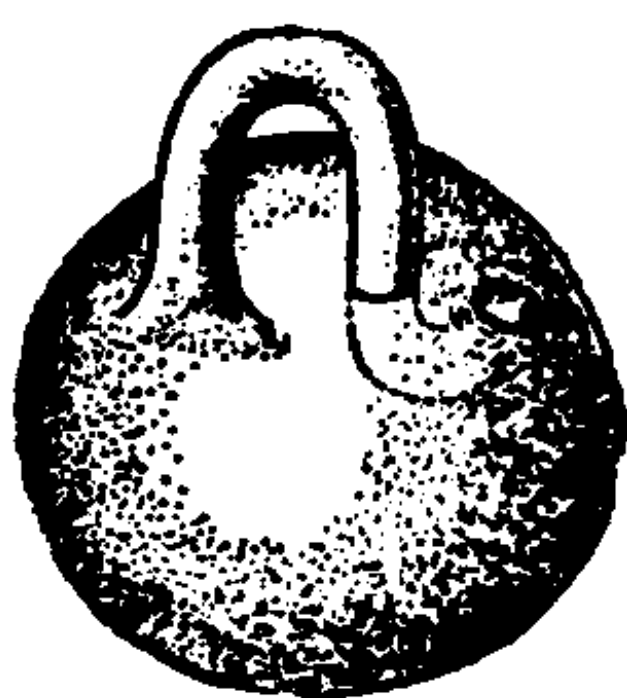


图 6

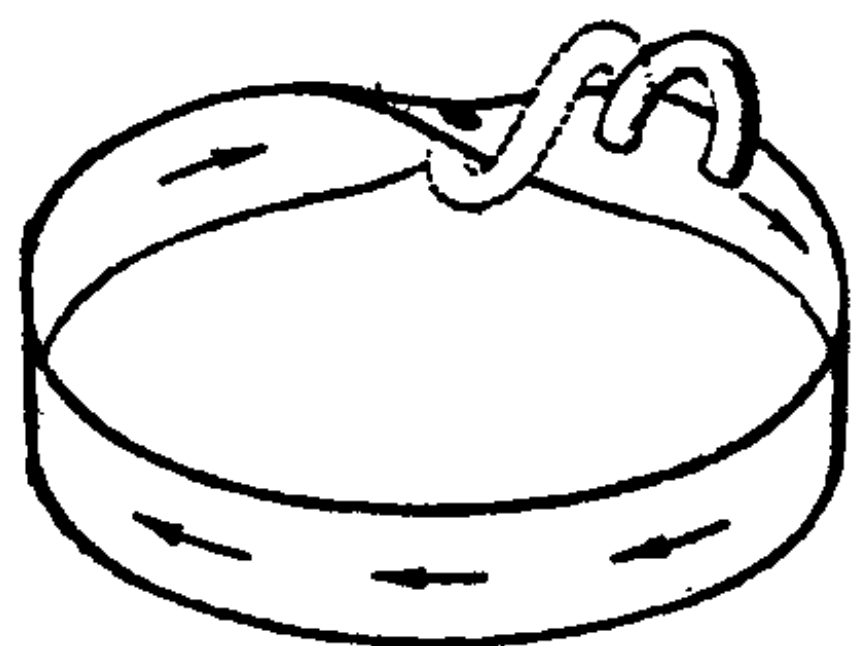


图 7

面. 一般地, 两个 Möbius 带的粘贴可用一个不可定向的环柄的粘贴来代替且反之亦然. 另一方面, 如果一个通常的环柄的一端沿一个 Möbius 带的中间线移动, 那么环柄将变成不可定向的 (图 7). 因此, 在一个不可定向的二维流形中, 任何环柄可以被二个 Möbius 带代替, 反之亦然.

带环柄的球面或带 Möbius 带的球面, 可能还有带被切除了圆盘的球面说明了所有紧连通 (由一片组成) 二维流形. 非紧的二维流形, 例如平面  $\mathbf{R}^2$ , 半平面  $\mathbf{R}_+^2$ , 一般地, 任一紧二维流形的任何开真子集可能有非常复杂的结构. 因此, 如果取  $\mathbf{R}^2$  中无穷多个圆盘移开到无穷且用环柄或 Möbius 带替代它们, 所得到的二维流形将不是任何紧二维流形的开子集 (图 8). 无边的非紧二维流形称作开的 (open).

研究二维流形的一个方法是组合法, 在该方法

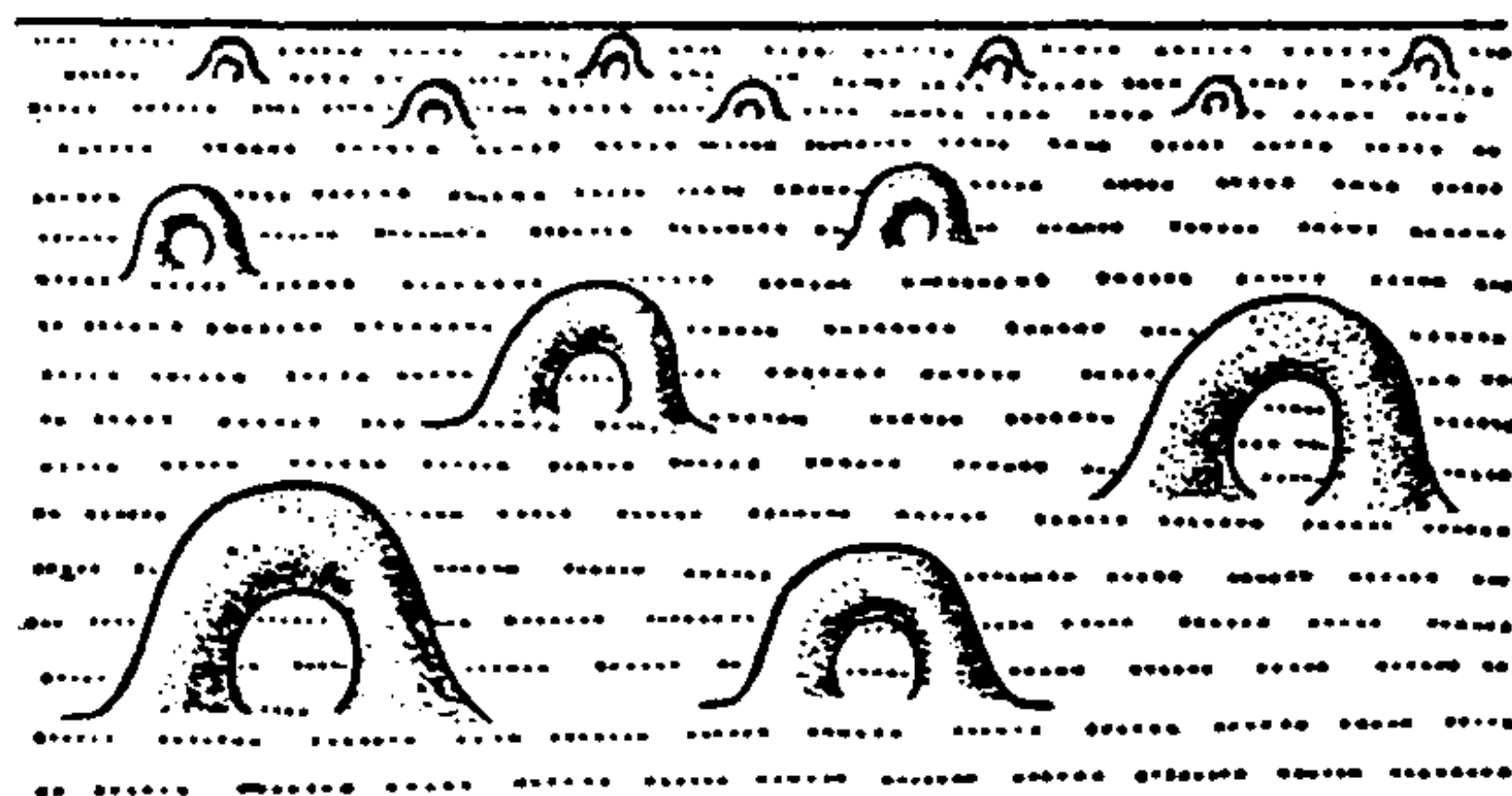


图 8

中, 流形当作从凸多边形 (面体) 通过公共边毗连到另一个被建立起来. 以三角形作为面的二维流形的三角剖分 (triangulation) 特别重要. 如果两个二维流形被三角剖分, 它们的三角剖分称为是组合等价的 (combinatorially equivalent), 如果它们有同构的重分, 对它, 建立元素之间的一一对应是不可能的, 在此对应下, 各自面的毗邻性被保持着. 在一个已三角剖分的二维流形的二维复形 (complex) 中间, 挑选出那些, 对于它, 每个边有一个相邻的面 (该边在边界上) 或两个面, 且对于它, 这些面形成了面的循环 (星形), 它们绕每个三角剖分的顶点顺序地从一个面到相邻的另一个面 (图 9). 如果顶点不在边界 ( $a$ ) 上, 则该循环是闭的, 而如果顶点在边界 ( $b$ ) 上, 则它不是闭的. 二维流形的紧性等价于任何三角剖分的面的数量的有限性, 而连通性等价于通过边的链连接任何两个顶点的可能性. 在连通的二维流形中, 任何两个面由一条面的链相互连接的, 在该链中, 两个相邻的面有一条公共边. 不可定向性等价于包含一个 Möbius 带的链的存在性.

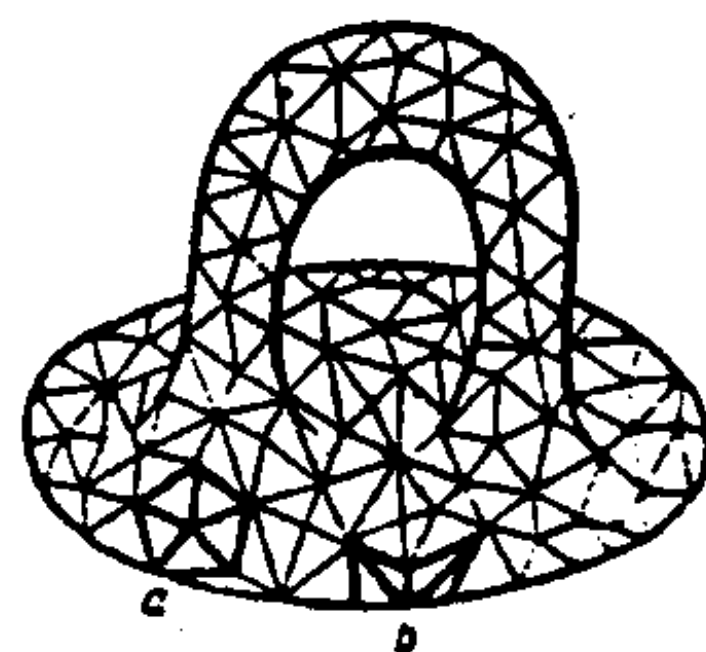


图 9

三角剖分是引进不变量 (invariant) 的一个方便的方法, 这不变量也就是在组合等价的二维流形中相同的特征. 最重要的不变量是 Euler 示性数 (Euler characteristics)  $\chi(M)$ , 对已给的三角剖分, 它等于数  $V - E + F$ , 其中  $V, E, F$  分别是三角剖分的顶点、边和面的数目.  $\chi$  在重分下不变, 结果是: 如果  $\chi(M_1) \neq \chi(M_2)$ , 那么  $M_1$  和  $M_2$  不组合等价. 对具有  $g$  个环柄的球面,  $\chi(M) = 2 - 2g$ ; 特别地, 就球



面而言, 它等于 2, 对环面, 它等于 0, 对射影平面, 它等于 1, 对 Klein 瓶, 它等于 0, 对具有  $k$  个 Möbius 带的球面, 它等于  $2 - k$ . 如果从一个二维流形  $M$  中切除  $k$  个圆盘的内部, 则  $\chi(M)$  将随  $k$  减少. 如果给一个紧连通的二维流形指定三个数

$$\{\varepsilon, \chi, k\},$$

其中  $\varepsilon = \pm 1$ , 依赖于定向性,  $\chi = \chi(M)$  和  $k$  是有界分支的数目, 则可以得到至多差一个组合等价的二维紧流形的完全的描述. 这就是为什么这些三元组对于上面所描述的二维流形 (带环柄的球面、带 Möbius 带的球面及可能带细孔的也一样) 是不同的, 而任何紧连通二维流形组合等价于这些流形中的一个 ([1], [3]). 开二维流形的分类也就得到了, 但由于在此情形中的曲面是不可数的, 问题就更为复杂 ([5]).

作为二维流形的纯拓扑的研究, **Jordan 定理** (Jordan theorem) 是十分重要的. 设  $C$  是一条无自交点的曲线, 它连接流形  $M$  的边界上的两点, 或者是一条封闭曲线; 这称为  $M$  的截线 (section). 如果  $M$  上任何两点用一条不与这条截线  $C$  相交的弧连接, 则截线  $C$  不将  $M$  分开. 不分开  $M$  的截线的最大数目再加 1 就是皆知的  $M$  的连通数 (connectedness number). 因此, 根据 Jordan 定理, 球面和圆盘是单连通的. 亏格  $g$  的闭曲面的连通数是  $2g + 1 = 3 - \chi$ . 对这样的曲面, 可以选择  $2g$  条截线, 从同一点发出的所有的截线重分成偶对以便每个偶对实现为一个环柄的截线. 这样的选择称为  $M$  的一个典范截线 (canonical section): 如果将  $M$  沿所有这些截线切开, 就得到一个圆盘. 不可定向的二维流形的典范截线 (沿 Möbius 带的中间线) 的状况是相似的. 对于带边的二维流形, 从基点到边界的每一个分支附加截线是需要的. 反过来, 如果将一个圆盘的边界给重分成一些段, 将这些段成对地粘合起来, 就产生出一个二维流形. 如果粘合像图 10 显示的那样作出, 则得

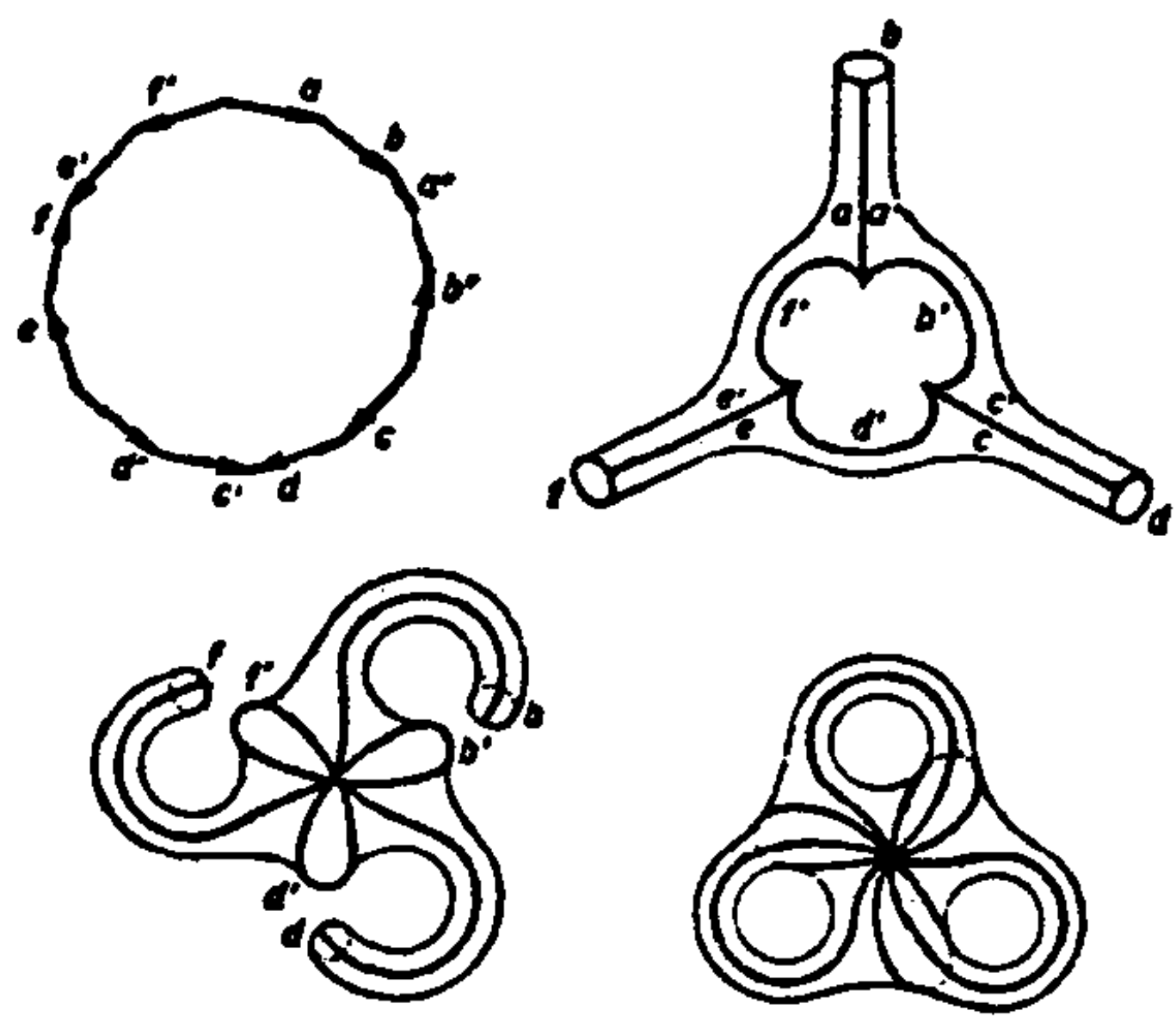


图 10

到一个定向的二维流形, 如果像图 11 中那样实现, 则流形是不可定向的. (段  $x$  与  $x'$  粘合在一起, 使得箭头的方向恰好重合.) 如果有几段保留不粘合, 则边界就得到了.

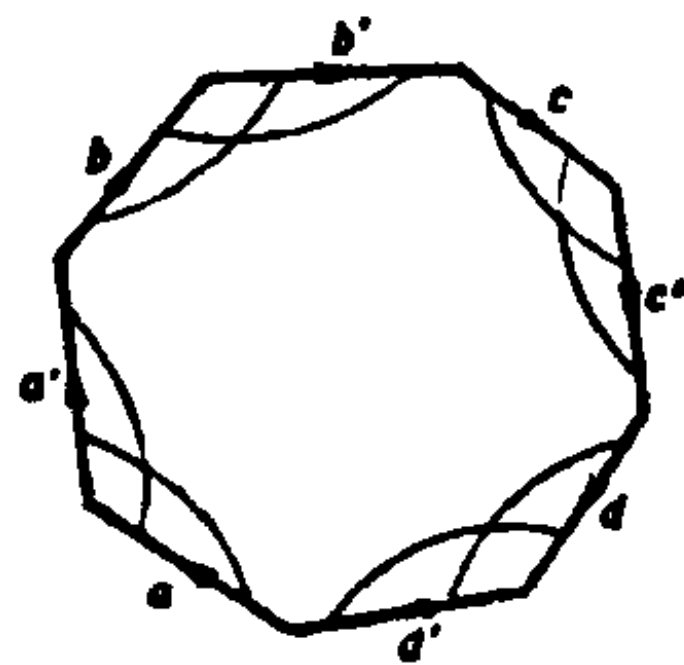


图 11

Jordan 定理也使给出二维流形的拓扑特征化成为可能. 特别地, 球面是包含一个圆的拓扑象的唯一的局部连通连续统 (locally connected continuum), 它被一个圆的任何象断开, 任何点对不断开. 一般地, 二维流形与其他对象的区别在于局部连通的连续统的分类, 它是由事实: 它们不被任何点对断开而被足够小的圆断开 (Wilder 定理 (Wilder theorem), 1949).

因为对同胚的二维流形, 任何两个三角剖分是组合等价的, 故二维流形的组合分类是纯拓扑性质的分类. 与紧的二维流形唯一地有  $\varepsilon, \chi, k$  的特征的同时, 另外的拓扑不变量在研究二维流形的性质中也是重要的. 首先是一维同调群 (homology group)  $H_1(M)$  和基本群 (fundamental group)  $\pi_1(M)$ . 对于亏格  $g$  的闭曲面,  $H_1(M)$  等于  $2g$  个整数群  $\mathbb{Z}$  的直和;  $g$  对典范截线通常取作生成元. 对具有连通数  $s$  的不可定向闭二维流形,  $H_1(M)$  是  $s - 1$  个群  $\mathbb{Z}$  与一个  $\mathbb{Z}_2$  的和. 取的生成元是典范截线 (除一个外) 的截和无定向的道路 (在与某个二维流形交后, 该道路变成可定向的了).  $\pi_1(M)$  的一个表示 (presentation) 是借助于一个典范截线最方便地得到的: 它的截取作生成元, 而关系通过横截 (从截得到的) 圆盘的边界而得到. 在可定向的情形中, 可得到表示

$$\{a_1, b_1; \dots; a_g, b_g; a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1\},$$

而在不可定向情形中, 得到表示

$$\{a_1, \dots, a_s; a_1^2 \dots a_s^2 = 1\}.$$

注意到这样一个重要事实: 平面  $\mathbb{R}^2$  是任何无边的连通的二维流形 (除  $S^2$  和  $\mathbb{R}P^2$  外) 的万有覆叠 (universal covering), 而相应的单值群 (monodromy group) 由 Euclid 或 Лобачевский 平面的运动实现. 因此, 环面通过平面中将彼此相差  $m\mathbf{v}_1 + n\mathbf{v}_2$  的所有点叠合而得到的, 其中  $\mathbf{v}_1$  和  $\mathbf{v}_2$  是两个给定的向量,

$m$  和  $n$  是整数. 在应用中, 分支覆盖也是重要的. 考虑映射  $f: M_1 \rightarrow M_2$ , 其中  $M_1$  和  $M_2$  是闭的三角剖分的二维流形, 该映射将  $M_1$  中的每个面线性地映入  $M_2$  中的某个面, 且对  $M_1$  中的每一条边  $l$ , 两个毗邻的面映入  $M_2$  中毗邻于边  $f(l)$  的两个不同的面. 对于不是顶点的每个点  $x \in M_1$ , 可以找到它在  $M_1$  中的一个邻域, 使得通过  $f$  一对一地变到  $M_2$  中点  $f(x)$  的一个邻域. 如果对  $M_1$  的一个顶点  $v$ , 循环地穿过所有相邻的面, 则对  $M_2$  中各自的面将绕  $M_2$  中的  $f(v)$  循环地穿过一个整数  $k$  次. 如果  $k = 1$ , 则  $v$  是寻常点 (ordinary point); 如果  $k > 1$ , 则  $v$  是一个分支点 (branch point), 而  $k$  是  $v$  处的分支的重数 (multiplicity of branching). 如果对  $w \in M_2$ ,  $f^{-1}(w)$  不包含分支点,  $w$  也称作寻常点 (ordinary point). 因为  $M_2$  中寻常点附近的原象由同样数的点组成, 所以由连续性, 该数对所有的寻常点是相同的. 称为覆盖层数 (number of covering sheets). 对可定向的二维流形, 这个数  $d$  就等于映射  $f$  的度 (见映射的度 (degree of a mapping)) (在不可定向的情形, 必须变成模 2 的). 如果  $f^{-1}(w)$  包含具有重数  $k_1, \dots, k_l$  的支点, 那么  $f^{-1}(w)$  包含  $\sum (k_i - 1)$  个点, 它少于寻常点原象的数目 (这里和取在所有  $M_1$  中的支点上). 因为顶点的数目  $V(M_1)$  是  $\sum (k_i - 1)$ , 它低于  $d \cdot V(M_2)$ , 而边和面数目由  $E(M_1) = d \cdot E(M_2)$  和  $F(M_1) = d \cdot F(M_2)$  给出, 所以有

$$\chi(M_1) = d \cdot \chi(M_2) - \sum (k_i - 1).$$

这就是 Riemann-Hurwitz 公式 (Riemann-Hurwitz formula).

从微分几何观点看来, 二维流形可以看作是具有附加结构 (例如度量, 联络等等) 的光滑流形, 或也可看作嵌入 (可能具有自交性) 到 Euclid 空间中. 一个光滑二维流形可以三角剖分使得边是光滑的弧和所有的角是非零的 (Cairns 定理 (Cairns theorem), 1934). 这里, 组合等价的三角剖分相当于微分同胚的二维流形, 反之亦然. 因此二维流形的分类对于光滑二维流形同样成立. 有关具有微分几何性质的二维流形的拓扑特征的定理的一个例子是 Gauss-Bonnet 定理 (Gauss-Bonnet theorem) ([3]): 闭曲面的曲率的积分 (更精确地, 由某个 Riemann 联络 (Riemann connection) 定义的 Gauss 曲率, 而该 Riemann 联络总可在一个光滑的二维流形上定义) 等于  $2\pi\chi(M)$ . 这个事实, 以及利用到 Grassmann 流形中的所谓 Gauss 映射 (特别地, 球面映射 (spherical map)) 的解释一样, 如果流形是浸入在 Euclid 空间中, 则被推广到示性类 (characteristic class) 的理论中. 另一个定理 (它也是该理论的源泉之一) 指出: 闭表面上的任何向量场的奇点的指标

(index) 的总和等于  $\chi(M)$ .

二维流形在复变函数论中起着重要的作用. 这里, 这样的流形有一个复结构, 即点的邻域中的局部坐标由解析函数相关联, 并称为 Riemann 曲面 (Riemann surface) ([4]). 它们都是可定向的. 闭 Riemann 曲面是复代数曲线 (algebraic curve) 的几何模型. 二维流形上的一个复结构不为它的微分拓扑结构所唯一确定. 例如在亏格  $g$  的曲面上, 如果  $g > 1$ , 则复结构形成了一个维数为  $6g - 6$  的连续统 Teichmüller 定理 (Teichmüller theorem, 1940) (见 Teichmüller 空间 (Teichmüller space)).

有时给二维流形的定义强加上特殊的要求, 例如, 作为拓扑空间, 它是 Hausdorff 的或有可数基. 特别地, 后一个条件对于流形可三角剖分是基本的: 不可三角剖分的二维 Hausdorff 流形存在 (见 Prüfer 曲面 (Prüfer surface)).

#### 参考文献

- [1] Александров, П. С., Ефремович, В. А., Очерк основных понятий топологии, М.-Л., 1936.
- [2] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination. Chelsea, reprint, 1956 (译自德文).
- [3] Бакельман, И. Я., Вернер, А. Л., Кантор, Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию "в целом", М., 1973.
- [4] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957.
- [5] Stoilow, S., Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Gauthier-Villars, 1938.

А. В. Чернавский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.
- [A2] Moise, E. M., Geometric topology in dimensions 2 and 3, Springer, 1977.
- [A3] Forster, O., Lectures on Riemann surfaces, Springer, 1977 (译自德文).
- [A4] Borisovich, Yu., Bliznyakov, N., Izrailevich, Ya. and Fomenko, T., Introduction to topology, Kluwer, 1993 (译自俄文).
- [A5] Millman, R. S. and Parker, G. D., Elements of differential geometry, Prentice-Hall, 1977.

薛春华 译

有界曲率的二维流形 [two-dimensional manifold of bounded curvature; двумерное многообразие ограниченной кривизны]

一个度量空间, 它是一个具有度量的二维流形 (two-dimensional manifold), 与二维 Riemann 几何学中的概念相类似, 在此度量下, 诸如一条曲线的长



度和全曲率, 集合的面积和全 Gauss 曲率都被定义.

二维 Riemann 空间和三维 Euclid 空间中的多面体曲面是有界曲率的二维流形的特殊情形. 在一般情形, 有界曲率的二维流形类可看成是二维 Riemann 流形类在适当的极限过程下的闭包.

设  $M$  是一个二维 Riemann 流形. 令  $K(x)$  为  $M$  在点  $x$  处的 Gauss 曲率 (Gaussian curvature),  $\sigma(E)$  为集合  $E \subset M$  的面积, 则  $E \subset M$  的全曲率为

$$\omega(E) = \iint_E K(x) d\sigma(x),$$

它的全绝对曲率为

$$|\omega|(E) = \iint_E |K(x)| d\sigma(x);$$

$E$  的全曲率的正部分为

$$\omega^+(E) = \iint_E K^+(x) d\sigma(x),$$

这里  $K^+(x) = \max\{0, K(x)\}$ . 设  $x, y$  是 Riemann 空间  $M$  中的两点, 记  $\rho(x, y)$  为  $M$  中连结点  $x$  和  $y$  的曲线长度的下界. 函数  $\rho$  是一个内度量 (internal metric), 它也被称为  $M$  上的自然度量 (natural metric).

设  $M$  是一个具有度量  $\rho$  的任意二维流形, 如果带有度量  $\rho$  的流形  $M$  等距于某个带有自然度量的二维 Riemann 空间, 则称度量  $\rho$  是 Riemann 的 (Riemannian).

具有度量  $\rho$  的二维流形  $M$  称为一个有界曲率的二维流形, 如果下列条件成立: 存在一系列定义在  $M$  上的 Riemann 度量  $\rho_n, n = 1, 2, \dots$ , 使得对于任一紧集  $A \subset M$ , 一致地有  $\rho_n \rightarrow \rho$  (即在集合  $A \times A$  上函数  $\rho_n(x, y)$  一致收敛于函数  $\rho(x, y)$ ), 而且序列  $|\omega_n|(A) (n = 1, 2, \dots)$  是有界的; 这里  $|\omega_n|$  是 Riemann 度量  $\rho_n$  的全绝对曲率. 有界曲率的二维流形可公理化地定义.

在上述所给出的有界曲率的二维流形定义中的充分条件在一定程度上可以减弱. 即一个带有度量  $\rho$  的二维流形  $M$ , 如果对流形上任一点, 总可以确定其邻域  $U$  和  $V$ , 这里  $V \subset U$ , 以及一系列定义在  $U$  上的 Riemann 度量  $\rho_n, n = 1, 2, \dots$ , 使得在  $V$  上一致地有  $\rho_n \rightarrow \rho$ , 而且序列  $\{\omega_n^+(V)\}$  是有界的, 则它是一个有界曲率的二维流形.

对任意有界曲率的二维流形, 可定义完全可加的集函数  $\sigma(E)$  和  $\omega(E)$ , 它们分别是集  $E$  的面积和曲率. 与 Riemann 的情形相对照,  $\omega(E)$  关于  $\sigma(E)$  不必是绝对连续的. 对于有界曲率的二维流形, 也可定义曲线的旋转的概念; 它类似于曲线的全测地曲率的概念.

三维 Euclid 空间中任一凸曲面是一个有界曲率的

二维流形. 在此情形, 一个集合的全曲率总是非负的.

有界曲率的二维流形可以有奇点, 如锥顶点  $p$  (对这种点,  $\omega(\{p\})$  是非零的), 棱, 具有柱形底的边缘, 等等.

#### 参考文献

- [1] Александров, А. Д., Залгаллер, В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны, М.-Л., 1962.
- [2] Александров, А. Д., Залгаллер, В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны, ч. 2, М.-Л., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 76).

Ю. Г. Решетняк 撰

【补注】也常使用术语诱导度量 (induced metric) 和内蕴度量 (intrinsic metric) 来代替自然度量.

#### 参考文献

- [A1] Aleksandrov, A. D. and Zalgaller, V. A., Intrinsic geometry of surfaces, Amer. Math. Soc., 1967 (译自俄文).
- [A2] Rinow, W., Die innere Geometrie der metrischen Räume, Springer, 1961.

沈纯理 译

### 断裂力学中的二维问题 [two-dimensional problems in fracture mechanics; двумерные задачи в механике разрушения]

#### 【补注】

此属可变形固体力学的一类问题, 它研究的是具有 (轴向) 贯穿裂纹 (或类似裂纹的缺陷) 的柱体内的应力和位移, 其内应力和位移的模式在平行于物体截面的各平面内都是相同的, 也就是说, 对于一个有穿透裂纹的薄板, 或者满足在面内载荷 (广义平面应力) 作用下的平面应变条件, 或者满足在面外弯曲载荷 (薄板弯曲) 作用下的纵向剪切条件. 同时也确定了这样的物体的极限平衡条件.

断裂力学中的二维问题, 根据所考虑有裂纹物体的性质 (例如, 线弹性或弹塑性材料, 粘弹性介质), 以及外部作用的类型 (例如, 载荷、温度或电磁场), 采用弹性力学、热弹性力学、粘弹性力学、塑性力学等不同的理论 (流变模型) 加以研究. 这些问题又可以分为动力学 (dynamic) 问题, 即物体的几何形状和外载是与时间有关的 (例如, 扩展中的裂纹), 以及静力学 (static) 问题, 即物体的几何形状和外载是与时间无关的. 研究得最为广泛的是断裂力学的线性的、静力学的二维问题.

裂纹体弹性力学理论的平面问题. 当作用于物体的外力垂直于柱体的轴, 而且在所有横截面上都相同时, 或者是对于作用于其面内的广义平面应力 (即在

受力的作用下薄板的变形, 亦见弹性理论的平面问题 (elasticity theory, planar problem of) 的情况, 固体的平衡可用弹性力学平面问题的, 即柱形物体平面应变的方程来描写. 如果采用 Descartes 坐标, 使  $xy$  平面与柱体的横截面 (对于平面应变问题) 或中面平面 (对于平面应力问题) 相重合, 问题的解就归纳为确定应力张量的三个分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  以及位移向量的两个分量  $u$  和  $v$ . 对于均匀的各向同性物体, 在没有体力作用的情况下, 这些应力分量和位移分量可以用复变量  $\zeta = x + iy$  的两个解析函数  $\Phi(\zeta)$  和  $\Psi(\zeta)$  (复势) 通过 Колосов-Мусхелишвили 公式 (Kolosov-Muskhelishvili formulas) 加以描写:

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta)], \\ 2G(u + iv) &= \chi\varphi(\zeta) - \xi\overline{\Phi(\zeta)} - \overline{\Psi(\zeta)}.\end{aligned}$$

$$\Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta), \Psi(\zeta) = \psi'(\zeta);$$

其中,  $G$  为剪切模量, 对于平面应变,  $\chi = 3 - 4\mu$ , 对于广义的平面应力  $\chi = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ ,  $\mu$  为 Poisson 比.

对于一弹性平面, 有一沿着光滑曲线  $L$  的裂纹, 在裂纹面上作用有下面的任意载荷:

$$N^\pm + iT^\pm = p(t) \pm q(t), t \in L, \quad (A1)$$

且在无穷远处无应力作用, 这时复势可以表示为:

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{Q(t)dt}{t-\zeta}, \\ Q(t) &= g'(t) - \frac{2iq(t)}{1+\chi}, \quad (A2) \\ \Psi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left[ \frac{\overline{Q(t)} - 2i\overline{q(t)}}{t-\zeta} \overline{dt} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{t}Q(t)}{(t-\zeta)^2} dt \right],\end{aligned}$$

其中,  $N$  和  $T$  分别是外应力的法向和切向分量, “+”和“-”表明相应的量从回线  $L$  的左边和右边趋于该回线时所取的极限值; 未知密度函数  $g(t)$  可以用位移在  $L$  上的跳跃值来表示:

$$g(t) = \frac{2iG}{1+\chi} \frac{d}{dt} [(u+iv)^+ - (u+iv)^-], \quad t \in L$$

由 (A2) 式, 边值问题 (A1) 可以化为相对于  $g(t)$  的奇异积分方程:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_L \left\{ \frac{Q(t) + iq(t)}{t-t'} dt + k_1(t, t')[Q(t) + \right. \\ \left. + 2iq(t)] dt + k_2(t, t')\overline{Q(t)} \overline{dt} \right\} = p(t'), t' \in L,\end{aligned} \quad (A3)$$

其中, 积分核分别由下式给出:

$$\begin{aligned}k_1(t, t') &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt'} \ln[(t-t')(\bar{t}-\bar{t}')]; \\ k_2(t, t') &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \frac{t-t'}{\bar{t}-\bar{t}'} \right].\end{aligned}$$

方程 (A3) 有解, 它存在于  $L$  两端点处具有可积奇异性的函数类中, 且在下面补充条件下是唯一的:

$$\int_L g'(t) dt = 0, \quad (A4)$$

这保证在跟踪  $L$  一周时位移的单值性.

应力和位移在裂纹尖端附近的分布由应力强度因子  $K_I$  (在对称的情况) 和  $K_{II}$  (在反对称的情况) 来决定. 应力强度因子与函数  $g(t)$  的关系如下:

$$K_I^\pm - iK_{II}^\pm = \mp \lim_{t \rightarrow l^\pm} [\sqrt{2\pi|t-l^\pm|} g'(t)],$$

其中上标为“-”的值指裂纹起始点 ( $\zeta = 1^-$ ); 上标为“+”的值指裂纹终止点 ( $\zeta = 1^+$ ).

对于在弹性平面中有  $N$  条曲线裂纹  $L_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) 的情况, 边值问题 (A1) 也可化为积分方程 (A2), 其中  $L$  为全部回线  $L_n$  的集合, 但条件 (A4) 应代之以  $N$  个类似的条件, 以保证位移在每个回线  $L_n$  上的单值条件.

如裂纹处于一个有界的弹性区域内, 复势的积分表示式 (A2) 可以用不同的方式推广到一个多连通区域, 而在其封闭的边界回线上有未知的密度. 对于这样的区域, 弹性力学的边值问题可以化为沿着开口回线 (裂纹) 和闭合回线 (孔和外边界) 的积分方程组.

基于经典的 Kirchhoff-Love 理论来解含裂纹薄板的弯曲问题, 与裂纹的数学理论中的平面问题极为相似. 这些问题也可以用各种更精确的薄板弯曲理论来作为基础加以分析, 这样作自然会大大增加其解的复杂程度.

**裂纹体的纵向剪切.** 纵向剪切, 或称反平面变形, 是柱体在顺着柱体母线且顺着母线保持不变的载荷的作用下所引起的应力状态. 当变形轴沿着 Descartes 坐标系 ( $x, y, z$ ) 的  $z$  轴指向时, 其解可以化为确定应力张量的两个分量  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  和位移向量的一个分量  $w$ . 对于一个均匀的各向同性体, 当无体力作用时, 上述值可由复变量  $\zeta$  的一个任意的解析函数



$F(\zeta)$  来加以表示:

$$2Gw = f(\zeta) + \overline{f(\zeta)},$$

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = f'(\zeta) = F(\zeta).$$

对于一个弹性体具有沿着一个(在平面截面内的)曲线回线  $L$  的贯穿裂纹的情况, 如有下列任意的剪切载荷作用于裂纹面上:

$$\tau_{nz}^{\pm} = \tau(t) \pm \mu(t), t \in L, \quad (A5)$$

且在无穷远处无应力作用, 则函数  $F(\zeta)$  有如下形式:

$$F(\zeta) = \frac{2}{\pi i} \int_L \frac{H(t)dt}{t-\zeta},$$

$$H(t) = \gamma'(t) + i\mu(t) \frac{ds}{dt'}, \quad (A6)$$

其中  $s$  为在  $L$  上的弧长参数, 而未知函数  $\gamma'(t)$  可以用位移在  $L$  上的跳跃来表示:

$$\gamma'(t) = (G/2) \frac{d}{dt} (w^+ w^-), t \in L$$

利用(A6), 边值问题(A5)可以化为关于函数  $\gamma'(t)$  的奇异积分方程

$$\text{Im} \left[ \frac{1}{\pi i} \frac{dt}{ds} \int_L \frac{H(t)dt}{t-t'} \right] = \tau(t'), t' \in L.$$

该方程有解, 它存在于在  $L$  两端点处具有可积奇异性的函数类中, 且在下面补充条件下是唯一的:

$$\int_L \gamma'(t) dt = 0.$$

该条件保证当跟踪  $L$  一周时位移的单值性.

在纵向剪切裂纹尖端附近的应力和位移的分布由应力强度因子  $K_{III}$  来决定, 它与函数  $\gamma'(t)$  的关系如下:

$$K_{III}^{\pm} = \mp \lim_{t \rightarrow l^{\pm}} \left[ \sqrt{2\pi|t-l^{\pm}|} \gamma'(t) \frac{dt}{ds} \right].$$

应力强度因子  $K_I$ 、 $K_{II}$ 、 $K_{III}$  是线弹性力学的主要参数. 在一个三维体内的任意裂纹边缘附近的应力和位移的分布可用这些应力强度因子来描写. 它们经常用于各种断裂准则之中.

**边值问题的解法.** 用解析函数来表示的一个弹性体内的位移和应力方法常常用于求解一些特殊问题的显式解. 对位于同一直线上或同一圆弧上的裂纹系, 可以通过将它化为线性共轭问题(见 **Riemann-Hilbert 问题(解析函数)** (Riemann-Hilbert problem (analytic functions))) 而得到其解. 当用保角变换的方法求解问题时, 也可以采用解析函数. 这种方法对于具有边裂

纹的单连通区域, 也对于有尖锐张开的无限大角(裂纹类型缺陷), 特别适用.

一些裂纹问题可以表述为弹性力学的混合型问题. 对于这些问题作积分变换, 可以有机会将其化为对偶的积分方程. 如果在这些方法中用的是 Fourier 级数, 最终得到的将是对偶的级数方程.

奇异积分方程的方法有广泛的应用. 用这种方法, 已经得到了一些问题的精确解或近似解. 在有些情况下, 积分方程可有效地用数值方法求解. 在求解积分方程时, 通过选择函数的类, 可以把裂纹尖端的奇异性自然地考虑进去. 线性问题的数值解也可以通过边界配置法、体力法、边界法或有限元法得到.

边界元法和有限元法可用来求解弹塑性体断裂力学的二维问题. 可以取得解析解的仅是一些特例, 即塑性变形集中在从裂纹尖端开始的一条线上的情况. 特别是, 当(在对称的情况下)用裂纹延长线上的法向位移的跳跃来模拟塑性变形时, 在解析解或数值解中, 都常采用  $\delta_c$  模型.

对于三维问题, 见 **断裂的数学问题** (fracture, mathematical problems of).

#### 参考文献

- [A1] Panasyuk, V. V., Limit equilibrium of brittle bodies with cracks, Kiev, 1968 (俄文).
  - [A2] Черепанов, Г. П., Механика хрупкого разрушения, М., 1974 (中译本: Г. П. 切列帕诺夫, 脆性断裂力学, 科学出版社, 1990).
  - [A3] Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. and Datsyshin, A. P., Stress distribution near cracks in plates and shells, Kiev, 1975 (俄文).
  - [A4] Berezhnitskii, L. T., Delyavskii, M. V. and Panasyuk, V. V., Bending of thin plates with crack-like defects, Kiev, 1979 (俄文).
  - [A5] Kaminskii, A. A., Fracture mechanics of viscoelastic bodies, Kiev, 1980 (俄文).
  - [A6] Savruk, M. P., Two-dimensional elasticity problem for bodies with cracks, Kiev, 1981 (俄文).
  - [A7] Kit, G. C. and Krivtsun, M. G., Plane thermoelasticity problems for bodies with cracks, Kiev, 1983 (俄文).
  - [A8] Mirsalimov, V. M., Fracture of elastic and elastic-plastic bodies with cracks, Baku, 1984 (俄文).
  - [A9] Morozov, N. F., Mathematical questions of crack theory, Moscow, 1984 (俄文).
  - [A10] Parton, V. Z. and Boriskovskii, V. P., Dynamic fracture mechanics, Moscow, 1985 (俄文).
  - [A11] Panasyuk, V. V. (ed.), Fracture mechanics and materials strength: a reference book, Kiev, 1988 - 1990 (俄文).
- В. В. Панасюк, М. П. Саврук 撰 王克仁 译

等离子体双液体模型 [two-liquid plasma model; дву-

## жидкостная модель плазмы]

一种流体动力学模型, 在其中等离子体被看作是由两种互相穿透运动的“液体”(电子和离子的液体)组成的. 等离子体的电阻被认为是这些液体之间相互摩擦的结果.

按电子只受电子压  $p_e$  作用而离子只受离子压  $p_i$  作用的假设, 运动方程组有形式

$$\frac{dm \mathbf{V}_e}{dt} = -e \left\{ \mathbf{E} - \frac{1}{c} [\mathbf{V}_e \times \mathbf{H}] \right\} + \frac{\nabla p_e}{n_e} - R n_i (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i), \quad (1)$$

$$\frac{dM \mathbf{V}_i}{dt} = Ze \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_i \times \mathbf{H}] \right\} + \frac{\nabla p_i}{n_i} - R n_e (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e). \quad (2)$$

电子和离子之间的相互作用是通过摩擦力来考虑的, 该力正比于速度差与运动减速粒子的浓度之乘积. 量  $R$  称为相互摩擦系数或扩散阻力系数. 考虑到等离子体的类中性条件 ( $n_e = Z n_i = n$ ), 等离子体双液体模型的运动方程化为形式

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}],$$

其中

$$\mathbf{V} = \frac{n_i M \mathbf{V}_i + n_e m \mathbf{V}_e}{M n_i + m n_e}$$

是平均质量速度,  $p = p_i + p_e$  是总压力, 而  $\mathbf{j} = e(Z n_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e)$  是离子流. 如果  $m/M \ll 1$ , 则  $\mathbf{V}_i \approx \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}_e \approx \mathbf{V} - \mathbf{j}/ne$ .

方程 (1) 和 (2) 可以利用来获得联系流密度  $\mathbf{j}$  与其他量的广义 Ohm 定律. 如果可忽略形式  $(\mathbf{V}_v) \mathbf{V}$  的项 (和再如果  $m/M \ll 1$ ), 则广义 Ohm 定律可写为

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{H}] \right\} + \frac{e}{mc} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] + \frac{e}{m} \nabla p_e - \frac{\mathbf{j}}{\tau},$$

其中  $\tau = 1/\nu_{ei}$  是所谓的脉冲传输时间,  $\nu_{ei}$  是脉冲传输的有效频率, 它由下列表达式决定:

$$R = \frac{m}{n_i} \nu_{ei} = \frac{m}{n_e} \nu_{ie}.$$

## 参考文献

- [1] Франк-Каменецкий, Д. А., Лекции по физике плазмы, 2 изд., М., 1968.  
[2] Куликовский, А. Г., Любимов, Г. А., Магнитная гидродинамика, М., 1962. В. А. Дородницын 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Kampen, N. G. van and Felderhof, B. U., Theo-

retical methods in plasma physics, North-Holland, 1967.

- [A2] Spitzer, L., Physics of fully ionized gases, Interscience, 1962.

李维新 译

## 二人零和对策 [two-person zero-sum game; антагонистическая игра]

由两个有完全对立利益的对手所进行的对策. 形式上, 这种对立性意味着从一个对策局势 (game situation) 转变到另一个局势时, 一个局中人的支付的增加数值上等于另一个局中人的支付的减少, 从而在任何局势下, 局中人的支付和是常数 (可以认为, 这个和是零, 即一个局中人收到的支付等于另一个局中人的损失). 由于这个原因, 二人零和对策也称为具有零和的二人对策 (two-person game with zero-sum) 或对抗对策 (antagonistic game). 二人零和对策的数学概念 (它们的两个支付函数在数值上相等在符号上相反) 是一个形式概念, 它不同于对应的哲学概念. 如果在二人零和对策中, 局中人之一经营作为协议和谈判的结果使其收到的支付增加一定的货币量, 则其对手将有相等金额的损失. 因此, 任何协议将对局中人之一不利, 以至是不可能的. 现实中适合用二人零和对策来建模的冲突形势是某些 (但不是全部) 军事行动、体育比赛和室内博弈, 以及在严格竞争下引起双边决策的情形. 针对自然所进行的对策以及更一般的在不确定条件下的决策 (见统计对策 (statistical game)) 可以看作二人零和对策, 如果假定对于局中人来说未知的实际自然规律将产生对局中人最为不利的效果.

正规型二人零和对策 (见对策论 (game, theory of)) 的定义在于确定局中人 I 和 II 各自的策略集  $A$  和  $B$ , 以及确定在所有局势的集合  $A \times B$  上定义的局中人的支付函数  $H$  (局中人 II 的支付函数按定义是  $-H$ ). 形式上, 一个二人零和对策  $\Gamma$  由一个三元组  $\Gamma = \langle A, B, H \rangle$  所组成.

对策的进行通过局中人间选取他们的策略  $a \in A$ ,  $b \in B$ , 然后, 局中人 I 从局中人 II 处得到金额  $H(a, b)$ . 只要适当刻画策略集和支付函数, 这样的二人零和对策的定义已足够一般到包括二人零和对策的各种变种, 其中包括动态对策 (dynamic game), 微分对策 (differential games) 和位置对策 (positional game). 在二人零和对策的过程中, 局中人的行动 (策略) 的合理选择基于极小化极大原理: 如果

$$\max_{a \in A} \inf_{b \in B} H(a, b) = \min_{b \in B} \sup_{a \in A} H(a, b), \quad (1)$$

或

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} H(a, b) = \inf_{b \in B} \sup_{a \in A} H(a, b), \quad (1')$$

那么对策  $\Gamma$  对于两个局中人都具有最优策略 (相应地,



$\varepsilon$  最优策略) (见策略 (对策论中的) (strategy (in game theory))). 方程 (1') 的两端的公共值称为对策  $\Gamma$  的值 (value of the game). 然而, 方程 (1) 或 (1') 甚至在最简单的情形下也可以不成立. 例如, 在具有支付矩阵为

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

的矩阵对策 (matrix game) 中, 下列等式成立:

$$\max_i \min_j a_{ij} = -1, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

由于这个原因, 局中人的策略集被扩充到混合策略集, 它由局中人对初始 ("纯") 策略的随机选择所组成, 而支付函数定义为在应用混合策略的条件下支付的数学期望. 在上述例子中, 两个局中人的最优混合策略是对两个策略各以  $1/2$  的概率来选取, 对策在混合策略下的值是零. 如果集合  $A$  和  $B$  是有限的, 则二人零和对策称为矩阵对策, 其中对策的值和每个局中人的最优混合策略在所有情形下存在. 如果两个集合  $A$  和  $B$  都是无限的, 那么最优 (甚至  $\varepsilon$  最优) 策略可能不存在 (见无限对策 (infinite game)).

#### 参考文献

- [1] Karlin, S., Mathematical methods and theory in games, programming and economics, Addison-Wesley, 1959.
- [2] Parthasarathy, T. and Raghavan, T. L., Some topics in two-person games, Elsevier, 1971.

Е. Б. Яновская 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Vorob'ev, N. H., Game theory, Springer, 1977 (译自俄文).
- [A2] Owen, G., Game theory, Acad. Press, 1982.

史树中 译

#### 两点张量 [two-point tensor; двухточечный тензор]

依赖于流形  $X$  上的一对点  $x, x'$  的张量, 即定义在乘积  $X \times X$  上的张量场  $T(x, x')$ . 作为例子, 世界函数 (world function)  $\Omega(x, x')$  的共变导数, 及更一般地, 任意依赖于两点的不变量的共变导数都是两点张量. 这种张量, 特别是当  $x' \rightarrow x$  时, 张量  $T$  和它的导数的极限

$$[T_{ij}] = \lim_{x' \rightarrow x} \nabla_i \nabla_j T(x, x')$$

的性质被用于变分计算及相对论中.

#### 参考文献

- [1] Synge, J. L., Relativity: the general theory, North-Holland & Interscience, 1960.

М. И. Войцеховский 撰 沈纯理 译

#### 双叶双曲面 [two-sheet hyperboloid; двуполостный

гиперболоид]

见双曲面 (hyperboloid).

#### 双边估计 [two-sided estimate; двусторонняя оценка]

对一个已知量  $a$  的从上和从下的一对估计. 上估计 (estimate from above) 是形如  $a \leq A_1$  的不等式; 下估计 (estimate from below) 是不等式  $a \geq A_0$ . 它们具有相反的意义. 用来对  $a$  进行估计的量  $A_0, A_1$  通常具有更简单的形式, 或者可以比  $a$  更容易计算.

例. 1) 令  $m, M$  分别是函数  $f$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上的最小值和最大值. 则积分  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  的下列双边估计成立:

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha);$$

其中

$$a = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx,$$

$$A_0 = m(\beta - \alpha), \quad A_1 = M(\beta - \alpha).$$

2) Lebesgue 常数 (Lebesgue constants)  $L_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) 的一个双边估计是

$$0.9897 \dots < L_n - \frac{4}{\pi^2} \ln(2n+1) \leq 1.$$

3) 本征值的一个双边估计. 在 Hilbert 空间  $H$ , 研究一个线性自伴算子  $T: Tu = \lambda u$  的本征值问题. 构造一个迭代过程  $Tf_{n+1} = f_n$ , 其中  $f_0 \neq 0$ . 因为算子  $T$  自伴, 内积  $(f_m, f_k)$  仅与指标之和  $m+k$  有关. 数  $a_n = (f_0, f_n) = (f_m, f_{n-m})$  称作 Schwartz 常数 (Schwartz constants), 而数  $\mu_{n+1} = a_n / a_{n+1}$  称作 Rayleigh-Schwartz 比 (Rayleigh-Schwartz ratios). 如果算子  $T$  是正的, 则  $\mu_n$  构成一个单调非减收敛序列.

如果  $\lambda_0$  是  $T$  的一个本征值,  $a < \lambda_0 < b$ ,  $a < \mu_{2k} < b$ ; 而且区间  $(a, b)$  不包含  $T$  的其他谱点, 则

$$\mu_{2k} - \frac{\rho^2}{b - \mu_{2k}} \leq \lambda_0 \leq \mu_{2k} + \frac{\rho^2}{\mu_{2k} - a},$$

$$\rho^2 = \frac{\mu_{2k-1} - \mu_{2k}}{\mu_{2k}}$$

(Temple 定理 (Temple theorem), [3]). 在某些条件下, Rayleigh-Schwartz 比收敛于  $T$  的一个本征值.

为得到双边估计 (双边逼近) 的数值方法称为双边法 (two-sided methods) ([4]). 刚刚叙述的构造 Rayleigh-Schwartz 比的方法是一个双边法的例子. 一些双边法是基于应用其余项有相反的符号的一对逼近公式. 例如, 令函数  $f$  是在点 (插值结点)  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  用关于结点  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  的 Lagrange

多项式得到的插值函数, 而且令  $L_1(x)$  是关于结点  $x_1, \dots, x_n$  的 Lagrange 插值多项式 (见 Lagrange 插值公式 (Lagrange interpolation formula)). 则余项有下列关系式成立:

$$R_0(x) = f(x) - L_0(x) = \frac{f^{(n)}(\xi_0)}{n!} (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}),$$

$$R_1(x) = f(x) - L_1(x) = \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!} (x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

其中  $\xi_0, \xi_1 \in [x_0, x_n]$ . 如果在  $[x_0, x_n]$  上导数  $f^{(n)}$  不改变符号, 则  $R_0$  和  $R_1$  符号相反, 下面的双边估计成立:

$$\min(L_0(x), L_1(x)) \leq f(x) \leq \max(L_0(x), L_1(x)).$$

求解常微分方程的双边法现在处于最先进的研究阶段 ([5] - [9]).

双边法使人们可能确认含有问题的解的区域的边界. 这就必须要有一个更复杂的算法, 而且如果在实际计算中应用这个方法, 鉴于包括舍入误差, 必须承认算法将更复杂, 双边法主要用在要求一个确保误差估计的情形.

#### 参考文献

- [1] Галкин, П. В., «Тр. Матем. ин-та АН СС-СР», 109 (1971), 3 - 5.
- [2] Collatz, L., Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Geest & Portig, 1949.
- [3] Collatz, L., Functional analysis and numerical mathematics, Acad. Press, 1966 (译自德文).
- [4] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).
- [5] Волков, Е. А., «Тр. Матем. ин-та АН СС-СР», 112 (1971), 141 - 151.
- [6] Ремез, Е. Я., «Зап. природниготехнічного відділу», АН УССР, 1 (1931), 1 - 38 (乌克兰文).
- [7А] Горбунов, А. Д., Шахов, Ю. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 3 (1963), 2, 239 - 253.
- [7В] Горбунов, А. Д., Шахов, Ю. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 6 (1964), 3, 426 - 433.
- [8] Девятко, В. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 3 (1963), 2, 254 - 265.
- [9] Салихов, Н. П., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 2 (1962), 4, 515 - 528.

В. В. Поспелов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Collatz, L., Numerical treatment of differential equa-

tions, Springer, 1966 (译自德文).

- [A2] Rektorys, K. (ed.), Survey of applicable mathematics, Iliffe, 1969.
- [A3] Rivlin, T. J., An introduction to the approximation of functions, Dover, reprint, 1969.
- [A4] Moore, R., Interval analysis, Prentice-Hall, 1966.
- [A5] Young, D. M. and Gregory, R. T., A survey of numerical mathematics, Dover, reprint, 1988.

袁国兴 张宝琳 译

双侧曲面 [two-sided surface; двусторонняя поверхность]

见单侧曲面与双侧曲面 (one-sided and two-sided surfaces).

二项同余式 [two-term congruence 或 binomial congruence; двучленное сравнение], 亦称二项同余方程, 幂同余式 (power congruence)

形如

$$x^n \equiv a \pmod{m} \quad (1)$$

的代数同余式, 其中  $a, m$  是互素的整数, 而  $n \geq 2$  是自然数. 如果同余式 (1) 是可解的, 则称  $a$  为一个模  $m$  的  $n$  次幂剩余; 否则, 称  $a$  为模  $m$  的  $n$  次非剩余.

关于合数模  $m$  的二项同余式的可解性问题可以归结为素数模  $p$  的相应问题的研究 (见同余式 (congruence)). 对于素数模的幂剩余问题, 有一个 Euler 可解性准则: 同余式

$$x^n \equiv a \pmod{p}$$

可解, 必有

$$a^{(p-1)/\delta} \equiv 1 \pmod{p},$$

此处  $\delta$  是数  $n$  和  $p-1$  的最大公因数; 当这一条件满足时, 同余式恰有  $\delta$  个解.

由 Euler 准则立即可知在数  $1, \dots, p-1$  中恰有  $(p-1)/\delta$  个模  $p$  的  $n$  次幂剩余和  $(\delta-1)(p-1)/\delta$  个非剩余.

复杂得多的是相反的问题: 找出所有的模  $p$  使得给定的数  $a$  是  $n \geq 2$  次剩余 (或非剩余). Euler 指出, 同余式  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  的可解或不可解问题依赖于素数模  $p$  是否属于某些算术级数. C. F. Gauss 于 1801 年第一个给出这一结果的严格证明 (见 [4] 和 Gauss 互反律 (Gauss reciprocity law); 二次互反律 (quadratic reciprocity law)). Gauss 进一步注意到, 对于  $n \geq 3$ , 问题的全部解决只有当有理整数环作某些扩张后才有可能. 因此, 在建立双二次剩余的互反律时, 他致力于将有理整数环扩充至复整数环  $\mathbb{Z}[i]$ . 对于给定的  $\omega \in \mathbb{Z}[i]$ , 双二次剩余  $x^4 \equiv \omega \pmod{p}$



在环  $Z[i]$  中的可解或不可解依赖于数  $p$  对于环  $Z[i]$  中某些常数模  $D$  的剩余的值.

И. М. Виноградов 开创了研究二项同余式及其在其他理论问题中的应用的阶段, 他于 1914 年证明: 在数  $1, \dots, Q (Q \leq p-1)$  中, 素数模  $p$  的二次剩余的个数  $R$  可由公式

$$R = \frac{1}{2} Q + \theta \sqrt{p} \ln p$$

给出, 此处  $|\theta| \leq 1$ . 接着, Виноградов 又得到了一个更加一般的问题的类似结果, 即关于同余式

$$x^n \equiv y \pmod{p}, n \geq 2$$

当  $y$  遍历一个不完全剩余系  $1 \leq y \leq Q$  时的解的个数问题.

#### 参考文献

- [1] Венков, Б. А., Элементарная теория чисел, М.-Л., 1937 (英译本: Venkov, B. A., Elementary number theory, Wolters-Noordhoff, 1970).
- [2] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972 (中译本: И. М. 维诺格拉陀夫, 数论基础, 高等教育出版社, 1952).
- [3] Виноградов, И. М., Избр. труды, М., 1952 (英译本: Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985).
- [4] Gauss, C. F., Untersuchungen über höhere Arithmetik, Maser, 1889 (译自拉丁文).

С. А. Степанов 撰

【补注】在 [A2] 中证明: 对任意  $\alpha > 1/4\sqrt{e}$ , 素数模  $p$  的最小二次非剩余小于  $c(\alpha)p^\alpha$ .

#### 参考文献

- [A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979, Chapt. 6.
- [A2] Burgess, D. A., The distribution of quadratic residues and non-residues, *Mathematica*, 4 (1957), 106 - 112. 戚鸣皋 译 潘承彪 校

#### 二项方程 [two-term equation; двучленное уравнение]

形式为  $ax^n + b = 0$  的代数方程, 其中  $a$  和  $b$  是复数, 且  $ab \neq 0$ . 二项方程具有  $n$  个不同的复根

$$x_k = \left| \frac{b}{a} \right|^{1/n} \exp \left[ \frac{2\pi k + \varphi}{n} i \right],$$

$$k = 0, \dots, n-1, \varphi = \arg \left[ -\frac{b}{a} \right].$$

在复平面上, 二项方程的根处在半径为  $|b/a|^{1/n}$ 、圆心在坐标原点的圆上, 对应于内接正  $n$  边形的顶点 (见正多边形 (regular polygon)).

А. И. Галочкин 撰 杜小杨 译

#### 二值逻辑 [two-valued logic; двухзначная логика]

同逻辑代数 (algebra of logic).

#### 类型论 [types, theory of; типов теория]

一种一阶形式理论 (见形式系统 (formal system)), 它的一个变种是简单类型论 (simple theory of types), 描述如下. “类型论”一词没有严格的固定的含义. 它表示的是如下所述的一种形式理论. 首先, 这个形式系统含有语言工具, 可以表示如下用语词描述的关系: “序列  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  属于  $y$ ”或“ $y$  执行  $x_1, \dots, x_n$ ”; 这里就可令  $y(x_1, \dots, x_n)$  表示引号中的表达式. 其次, 个体域可以分出层 (strata), 或类型 (type), 构成类型的分层 (hierarchy of types) (不一定是线性的, 也不一定是可数的), 同时还有类型论的概括公理 (或其等价形式). 如果将在类型  $\sigma$  的个体中取值的变元记作  $x^\sigma, y^\sigma, z^\sigma, \dots$  则类型论概括公理 (type-theoretical comprehension axioms) 可以写成

$$\exists y^\rho \forall (x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}) (y^\rho(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}) \Leftrightarrow \varphi(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})), \quad (*)$$

其中  $\varphi(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})$  是这个系统的一个公式, 其自由变元是  $x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}$ , 变元  $y^\rho$  的类型  $\rho$  的层次要高于类型  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  的层次. 通常, 类型  $\rho$  是由  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  唯一确定的, 记作  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ . 这样, 在类型论系统中性质  $y$  和满足这些性质的个体  $x_1, \dots, x_n$  一定分属不同的层次. 系统中通常还有外延公理, 它把含义相同的性质视为恒等的. 这样的类型论系统就可以看成是集合论系统, 因为它满足这样一条原则: “一个集合完全由它所含的元素决定”.

Russell 发现了集合论的悖论, 他就此提出了类型论系统. 他把集合和这个集合中的元素放在不同的层次上, 这就给出一种如何看待悖论 (antinomy) 的观点, 依照这种观点, 悖论的出现可以解释为在集合论定义中用到了非直谓性质. 这里, 某个个体的定义称为非直谓的 (non-predicative), 如果在定义中用到了这个个体本身, 或者换句话说, 如果不先承认这个个体的存在, 则这个个体的定义就没有意义. 这样, 把 (\*) 式看成个体  $y$  的定义, 仍不能完全避免非直谓性, 因为公式  $\varphi(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})$  中可能有量词, 这些量词的取值范围可以与个体  $y$  属同一个层次. 于是, 就有必要考虑直谓类型论系统 (predicative type-theoretic system), 在这样的系统中个体域可以进一步分解. 这一系统中, 式 (\*) 中的  $y$  所属的范围必定与  $\varphi(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})$  中约束变元取值的范围不同.

类型论系统中类型的序可以是序数的某个初段, 可以是(正和负)整数的集合, 同时, 系统中所有的公式可以都是适定型的个体, 系统可以允许无穷长表达式(或者有代替这种表达式的工具, 例如同一种类型的量词). 二阶或更高阶的逻辑可以看成类型论系统.

**简单类型论.** 简单类型论的语言包括: 对于每个自然数  $n$ , 类型为  $n$  的变元  $x_1^n, x_2^n, \dots$ ; 二元谓词符号  $\in$ ; 逻辑联接词和量词,  $\supset, \vee, \&, \neg, \forall, \exists$ ; 括号(和).

简单类型论的公式通常是用归纳定义的方法构成: 形如  $(x_i^n \in x_j^{n+1})$  的表示式是公式; 如果  $\varphi$  和  $\psi$  是公式,  $v$  是变元, 则  $(\varphi \supset \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \& \psi), \neg \varphi, \forall v \varphi, \exists v \varphi$  都是公式. 记号  $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$  是  $((\varphi \supset \psi) \& (\psi \supset \varphi))$  的简写.

**简单类型论的非逻辑公理.**

A1. **概括公理** (comprehension axiom)

$$\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow \varphi)$$

其中  $x$  和  $y$  分别是类型为  $n$  和  $n+1$  的变元,  $\varphi$  是简单类型论语言的任意一个公式, 其中  $y$  不是  $\varphi$  的自由变元.

A2. **外延公理** (extensionality axiom):

$$\forall t (t \in x \Leftrightarrow t \in y \supset \forall z (x \in z \supset y \in z))$$

其中  $t, x, y, z$  分别是类型为  $n, n+1, n+2$  的变元.

A3. **无穷公理** (infinity axiom):

$$\exists x (\exists w (w \in x) \& \forall u \in x$$

$$\exists v \in x (u \subseteq v \& \exists t (t \in v \& \neg t \in u))),$$

其中  $x$  是类型为 2 的变元. 其余变元的类型可以从公式中唯一确定. 式中记号  $\forall u \in x \varphi$  和  $\exists v \in x \varphi$  分别表示公式  $\forall u (u \in x \supset \varphi)$  和  $\exists v (v \in x \& \varphi)$ , 表示式  $u \subseteq v$  是  $\forall z (z \in u \supset z \in v)$  的简写.

**逻辑公理** (logical axioms) 和 **推理法则** (inference rules). 就是经典谓词演算中的逻辑公理和推理法则 (见 **推导法则** (derivation rule)), 只要就所用的语言作适当的修改. 公理和法则决定了简单类型论中可推演的公式, 即定理的类.

数学结构  $M = (V_0, V_1, \dots, \in_M)$  称为简单类型论模型 (model of the simple theory of types), 只要它满足简单类型论的所有非逻辑公理, 这里  $\in_M \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (V_n \times V_{n+1})$ . 由谓词演算的 Gödel 完全性定理得知简单类型论的定理的类与在简单类型论的所有模型中都真的公式类是一致的. 简单类型论是相当强的理论. 算术和分析 (即二阶算术) 都可以嵌入其

中. 简单类型论中还可以考虑初始序数  $\omega_0, \dots, \omega_n$ , 其中  $n$  是任意预先给定的自然数. 简单类型论具有简单的直觉集合论模型.  $V_0$  可以取任意一个无限集, 每个后继层次  $V_{n+1}$  都是由其前一层  $V_n$  的一些子集组成. 关系  $\in_M$  是自然而然的. 在足够强的公理集合论的框架中, 用集合论模型的存在性可以得到简单类型论的相容性 (consistency) 的形式证明. 例如, 在 Zermelo 系统中就可以建立这样的相容性证明. 从 Zermelo-Fraenkel 系统 ZF 出发, 去掉替换公理, 保留分离公理就得到 Zermelo 系统.

**参考文献**

- [1] Whitehead, A. and Russell, B., Principia Mathematica, 1-3, Cambridge Univ. Press, 1910.
  - [2] Fraenkel, A. A. and Bar-Hillel, Y., Foundations of set theory, North-Holland, 1958.
  - [3] Barwise, J. (ed.), Handbook of Mathematical logic, North-Holland, 1977.
  - [4] Takeuti, G., Proof theory, North-Holland, 1975.
- В. Н. Гришин 撰 沈复兴 译 罗里波 校

**典型实函数** [typically-real function; типично вещественная функция], 区域中的

在  $z$  平面的包含实轴的一些线段的某区域  $B$  内解析的函数  $f(z)$ , 在这些线段上取实值且当  $\text{Im } z \neq 0$  时  $(\text{Im } f(z)) (\text{Im } z) > 0$ . 基本的典型实函数类 (class)  $T$ , 它由圆盘  $|z| < 1$  内的正则典型实函数

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

组成 (参看 [1]). 从类  $T$  的定义推出当  $n \geq 2$  时  $c_n$  是实数. 类  $T$  包含由  $|z| < 1$  内正则单叶且具有实系数的函数

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

组成的类  $S_r$  (见 **单叶函数** (univalent function)). 若  $f \in T$ , 则

$$\varphi(z) = \frac{1-z^2}{z} f(z) \in C_r,$$

反之, 若  $\varphi \in C_r$ , 则

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2} \varphi(z) \in T,$$

其中  $C_r$  是由在  $|z| < 1$  内正则且在  $|z| < 1$  内满足  $\text{Re } \varphi(z) > 0$  的函数

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n$$

使得当  $n \geq 1$  时  $\alpha_n$  是实数者所组成的类.

设  $M_1$  是由满足  $\alpha(1) - \alpha(-1) = 1$  的  $[-1, 1]$  上非减函数  $\alpha(t)$  组成的类. 类  $T$  的函数在  $|z| < 1$  内可用 Stieltjes 积分表示 (见 [2]):



$$f(z) = \int_{-1}^1 s(z, t) d\alpha(t), \quad (1)$$

$$s(z, t) = z(1 - 2tz + z^2)^{-1}, \alpha(t) \in M_1,$$

这就是说对于每个  $f \in T$ , 存在  $\alpha \in M_1$  使得 (1) 式成立, 反之, 对于任何  $\alpha \in M_1$ , 公式 (1) 确定某个函数  $f \in T$ . 对每个固定的  $t \in [-1, 1]$  有  $s(z, t) \in S_r$ . 使  $T$  中每个函数都单叶的最大区域为  $\{|z+i| < \sqrt{2}\} \cap \{|z-i| < \sqrt{2}\}$ . 从关于类  $T$  的表示式 (1) 出发, 已得到一系列旋转定理与畸变定理 (见畸变定理 (distortion theorems); 旋转定理 (rotation theorems)). 在类  $T$  中下列关系式成立:

$$-n \leq c_n \leq n, \quad \text{当 } n \text{ 是偶数,} \quad (2)$$

$$k_n = \min_{0 \leq \theta \leq \pi} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \leq c_n \leq n, \quad \text{当 } n \text{ 是奇数,} \quad (3)$$

$$\left[ k_n \sim \frac{-2n}{3\pi} \right],$$

式 (2) 左端的等号仅对  $s(z, -1)$  成立, 右端的等号

仅对  $s(z, 1)$  成立; 式 (3) 左端的等号仅对函数  $f(z) = \lambda s(z, t_n) + (1-\lambda)s(z, -t_n)$  成立,  $t_n \in [-1, 1]$  是某个值, 右端的等号仅对  $f(z) = \lambda s(z, 1) + (1-\lambda)s(z, -1)$  成立,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

对于  $T$ , 数组  $\{c_2, \dots, c_n\}$ ,  $\{f(z)\}$ ,  $\{f(z), c_2, \dots, c_n\}$  ( $n \geq 2$ ) 的系数域已求得 (见 [3]).

#### 参考文献

- [1] Rogosinski, W., Ueber positive harmonische Entwicklungen und typische-reelle Potenzreihen, *Math. Z.*, **35** (1932), 93 - 121.
- [2] Голузин, Г. М., «Матем. сб.», **27** (1950), 2, 201 - 218.
- [3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969). Е. Г. Голузина 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.
- [A2] Goodman, A. W., Univalent functions, 1, Mariner, 1983. 杨维奇 译

# U

**超桶型空间** [ultra-barrelled space; ультрабочечное пространство]

一种具有拓扑  $t$  的拓扑向量空间 (topological vector space)  $E$ , 其中具有由  $t$  闭集组成的零点的邻域基的任何拓扑  $t'$  均弱于  $t$ . 每一个不是第一范畴集的拓扑向量空间均是超桶型的. 如果一个局部凸空间是超桶型的, 那么它也是桶型的, 但是一个桶型空间 (barrelled space) 不一定是超桶型的.

参考文献

- [1] Edwards, R., Functional analysis, Holt, Rinehart & Winston, 1965.
- [2] Robertson, W. S., Completions of topological vector spaces, *Proc. London Math. Soc.*, 8 (1958), 30, 242 - 257.

В. И. Ломоносов 撰 葛显良 译 鲁世杰 校

**超有界型空间** [ultra-bornological space; ультраборнологическое пространство]

一种能表成 Banach 空间的归纳极限的局部凸空间 (locally convex space). 换言之, 超有界型空间可定义为这样一种局部凸空间  $E$ , 其中每一个吸收  $E$  中任一 Banach 圆盘  $A$  的绝对凸子集  $U$  是零的一个邻域. (Banach 圆盘 (Banach disk) 是一个绝对凸有界集  $A$  使得它的张成  $E_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nA$  装备了自然范数  $\|x\|_A = \inf \{ \rho > 0 : x \in \rho A \}$  后是一 Banach 空间.) 有界型空间 (bornological space) 是能表成赋范空间的归纳极限的一种局部凸空间, 或换句话说, 是其中每个吸收任一有界集的绝对凸子集都是零的邻域的这样一种局部凸空间.

参考文献

- [1] Robertson, A. P. and Robertson, W. S., Topological vector spaces, Cambridge Univ. Press, 1964.

В. И. Ломоносов 撰

【补注】 一个超有界型空间是桶型的和有界型的, 但其逆不对. 每一个拟完全有界型空间是超有界型的, 但其逆也不成立.

参考文献

- [A1] Jachow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981.
- [A2] Valdivia, M., Topics in locally convex spaces, North-Holland, 1982. 葛显良 译 鲁世杰 校

**超滤子** [ultrafilter; ультрафильтр]

在下述意义下的一个极大滤子 (filter): 包含该滤子的所有滤子都与它相同. 超滤子可以用满足如下三条的子集系定义: 1) 不包括空集; 2) 集系中两个子集之交仍属于它; 3) 任何子集, 或者其自身, 或者其补集属于该集系.

所有超滤子被分成两类: 平凡超滤子 (或固定超滤子, 或主超滤子) 及自由超滤子. 超滤子称为平凡 (trivial) 或主 (principal) 超滤子, 如果它是包含给定的所有子集组成的集系; 这样的超滤子也称为固定于该点的超滤子. 超滤子称为自由 (free) 超滤子, 如果它的所有元素之交为空集, 换言之, 它在任何点都不是固定的. 自由超滤子的存在性, 不利用选择公理 (axiom of choice) 就无法证明.

对任何滤子都存在一个包含它的超滤子; 进而, 任何滤子恰为包含它的所有超滤子的交.

参考文献

- [1] Bourbaki, N., General topology, Elements of mathematics, Springer, 1989, Chaps. 1 - 2 (译自法文).
- [2] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North-Holland, 1968. В. И. Малыгин 撰

【补注】 在一般拓扑学和数理逻辑中, 超滤子是重要的理论部分. 对于拓扑学家, 它们乃是自由紧空间的



元素, 即离散空间  $D$  的 Stone-Čech 紧化 (Stone-Čech compactification)  $\beta D$  的元素.  $\beta D$  是生成元的集合  $D$  上的自由紧 Hausdorff 空间, 就象是生成元的集合上的一个自由群; 它的特征是, 从集合  $D$  到紧 Hausdorff 空间  $X$  的任何映射  $f$ , 可唯一扩张成连续映射  $\beta f: \beta D \rightarrow X$ .

鉴于自由超滤子很难描述, 考察将  $\mathbf{N}$  的每个子集  $A$  对应于区间  $[0, 1]$  中一个数  $x_A = \sum_{n \in A} 2^{-n}$  的映射, 若  $u$  是  $\mathbf{N}$  中自由超滤子, 则集合  $\{x_A: A \in u\}$  是不可测的.

对于逻辑学家, 超滤子乃是在它上面构成超积 (ultraproducts) 的加标结构. 在模型论中一些简单而重要的存在性结论, 都是用颇为一致的方法证明的: 为了建立语句  $S$  的无穷集上的模型, 对  $S$  的任意大有限子集建立模型 (这种可能性常常容易证明), 并取它们的任意超积. 为了更好地控制构造, 可以使用加限制的超滤子, 例如, 好超滤子 (good ultrafilters) 或一致超滤子 (uniform ultrafilters), 见 [A1].

关于不用自由超滤子的集合论模型的讨论见 [A8].

集合上超滤子的同构型, 有两个重要的偏序, 它们始见于 [A11]: 定义在任意集合  $D$  上的 Rudin-Keisler 序 (Rudin-Keisler order) 以及仅定义在可数集  $\omega$  上的 Rudin-Frolik 序 (Rudin-Frolik order).  $D$  上两个超滤子  $p, q$ , 即  $\beta D$  的两个点, 如果存在映射  $f: D \rightarrow D \subset \beta D$ , 使得  $\beta f(q) = p$ , 就认为在 Rudin-Keisler 序中有  $p \leq q$ . 若  $p \leq q$  且  $q \leq p$ , 就说  $p, q$  同型. 关系  $p \leq q$  导出型的一个偏序. 可类似定义  $\omega$  上 Rudin-Frolik 序, 但要使用具有离散象的映射  $f: \omega \rightarrow \beta \omega$ .

到 1974 年止, [A1] 是一份比较完整的拓扑方面处理超滤子理论的文献, 并且还是介绍超滤子这一学科分支的最好的书. 该书用长达 40 页的一章来讨论大基数 (large cardinals). 使这一学科分支自 1974 年以来有了近乎革命性的发展.

设  $\Phi$  是指标集  $I$  上的一个超滤子. 对每个  $i$ , 设  $A_i$  是集合. 利用  $\Phi$  可以如下定义  $\prod A_i$  上的一个等价关系:  $a = (a(i))_{i \in I}, b = (b(i))_{i \in I}$  等价, 当且仅当  $\{i: a(i) = b(i)\} \in \Phi$  (记作  $a \equiv b$ ).  $\prod A_i$  关于这个等价关系的商  $(\prod A_i)/\Phi$  称为  $A_i$  (关于超滤子  $\Phi$ ) 的超积 (ultraproduct).

对每个  $i$ , 设  $R_i$  是  $A_i$  上的一个  $n$  元关系 (最终对应着语言  $L$  的一种谓词或相同谓词, 其中假定  $(A_i, \{R_i\})$  是  $L$  的解释). 那么  $(\prod A_i)/\Phi$  上对应关系  $R$  定义为:

$$\begin{aligned} (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \in R &\iff \\ \iff \{i: a_1(i), \dots, a_n(i) \in R_i\} &\in \Phi. \end{aligned}$$

其中  $\bar{a}_m$  是  $a_m$  在  $(\prod A_i)/\Phi$  中的等价类. (由超滤子性质, 这是良定的.) 可以类似定义函数及单个常数.

若所有  $A_i$  相同, 就用超幂 (ultrapowers) 代替超积.

超积在 Diophantus 方程 (Diophantine equations) 理论和代数数论 (algebraic number theory) 中有着重要的应用. 例如, 对每个素数  $p$ , 设  $\mathbf{Q}_p$  是  $p$  进数域,  $\mathbf{F}_p((t))$  是有限域  $\mathbf{F}_p = \{0, \dots, p-1\}$  上 Laurent 级数的域, 则 Ax-Kochen 定理 (Ax-Kochen theorem) 指出, 对每个非主超滤子  $\Phi$ ,

$$\prod_p \mathbf{Q}_p / \Phi \simeq \prod_p \mathbf{F}_p((t)) / \Phi.$$

它用定理的形式对关于 Diophantus 方程的 Artin 猜想 (Artin conjecture on Diophantine equations), 给出了一个直接肯定的部分解法: 对于每个正整数  $d$ , 存在素数的有限集  $P(d)$ , 使  $\mathbf{Q}_p$  上任何  $d$  ( $n > d^2$ ) 次齐次多项式  $f(X_1, \dots, X_n)$ , 在  $\mathbf{Q}_p$  中对所有  $p \notin P(d)$  有非平凡零点. 这个结论也可由 Ю. Л. Епилов 的结果导出 ([A6]), 该结果的证明也用到超积. 更为一般的 Artin 猜想指出,  $\mathbf{Q}_p$  是  $C_2$  域 ( $C_2$ -field), 这意味着对于所有  $p$  ( $C_2$  域中的 “2” 对  $n > d^2$  中的 “2”) 结论必然成立. 但是, G. Terjanian 在 1966 年用仅有非平凡零点的  $\mathbf{Q}_2$  上 18 元二次型给出了完整 Artin 猜想的一个反例.

更加精确地, 设  $i \geq 0, d \geq 1$  为整数. 如果  $F$  上任何  $n$  ( $n > d^i$ ) 元  $d$  次齐次多项式  $f(X_1, \dots, X_n)$  在  $F$  中有非平凡零点, 则称域  $F$  为  $C_i(d)$  域 ( $C_i(d)$ -field). 一个域对所有  $d \geq 1$  是  $C_i(d)$  域, 则称为  $C_i$  域 ( $C_i$ -field).  $C_0$  域是代数闭域.  $C_1$  域也称为拟代数闭的 (quasi-algebraically closed). 代数闭域上一元有理函数组成  $C_1$  域 (曾 (炯之) 定理 (Tsen theorem)). 域  $\mathbf{Q}_p$  是  $C_2(2)$  域 (H. Hasse, 1923), 也是  $C_2(3)$  域 (D. J. Lewis, 1952).

超积的另一个重要应用是在非标准分析 (non-standard analysis) 中; 特别地, 实数, 整数等的非标准模型可作为  $\mathbf{R}, \mathbf{Z}$  等的超幂得到.

涉及超滤子和超积的逻辑方面的结论, 见模型论 (model theory) 及 [A2].

超滤子在拓扑学中有更为重要的应用, 见 [A1], [A7].

#### 参考文献

- [A1] Comfort, W. W. and Negrepointis, S., The theory of ultrafilters, Springer, 1974.
- [A2] Bell, J. L. and Slomson, A. B., Models and ultraproducts, North-Holland, 1969.
- [A3] Ax, J. and Kochen, S., Diophantine problems over local fields I, Amer. J. Math., 87 (1965), 605 - 630.

- [A4] Ax, J. and Kochen, S., Diophantine problems over local fields II. A complete set of axioms for  $p$ -adic number theory, *Amer. J. Math.*, **87** (1965), 631 - 648.
- [A5] Ax, J. and Kochen, S., Diophantine problems over local fields III. Decidable fields, *Ann. of Math.*, **83** (1966), 437 - 456.
- [A6] Ershov, Yu. L., On the elementary theory of maximal normal fields, *Soviet Math. Dokl.*, **6** (1965), 1390 - 1393 (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **165** (1965), 21 - 23).
- [A7] Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology, Reidel, 1984 (译自俄文).
- [A8] Jech, T., Set theory, Acad. Press, 1978.
- [A9] Mill, J. van, An introduction to  $\beta\omega$ , in K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984.
- [A10] Rudin, W., Homogeneity problems in the theory of Čech compactification, *Duke Math. J.*, **23** (1956), 409 - 419. 罗嵩龄 译

超球多项式 [ultraspherical polynomials; ультрасферические многочлены], Gegenbauer 多项式 (Gegenbauer polynomials)

区间  $[-1, 1]$  上的正交多项式 (orthogonal polynomials)  $P_n(x, \lambda)$ , 权函数为  $h(x) = (1 - x^2)^{\lambda - 1/2}$ ; 为 Jacobi 多项式 (Jacobi polynomials) 当  $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$  ( $\lambda > -1/2$ ) 时的特殊情况; Legendre 多项式 (Legendre polynomials) 是超球多项式的特殊情况:  $P_n(x) = P_n(x, 1/2)$ .

超球多项式具有标准化

$$P_n(x, \lambda) \equiv C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(-2)^n}{n!} \frac{\Gamma(n + \lambda)\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(2n + 2\lambda)} (1 - x^2)^{-\lambda + 1/2} \times \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^2)^{n - \lambda + 1/2}]$$

和表示式

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(n - k + \lambda)}{\Gamma(\lambda)k!(n - 2k)!} (2x)^{n - 2k}.$$

超球多项式是母函数的幂级数展开

$$\frac{1}{(1 - 2xw + w^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\lambda)}(x) w^n$$

的系数. 超球多项式  $C_n^{(\lambda)}(x)$  满足微分方程

$$(1 - x^2)y'' - (2\lambda + 1)xy' + n(n + 2\lambda)y = 0.$$

更常采用下列公式:

$$(n + 1)C_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n + \lambda)x C_n^{(\lambda)}(x) - (n + 2\lambda - 1)C_{n-1}^{(\lambda)}(x).$$

$$C_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n C_n^{(\lambda)}(x),$$

$$\frac{d}{dx} [C_n^{(\lambda)}(x)] = 2\lambda C_{n-1}^{(\lambda+1)}(x),$$

$$C_n^{(\lambda)}(\pm 1) = (\pm 1)^n \frac{2\lambda(2\lambda + 1)\cdots(2\lambda + n - 1)}{n!} = (\pm 1)^n \left[ \begin{matrix} n + 2\lambda - 1 \\ n \end{matrix} \right].$$

关于参考文献, 见正交多项式 (orthogonal polynomials).

П. К. Суетин 撰

【补注】亦见球面调和函数 (spherical harmonics), 超球多项式和 Jacobi 多项式通过下列二次变换 (quadratic transformations) 相联系:

$$C_{2n}^{(\lambda)}(x) = \text{常数} \cdot P_n^{(\lambda - 1/2, -1/2)}(2x^2 - 1),$$

$$C_{2n+1}^{(\lambda)}(x) = \text{常数} \cdot x P_n^{(\lambda - 1/2, 1/2)}(2x^2 - 1).$$

关于  $q$  超球多项式, 见 [A1].

参考文献

- [A1] Askey, R. and Ismail, M. E. H., A generalization of ultraspherical polynomials, in P. Erdős (ed.), Studies in Pure Mathematics to the Memory of Paul Turán, Birkhäuser, 1983, 55 - 78.

杜小杨 张鸿林 译

脐点 [umbilical point; округления точка]

曲面的一个椭圆点 (elliptic point), 在该点密切抛物面 (osculating paraboloid) 退化成一个旋转抛物面. 在脐点处沿所有方向的法曲率都相同, 而且该点的 Dupin 标形 (Dupin indicatrix) 是一个圆. 脐点有时也被称为球面点 (spherical point) 或圆点 (circular point).

Д. Д. Соколов 撰

【补注】在平坦点 (flat point) 处, 密切抛物面退化成一个平面. 平坦点通常也被称为脐点. 但是, Dupin 标形在平坦点处没有定义.

参考文献

- [A1] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965. 沈纯理 译

哑演算 [umbral calculus; теневой анализ]

【补注】应用近世代数技术研究某些类型的多项式序列或形式 Laurent 级数的系统理论.

哑 (umbra) 这个词是 J. J. Sylvester 在 19 世纪中期提出的, 而最初是指用于表示一个实数序列  $a_0, a_1, \dots$  的符号  $\mathbf{a}$ . 因此, 如果序列  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  满足

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$



则可以用哑记号 (umbral notation) 表示为

$$c^n = (a + b)^n$$

然而这个记号现在已经过时.

现代设计的哑演算是研究二项型的多项式序列 (polynomial sequences of binomial type)  $p_n(x)$ , 即  $\deg(p_n(x)) = n$  且

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(x)$$

的序列, 以及 Sheffer 型的多项式序列 (polynomial sequences of Sheffer type)  $s_n(x)$ , 即  $\deg(s_n(x)) = n$  且

$$s_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k(x) p_{n-k}(x)$$

的序列. 这里  $p_n(x)$  是二项型的序列. Sheffer 型序列类还包含与下述人有关的多项式序列, 他们是 Ch. Hermite, E. N. Laguerre, J. Bernoulli, L. Euler, S. D. Poisson 和 C. Charlier, J. Meixner, F. B. Pidduck, S. Narumi, G. Boole, G. M. Mittag-Leffler, F. W. Bessel, E. T. Bell, N. H. Abel, 以及其他一些人.

如果  $P$  是单变量多项式代数, 那么对偶空间  $P^*$  是众所周知的向量空间. 事实上,  $P^*$  借助于映射

$$\sigma(L) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l(x^k)}{k!} t^k.$$

同构于形式幂级数  $\mathcal{A}$  的向量空间. 因此可以把  $P^*$  等同于代数  $\sigma(P^*) = \mathcal{A}$ , 从而允许线性泛函的乘法. 代数  $\mathcal{A} = \sigma(P^*)$  称为哑代数 (umbral algebra).

特别地, 对线性泛函  $L$  和  $M$ , 几何级数  $M$ ,  $ML$ ,  $ML^2$ ,  $\dots$  是有意义的, 因此, 可以通过  $\deg(s_n(x)) = n$  定义多项式序列  $S_n(x)$  和正交性条件 (orthogonality conditions).

$$ML^k(s_n(x)) = n! \delta_{n,k}.$$

按这种方式得到的序列恰是 Sheffer 型序列, 并称其为 Sheffer 序列 (Sheffer sequences).

在哑演算中最强的一些结果来自于哑代数  $\mathcal{A}$  上线性算子空间的研究. 如果  $T: P \rightarrow P$  是  $P$  上的线性算子, 那么它的伴随  $T^*: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  是哑代数  $\mathcal{A}$  上的线性算子.

$P$  上最重要的线性算子是对二项型序列  $p_n(x)$  用

$$\lambda(x^n) = p_n(x)$$

定义的哑算子 (umbral operator) 和对二项型序列  $p_n(x)$  用

$$\theta P_n(x) = p_{n+1}(x)$$

定义的哑移位 (umbral shift).

哑演算中两个关键结果是:  $P$  上一个线性算子是哑算子, 当且仅当它的伴随是  $\mathcal{A}$  的一个自同构;  $P$  上一个算子是哑移位, 当且仅当它的伴随是  $P$  上的求导. 第一个结果引出了多项式  $P_n(x)$  的显式表示, 而第二个结果导出了  $p_n(x)$  的递推关系. 从而给出了 Hermite, Laguerre, Bernoulli 和其他一些序列的著名递推关系.

近来哑演算在几个方向上已有所扩展. 一个方向是关于非 Sheffer 序列研究, 如 Чебышев, Gegenbauer 和 Jacobi 多项式序列; 另一个方向是所谓的  $q$  哑演算 ( $q$ -umbral calculus) 研究, 其中多项式系数用 Gauss 系数 (Gaussian coefficients) 取代.

Gauss 系数或  $q$  二项式系数 ( $q$ -binomial coefficients)  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  定义为:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}.$$

这里所谓的  $q$  移位阶乘  $(a; q)_m$  定义为:

$$(a; q)_n = \begin{cases} 1, & \text{若 } n = 0, \\ (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}), & \text{若 } n > 0. \end{cases}$$

其中  $q$  或看成是一个形式变量, 或看成是一个绝对值小于 1 的复变量. 应用这些  $q$  二项式系数, 可得到  $q$  二项式公式 ( $q$ -binomial formula): 如果  $x, y$  满足  $yx = qxy$ , 则有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q y^k x^{n-k}.$$

当前涉及各种经典问题的  $q$  形式的完整理论正在出现:  $q$  特殊函数,  $q$ - $\gamma$  函数, 量子群,  $q$  积分,  $q$  正交多项式,  $q$  超几何级数,  $q$ -Haar 测度等以  $q$  形式完善了它们之间的各种相互关系. 见特殊函数 (special functions), 量子群 (quantum groups) 的补注以及 [A9]—[A10].

最后, 哑演算已推广到研究形式 (Laurent) 级数序列, 其中对数起着关键作用.

#### 参考文献

- [A1] Loeb, D. and Rota, G.-C., Formal power series of logarithm type, *Adv. Math.*, **75** (1989), 1—118.
- [A2] Roman, S., *The umbral calculus*, Acad. Press, 1984.
- [A3] Roman, S. and Rota, G.-C., *The umbral calculus*, *Adv. Math.*, **27** (1978), 95—188.
- [A4] Roman, S., More on umbral calculus, with emphasis on the  $q$ -umbral calculus, *J. Math. Anal. Appl.*, **107** (1985), 222—254.

- [A5] Roman, S., The logarithmic binomial formula, *Amer. Math. Monthly*. (To appear).
- [A6] Roman, S., The harmonic logarithms and the binomial formula, *J. Comb. Theory, Ser. A* (To appear).
- [A7] Rota, G.-C., Kahaner, D. and Odlyzko, A., Finite operator calculus, *J. Math. Anal. Appl.*, **42** (1973), 684 - 760.
- [A8] Ueno, K., Umbral calculus and special functions, *Adv. Math.*, **67** (1988), 174 - 229.
- [A9] Gasper, G. and Rahman, M., Basic hypergeometric series, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [A10] Koornwinder, T., Orthogonal polynomials in connection with quantum groups, in P. Nevai (ed.): Orthogonal polynomials: Theory and practice, Kluwer, 1990, 257 - 292.

S. Roman 撰 刘振宏 译 李 乔 校

一元代数 [unary algebra 或 unoid; унарная алгебра, уноид]

具有一族一元运算  $\{f_i: A \rightarrow A, i \in I\}$  的一个泛代数 (universal algebra)  $\langle A, \{f_i, i \in I\} \rangle$ . 一元代数的一个重要的例子产生于由任意群  $G$  到一个集合  $A$  的一切置换的群  $S_A$  内的群同态  $\varphi: G \rightarrow S_A$ . 这样一个同态称为群  $G$  在  $A$  上的作用 (action). 对于每一元素  $g \in G$ , 定义一个一元运算  $f_g: A \rightarrow A$  作为  $S_A$  内在同态  $\varphi$  之下与元素  $g$  相对应的置换  $\varphi(g)$ , 这就提供了一个一元代数  $\langle A, \{f_g: g \in G\} \rangle$ , 其中

$$f_1(x) = x, f_g(f_h(x)) = f_{gh}(x), x \in A, g, h \in G.$$

环上每一个模 (module) 都带有一个一元代数结构. 每一个具有状态集  $S$  和输入符号  $a_1, \dots, a_n$  的确定性半自动机 (见自动机的代数理论 (automata, algebraic theory of)), 也可以看成一个一元代数  $\langle S, f_1, \dots, f_n \rangle$ , 这里  $f_i(s) = a_i s$  是状态  $s$  被输入符号  $a_i$  作用所映成的状态.

具有单独一个基本运算的一元代数称为单元元的 (mono-unary 或 unar). 一个单元元代数的例子就是 Peano 代数  $\langle P, f \rangle$ , 这里  $P = \{1, 2, \dots\}$  而  $f(n) = n + 1$ .

任何一个一元代数的等式只能是以下类型:

$$I_1. f_{i_1} \cdots f_{i_k}(x) = f_{j_1} \cdots f_{j_l}(x),$$

$$II_1. f_{i_1} \cdots f_{i_k}(x) = f_{j_1} \cdots f_{j_l}(y),$$

$$I_2. f_{i_1} \cdots f_{i_k}(x) = x,$$

$$II_2. f_{i_1} \cdots f_{i_k}(x) = y,$$

$$I_3. x = x,$$

$$II_3. x = y.$$

等式  $II_2$  与  $II_3$  等价, 只被一个元素的代数所满足. 一个仅由形如  $I_1$ ,  $I_2$  或  $I_3$  所定义的一元代数簇称为正则的 (regular). 在正则的一元代数簇与半

群之间存在以下的联系 (见 [1], [3], [4]).

令  $V$  是由一个函数符号集合  $\{f_i: i \in I\}$ ,  $I \neq \emptyset$ , 和一个等式集合  $\Sigma$  所给出的正则一元代数簇. 每一个符号  $f_i$  对应于一个元素  $a_i$ , 对于  $\Sigma$  中每一个  $I_1$  形式的等式, 写出定义关系

$$a_{i_1} \cdots a_{i_k} = a_{j_1} \cdots a_{j_l}.$$

令  $P$  是具有生成元  $a_i (i \in I)$  和以上定义关系的半群 (semi-group), 又令  $P^1$  是半群  $P$  再添上单位元  $e$  所得的半群. 对于  $\Sigma$  中每一个形如  $I_2$  的关系 (如果有的话) 写出定义关系  $a_{i_1} \cdots a_{i_k} = e$ . 由  $P^1$  通过添加这些定义关系所得到的半群  $P_V$  称为与簇  $V$  相关联的. 有许多方法来刻画这个簇. 如果  $\Sigma$  只含有形式  $I_1$  的等式, 那么可以只限于构造  $P$ . 在  $P_V$  内定义一元运算  $f_i(x) = x a_i$ , 就得到一个一元代数  $\langle P_V, \{f_i: i \in I\} \rangle$ , 它是一个秩为 1 的  $V$  自由代数. 一元代数  $\langle P_V, \{f_i: i \in I\} \rangle$  的全体自同构的群与半群  $P_V$  的可逆元素所成的群  $P_V^*$  同构.

#### 参考文献

- [1] Малышев, Д. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., algebraic systems, Springer, 1972 - 1973).
- [2] Birkhoff, G. and Bartee, T., Modern applied algebra, McGraw-Hill, 1970.
- [3] Смирнов, Д. М., «Алгебра и логика», **15** (1976), 3, 331 - 342.
- [4] Смирнов, Д. М., «Алгебра и логика», **17** (1978), 4, 468 - 477.
- [5] Jónsson, B., Topics in universal algebra, Springer, 1972.

Д. М. Смирнов 撰

【补注】正则一元代数簇可以用范畴的术语刻画为这样的簇, 它到集合范畴的可遗传子保持上积 (就是说, 这个簇内一族代数的上积被它们的承载集的不相交并集所承载). 与这样一个簇相关联的半群不依赖于 (如上面正文中那样) 这个簇通过运算和等式的特殊表现而范畴地得到: 它是由这个簇到集合范畴的可遗传子的自同态半群.

郝钢新 译

#### 无偏估计量 [unbiased estimator; несмещенная оценка]

数学期望等于被估计的量的统计估计量 (statistical estimator). 假设随机变量  $X$  取值于样本空间  $(\mathcal{X}, \mathfrak{B}, P_\theta)$  ( $\theta \in \Theta$ ); 拟根据  $X$  的实现估计函数  $f: \Theta \rightarrow \Omega$ ,  $f$  是从参数集  $\Theta$  到某个集合  $\Omega$  的映射; 选统计量  $T = T(X)$  作函数  $f(\theta)$  的估计量. 如果对于一切  $\theta \in \Theta$ , 统计量  $T$  满足

$$E_\theta \{T\} = \int_{\mathcal{X}} T(x) dP_\theta(x) = f(\theta),$$

则称  $T$  为函数  $f(\theta)$  的无偏估计量 (unbiased estima-



tor). 常称无偏估计量无系统误差.

例 1. 设随机变量  $X_1, \dots, X_n$  的数学期望同为  $\theta$ , 即

$$E_{\theta}\{X_1\} = \dots = E_{\theta}\{X_n\} = \theta.$$

这时统计量

$$T = c_1 X_1 + \dots + c_n X_n, \quad c_1 + \dots + c_n = 1$$

是数学期望  $\theta$  的无偏估计量. 特别地, 观测值的算术平均值  $\bar{X} = (X_1 + \dots + X_n)/n$  是  $\theta$  的无偏估计量. 在该例中  $f(\theta) \equiv \theta$ .

例 2. 设  $X_1, \dots, X_n$  是独立服从同一概率分布的随机变量, 其分布函数为  $F(x)$ , 即

$$P\{X_i < x\} = F(x), \quad |x| < \infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

这时, 由观测值  $X_1, \dots, X_n$  建立的经验分布函数  $F_n(x)$ , 是分布函数  $F(x)$  的无偏估计, 即  $E\{F_n(x)\} = F(x), |x| < \infty$ .

例 3. 设  $T = T(x)$  是参数  $\theta$  的无偏估计量, 即  $E_{\theta}\{T\} = \theta$ , 而  $f(\theta) = a\theta + b$  是  $\theta$  的线性函数, 则  $aT + b$  是  $f(\theta)$  的无偏估计量.

下面例 4 表明, 可能有这样的情形: 无偏估计量存在并且甚至唯一, 然而这些估计量有可能毫无用处.

例 4. 设  $X$  是服从几何分布的随机变量, 成功的概率为  $\theta$ , 即对于任意自然数  $k$ , 有

$$P\{X = k|\theta\} = \theta(1-\theta)^{k-1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

如果统计量  $T = T(X)$  是参数  $\theta$  的无偏估计量, 则它应满足无偏性方程  $E_{\theta}(T) = \theta$ , 即

$$\sum_{k=1}^{\infty} T(k) \theta (1-\theta)^{k-1} = \theta,$$

其唯一解是

$$T(X) = \begin{cases} 1, & \text{若 } X = 1, \\ 0, & \text{若 } X \geq 2. \end{cases}$$

显然, 统计量  $T$  只有当  $\theta$  十分接近 1 或 0 时才具有好性质, 否则不能为参数  $\theta$  提供任何有用信息.

例 5. 假设随机变量  $X$  服从二项分布, 参数为  $n$  和  $\theta$ , 即对于任意  $k = 0, 1, \dots, n$ ,

$$P\{X = k|n, \theta\} = \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}, \quad 0 < \theta < 1.$$

已知成功概率  $\theta$  (在平方风险意义下) 的最优无偏估计量是统计量  $T = X/n$ . 但是, 假设  $\theta$  是无理数, 则  $P\{T = \theta\} = 0$ . 这个例子反映随机变量的这样一条普遍性质, 就是随机变量一般未必取其数学期望为值. 最后, 有时无偏估计量根本不存在. 例如, 在

例 5 的条件下, 假设被估计函数为  $f(\theta) = 1/\theta$ , 则  $1/\theta$  的无偏估计量不存在 (见例 7).

上述各例表明, 无偏估计量的概念, 尽管它很自然, 然而它并不能帮助试验者摆脱建立统计估计时可能遇到的复杂情况, 因为无偏估计量既可以是很好的, 也可能毫无意义; 它既可能不唯一, 也可能根本不存在. 此外, 无偏估计量同任何点估计量一样有如下缺陷: 它只能给出被估计的量之真值的某个近似值, 而被估计的量在试验前是未知的, 而且试验后仍然未知. 除了在研究无偏估计量时产生的简单而严整的理论, 在建立统计点估计问题中, 为在各种情形下力求获得无偏估计量, 一般没有严谨的根据. 例如, **Rao-Cramér 不等式** (Rao-Cramér inequality) 对于无偏估计量有简单的形式. 具体地, 如果  $T = T(X)$  是函数  $f(\theta)$  的无偏估计量, 则在分布族  $\{P_{\theta}\}$  和函数  $f(\theta)$  满足相当广泛的正则性条件下, 由 Rao-Cramér 不等式, 可见

$$D\{T\} = E\{|T - f(\theta)|^2\} \geq \frac{1}{I(\theta)} \{f'(\theta)\}^2, \quad (1)$$

其中  $I(\theta)$  是关于  $\theta$  的 **Fisher 信息量** (Fisher amount of information). 这样, 对于函数  $f(\theta)$  的无偏估计量的方差存在下界, 此下界为  $f'(\theta)/I(\theta)$ . 特别地, 如果  $f(\theta) \equiv \theta$ , 则由 (1) 式, 有

$$D\{T\} \geq \frac{1}{I(\theta)}.$$

使 Rao-Cramér 不等式达到等式的统计估计量, 称为 **有效估计量** (efficient estimator). 例如, 例 5 中的统计量  $T = X/n$  是二项分布的参数  $\theta$  的有效无偏估计量, 因为

$$D\{T\} = \frac{1}{n} \theta(1-\theta)$$

且

$$I(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log[\theta^X (1-\theta)^{n-X}]\right]^2\right\} = \frac{n}{\theta(1-\theta)},$$

即在  $\theta$  的所有无偏估计量类中,  $T = X/n$  在最小平方风险意义下是  $\theta$  的最优点估计量.

自然, 试验者感兴趣的是无偏估计类充分丰富的情形, 以便能选取在某种意义下最优的无偏估计量. 因而, **Rao-Blackwell-Kolmogorov 定理** (Rao-Blackwell-Kolmogorov theorem) 有重要作用, 利用该定理可以建立最小方差无偏估计量. 该定理的结论是: 如果分布族  $\{P_{\theta}\}$  有 **充分统计量** (sufficient statistics)  $\psi = \psi(X)$ , 而  $T = T(X)$  是函数  $f(\theta)$  的任一无偏估计量; 设统计量  $T' = E_{\theta}\{T|\psi\}$ , 即  $T$  在固定充分统计量  $\psi$  下的平均, 则在任意凸损失函数下, 对于一切

$\theta \in \Theta$ , 统计量  $T^*$  的风险不大于统计量  $T$  的风险. 这时, 如果分布族  $\{P_\theta\}$  是完全的, 则统计量  $T^*$  唯一确定. 于是, 由 Rao-Blackwell-Колмогоров 定理可见, 只要存在充分统计量, 无偏估计量仅需要通过充分统计量来求. Rao-Cramér-Колмогоров 定理的实用价值在于, 它为建立最优无偏估计量提供具体方法: 首先需要建立  $f(\theta)$  的任一无偏估计量, 然后对其关于充分统计量求平均.

例 6. 设随机变量  $X$  服从参数为  $r$  和  $\theta (0 \leq \theta \leq 1)$  的 Pascal 分布 (负二项分布), 即

$$P\{X=k|r,\theta\} = \binom{r+k-1}{k} \theta^r (1-\theta)^k, \\ k=r, r+1, \dots$$

这时, 统计量  $T=(r-1)/(X-1)$  是参数  $\theta$  的无偏估计量. 因为统计量  $T$  通过充分统计量  $X$  表示, 而函数组  $1, x, x^2, \dots$  在区间  $[0, 1]$  上是完全的, 则  $T$  是唯一无偏估计量, 从而是  $\theta$  的最优估计量.

例 7. 设随机变量  $X$  服从参数为  $n$  和  $\theta$  的二项分布, 其母函数  $Q(z)$  为

$$Q(Z) = E\{z^X\} = (z\theta + q)^n, \quad q = 1 - \theta.$$

由此可见, 对于任何整数  $k=1, \dots, n$ , 有

$$Q^{(k)}(z) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(z\theta + q)^{n-k}\theta^k \\ = n^{[k]}(z\theta + q)^{n-k}\theta^k.$$

另一方面,

$$Q^{(k)}(1) = E[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = E\{X^{[k]}\},$$

从而

$$E\left\{\frac{1}{n^{[k]}} X^{[k]}\right\} = \theta^k,$$

即统计量

$$T_k(X) = \frac{1}{n^{[k]}} X^{[k]} \quad (2)$$

是  $\theta^k$  的无偏估计量. 由于  $T_k(X)$  可以通过充分统计量表出, 而函数组  $1, x, x^2, \dots$  在区间  $[0, 1]$  上是完全的, 可见  $T_k(X)$  是  $\theta^k$  的唯一的, 因此是最优的无偏估计量.

由此例产生如下问题: 参数  $\theta$  的究竟什么样的函数  $f(\theta)$  容许无偏估计? А. Н. Колмогоров 在 [1] 中证明了, 只有  $m (m \leq n)$  阶多项式有无偏估计. 例如, 如果

$$f(\theta) = a_0 + a_1\theta + \cdots + a_m\theta^m, \quad 1 \leq m \leq n,$$

则由 (2) 式可见, 统计量

$$T = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k T_k(X)$$

是  $f(\theta)$  的唯一无偏估计量. 特别地, 由此可见, 函数  $f(\theta) = 1/\theta$  没有无偏估计量.

例 8. 设随机变量  $X$  服从参数为  $\theta$  的 Poisson 分布, 即对于任何整数  $k=0, 1, \dots$

$$P\{X=k|\theta\} = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}, \quad \theta > 0.$$

由于  $E\{X\} = \theta$ , 故观测值  $X$  本身就是其数学期望  $\theta$  的无偏估计量. 同样, 例如统计量  $X(X-1)$  是函数  $f(\theta) = \theta^2$  的无偏估计量. 一般, 统计量

$$X^{[r]} = X(X-1)\cdots(X-r+1), \quad r=1, 2, \dots$$

是函数  $f(\theta) = \theta^r$  的无偏估计量. 特别地, 由此可见, 统计量

$$T(X) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r X^{[r]}$$

是函数  $f(\theta) = (1+\theta)^{-1} (0 < \theta < 1)$  的无偏估计量. 一般, 如果函数  $f(\theta)$  有无偏估计量, 即满足无偏性方程  $E\{T(X)\} = f(\theta)$  或与之等价的方程:

$$\sum_{k=0}^{\infty} T(k) \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} = f(\theta),$$

则由此可见, 对于任何在其定义域  $\Theta \subset \mathbf{R}_+^1$  内可展为幂级数的函数  $f(\theta)$  都存在无偏估计量.

例 9. 设独立随机变量  $X_1, \dots, X_n$  服从参数为  $\theta (\theta > 0)$  的同一 Poisson 分布, 其母函数

$$g_z(\theta) = \exp\{\theta(z-1)\}$$

是整解析函数, 从而有唯一无偏估计量. 这时,  $X = X_1 + \cdots + X_n$  是充分统计量, 服从参数为  $n\theta$  的 Poisson 分布. 如果  $T(X)$  是  $g_z(\theta)$  的无偏估计量, 则它应满足无偏性方程

$$E_\theta\{T(X)\} = g_z(\theta) = e^{\theta(z-1)}.$$

由此可见

$$T(x) = \begin{cases} \binom{X}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{X-k}, & \text{若 } 0 \leq k \leq X \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即参数为  $X$  和  $1/n$  之二项分布的母函数, 是 Poisson 分布母函数的无偏估计量.

例 6-9 表明, 在实际中相当常见的情形下, 如果局限于无偏估计类, 则正是由于无偏估计量的概念, 使求最优估计量的问题变得容易解决. А. Н. Колмогоров ([1]) 研究了建立无偏估计的问题, 特别是参数未知时建立正态分布函数的无偏估计量的问题. 无偏估计量更一般的定义属于 E. Lehmann. 按 E. Lehmann 的定义 (见 [2]), 参数  $\theta$  的统计估计量  $T = T(X)$  关于损失函数  $L(\theta, T)$  称为无偏的 (unbiased), 如果对于一切  $\theta, \theta' \in \Theta$ , 有



$$E_0\{L(\theta', T(X))\} \geq E_0\{L(\theta, T(X))\}.$$

此定义的变形见[3]. 在相当宽的条件下, Ю. В. Линник 及其学生(见[4])证明了最优无偏估计量与损失函数无关.

#### 参考文献

- [1] Колмогоров, А. Н., «Изв. АН СССР, сер. матем.» 14(1950), 4, 303 - 326.
- [2] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.
- [3] Клебанов, Л. Б., «Теория вероятн. и её применения», 21(1976), 3, 584 - 598.
- [4] Клебанов, Л. Б., Линник, Ю. В., Рухин, А. Л., «Докл. АН СССР», 200(1971), 5, 1024 - 1025.
- [5] Zacks, S., The theory of statistical inference, Wiley, 1971. М. С. Никулин 撰 周概容、王健 译

#### 无偏检验 [unbiased test; несмещенный критерий]

检定复合假设  $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$  对复合备选假设  $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$  的统计检验 (statistical test), 其功效函数 (见检验的功效函数 (power function of a test))  $\beta(\cdot)$  满足

$$\beta(\theta) \leq \alpha, \text{ 若 } \theta \in \Theta_0,$$

$$\beta(\theta) \geq \alpha, \text{ 若 } \theta \in \Theta_1,$$

其中  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) 是检验的容量 (水平). 在许多统计假设检验问题中不存在一致最大功效检验 (uniformly most-powerful test). 但是, 如果局限于无偏检验类, 则建立一致最大功效检验的问题可以得到解决. 假如假设  $H_0$  对备选假设  $H_1$  的检定问题有一致最大功效检验, 则它是无偏检验, 因为这样检验的功效不低于所谓平凡检验的功效. 这里, 平凡检验是指临界函数  $\varphi(\cdot)$  为常数且等于检验容量  $\alpha$  的统计检验, 即满足  $\varphi(X) = \alpha$  的检验, 其中  $X$  是随机变量, 根据其实现检定假设  $H_0$  对备选假设  $H_1$ .

例. 假设  $H_0: p = 1/2$  对备选假设  $H_1: p \neq 1/2$  的检定问题中, 其中  $p$  是二项分布的未知参数, 符号检验 (sign test) 是一致最大功效无偏的.

#### 参考文献

- [1] Lehmann, E., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988. М. С. Никулин 撰 周概容 译

#### 无界算子 [unbounded operator; неограниченный оператор]

从拓扑向量空间 (topological vector space)  $X$  中一集合  $M$  到拓扑向量空间  $Y$  中的一个映射  $A$  使得有一个有界集 (bounded set)  $N \subset M$  其象  $A(N)$  是  $Y$  中无界集.

无界算子的最简单例子是定义在所有连续可微函

数的集合  $C^1[a, b]$  上映入  $a \leq t \leq b$  上所有连续函数的空间  $C[a, b]$  中的微分算子  $d/dt$ , 因为算子  $d/dt$  把有界集  $\{\sin nt\}$  映成无界集  $\{n \cos nt\}$ . 一个无界算子  $A$  必须在其定义域的某些 (如果  $A$  是线性的, 则在所有的) 点上不连续. 一个重要的无界算子类是闭算子 (closed operator) 类, 因为它们有一种某种程度上代替连续性的性质.

设  $A$  和  $B$  是有定义域  $D_A$  和  $D_B$  的无界算子. 如果  $D_A \cap D_B \neq \emptyset$ , 则在这交上算子  $(\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  或  $\mathbb{C}$ ) 被定义, 且类似地, 如果  $D_A \cap A^{-1}(D_B) \neq \emptyset$ , 则算子  $(BA)x = B(Ax)$  被定义. 特别地, 按这种方式无界算子  $A$  的幂  $A^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 被定义. 一个算子  $B$  称为是算子  $A$  的一个扩张 (extension),  $B \supset A$ , 如果  $D_A \subset D_B$  且对  $x \in D_A$ ,  $Bx = Ax$ . 这样,  $B(A_1 + A_2) \supset BA_1 + BA_2$ . 两个算子的交换性通常是对其中之一是有界的情形处理的: 一个无界算子  $A$  与一个有界算子  $B$  交换, 如果  $BA \subset AB$ .

对无界线性算子 (仍) 定义伴随算子 (adjoint operator) 的概念. 设  $A$  是拓扑向量空间  $X$  中稠密的集合  $D_A$  上的一个无界算子且映入拓扑向量空间  $Y$  中, 如果  $X^*$  和  $Y^*$  分别是  $X$  和  $Y$  的强对偶, 且如果  $D_{A^*}$  是这样的线性泛函  $\varphi \in Y^*$  的集合: 对  $\varphi$  存在一个线性泛函  $f \in X^*$  使得对所有  $x \in D_A$ ,  $\langle Ax, \varphi \rangle = \langle x, f \rangle$ , 则对应关系  $\varphi \mapsto f$  决定了一个在  $Y^*$  中的  $D_{A^*}$  (然而, 它可以只由零元素所组成) 上算子  $A^*$ , 即所谓  $A$  的伴随算子.

#### 参考文献

- [1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980 (中译本: 吉田耕作, 泛函分析, 人民教育出版社, 1980).
- [2] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, I, Interscience, 1958.
- [3] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, Functional analysis, F. Ungar, 1955 (译自法文) (中译本: F. 黎茨, B. 塞克佛尔维-纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷, 1963, 第二卷, 1980).
- [4] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965 (中译本: Л. А. 刘斯铁尔尼克, В. И. 索伯列夫, 泛函分析概要, 第二版, 科学出版社, 1985).
- [5] Neumann, J. von, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Dover, reprint, 1943.

В. И. Соболев 撰

【补注】 从一个拓扑向量空间到另一个中的连续线性算子把有界集映成有界集. 对赋范线性空间之间的线性映射其逆也为真.

#### 参考文献

- [A1] Goldberg, S., Unbounded Linear operators, McGraw-Hill, 1966.

[A2] Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. A.,  
Classes of linear operators, I, Birkhäuser, 1991.

葛显良 译 吴绍平 校

不确定性原理 [uncertainty principle; неопределенности принцип], Heisenberg 原理 (Heisenberg principle)

量子力学中重要原理之一, 它断言: 一个物理系统, 由具有非零对易式  $[\hat{a}, \hat{b}]$  的不可对易算子  $\hat{a}$  和  $\hat{b}$  所描述的两个物理量  $a$  和  $b$ , 在任何态中这两个值的离差不可能同时很小.

更精确地, 令  $\varphi \in H$ ,  $\|\varphi\| = 1$  为物理系统的一个态 ( $H$  是这些态的 Hilbert 空间, 而  $(\cdot, \cdot)$  是  $H$  中的标量积), 并令  $\Delta_\varphi^a = [(\hat{a}^2 \varphi, \varphi) - (\hat{a} \varphi, \varphi)^2]^{1/2}$  为量  $a$  在态  $\varphi$  中的离差;  $\Delta_\varphi^b$  类似地予以定义, 则总有

$$\Delta_\varphi^a \Delta_\varphi^b \geq \frac{1}{2} |([\hat{a}, \hat{b}] \varphi, \varphi)|. \quad (1)$$

特别是, 一个量子粒子的坐标  $x, y, z$  及其动量的分量  $p_x, p_y, p_z$ , 在所有量子化标准方式 (即, 空间  $H$  的选择以及把作用于  $H$  的自伴算子与物理量联系起来的规则) 下由算子  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  和  $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$  表示, 使得

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = [\hat{p}_y, \hat{y}] = [\hat{p}_z, \hat{z}] = -i\hbar E,$$

其中  $E$  是  $H$  上的单位算子, 而  $\hbar$  是 Planck 常数. 因而, 对任何  $\varphi \in H$ , 有

$$\Delta_\varphi^{p_x} \Delta_\varphi^x \geq \frac{\hbar}{2}, \Delta_\varphi^{p_y} \Delta_\varphi^y \geq \frac{\hbar}{2}, \Delta_\varphi^{p_z} \Delta_\varphi^z \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2)$$

#### 参考文献

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974 (中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席茨, 量子力学 (非相对论理论), 人民教育出版社, 上册, 1980, 下册, 1981).

Р. А. Минлос 撰

【补注】 W. Heisenberg ([A1]) 1927 年提出这个不确定性原理. 同一年, E. H. Kennard ([A2]) 发现关系式 (2), 而一般关系式 (1) 则是由 H. P. Robertson ([A3]) 于 1929 年予以证明的. 尽管不清楚为什么离差 (标准差) 应是不确定性的正确量度, 但几乎量子力学课本的所有著者都应用 (1) 和 (2) 作为 Heisenberg 不确定性原理的数学表述. 然而不难证明, 即使在不确定性原理的大多数简单例证中, 离差也是发散量. 这使 (1) 和 (2) 变得无意义! (见 [A4] - [A6].) H. J. Landau 和 H. O. Pollak ([A5]) 于 1961 年曾经给出不确定性原理的一个更加令人满意的数学表述. 尽管如此, 令人惊奇的是, 这个表述迄今尚未进入课本.

文献 [A7] 中可以找到关于不确定性原理的一个优美的全面评述, 它还包括大量参考文献.

#### 参考文献

- [A1] Heisenberg, W., The physical principles of quantum theory, Dover, reprint, 1949 (译自德文).  
[A2] Kennard, E. H., Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen, Z. Physik, 44 (1927), 326 - 352.  
[A3] Robertson, H. P., The uncertainty principle, Phys. Rev., 34 (1929), 163 - 164.  
[A4] Hilgevoord, J. and Uffink, J., The mathematical expression of the uncertainty principle, in F. Selleri, A. van der Merwe and G. Tarozzi (eds.), Proc. Internat. Conf. Microphysical Reality and Quantum Description (Urbino, Italy, 1985), Reidel, 1988, 91 - 114.  
[A5] Hilgevoord, J. and Uffink, J., A new look on the uncertainty principle, in Internat. School of History of Science: Sixty-two Years of Uncertainty: Historical, Philosophical and Physical Inquiries into the Foundations of Quantum Mechanics (Erice, Sicily), 1989.  
[A6] Uffink, J. and Hilgevoord, J., Uncertainty principle and uncertainty relations, Found. Phys., 15 (1985), 925.  
[A7] Uffink, J., Measures of uncertainty and the uncertainty principle, R. U. Utrecht, 1990. Thesis.  
[A8] Lévy-Leblond, J.-M. and Balibar, F., Quantics - rudiments of quantum physics, North-Holland, 1990 (译自法文). 徐锡申 译

无条件收敛 [unconditional convergence; безусловная сходимость]

级数各项任意排列后所成的序列总是收敛的这类级数的性质. 更确切地说, 线性空间  $E$  (其上定义了收敛序列的概念) 中元素的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (*)$$

称为无条件收敛 (unconditionally convergent), 如果将其各项任意排列后仍收敛.

与无条件收敛的研究相类似的是度量向量 (或拓扑) 空间中无条件收敛级数的研究 ([1] - [3]). 因此, Banach 空间  $E$  中元素的级数 (\*) 无条件收敛的充要条件是, 每一个部分级数  $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k}$  ( $n_1 < n_2 < \dots$ ) 收敛 ([4]) (Orlicz 定理 (Orlicz theorem)). 数项级数的无条件收敛等价于它的绝对收敛 (见关于级数项重新排列的 Riemann 定理 (Riemann theorem)). 一般地, 若  $E$  是有限维赋范空间, 则级数无条件收敛等价于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_E$  收敛. 这对无穷维 Banach 空间不成立.

另外的研究方向与无条件几乎处处收敛的函数级数 (或正交级数) 有关 ([5]). 这类性质往往与 Banach 空间中无条件收敛级数性质相距甚远. 例如, 与



上述 Orlicz 定理类似的结论对于无条件几乎处处收敛不成立 ([6]).

#### 参考文献

- [1] Banach, S. S., A course of functional analysis, Kiev., 1948 (乌克兰文).
- [2] Day, M. M., Normed linear spaces, Springer, 1958.
- [3] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.
- [4] Orlicz, W., Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II, *Studia Math.*, 1 (1929), 241 – 255.
- [5] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.
- [6] Ульянов, П. Л., «Успехи матем. наук», 16 (1961), 3, 61 – 142.

Б. И. Голубов 撰 罗嵩龄、罗 昕 译

#### 无条件可和性 [unconditional summability; безусловная суммируемость]

对级数项的所有可能的排列而成级数的可和性.  
级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (*)$$

称为依某求和法  $A$  无条件可和 (unconditionally summable) (无条件  $A$  可和), 如果无论怎样改变它的项的次序, 依此法均可和于和  $s$ , 这里  $s$  的值依赖于特殊的排列 (见求和法 (summation methods)). W. Orlicz ([1]) 最早研究无条件可和性; 特别是他指出, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 则级数依线性正则法 (见正则求和法 (regular summation methods)) 的绝对可和性蕴涵无条件收敛 (unconditional convergence). 他随后指出, 这个条件可以用下面较弱的条件代替:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ([2]). 依矩阵法的无条件可和性不蕴涵无条件收敛; 事实上, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$  就是一例. 若  $A$  是正则矩阵求和法 (matrix summation method), 且级数 (\*) 无条件  $A$  可和, 则级数的所有项形如  $a_n = c + \eta_n$ , 其中  $c$  是常数, 以  $\eta_n$  为项的级数绝对收敛:  $\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| < \infty$ ; 此外, 当方法  $A$  使级数  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$  没有和时,  $c = 0$  ([3]).

对于函数级数, 依测度可和性, 处处可和性及几乎处处可和性等之间有所不同. 关于函数级数的无条件可和性, 下述断言几乎处处成立: 若集合  $E$  上可测函数  $f_n$  的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ , 在  $E$  上几乎处处无条件  $A$  可和, 则该级数的项形如  $f_n(x) = f(x) + \eta_n(x)$ , 其中  $f$  是  $E$  上有限可测函数, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x)$  在  $E$  上无条件几乎处处收敛; 若方法  $A$  使  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$  没有和, 也取  $f = 0$  ([2]).

#### 参考文献

- [1] Orlicz, W., Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci.

Math. Astr. Phys., no. 3A (1927), 117 – 125.

- [2] Ульянов, П. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 23 (1959), 5, 781 – 808.
- [3] Гапошкин, В. Ф., Олевский, А. М., «Науч. докл. высш. школы. Физ.-Матем. науки», 6 (1958), 81 – 86.

И. И. Волков 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Zeller, K. and Beekmann, W., Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1970.

罗嵩龄 译

#### 不可数集 [uncountable set; несчетное множество]

不可数 (countable) 的无穷集, 即它不与自然数集等势. 例如, 实数集是不可数的, 而有理数集是可数的.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】在文献中, “可数集”有时指“有限或可数无穷集”, 有时指“可数无穷集”.

实数集的不可数性可由 Cantor 对角线化原理 (Cantor diagonalization principle) 证明 (见 Cantor 定理 (Cantor theorem)).

#### 参考文献

- [A1] Kuratowski, K., Introduction to set theory and topology, Pergamon, 1961, p. 62 ff (译自法文).

赵希顺 译

#### 不可判定性 [undecidability; неразрешимость]

【补注】一个算法 (algorithm) 的不存在性, 或者在一个形式系统 (formal system) 中证明或否证一个命题的不可能性. 下面分别予以讨论. 解决某一给定问题的算法的不存在性常常称为该问题的不可解性 (unsolvability). 有时“不可判定性”和“不可解性”看作是同义词. (见不可解性 (unsolvability).)

在一切数学领域中都得到判定性结果, 它们可能以算法的直观概念为依据. 由构造一个算法证明一个问题是可判定的, 该算法在接收该问题一个例子的数据后产生对于这个例子的回答. 一个经典例子是求两个自然数的最大公因子的 Euclid 算法.

算法的概念必须形式化才能证明某个问题是不可判定的. 一个问题的不可判定性是指算法原则上不可能存在, —— 不仅仅是至今还不知道这样的算法.

在这些形式化中最普通的是 Turing 机 (Turing machine). 然而, 应该强调, 所有提出的形式化发现都是等价的, 此外, 不可判定问题的存在性是不依赖所用的形式化. 下面将简要阐述这一点.

这样, 必须说明算法这个直观概念的任何形式化如何导致算法不可判定问题. 考虑任何一个这样的形式化. 对任何算法  $A$  和  $A$  的任何输入字  $x$ , 存在两

种可能性: 或者  $A$  对于  $x$  停止 (halt), 即当  $A$  作用于  $x$  时得出一个停止的计算; 或者  $A$  对于  $x$  不停止. 在后一种情况下, 就说  $A$  对于  $x$  循环 (loop). 停机问题 (halting problem) 是对于任何对  $(A, x)$ , 判定  $A$  对于  $x$  是停止还是循环.

停机问题的一个特例是可自应用性问题 (self-applicability problem), 定义如下: 每个算法  $A$  是由它的 Gödel 字 (Gödel word)  $g(A)$  所完全决定的. 例如,  $g(A)$  可定义为  $A$  中所有指令按顺序的集合. 一个算法  $A$  称为可自应用的 (self-applicable), 只有当  $A$  对于  $g(A)$  停止. 自应用问题是判定任一算法是否可自应用的. 自应用问题是停机问题的子问题; 因此, 如果前者是不可判定的, 则后者也是不可判定的.

假设存在一个自应用问题的算法  $A_0$ . 这样, 对所有形为  $g(A)$  的输入,  $A_0$  都停机, 且根据  $A$  是否可自应用产生回答 yes 或 no. 现在修改  $A_0$ , 加上一个由 yes 回答开始的一个非停机的计算. 这样, 修改过的算法  $A_1$ , 对于形为  $g(A)$  的输入循环 (或停机), 其中  $A$  是 (不是) 可自应用的. 由对角线化 (diagonalizing), 对  $A_1$  考虑输入  $g(A_1)$ , 得到一个矛盾. 这蕴涵了自应用问题是不可判定的. 因此, 停机问题也是不可判定的.

算法不可判定性的证明或者是直接的 (direct). 或者是间接的 (indirect). 一个直接证明, 如上所述, 通常用某种形式的对角线法. 一个问题  $P$  的不可判定性的间接证明是将  $P$  归约到一个其不可判定性已知的问题  $P_1$ . 将解  $P$  的算法转化为解  $P_1$  的算法. 不可判定性问题中这样有用的参照点  $P_1$  是 Hilbert 第十问题 (Hilbert tenth problem) 和 Post 对应问题 (Post correspondence problem).

可判定性对于由一个问题到它的子问题的变换是保持的. 类似地, 不可判定性对于问题的扩张是保持的. 知道可判定性和不可判定性之间的边界线是至关重要的. 非常难以精确地确定边界, 但可粗略地确定其边界. 例如, 考虑一由有限多个定义方程定义的群和半群的字问题, 也考虑单向字问题 (unidirectional word problem), 即定义关系只允许关系的右边代换左边, 反之则不行. 如果也考虑可交换性, 则产生八个问题: 群对半群, 一般的对交换的, 方程对单向关系. 群的字问题是不可判定的, 因此, 三个更广泛的问题也是不可判定的. 交换半群的单向字问题是可判定的, 因此三个上述子问题也是可判定的. 这样, 在这里, 可判定性和不可判定性的边界是已知的.

对于讨论一个形式系统中的不可判定命题, 见不可解性 (unsolvability); Gödel 不完全性定理 (Gödel incompleteness theorem). K. Gödel 证明了不可判定

命题的存在性不是任何个别形式系统的缺陷, 而是所有形式系统的内在性质. 这样的内在的不可判定命题是表示一给定形式系统的相容性的形式命题. 后来人们发现 (例如, G. Chaitin [A1], [A2] 的工作) 不可判定命题不是少有的, 而是非常多的, 它们通常非常简单, 有些属于最初等的算术. 不可判定命题不再错认为是“实际数学”中不会遇到的奇异性. 如 Chaitin 所述: 非线性动力学和量子力学已证明随机存在于自然中. 我相信: 我已经证明了随机性在纯数学中也存在, 事实上, 甚至存在于数论的最初等的分支中.

不能忽视不可判定命题, 它们不是例外的和病态的, 而是大量的, 可接近的, 并且可感知的. 对任何形式系统, 存在有真正的算术命题, 它的真假值不可能在该系统内证明, 尽管看起来这个命题肯定或者为真或者为假. 例如: 关于一个给定 Diophantus 方程可解性的命题. 可以构造一个带参数  $k$  的具有多个变元的 Diophantus 方程序列. 包含在对应于参数  $k$  的有限多个值的方程解中的信息, 通常不可用于解决其他情况. 数学形式推理无力将不同情况联系起来. 这样, 这个特别平常的参数化 Diophantus 方程超越了任何形式系统所能达到的地步. 解决不同情况的方法本质上不会好于直接将所要得到的结果放在公理中!

#### 参考文献

- [A1] Chaitin, G., Algorithmic information theory, Cambridge Univ. Press, 1987.
  - [A2] Chaitin, G., Incompleteness theorems for random reals, *Adv. Appl. Math.*, 8 (1987), 119 - 146.
- G. Rozenberg, A. Salomaa 撰 陆跃飞 译

#### 欠定方程组 [underdetermined system; недоопределенная система]

一个微分方程组, 其中方程的个数少于未知函数的个数. 亦见超定方程组 (overdetermined system).

А. П. Солдатов 撰 杜小杨 译

#### 待定系数法 [undetermined coefficients, method of; неопределенных коэффициентов метод]

以有限或无限个已知函数的精确或近似的线性组合形式确定一未知函数的方法. 所指的线性组合带有未知系数, 就要用各种方法由所研究的问题的条件确定. 通常推导出关于未知系数的一组代数方程.

待定系数法应用的经典例子是, 将复数或实数域上的正则有理函数展成基本分式. 设  $P(z)$  和  $Q(z)$  是复系数代数多项式,  $P(z)$  的次数  $n$  小于  $Q(z)$  的次数  $m$ ,  $Q(z)$  的最高次项系数为 1, 令  $z_i$  是  $Q(z)$  的  $\alpha_i$  重根,  $i = 1, \dots, k$ ,  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = m$ . 因此

$$Q(z) = (z - z_1)^{\alpha_1} \cdots (z - z_k)^{\alpha_k}.$$



正则有理函数  $P(z)/Q(z)$  可唯一地表示为形式

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^k \sum_{v=1}^{\alpha_i} \frac{A_{iv}}{(z-z_i)^v}, \quad (1)$$

其中  $A_{iv}$  尚是一些未知的复数,  $m$  也未知. 为了求它们, 把等式右边通分, 然后消去非实质项, 归并同类项, 得到一个两边都是次数最多为  $m-1$  的多项式的等式; 左边的系数已知, 右边是未知数  $A_{iv}$  的线性组合. 由于  $z$  的同次幂的系数相等, 所以得到  $A_{iv}$  的  $m$  个线性方程的方程组. 因展开式 (1) 的存在性和唯一性, 故该方程组有唯一解. 有时用稍为不同的做法求系数  $A_{iv}$  更加方便. 例如, 设  $Q(z)$  的全部根为单根, 这时 (1) 式的形式为

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{z-z_i}.$$

两边通分后简化同类项, 得到等式

$$P(z) = \sum_{i=1}^m A_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m (z-z_k).$$

陆续置  $z = z_i, i = 1, \dots, m$ , 容易得到

$$A_i = \frac{P(z_i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m (z_i - z_k)}.$$

一般情况下, 常将这两种方法结合起来求系数  $A_{iv}$ . 设  $P(x)$  和  $Q(x)$  为实系数多项式,

$$Q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1} \cdots (x-x_k)^{\alpha_k} \times \\ \times (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l},$$

其中  $x_1, \dots, x_k$  是  $Q(x)$  的  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  重实根, 系数为  $p_j$  和  $q_j$  的二次三项式  $x^2+p_jx+q_j$  是乘积  $(x-z_j)(x-\bar{z}_j)$ , 其中  $z_j \notin \mathbf{R}$ , 是  $Q(x)$  的  $\beta_j$  重复根,  $j = 1, \dots, l$ , 并且

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j + 2 \sum_{j=1}^l \beta_j = m.$$

则正则有理函数  $P(x)/Q(x)$  有一个且仅有一个下列形式的展开式:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{\mu=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i\mu}}{(x-x_i)^\mu} + \sum_{j=1}^l \sum_{v=1}^{\beta_j} \frac{M_{jv}x + N_{jv}}{(x^2+p_jx+q_j)^v}, \quad (2)$$

其中系数  $A_{i\mu} (\mu = 1, \dots, \alpha_i, i = 1, \dots, k)$ ,  $M_{jv}$  和  $N_{jv} (v = 1, \dots, \beta_j, j = 1, \dots, l)$  都是实数. 求它们的方法与上述复数情形相同: 等式 (2) 右边进行通分, 消去非实质项; 归并同类项后, 两边  $x$  的同次幂的系数相等. 这样通常得出  $m$  个未知数  $A_{i\mu}, A_{iv}$  的  $m$  个方程的方程组, 它存在唯一的解.

正则有理函数展成基本有理式可应用于, 例如, 求它们的 **Laurent 级数** (Laurent series) (特别是它们的 **Taylor 级数** (Taylor series)) 以及将其积分. 用 **Остроградский 方法** (Ostrogradski method) 求有理函数积分和求形式为  $P(x)/\sqrt{ax^2+bx+c}$  的函数的积分也用到待定系数法. 对后者积分变成

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \\ = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (3)$$

其中多项式  $Q(x)$  的次数小于  $P(x)$  的次数. 为了求出  $Q(x)$  的系数和  $\lambda$ , 对 (3) 式求导. 将两边通分, 略去非实质项, 归并同类项, 使  $x$  的同次幂系数相等. 最后又得到具唯一解的线性方程组. 类似的积分方法可以在某些其他情况应用.

待定系数法可用于求 (常或偏) 微分方程的幂级数形式的解. 为此, 在问题涉及的点的邻域内, 将带待定系数的幂级数代入所给的方程. 有时代入后可得到该级数的系数之间的一些关系式, 由这些关系式借助给定的初始条件或边值条件即能求出这些系数, 最终得出方程的级数形式的解. 例如, 当用此法解超几何方程 (hypergeometric equation) 时, 可以得到超几何函数 (hypergeometric function) 的一种级数展开式.

待定系数法也可以其他方式用于解微分方程, 例如, **Галеркин 法** (Galerkin method), **Ritz 法** (Ritz method) 以及 **Trefftz 法** (Trefftz method); 它也用于数值方法: 求得特征方程系数的 **Крылов 法** 和积分方程的近似解法.

Л. Д. Кудрявцев 撰  
【补注】术语“待定系数法”或者 Lagrange 待定系数法, 在研究条件极值问题中也常指 **Lagrange 乘子** (Lagrange multipliers) 法, 例如见 [A3].

#### 参考文献

- [A1] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 1, 8 изд., М., 1969 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第一卷, 人民教育出版社, 1958).
- [A2] Schröder, K. (ed.), Mathematik für die Praxis, II, Deutsh. Verlag Wissenschaft., 1966, p. 49ff.
- [A3] Rektorys, K., Applicable mathematics, Iliffe, 1969, 480 - 481.
- [A4] Young, D. M. and Gregory, R. T., A survey of numerical mathematics, 1, Dover, reprint, 1988, 259 - 261.
- [A5] Greenberg, M. D., Foundations of applied mathematics, Prentice-Hall, 1978, p. 419 ff.
- [A6] Henrici, P., Applied and computational complex analysis, 1, Wiley, 1974, p. 553; 562.
- [A7] Маркушевич, А. И., Теория аналитических фу-

нкций, 2 изд., М., 1968 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957).

- [A8] Zill, D. G. and Cullen, M. R., *Advanced engineering mathematics*, PWS-Kent, 1992, 139 – 157; 658ff. 沈海玉 译

### 单行曲线 [unicursal curve; уникурсальная кривая]

平面曲线  $\Gamma$ , 它可以在自相交点只经过二次的条件下被跑遍. 曲线是单行的充要条件是最多只有两个点其上有奇数条道路通过. 如果  $\Gamma$  是  $n$  次平面代数曲线 (algebraic curve), 其上有最大数  $\delta$  个二重点 (包括假点和虚点), 则  $\delta = (n-1)(n-2)/2$  (这里一个  $k$  重点被当作  $k(k-1)/2$  个二重点).

设  $R(x, y)$  是有理函数,  $y$  是  $x$  的函数,  $y$  由给出代数单行曲线的方程  $F(x, y) = 0$  定义, 则积分  $\int R(x, y) dx$  可被约化为有理函数的积分并且可用初等函数表出.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】在代数几何学里, 单行曲线  $U$  是有理曲线 (rational curve), 即允许有参数表示  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , 且  $\varphi$  和  $\psi$  是有理函数的曲线. 这样的曲线是有效亏格 0 的代数曲线. 对于每条不可约曲线  $\Gamma$  存在双有理等价的非奇异曲线  $\tilde{\Gamma}$ .  $\tilde{\Gamma}$  在相差一个同构的意义下唯一.  $\tilde{\Gamma}$  的亏格称为  $\Gamma$  的有效亏格 (effective genus). 单行曲线是有效亏格为 0 的不可约代数曲线. 这与上述的一般几何定义 (或多或少地) 相符合, 参数化提供了“遍历”.

### 参考文献

- [A1] Walker, R. J., *Algebraic curves*, Dover, reprint, 1950, 149 – 151.  
[A2] Griffiths, Ph. and Harris, J., *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience, 1978.

陈志杰 译

### 统一场论 [unified field theories; единые теории поля]

一个集合名称, 它反映想用把电场和磁场描述为电磁场的表现形式的大致类似方式, 而将全部或某些物理场 (最经常的是将引力场和电磁场) 描述为单一基本场的表现形式的种种尝试. 统一场论可以方便地划分为两种类型: 一种是事件空间中某几何对象的场形成基本场 (例如, A. Einstein 统一场论的各种变型 [1], 和几何动力学 (geometro-dynamics) [2]); 另一种是, 基本场并不具有几何性质 (例如, 非线性旋子场理论). 有些统一场论曾设法获得基本物理常数的成功估计.

目前, 人们曾概括地表述了除引力场以外的基本场的统一理论 (所谓 Weinberg-Salam 理论 (Weinberg-Salam theory)), 并草拟了包括引力场的统一理论的纲要.

这些理论运用来自当代数学的方法和概念的最多变集成. 特别是, T. Kaluza ([3]) 和 O. Klein ([4]) 关于时空可能具有 4 维以上维数的通俗观念得到再度复兴. 这另外的维数几乎从不出现在宏观物理学中, 因为它们被扭曲成为超小相似环面 (紧化概念 (idea of compactification)). 按照近代估计 [5], 这种空间的维数可以是 50 的量级或更大.

### 参考文献

- [1A] Einstein, A. and Mayer, W., *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissenschaft. Phys.-Math. Kl.* (1931), 541 – 547.  
[1B] Einstein, A. and Mayer, W., *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissenschaft. Phys.-Math. Kl.* (1932), 130 – 137.  
[2] Wheeler, J. A., *Geometrodynamics*, Acad. Press, 1962.  
[3] Kaluza, T., *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissenschaft. Phys.-Math. Kl.* (1921), 966.  
[4] Klein, O., *Z. Physik*, 37 (1926), 895 – 906.  
[5] Cremmer, E., Julia, B. and Scherk, J., *Phys. Letters*, B 76 (1978), 409. Д. Д. Соколов 撰

### 【补注】

### 参考文献

- [A1A] Einstein, A., *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissenschaft. Phys.-Math. Kl.* (1927), 23 – 30.  
[A1B] Einstein, A. and Bergmann, P., On a generalization of Kaluza's theory of electricity, *Ann. of Math.*, (2) 40 (1938), 683 – 701.  
[A2] Heisenberg, W., *The nonlinear theory of elementary particles*, Univ. of Rochester, 1960.  
[A3] Appelquist, T., Chodos, A. and Freund, P. G. O., *Modern Kaluza-Klein theories*, Addison Wesley, 1987. 徐锡申 译

### 一致代数 [uniform algebra; равномерная алгебра]

紧统  $X$  上连续函数的代数  $C(X)$  的一个子代数  $A$ , 关于一致收敛拓扑 (topology of uniform convergence) 闭, 包含所有常函数且分离  $X$  的点. 最后的条件是指对  $X$  中每一对不同的点  $x, y$  存在  $A$  中一个函数  $f$  使得  $f(x) \neq f(y)$ . 一致代数通常赋予上确界范数:

$$\|f\| = \sup_x |f(x)|.$$

这种情况下  $\|f^2\| = \|f\|^2$ . 具有单位元素 (即使不假设有交换性) 且有满足上面条件的范数的每一个 Banach 代数同构于一个一致代数.

一致代数构成复数域  $\mathbb{C}$  上交换 Banach 代数 (commutative Banach algebra) 类的一个重要子类.

对每一点  $x \in X$  有一个由  $\varphi_x(f) = f(x)$  定义的同态  $\varphi_x: A \rightarrow \mathbb{C}$ . 所以  $X$  按自然方式拓扑地嵌入  $A$



的极大理想空间  $\text{MSpec}(A)$  中, 且在相应的等同下  $X$  包含 Шилов 边界 (见边界 (一致代数理论中的) (boundary (in the theory of uniform algebras))). 在一致代数的研究中起重要作用的有峰点 (peak points) (即  $X$  中这样的点, 在其上至少对  $A$  的一个元素达到严格最大模),  $X$  上乘性概率测度 (即从  $A$  到  $\mathbb{C}$  的同态的表示测度) 和  $X$  上正交于  $A$  的测度. 关于一致代数的许多具体结果涉及这些概念之间的关系.

一个一致代数称为对称的 (symmetric), 如果对其中每一函数其复共轭也属于该代数. 按照 Stone-Weierstrass 定理 (Stone-Weierstrass theorem), 紧统  $X$  上任一对称一致代数与  $C(X)$  重合. 所谓反对称一致代数 (anti-symmetric uniform algebras), 除常数外不含实值函数, 构成了相反的一类. 一个典型的例子是在复平面的开单位圆盘上解析而在其闭包上连续的所有函数的代数 (圆盘代数). Шилов-Bishop 定理 (Shilov-Bishop theorem): 任一一致代数可由反对称一致代数按一定方式“粘合”得出. 甚至更精细的分类定理也已经知道. 同时, 任意的一致代数不能简化到圆盘代数类型的解析函数代数. 例如, 不可能构造一个一维紧统上一致代数, 与其极大理想空间重合, 使得该紧统所有的点是峰点且同时只有该代数的零元素可在一非空开集上为零.

#### 参考文献

[1] Gamelin, T., Uniform algebras, Prentice-Hall, 1969.

Е. А. Горин 撰

【补注】 代替“一致代数”也用“函数代数”这术语.

设  $\xi \in \text{MSpec}(A)$ , 后者是  $A$  的极大理想空间. 对  $\xi$  的表示测度 (representing measure) 是  $X$  上一个正测度  $\mu$  使得

$$\xi(f) = \int f d\mu, f \in A.$$

由 Riesz 表示定理它们是存在的 (见 Riesz 定理 (Riesz theorem) 第二条目的补注). 当然有  $\int d\mu = 1(f) = 1$ , 所以  $\mu$  是概率测度.  $\xi$  的一个 Jensen 测度 (Jensen measure) 是  $X$  上一个正测度  $\mu$  使得 Jensen 不等式 (Jensen inequality)

$$\log |\xi(f)| \leq \int \log |f| d\mu, f \in A,$$

成立. Jensen 测度是一种表示测度, 且对  $\xi$  总存在 Jensen 测度.

$X$  上测度  $\mu$  正交 (orthogonal) 于  $A$ , 如果对所有的  $f \in A$ ,  $\int f d\mu = 0$ .

#### 参考文献

[A1] Gamelin, T. W., Uniform algebras and Jensen measures, Cambridge Univ. Press, 1978.

[A2] Leibowitz, G. M., Lectures on complex functions algebras, Foresman, 1970.

[A3] Stout, E. L., The theory of uniform algebras, Bogen & Quigley, 1971.

[A4] Wermer, J., Banach algebras and several complex variables, Springer, 1975.

[A5] Suci, I., Function algebras, Ed. Acad. Romania, 1973.

[A6] Browder, A., Introduction to function algebras, Benjamin, 1969. 葛显良 译 鲁世杰 校

一致逼近 [uniform approximation; равномерное приближение]

同 Чебышев 逼近 (Chebyshev approximation).

一致有界性 [uniform boundedness; равномерная ограниченность], 界于上 (下) 的

一族实值函数  $f_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$  的一种性质, 这里  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}$  是一指标集而  $X$  是一任意集合. 它要求存在常数  $c > 0$ , 使得对所有的  $\alpha \in \mathcal{A}$  和所有的  $x \in X$  不等式  $f_\alpha(x) \leq c$  (分别地,  $f_\alpha(x) \geq -c$ ) 成立.

一族函数  $f_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$ , 称为一致有界的 (uniformly bounded), 如果它同时是界于上又界于下地一致有界.

一族函数一致有界性的概念已经推广到赋范空间和赋半范空间中的映射. 当  $X$  是任意集合而  $Y$  是具有半范数 (范数)  $\|\cdot\|_Y$  的赋半范 (赋范) 空间, 一族映射  $f_\alpha: X \rightarrow Y$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$ , 称为一致有界的, 如果存在常数  $c > 0$ , 使得对所有的  $\alpha \in \mathcal{A}$  和  $x \in X$ , 不等式  $\|f_\alpha(x)\|_Y \leq c$  成立. 如果在有界映射  $f: X \rightarrow Y$  的空间  $\{X \rightarrow Y\}$  中由公式

$$\|f\|_{\{X \rightarrow Y\}} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$$

引入一个半范数 (范数), 则函数集合  $f_\alpha: X \rightarrow Y$ ,  $\alpha \in U$  的有界性是指这集合在空间  $\{X \rightarrow Y\}$  中关于半范数  $\|\cdot\|_{\{X \rightarrow Y\}}$  的有界性.

界于下和上一致有界性的概念已经推广到映射  $f: X \rightarrow Y$  的情况, 其中  $Y$  在某种意义下有序.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 一致有界定理 (uniform boundedness theorem) 如下述. 设  $X$  是一线性拓扑空间, 且不是可数多个闭疏集之并. 设  $\{T_\alpha: \alpha \in \mathcal{A}\}$  是一族由  $X$  到拟赋范线性空间  $Y$  (见拟范数 (quasi-norm)) 中的连续映射. 假设

$$\|T_\alpha(x+y)\| \leq \|T_\alpha(x)\| + \|T_\alpha(y)\|,$$

$$\|T_\alpha(ax)\| = a\|T_\alpha(x)\|, \text{ 对 } a \geq 0.$$

现在如果对每一个  $x \in X$ , 集合  $\{T_\alpha(x): \alpha \in \mathcal{A}\}$  是有界的, 则

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} T_{\alpha}(x) = 0$$

关于  $\alpha$  一致地成立. 这里收敛于零是按照强收敛, 即按  $Y$  的拟范数.

它的一个系是共鸣定理 (resonance theorem) (有时它本身称为一致有界定理): 设  $\{T_{\alpha}: \alpha \in \mathcal{A}\}$  是由 Banach 空间  $X$  到赋范线性空间  $Y$  中的一族有界线性算子. 则对每个  $x \in X$ ,  $\{\|T_{\alpha}(x)\|: \alpha \in \mathcal{A}\}$  的有界性蕴涵  $\{\|T_{\alpha}\|: \alpha \in \mathcal{A}\}$  的有界性, 且如果  $\mathcal{A} = \mathbf{N}$  而  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = T(x)$  对每一  $x \in X$  存在, 则  $T$  也是  $X \rightarrow Y$  的有界线性算子.

亦见 Banach-Steinhaus 定理 (Banach-Steinhaus theorem) (也称为一致有界原理 (uniform boundedness principle)) 和等度连续性 (equicontinuity).

#### 参考文献

- [A1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1978, p. 68 ff (中译本: 吉田耕作, 泛函分析, 人民教育出版社, 1981).
- [A2] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1966, 98 (中译本: W. 卢丁, 实分析与复分析, 人民教育出版社, 1982).

葛显良 译 鲁世杰 校

#### 一致连续性 [uniform continuity; равномерная непрерывность]

函数 (映射)  $f: X \rightarrow Y$  的一种性质, 其中  $X$  与  $Y$  为度量空间. 它要求, 对任给正数  $\varepsilon > 0$ , 有正数  $\delta > 0$  使得对满足  $\rho(x_1, x_2) < \delta$  的所有  $x_1, x_2 \in X$ , 均有不等式  $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$  成立.

如果映射  $f: X \rightarrow Y$  在  $X$  上连续, 且  $X$  为紧统, 那么  $f$  在  $X$  上一致连续. 一致连续映射的合成是一致连续的.

映射的一致连续性在拓扑群上也会发生. 例如, 设  $X_0 \subset X, X, Y$  为拓扑群, 映射  $f: X_0 \rightarrow Y$  称为一致连续的 (uniformly continuous) 是指, 对  $Y$  的单位元的任意邻域  $U_y$ , 存在  $X$  的单位元的一个邻域  $U_x$ , 使得对满足  $x_1 x_2^{-1} \in U_x$  (相应地,  $x_1^{-1} x_2 \in U_x$ ) 的所有  $x_1, x_2 \in X_0$ , 关系式  $f(x_1)[f(x_2)]^{-1} \in U_y$  (相应地,  $[f(x_1)]^{-1} f(x_2) \in U_y$ ) 均成立.

一致连续性概念已被推广到一致空间 (uniform space) 上去.

#### 参考文献

- [1] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本: А. Н. 柯尔莫果洛夫, С. В. 佛明, 函数论与泛函分析初步, 上、下册, 高等教育出版社, 1992).
- [2] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд.,

М., 1973 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群, 上、下册, 科学出版社, 1957 - 1958).

- [3] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).
- [4] Bourbaki, N., General topology, Elements of mathematics, Springer, 1989 (译自法文).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】拓扑群上有好几种自然的一致结构; 关于它们之间映射一致连续性的上面 (含糊的) 叙述可以用不同的方法来阐明.

#### 参考文献

- [A1] Roelcke, W. and Dierolf, S., Uniform structures on topological groups and their quotients, McGraw-Hill, 1981.
- [A2] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文).

王斯雷 译

#### 一致收敛 [uniform convergence; равномерная сходимость], 函数 (映射) 序列的

序列  $f_n: X \rightarrow Y (n = 1, 2, \dots)$  收敛于函数 (映射)  $f: X \rightarrow Y$  的一种性质 (其中  $X$  是任意集合,  $Y$  是度量空间), 它要求对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在 (与  $x$  无关的) 数  $n_{\varepsilon}$ , 使得对所有  $n > n_{\varepsilon}$  及所有  $x \in X$ , 不等式

$$\rho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

成立. 它等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \rho(f_n(x), f(x)) = 0.$$

序列  $\{f_n\}$  在集合  $X$  上一致收敛于函数  $f$ , 充要条件是存在数列  $\{\alpha_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ , 也就是说, 有一个数  $n_0$ , 使得对  $n > n_0$  及所有  $x \in X$ , 不等式

$$\rho(f_n(x), f(x)) \leq \alpha_n$$

成立.

例 序列  $\{f_n(x)\} = \{x^n\} (n = 1, 2, \dots)$  在任何区间  $[0, a] (0 < a < 1)$  上一致收敛, 而在  $[0, 1]$  上不收敛.

一致收敛的充要条件不适用于由一致收敛的 Cauchy 准则 (Cauchy criterion) 给出的极限函数.

一致收敛序列的性质. 1. 若  $Y$  是赋范线性空间, 两个映射序列  $f_n: X \rightarrow Y$  与  $g_n: X \rightarrow Y$  在  $X$  中一致收敛, 则对任意  $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ , 序列  $\{\lambda f_n + \mu g_n\}$  也在  $X$  中一致收敛.

2. 若  $Y$  是线性赋范环, 序列  $f_n: X \rightarrow Y (n = 1, 2, \dots)$  在  $X$  中一致收敛,  $g: X \rightarrow Y$  是有界映射, 则序列  $\{g f_n\}$  也在  $X$  中一致收敛.

3. 若  $X$  是拓扑空间,  $Y$  是度量空间, 在  $x_0 \in X$  连续的映射序列  $f_n: X \rightarrow Y$  在  $X$  中一致收敛于  $f$ :



$X \rightarrow Y$ , 则  $f$  也在  $x_0$  连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

这个结论中,  $X$  中序列  $\{f_n\}$  一致收敛这个条件是本质的. 在这个意义上, 存在着在区间上连续的数值函数序列, 它在所有点收敛于在上述区间不连续的函数. 例如  $[0, 1]$  上的  $f_n(x) = x^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . 连续函数序列的一致收敛不是极限函数连续性的必要条件. 但是, 若  $X$  是紧集,  $Y$  是实数集  $\mathbf{R}$ , 连续函数序列  $f_n: X \rightarrow \mathbf{R}$  中所有函数在所有点  $x \in X$  同为递增或递减, 序列有有限极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

则  $f$  在  $X$  上连续的充要条件是  $\{f_n\}$  在该集合上一致收敛. 连续函数序列极限的连续性, 其必要, 同时又充分的条件, 一般用序列伪一致收敛 (quasi-uniform convergence) 这种说法给出.

4. 若  $[a, b]$  上 Riemann (Lebesgue) 可积函数序列  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 一致收敛于函数  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , 则该函数也 Riemann (相应地, Lebesgue) 可积, 且对任意  $x \in [a, b]$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x f(t) dt = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt, \quad (*)$$

序列  $\{\int_a^x f_n(t) dt\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $\int_a^x f(t) dt$ . 公式 (\*) 能推广到 Stieltjes 积分 (Stieltjes integral) 的情形. 但是, 如果  $[a, b]$  上可积函数序列  $f_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 在区间的每一点仅收敛于可积函数  $f$ , 则 (\*) 未必成立.

5. 若  $[a, b]$  上连续可微函数序列  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 在某点  $x_0 \in [a, b]$  收敛, 且导数序列  $\{df_n/dx\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则序列  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上也一致收敛, 其极限是区间上连续可微函数, 且

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{df_n(x)}{dx}, \quad a \leq x \leq b.$$

设  $X$  是一个集合,  $Y$  是一个度量空间, 函数 (映射) 族  $f_\alpha: X \rightarrow Y$  ( $\alpha \in \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U}$  为拓扑空间) 称为在  $\alpha \rightarrow \alpha_0 \in \mathcal{U}$  时一致收敛 (uniformly convergent) 于函数 (映射)  $f: X \rightarrow Y$ , 如果对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\alpha_0$  的一个邻域  $U(\alpha_0)$ , 使得对所有  $\alpha \in U(\alpha_0)$  及  $x \in X$ , 不等式

$$\rho(f(x), f_\alpha(x)) < \varepsilon$$

成立.

一致收敛函数族与上述一致收敛函数序列有类似的性质.

映射一致收敛的概念可以推广到  $Y$  是一致空间

(uniform space), 特别地,  $Y$  为一拓扑群的情形.

#### 参考文献

- [1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.
- [2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本: А. Н. 柯尔莫果洛夫, С. В. 佛明, 函数论与泛函分析初步, 上、下册, 高等教育出版社, 1992).
- [3] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1989).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】下述定理: 连续函数的单调序列一致收敛于它的点态极限, 如果这个极限连续, 就是熟知的 Dini 定理 (Dini theorem).

#### 参考文献

- [A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文).
- [A2] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976.

罗嵩龄 译

均匀分布 [uniform distribution; равномерное распределение], 在数论中亦称一致分布

一类概率分布的统称, 由“等可能结果”的思想到连续情形的推广引起. 如同正态分布 (normal distribution) 一样, 概率论中均匀分布在某些问题中作为确切分布, 在另一些问题中作为极限分布出现.

在直线的一个区间上的均匀分布 (矩形分布).

在区间  $[a, b]$ ,  $a < b$ , 上的均匀分布是具有密度

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

的概率分布 (probability distribution).  $[a, b]$  上均匀分布的概念与表示从该区间随机选择一个点相对应. 均匀分布的数学期望和方差分别等于  $(b+a)/2$  和  $(b-a)^2/12$ . 其分布函数是

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

其特征函数为

$$\varphi(t) = \frac{1}{it(b-a)} (e^{itb} - e^{ita}).$$

在  $[0, 1]$  上均匀分布的随机变量可由独立随机变量序列  $X_1, X_2, \dots$ , 以概率  $1/2$  取 0 和 1, 通过令

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n 2^{-n}$$

来构造 ( $X_n$  是  $X$  的二进制展开中的数字). 随机数  $X$  是在  $[0, 1]$  上均匀分布的. 这一事实有着重要的统计应用, 例如见随机数和伪随机数 (random and pseudo-random numbers).

如果两个独立随机变量  $X_1$  和  $X_2$  遵从  $[0, 1]$  上的均匀分布, 则它们的和遵从  $[0, 2]$  上的所谓三角分布 (triangular distribution), 其密度  $u_2(x) = 1 - |1 - x|$ , 对  $x \in [0, 2]$ ;  $u_2(x) = 0$  对  $x \notin [0, 2]$ . 三个遵从  $[0, 1]$  上均匀分布的独立随机变量和遵从  $[0, 3]$  以上

$$u_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{x^2 - 3(x-1)^2}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{x^2 - 3(x-1)^2 + 3(x-2)^2}{2}, & 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & x \notin [0, 3]. \end{cases}$$

为密度的分布. 一般地, 遵从  $[0, 1]$  上均匀分布的独立变量和  $X_1 + \cdots + X_n$  具有密度

$$u_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x-k)_+^{n-1}$$

对  $0 \leq x \leq n$ ;  $u_n(x) = 0$ , 对  $x \notin [0, n]$ ; 此处

$$z_+ = \begin{cases} z, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 和  $x_1 + \cdots + x_n$ , 在其数学期望  $n/2$  处中心化, 用标准差  $\sqrt{n/12}$  进行尺度变换 (即  $(x_1 + \cdots + x_n - n/2) / \sqrt{n/12}$ ) 下趋向于参数为 0 和 1 的正态分布 (对  $n=3$  其近似程度对许多实际问题已经令人满意).

在统计应用中构造具有给定分布  $F$  的随机变量的过程基于以下事实: 设随机变量  $Y$  在  $[0, 1]$  上均匀分布, 设分布函数  $F$  是连续的且严格递增, 则随机变量  $X = F^{-1}Y$  具有分布函数  $F$  (在一般情形必须将  $X$  定义中的反函数  $F^{-1}(y)$  代之以它的一个类比, 即令  $F^{-1}(y) = \inf \{x: F(x) \leq y \leq F(x+0)\}$ ).

作为极限分布的区间上的均匀分布. 下面给出一些由极限产生的  $[0, 1]$  上均匀分布的典型例子:

1) 设  $X_1, X_2, \dots$  是具有同样连续分布函数的独立随机变量, 则它们的和  $S_n$ , 取模 1, 即和  $S_n$  的分数部分  $\{S_n\}$  的分布收敛到  $[0, 1]$  上的均匀分布.

2) 设随机参数  $\alpha$  和  $\beta$  有绝对连续联合分布, 则当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\{\alpha t + \beta\}$  的分布收敛到  $[0, 1]$  上的均匀分布.

3) 作为某个在正整数上定义的函数  $g$  的分数部分的极限分布出现的均匀分布. 例如对无理数  $\alpha$ , 对

$1 \leq m \leq n$  且满足

$$0 \leq a \leq \{m\alpha\} \leq b \leq 1$$

的  $m$  所占的比例, 当  $n \rightarrow \infty$  时具有极限  $b - a$ .

$\mathbf{R}^k$  的子集上的均匀分布. 矩形上的均匀分布的例子已出现在 Buffon 问题 (Buffon problem) (亦见几何概率 (geometric probabilities); 随机几何学 (stochastic geometry)) 中. 在  $\mathbf{R}^k$  的有界集  $D$  上的均匀分布定义为具有分布密度

$$p(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} C \neq 0, & x \in D, \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

的分布, 其中  $C$  是  $D$  的  $k$  维体积 (或 Lebesgue 测度) 的倒数.

关于曲面上的均匀分布也有所讨论. 于是, “随机方向” (例如, 在  $\mathbf{R}^3$  中), 定义为从原点到单位球面的向量是均匀分布的, 其意义是它触及曲面的某一部分的概率正比于那一部分曲面的面积.

正规化 Haar 测度 (Haar measure) 在代数群中起着均匀分布的作用.

#### 参考文献

- [1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1957 - 1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 第一卷, 上、下册, 科学出版社, 1964, 1979; 第二卷, 科学出版社, 1994).

A. B. Прохоров 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

#### 一致空间 [uniform space; равномерное пространство]

在它上面定义了一致结构的集合. 空间  $X$  上的一致结构 (uniform structure; uniformity) 由对积空间  $X \times X$  的子集系  $\mathfrak{U}$  的描述来定义. 这里, 集系  $\mathfrak{U}$  必须是滤子 (filter) (即对任意  $V_1, V_2 \in \mathfrak{U}$ , 交集  $V_1 \cap V_2$  也属于  $\mathfrak{U}$ , 且若  $W \supset V, V \in \mathfrak{U}$ , 则  $W \in \mathfrak{U}$ , 并需满足下列公理:

U1) 每个集合  $V \in \mathfrak{U}$  都包含对角线  $\Delta = \{(x, x): x \in X\}$ ;

U2) 若  $V \in \mathfrak{U}$ , 则  $V^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in V\} \in \mathfrak{U}$ ;

U3) 对任意  $V \in \mathfrak{U}$ , 存在  $W \in \mathfrak{U}$ , 使得  $W \circ W \subset V$ , 这里,  $W \circ W = \{(x, y): \text{存在 } z \in X \text{ 满足 } (x, z) \in W, (z, y) \in W\}$ .

$\mathfrak{U}$  的元素称为由  $\mathfrak{U}$  定义的一致结构的近域 (entourage).

集合  $X$  上的一致结构也可由对  $X$  上的覆盖系  $\mathfrak{C}$  的描述来定义, 该覆盖系满足下列公理:

C1) 若  $\alpha \in \mathfrak{C}$  且  $\alpha$  加细覆盖  $\beta$ , 则  $\beta \in \mathfrak{C}$ ;

C2) 对任意  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{C}$ , 存在覆盖  $\beta \in \mathfrak{C}$ , 星加细 (star-refine)  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  (即对任意  $x \in X$ ,  $\beta$  的所有



包含  $x$  的元素都属于  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  的某元素)。

属于  $\mathcal{C}$  的覆盖称为  $X$  的一致覆盖 (uniform covering) (相应于  $\mathcal{C}$  所定义的一致结构)。

这两种描述一致结构的方法是等价的。例如, 若  $X$  上的一致结构由近域系  $\mathfrak{U}$  给定, 则  $X$  的一致覆盖系  $\mathcal{C}$  可以构造如下。对每个  $V \in \mathfrak{U}$ , 族  $\alpha(V) = \{V(x): x \in X\}$  (这里  $V(x) = \{y: (x, y) \in V\}$ ) 是  $X$  的一个覆盖。覆盖  $\alpha$  属于  $\mathcal{C}$ , 当且仅当  $\alpha$  可用形为  $\alpha(V)$  ( $V \in \mathfrak{U}$ ) 的覆盖加细。反之, 若  $\mathcal{C}$  是一致空间的一致覆盖系, 则近域系由形为  $U = \{H \times H: H \in \alpha\}$  ( $\alpha \in \mathcal{C}$ ) 的集合和所有包含它们的集合组成。

$X$  上的一致结构也可以用伪度量系 (见伪度量 (pseudo-metric)) 给定。集合  $X$  上的每个一致结构生成一个拓扑  $T = \{G \subset X: \text{对任意 } x \in G, \text{存在 } V \in \mathfrak{U}, \text{使得 } V(x) \subset G\}$ 。

一致空间的性质是度量空间 (metric space) 的一致性质的推广。若  $(X, \rho)$  是度量空间, 则  $X$  上存在由度量  $\rho$  生成的一致结构。这个一致结构的近域系由所有包含形为  $\{(x, y): \rho(x, y) < \varepsilon\}$  ( $\varepsilon > 0$ ) 之集合的集合组成。这里, 由度量和一致结构诱导的拓扑是相同的。由度量生成的一致结构称为可度量化 (metrizable)。

一致空间是 A. Weil 于 1937 年引入的 ([1]) (用近域的方式; 用一致覆盖给出一致空间的定义是在 1940 年, 见 [4])。然而, 用多重星加细来构造函数思想始见于 Л. С. Понтрягин 的著作 ([5]) (后来, 这个思想被用于证明可分一致空间的拓扑的完全正则性)。起初, 一致空间被用作研究 (由它生成的) 拓扑的工具 (与此类似, 可度量化空间上的度量常常用来研究此空间的拓扑性质)。然而, 一致空间理论有其自身的重要性, 虽然它与拓扑空间理论的联系密切。

把一致空间  $X$  映入一致空间  $Y$  的映射  $f: X \rightarrow Y$  称为一致连续的 (uniformly continuous), 如果对  $Y$  的任何一致覆盖  $\alpha$ , 集系  $f^{-1}\alpha = \{f^{-1}U: U \in \alpha\}$  是  $X$  的一致覆盖。对于由  $X$  和  $Y$  上的一致结构生成的拓扑, 每个一致连续映射都是关于该拓扑连续的。如果  $X$  和  $Y$  上的一致结构是由度量诱导的, 则一致连续映射  $f: X \rightarrow Y$  就是作为度量空间之间映射的经典意义下的一致连续 (见一致连续性 (uniform continuity))。

更有意义的是满足附加的分离公理的一致空间理论:

U4)  $\bigcap_{V \in \mathfrak{U}} V = \Delta$  (用近域方式), 或

C3) 对任意两点  $x, y \in X, x \neq y$ , 存在  $\alpha \in \mathcal{C}$ , 使得  $\alpha$  没有同时包含  $x$  和  $y$  的元素 (用一致结构的方式)。

从现在起, 我们只讨论具有分离一致结构的一致

空间。  $X$  上由分离一致结构生成的拓扑是完全正则的, 反之,  $X$  上的每个完全正则拓扑都是由某个分离一致结构生成的。往往存在多种不同的一致结构, 它们生成  $X$  上的相同拓扑。特别地, 可度量化拓扑可以由不可度量化的分离一致结构生成。

一致空间  $(X, \mathfrak{U})$  是可度量化的, 当且仅当  $\mathfrak{U}$  具有可数基。这里, 一致结构的基 (用近域方式) 是满足下列条件的子系  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$ : 对任意  $V \in \mathfrak{U}$ , 存在  $W \in \mathfrak{B}$  使得  $W \subset V$ 。或 (用一致覆盖方式) 存在子系  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{C}$ , 使得对任意  $\alpha \in \mathcal{C}$  有  $\beta \in \mathfrak{A}$  加细  $\alpha$ 。一致空间  $(X, \mathfrak{U})$  的权 (weight of a uniform space) 是一致结构  $\mathfrak{U}$  的基的最小基数。

设  $M$  是一致空间  $(X, \mathfrak{U})$  的子集。近域系  $\mathfrak{U}_M = \{(M \times M) \cap V: V \in \mathfrak{U}\}$  定义  $M$  上的一致结构。偶对  $(M, \mathfrak{U}_M)$  称为  $(X, \mathfrak{U})$  的子空间 (subspace)。把一致空间  $(X, \mathfrak{U})$  映入一致空间  $(Y, \mathfrak{U}')$  的映射  $f: X \rightarrow Y$  称为一致嵌入 (uniform imbedding), 如果  $f$  是一一的一致连续映射且  $f^{-1}: (fX, \mathfrak{U}'_{fX}) \rightarrow (X, \mathfrak{U})$  也是一致连续的。

一致空间  $X$  称为完全的 (complete), 如果  $X$  中的每个 Cauchy 滤子 (即包含每个一致覆盖的某个元素的滤子) 都有聚点 (即属于滤子诸元素之闭包的交集的点)。可度量化一致空间是完全的, 当且仅当生成其一致结构的度量是完全的。任何一致空间  $(X, \mathfrak{U})$  都可以作为一个处处稠密子集一致嵌入唯一一个完全一致空间  $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{U}})$  (准确到一致同构), 后者称为  $(X, \mathfrak{U})$  的完全化 (completion)。一致空间  $(X, \mathfrak{U})$  的完全化  $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{U}})$  的拓扑是紧的, 当且仅当  $\mathfrak{U}$  是准紧一致结构 (precompact uniformity) (即使得任一一致覆盖都能加细一个有限一致覆盖)。这时, 空间  $\tilde{X}$  是  $X$  的紧化, 称为  $X$  关于一致结构  $\mathfrak{U}$  的 Samuel 扩张 (Samuel extension)。对  $X$  的每个紧化  $bX$ , 存在唯一的  $X$  上的准紧一致结构, 其 Samuel 扩张与  $bX$  一致。于是, 所有的紧化都可以用准紧一致结构的语言来描述。在紧空间上存在唯一的一致结构 (完全且准紧的)。

集合  $X$  上的每个一致结构  $\mathfrak{U}$  都按下列公式诱导出一种邻近关系 (proximity)  $\delta$ : 对所有  $V \in \mathfrak{U}$ ,

$$A \delta B \Leftrightarrow (A \times B) \cap V \neq \emptyset.$$

这里, 由一致结构  $\mathfrak{U}$  生成的  $X$  上的拓扑和邻近关系  $\delta$  一致。任何一致连续映射都是关于按一致结构生成的邻近关系的邻近连续映射。往往存在多种不同的一致结构, 它们生成  $X$  上同一种邻近关系。而且,  $X$  上的一致结构的集合分为若干等价类 (两个一致结构是等价的, 如果它们诱导的邻近关系相同)。一致结构的每一个等价类恰好含有一个准紧一致结构; 并

且, 关于这些一致结构的 Samuel 扩张, 与关于由这类一致结构诱导的邻近关系的 Смирнов 扩张相同 (见邻近空间 (proximity space)). 在  $X$  上一致结构的集合上存在自然的偏序:  $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{U}'$  则  $\mathfrak{U} > \mathfrak{U}'$ . 在  $X$  上生成一固定拓扑的所有一致结构中有一个最大者, 称为泛一致结构 (universal uniformity). 它诱导出  $X$  上的 Stone - Čech 邻近关系. 每个准紧一致结构都是其等价类中的最小元素. 若  $\mathfrak{C}$  是  $X$  上某一致结构的一致覆盖系, 则等价的准紧一致结构的一致覆盖系由  $X$  的这样一些覆盖组成, 它们加细  $\mathfrak{C}$  的有限覆盖.

一致空间  $(X_i, \mathfrak{U}_i)$  ( $i \in T$ ) 的积 (product of uniform spaces) 是一致空间  $(\prod X_i, \prod \mathfrak{U}_i)$ , 这里  $\prod \mathfrak{U}_i$  是  $\prod X_i$  上的一致结构, 它的基是形为

$$\{(\{x_i\}, \{y_i\}): (x_i, y_i) \in V_i, i = 1, \dots, n\},$$

$$t_i \in T, V_i \in \mathfrak{U}_{t_i}, n = 1, 2, \dots$$

的近域集合.

由一致结构  $\prod \mathfrak{U}_i$  诱导的  $\prod X_i$  上的拓扑与空间  $X_i$  的拓扑的 Тихонов 积 (Tikhonov product) 相同. 乘积到分支上的投影是一致连续的. 每个重数为  $\tau$  的一致空间都可以嵌入一个可度量化一致空间之  $\tau$  重积.

把拓扑空间  $X$  映入一致空间  $(Y, \mathfrak{U})$  的连续映射族  $F$  称为 (关于一致结构  $\mathfrak{U}$ ) 等度连续的 (equicontinuous), 如果对任意  $x \in X$  和任意  $V \in \mathfrak{U}$ , 存在邻域  $O_x \ni x$ , 使得对  $x' \in O_x$  和  $f \in F$  有  $(f(x), f(x')) \in V$ . 经典的 Ascoli 定理的下列推广成立: 设  $X$  为  $k$  空间,  $(Y, \mathfrak{U})$  为一致空间,  $Y^X$  为具有紧开拓扑的把  $X$  映入  $Y$  的连续函数的空间. 闭子集  $F \subset Y^X$  为紧集的充要条件是,  $F$  关于一致结构  $\mathfrak{U}$  是等度连续的且所有集合  $\{f(x): f \in F\} (x \in X)$  在  $Y$  中有紧闭包. ( $k$  空间 ( $k$ -space) 是这样的 Hausdorff 空间, 它是局部紧空间的商象;  $k$  空间类包含所有满足第一可数性公理的 Hausdorff 空间以及所有局部紧 Hausdorff 空间.)

据 Stone 定理, 可度量化一致空间的拓扑是仿紧的. 而且, 关于可度量化一致空间的一致仿紧性的 Isbell 问题已经否定地解决. 已经构造出一个具有一致覆盖的可度量化一致空间的实例, 该一致覆盖没有局部有限一致加细 ([3]).

在一致空间的维数论中, 类似拓扑维数  $\dim$  定义的一致维数不变量  $\delta d$  和  $\Delta d$  ( $\delta d$  用有限覆盖定义,  $\Delta d$  用所有一致覆盖定义) 以及一致归纳维数  $\delta \text{Ind}$  是基本的. 维数  $\delta \text{Ind}$  的定义类似于大归纳维数  $\text{Ind}$ , 是用关于不同 (在由一致结构诱导的邻近关系的意义下) 集合之间邻近性分划的维数的归纳法来定义的.

在这里, 集合  $H$  称为  $A$  和  $B$  ( $A \delta B$ ) 之间的邻近性分划 (proximity partition), 如果对  $H$  的任一满足  $\bar{U} \cap (A \cup B) \neq \emptyset$  的邻域  $U$ , 有  $X \setminus U = A' \cup B'$ , 这里  $A' \bar{\delta} B'$ ,  $A \subset A'$ ,  $B \subset B'$  (如果  $H \bar{\delta} (X \setminus U)$ ,  $U$  称为  $H$  的  $\delta$  邻域). 于是, 维数  $\delta \text{Ind}$  (和  $\delta d$  一样) 不仅是一致不变量, 也是一个邻近性不变量. 一致空间  $(X, \mathfrak{U})$  的维数  $\delta d$  与 Samuel 扩张的普通维数  $\dim$  相同, Samuel 扩张是关于等价于  $\mathfrak{U}$  的准紧一致结构构造的. 如果  $\Delta d X$  是有限的, 则  $\Delta d X = \delta d X$ . 不过, 可能出现  $\delta d X = 0$  而  $\Delta d X = \infty$  的情形. 对于可度量化一致空间,  $\delta d X \leq \delta \text{Ind} X = \Delta d X$  (若  $\Delta d X < \infty$ , 则  $\delta d X = \delta \text{Ind} X = \Delta d X$ ). 对于任何一致空间, 等式  $\delta d X = 0$  和  $\delta \text{Ind} X = 0$  等价. 若一致空间是可度量化的, 则等式  $\delta d X = 0$  和  $\Delta d X = 0$  也是等价的. 若一致空间  $X'$  是一致空间  $X$  的处处稠密子集, 则  $\delta \text{Ind} X' \geq \delta \text{Ind} X$ . 恒有  $\delta \text{Ind} X \leq \text{Ind} X$ . 对于维数  $\delta d$ , 有一个与分划定理类似的结论.

对一致性公理加以削弱, 便得到一致空间的各种各样的推广. 例如, 拟一致结构的公理系统中包括了对称性公理 ([8]). 对于广义一致结构 ([10]) ( $f$  一致结构), 用来代替一致覆盖的  $X$  的一致子集族通常并不是覆盖 (在由  $f$  一致结构生成的拓扑下, 这类子集族大多数是处处稠密的). 一致结构推广之一是所谓  $\theta$  一致结构 ( $\theta$ -uniformity), 它与一致空间上的拓扑有关, 由 Hausdorff 空间的  $\theta$  覆盖族定义;  $\theta$  覆盖 ( $\theta$ -covering) 是满足下列条件的典范的开集族  $\eta$ : 对任意  $x \in X$ , 存在  $V_1, \dots, V_n \in \eta$ , 使  $x \in \text{int} \bigcup_{i=1}^n [V_i]$ .

#### 参考文献

- [1] Weil, A., Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Hermann, 1938.
- [2] Bourbaki, N., General topology, Elements of mathematics, Springer, 1989 (译自法文).
- [3] Шепин, Е. В., «Докл. АН СССР», 222 (1975), 3, 541 - 543.
- [4] Tukey, J., Convergence and uniformity in topology, Princeton Univ. Press, 1940.
- [5] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群 (上、下), 科学出版社, 1957 - 1958).
- [6] Isbell, J., Uniform spaces, Amer. Math. Soc., 1964.
- [7] Samuel, P., Ultrafilters and compactification of uniform spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 64 (1948), 100 - 132.
- [8] Császár, A., Foundations of general topology, Pergamon, 1963.
- [9] Федорчук, В. В., «Докл. АН СССР», 192 (1970), 6, 1228 - 1230.
- [10] Kulpa, W., A note on the dimension  $\text{dind}$ , Colloq.



Math., 25 (1972), 227 - 240.

A. B. Иванов, Н. С. Стреколовская 撰

【补注】 准紧一致空间也称为全有界的 (totally bounded), 泛一致结构也称为加细一致结构 (fine uniformity).

$k$  空间的另一种描述如下: Hausdorff 空间  $X$  是  $k$  空间 ( $k$ -space), 当且仅当它满足下列条件:  $X$  的子集闭于  $X$  的充要条件, 是它与  $X$  的每个紧子集的交集都是闭的.

E. B. Шепин ([3]) 和 J. Pelant ([A1]) 各自独立地构造出非一致仿紧的可度量化一致空间 (即没有 (一致) 局部有限一致覆盖的基). 在 [A1] 中还证明了, 在某些集合论模型 (ZFC) 中, 势至多为  $\aleph_1$  的一致空间的一致覆盖不一定构成一致结构的基.

#### 参考文献

[A1] Pelant, J., Cardinal reflections and point-character of uniformities - counterexamples, in Sem. Uniform Spaces (Prague, 1973 - 1974), Mat. Ustav. ČSAV, Prague, 1975, 149 - 158.

[A2] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

白苏华、胡师度 译

#### 一致稳定性 [uniform stability; равномерная устойчивость]

对于初始时刻为一致的 **Ляпунов 稳定性** (Lyapunov stability). 微分方程组

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

的解  $x_0(t) (t \in \mathbb{R}^+)$  称为一致稳定的 (uniformly stable), 如果对任一  $\varepsilon > 0$  均有  $\delta > 0$  存在, 使得对每一个  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  和方程组的每一个满足以下不等式的解  $x(t)$ ,

$$|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta,$$

下面的不等式对一切  $t \geq t_0$  均成立:

$$|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

自治微分方程组  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  的 **Ляпунов 稳定的不动点** 都是一致稳定的, 但一般说来, **Ляпунов 稳定的解** 却不一定是一致稳定的. 例如方程

$$\dot{x} = [\sin \ln(1+t) - \alpha]x \quad (1)$$

的解  $x(t) = 0 (t \in \mathbb{R}^+)$  当  $\alpha \in (1/\sqrt{2}, 1)$  时是稳定的, 但对于这些  $\alpha$  却非一致稳定.

设有线性微分方程组

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

其中  $A(\cdot)$  是一映射  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  且在每

个区间上均为可和的.

为使 (2) 之解  $x = 0$  为一致稳定, 必须 (2) 的上奇异指数 (singular exponent)  $\Omega^0(A)$  小于或等于零. 例如, 方程 (1) 的上奇异指数  $\Omega^0(A) = 1 - \alpha$ , 而 **Ляпунов 特征指数** (Lyapunov characteristic exponent)  $\lambda_1(A) = (1/\sqrt{2}) - \alpha$ . 为使这样的  $\delta > 0$  存在, 以致任一方程组

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

只要适合

$$|g(t, x)| < \delta|x|,$$

则其满足 Cauchy 问题解的存在唯一性定理条件的解  $x = 0$  均为一致稳定, 其必要充分条件是上奇异指数  $\Omega^0(A)$  小于零.

#### 参考文献

[1] Персидский, К., «Матем. сб.», 40 (1933), 3, 284 - 293.

[2] Демидович, Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967.

[3] Далецкий, Ю. Л., Крейн, М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970 (英译本: Daletskii Yu, L. and Krein, M. G., Stability of solutions of differential equations in Banach spaces, Amer. Math. Soc., 1974).

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 上奇异指数又称 Bohl 指数 (Bohl exponent), 亦见奇异指数 (singular exponent).

#### 参考文献

[A1] Rouché, N., Habets, P. and Laloy, M., Stability theory by Liapunov's direct methods, Springer, 1977.

[A2] Hale, J. K., Ordinary differential equations, Wiley (Interscience), 1969.

[A3] Coppel, W. A., Stability and asymptotic behavior of differential equations, D. C. Heath, 1965.

齐民友 译

#### 一致子群 [uniform subgroup; равномерная подгруппа], 局部紧拓扑群 $G$ 的

一个闭子群  $H \subset G$ , 使得商空间  $G/H$  是紧的. 与这个概念密切相关的是  $G$  的拟一致子群 (quasi-uniform subgroup) 的概念, 就是  $G$  的这样一个闭子群  $H$ , 在  $G/H$  上有一个  $G$  不变测度  $\mu$  且  $\mu(G/H) < \infty$ . 例如,  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  的子群  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  就是拟一致的, 但不是一致的. 另一方面,  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  内一切上三角形矩阵所成的子群  $T$  是  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  的一个一致子群, 但不是拟一致的 (在  $\text{SL}_2(\mathbb{R})/T$  上没有  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  不变测度). 然而, 一个 Lie 群  $G$  的每一个连通拟一致子群都是一致子群 (见 [1]), 而  $G$  的每一个离散一致

子群都是拟一致的 ([2]) (关于 Lie 群的离散一致子群的论述, 见离散子群 (discrete subgroup)). 如果  $G$  是一个连通 Lie 群 (Lie group), 而  $H$  是  $G$  的一个一致子群, 则  $H$  内单位元的连通分支  $H^0$  在  $G$  内的正规化子  $N_G(H^0)$  包含  $G$  的一个极大连通三角形子群 (见 [3]). 一个连通代数复线性 Lie 群  $G$  的一个代数子群  $H$  是一致子群, 当且仅当  $H$  是  $G$  内一个抛物子群 (parabolic subgroup). 半单 Lie 群的所有连通一致子群已被描述 (见 [4]). 一个连通半单 Lie 群  $G$  的非离散一致子群  $H$  具有强刚性 (strong rigidity) (见 [5]), 这就是在  $G$  内存在有限个子群  $H_i (i=1, \dots, m)$ , 使得任意同构于  $H$  的子群  $H' \subset G$  都与子群  $H_i$  中之一共轭. 一致和拟一致子群的重要例子是如下构造的. 令  $G$  是定义在有理数域  $\mathbf{Q}$  上的一个线性代数群 (linear algebraic group), 令  $G_A$  是阿代尔群, 又令  $G_Q \subset G_A$  是主阿代尔群, 则  $G_Q$  是  $G_A$  内的离散子群, 而且  $G_Q$  是  $G_A$  的一个一致子群, 当且仅当: 1)  $G$  没有定义在  $\mathbf{Q}$  上的非平凡有理特征标; 2)  $G_Q$  的所有幂元元素都属于它的根 (见 [6], [7]). 特别地, 如果  $G$  是定义在  $\mathbf{Q}$  上的一个幂元代数群, 则  $G_Q$  是  $G_A$  的一个一致子群. 条件 1) 对于  $G_Q$  和  $G_A$  的拟一致性来说是必要且充分的.

#### 参考文献

- [1] Mostow, G. D., Homogeneous spaces with finite invariant measure, *Ann. of Math.*, 75, (1962), 1, 17-37.
- [2] Raghunathan, M. S., Discrete subgroups of Lie groups, Springer, 1972.
- [3] Онищик, А. Л., «Матем. сб.», 71 (1966), 4, 483-494.
- [4] Онищик, А. Л., «Матем. сб.», 74 (1967), 3, 398-416.
- [5] Goto, M. and Wang, H. C., non-discrete uniform subgroups of semisimple Lie groups, *Math. Ann.*, 198 (1972), 4, 259-286.
- [6] Borel, A., Some properties of adèle groups attached to algebraic groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67 (1961), 6, 583-585.
- [7] Mostow, G. D. and Tamagawa, T., On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces, *Ann. of Math.*, 76 (1962), 3, 446-463.

В. Л. Попов 撰 郝钢新 译

#### 一致拓扑 [uniform topology; равномерная топология]

由一致结构生成的拓扑. 详细地说, 设  $X$  是具有一致结构 (uniform structure)  $U$  的集合 (即一致空间 (uniform space)), 并且对每个  $x \in X$ , 设  $B(x)$  表示  $X$  中子集  $V(x)$  的集合,  $V$  遍取  $U$  的近域, 则在  $X$  中存在一个, 实际上也只有一个拓扑 (称为一致拓扑), 对于它,  $B(x)$  对任意  $x \in X$  是在  $x$  处的邻域

滤子 (filter). 如果存在可以生成这个拓扑的一致结构, 此拓扑就称为可一致化的 (uniformizable). 并不是所有拓扑空间都可一致化; 例如非正则空间.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 参考文献见一致空间 (uniform space).

罗嵩龄 译

**单值化** [uniformization; униформизация] 集合  $A \subset \mathbf{C}^N$  (或  $A \subset \mathbf{C}P^N$ ) 的

三元组  $(f, D, G)$ , 这里  $f = (f_1, \dots, f_N)$  是区域  $D \subset \mathbf{C}^N$  (相应地,  $D \subset \mathbf{C}P^N$ ) 内亚纯函数系, 定义了一个全纯覆盖 (covering)  $D_0 \rightarrow f(D_0)$ , 使  $f(D_0)$  在  $A$  内稠密,  $G$  是  $D$  的双全纯自同构的真不连续群,  $G$  限制于  $D_0$  是这个覆盖的覆盖同胚群, 即  $D_0/G$  双全纯等价于  $f(D_0)$ .

因此可以讨论多值解析函数  $w = F(z): \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^m$  的单值化 (uniformization of multi-valued analytic functions), 把它理解为集  $A = \{(z, w)\}$  的单值化, 这对应于把  $F$  用单值亚纯函数作参数化.

例如  $\mathbf{C}^2$  中的复曲线  $z^2 + w^2 = 1$  可用三元组  $((z, w), \mathbf{C}, G)$  作单值化, 这里  $z = \cos t$ ,  $w = \sin t$ ,  $G$  是平移群  $t \rightarrow t + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , 或用三元组  $((z, w), D, G)$  作单值化, 这里

$$z = \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}, \quad w = \frac{2t}{(1+t^2)},$$

$$D = \mathbf{C} \setminus \{i, -i\},$$

$G$  是平凡群. 一个不那么平凡的例子是三次曲线  $w^2 = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ , 它没有有理参数化, 但可以用椭圆函数 (elliptic function) 作单值化, 即有三元组  $((f_1, f_2), D, G)$ , 这里  $f_1$  和  $f_2$  是周期为  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的 Weierstrass  $\wp$  函数及其导函数的有理函数,  $G$  是由平移  $t \rightarrow t + \omega_1$ ,  $t \rightarrow t + \omega_2$  生成的群.

在 19 世纪上半叶就已经提出了由一般代数方程

$$P(z, w) = \sum_{j,k} a_{jk} z^j w^k = 0, \quad (*)$$

这里  $P$  是  $\mathbf{C}$  上不可约代数多项式, 所定义的任意代数曲线 (algebraic curve) 的单值化问题, 特别是与代数函数的积分相联系. H. Poincaré 提出了形如 (\*) 式的任意解析方程的解集的单值化问题, 这里的  $P$  是两个变量的收敛幂级数, 并考虑所有可能的解析延拓. 代数簇与任意解析簇的单值化构成了 Hilbert 第二十二问题 (Hilbert twenty-second problem). 到目前为止 (1992) 还没有得到单值化问题的完全的解, 只有一维的情形是例外.

在  $\mathbf{C}^2$  内满足 (\*) 的二元组  $(z, w)$  的集合上利用相应的代数函数  $w(z)$  (或  $z(w)$ ) 的元素可以引进



一个复拓扑, 从而得到一个紧 Riemann 曲面 (Riemann surface); 曲线 (\*) 的点的坐标是这个面上的亚纯函数. 此外所有的紧 Riemann 曲面在差一个共形等价的意义下均可如此得到. 因此, 代数曲线的单值化问题被包含在 Riemann 曲面的单值化问题之内.

任意 Riemann 曲面  $S$  的单值化 (uniformization of an arbitrary Riemann surface) 是一个三元组  $(D, \pi, G)$ , 这里  $D$  是 Riemann 球面  $\bar{C}$  上的一个区域,  $\pi: D \rightarrow S$  是具有覆盖群  $G$  的正则全纯覆盖, 这里  $G$  是  $D$  的共形自同构群. 一般的问题在于对一个给定的 Riemann 曲面找出且描述所有这样的三元组.

在 P. Koebe, H. Poincaré 和 F. Klein 的经典论文中得到了单值化一个任意 Riemann 曲面  $S$  的可能性, 原则上给出了问题的解. 完全的解已经得到, 并给出了曲面  $S$  的所有可能单值化的描述 (见 [4]—[6]). Klein-Poincaré 单值化定理 (Klein-Poincaré uniformization theorem) (在一般情形下由 Poincaré 证明, 见 [2]) 断言: 每个 Riemann 曲面  $S$  共形等价于商空间  $D/G$ ,  $D$  是三个典范区域之一: Riemann 球面  $\bar{C}$ , 复平面  $C$  或单位圆盘  $\Delta$ , 而  $G$  是  $D$  的 Möbius (分式线性) 自同构的真不连续群, 它在  $D$  的所有 Möbius 自同构的群里定义到差一个共轭.

$D = \bar{C}$ ,  $C$  与  $\Delta$  的情形是互相排斥的. 具有这样的普遍全纯覆盖的曲面  $S$  分别称为椭圆、抛物或双曲型的. 此外  $D = \bar{C}$  只发生在  $S$  本身共形等价于  $\bar{C}$  的情形 (从而  $G$  是平凡的).  $D = C$  当  $S$  共形等价于  $C$ ,  $C \setminus \{0\}$  或环面时, 这时  $G$  或是平凡的, 或是由平移  $z \mapsto z + \omega$  ( $\omega \in C \setminus \{0\}$ ) 生成的群, 或是由两个平移  $z \rightarrow z + \omega_1, z \rightarrow z + \omega_2$  生成的群, 这里  $\omega_1, \omega_2 \neq 0$  是使得  $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$  的复数. 在剩下的情形里  $S$  共形等价于  $\Delta/G$ , 这里  $G$  是无挠 Fuchs 群 (Fuchsian group). 典范投影  $\pi: D \rightarrow S$  是非分歧覆盖而且单值化  $S$  上所有函数  $f$ , 使得  $f \circ \pi$  是  $D$  上单值函数. 对于具有给定分歧次数的分歧覆盖, Klein-Poincaré 定理也有一个推广.

单值化问题的另一个途径依赖于以下原理: 如果 Riemann 曲面  $\tilde{S}$  同胚于一个区域  $D \subset \bar{C}$  (不必单连通), 则  $\tilde{S}$  也共形等价于  $D$ . 用同样的方法, 单值化问题可被归结到以下的拓扑问题: 找出一个已知 Riemann 曲面  $S$  的所有 (一般地说是分歧的) 平坦覆盖  $\tilde{S} \rightarrow S$ . 这个问题的解答由以下的 Maskit 定理 (theorems of Maskit) 给出 (见 [4], [5]):

I. 设  $S$  是定向曲面,  $v_1, \dots, v_n, \dots$  是  $S$  上两两不相交的闭路的集合. 如果  $\tilde{S} \rightarrow S$  是具有定义子群  $N = \langle v_1^{\alpha_1}, \dots, v_n^{\alpha_n}, \dots \rangle$  的正则覆盖,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$  是自然数, 则  $\tilde{S}$  是平坦覆盖, 即同胚于  $\bar{C}$  内一个区域.

II. 设  $\tilde{S}$  是平坦曲面,  $\tilde{S} \rightarrow S$  是定向曲面  $S$  的正则覆盖, 其定义子群为  $N$ . 如果  $S$  是有限型曲面, 即  $\pi_1(S)$  是有限生成的, 则存在两两不相交的简单闭路  $v_1, \dots, v_n$  的有限集以及自然数  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  使得  $\langle v_1^{\alpha_1}, \dots, v_n^{\alpha_n} \rangle = N$ .

III. 如果  $\tilde{S}$  是平坦 Riemann 曲面,  $\bar{G}$  是  $\tilde{S}$  的共形自同构的真不连续群, 则存在共形同胚  $h: \tilde{S} \rightarrow D \subset \bar{C}$ , 使得  $h\bar{G}h^{-1}$  是具有不变分支  $D$  的 Klein 群 (Kleinian group).

因此每个 Riemann 曲面被一个 Klein 群所单值化. 譬如说, 如果  $S$  是亏格  $g \geq 1$  的闭 Riemann 曲面, 则它的基本群有以下表述:

$$\pi_1(S) = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g: \prod_{j=1}^g [a_j, b_j] = 1\}.$$

而且由平坦覆盖  $\tilde{S}$  定义的正规子群  $N$  可被取为由  $a_1, \dots, a_g$  (或  $b_1, \dots, b_g$ ) 生成的最小正规子群.  $S$  现在被亏格  $g$  的 Schottky 群 (Schottky group)  $G$ , 即带  $g$  个生成元的自由纯斜驶 Klein 群, 所单值化 (经典的关于分割的 Koebe 定理 (Koebe theorem on cross-cuts)).

在有限型 Riemann 曲面的单值化中, 可对可能的 Klein 群作分类. 为此目的要引进商子群的概念. 如果  $G$  是具有不变分支  $D(G)$  的 Klein 群, 则它的子群  $H$  称为  $G$  的商子群 (quotient subgroup); 如果  $H$  是满足下列三个条件的极大子群: a) 它的不变分支  $D(H) \supset D(G)$  是单连通的; b)  $H$  不含随机抛物元 (random parabolic elements) (即对于共形同构  $b: D(H) \rightarrow \Delta$ , 使  $h \circ g \circ h^{-1}$  的象成为双曲的那些抛物元); c) 在  $H$  的极限集里带有不动点的  $G$  的抛物元都属于  $H$ . 举例来说, 在 Klein-Poincaré 定理里  $G$  的每个商子群与  $G$  自己重合, 在关于分割的 Koebe 定理里所有的商子群都是平凡的. 设  $D$  是  $G$  的不变分支, Riemann 曲面  $S$  的单值化  $(D, \pi, G)$  称为标准的 (standard), 如果  $G$  无挠而且不含随机抛物元. 对于闭曲面, 所有这样的单值化都由以下定理描述 (见 [6]).

设  $S$  是亏格  $g > 0$  的闭 Riemann 曲面,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  是  $S$  上两两不相交的简单闭路的集合, 则存在  $S$  的标准单值化  $(D, \pi, G)$ , 它在共形等价的意义下唯一, 使得  $G$  的商子群或是 Fuchs 的或是初等的, 并且覆盖  $\pi: D \rightarrow S$  是由闭路  $v_1, \dots, v_n$  张成的  $\pi_1(S)$  的最小正规子群所构造.

拟共形映射 (quasi-conformal mapping) 和 Teichmüller 空间 (Teichmüller space) 的理论使得人们能证明用单独一个 Klein 群使  $n$  个 Riemann 曲面同时单值化的可能性以及已知类型的所有 Riemann 曲面的同样问题 (见 [7]).

## 参考文献

- [1] Klein, F., Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie, *Math. Ann.*, **21** (1883), 141 – 218.
- [2] Poincaré, H., Sur l'uniformisation des fonctions analytiques, *Acta Math.*, **31** (1907), 1 – 64.
- [3A] Koebe, P., Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, *Nachr. K. Ges. Wissenschaft, Göttinger Math. Phys. Kl.* (1907), 191 – 210.
- [3B] Koebe, P., Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven II, *Nachr. K. Ges. Wissenschaft. Göttinger Math. Phys. Kl.* (1907), 177 – 198.
- [3C] Koebe, P., Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven III, *Nachr. K. Ges. Wissenschaft. Göttinger Math. Phys. Kl.* (1908), 337 – 358.
- [3D] Koebe, P., Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven IV, *Nachr. K. Ges. Wissenschaft. Göttinger Math. Phys. Kl.* (1909), 324 – 361.
- [4] Maskit, B., A theorem on planar covering surfaces with applications to 3-manifolds, *Ann. of Math.*, **81** (1965), 2, 341 – 355.
- [5] Maskit, B., The conformal group of a plane domain, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 3, 718 – 722.
- [6] Maskit, B., L. V. Ahlfors, et al. (ed.): Contributions to analysis, Uniformization of Riemann surfaces, Acad. Press, 1974, 293 – 312.
- [7] Bers, L., Uniformization, Moduli and Kleinian groups, *Bull. London Math. Soc.*, **4** (1972), 257 – 300.
- [8] Крушкаль, С. Л., Апанасов, Б. Н., Гусевский, Н. А., Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах, Новосибир., 1981 (英译本: Krushkal', S. L., Apanasov, B. N. and Gusevskii, N. A., Kleinian groups and uniformization in examples and problems, Amer. Math. Soc., 1986).
- [9] Nevanlinna, R., Uniformisierung, Springer, 1953.
- [10] Ford, L. R., Automorphic functions, Chelsea, 1957.
- Н. А. Гусевский 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Gunning, R. C., On uniformization of complex manifolds: the role of connections, Princeton Univ. Press, 1978.
- [A2] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957.
- [A3] Apanasov, B. N., Discrete groups in space and uniformization problems, Kluwer, 1991 (译自俄文).
- 陈志杰 译

## 一致化元 [uniformizing element; униформизирующий элемент]

具有素理想  $\mathfrak{p}$  的离散赋值环  $A$  (见离散赋值环 (discretely-normed ring)) 中的元素  $\pi$ , 它使得  $\mathfrak{p} = A\pi$ . 如果  $\pi_1, \pi_2$  是  $A$  中的两个一致化元, 则元素

$\pi_1 \pi_2^{-1}$  在  $A$  中是可逆的. 设  $R$  是  $A$  中关于剩余域  $A/\mathfrak{p}$  的元素的代表系. 则任一元素  $a \in A$  可以唯一地表示为幂级数  $\sum_{i=0}^{\infty} r_i \pi^i$ , 其中  $r_i \in R$ ,  $\pi$  是一个一致化元. 如果  $A$  关于该离散赋值是完全的, 则任一上述形状的幂级数表示一个元素  $a \in A$ .

如果  $A$  是一条代数曲线 (algebraic curve)  $X$  的一个单点  $x$  处的函数的局部环, 则  $\pi$  是一致化元当且仅当  $\pi$  在  $x$  处有一阶零点. Л. В. Кузьмин 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Weiss, E., Algebraic number theory, McGraw-Hill, 1963.
- 赵春来 译

## 一致收敛级数 [uniformly-convergent series; равномерно сходящийся ряд]

具有 (一般地) 复数项的函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad x \in X, \quad (1)$$

使得对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在 (与  $x$  无关)  $n_\varepsilon$ , 对所有  $n > n_\varepsilon$  及所有  $x \in X$ ,

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon.$$

其中

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x),$$

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x).$$

换言之, 部分和序列  $s_n(x)$  是一致收敛序列. 一致收敛级数的定义与下述条件等价:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |r_n(x)| = 0,$$

它表示级数 (1) 的余项序列

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

在  $X$  中一致收敛 (uniform convergence) 于零.

例. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

在复平面的每个有界圆盘上一致收敛, 但在整个  $\mathbb{C}$  上不一致收敛.

级数一致收敛的 Cauchy 准则 (Cauchy criterion) 给出了级数 (1) 在  $X$  中一致收敛的条件 (不用级数的和). 级数一致收敛的充分条件由 Weierstrass 准则 (关于一致收敛的) (Weierstrass criterion (for uniform convergence)) 给出.

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  称为在集合  $X$  中正则收敛 (re-



gularly convergent), 如果存在收敛的数值级数  $\sum \alpha_n$  ( $\alpha_n \geq 0$ ), 使得对所有  $n = 1, 2, \dots$  及所有  $x \in X$ ,  
 $|a_n(x)| \leq \alpha_n$ ,

即 (1) 满足一致收敛 Weierstrass 准则的条件. 这个准则较强的结果是,  $X$  中正则收敛级数在该集合中一致收敛. 其逆一般不成立; 然而, 对  $X$  中一致收敛的任意级数, 将其项逐次组合成为有限个组后所得级数, 在  $X$  中正则收敛.

有些关于级数一致收敛的准则类似于数项级数收敛的 Dirichlet 准则及 Abel 准则. 一致收敛的这些判别法, 最先出现在 G. H. Hardy 的论文中. 若级数

$$\sum a_n(x)b_n(x) \quad (2)$$

中函数  $a_n(x)$  与  $b_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 定义在  $X$  上, 序列  $\{a_n(x)\}$  对每个  $x \in X$  单调, 且在  $X$  中一致收敛于零,  $\sum b_n(x)$  的部分和序列  $\{B_n(x)\}$  在  $X$  中一致有界, 则 (2) 在这个集合中一致收敛.

若序列  $\{a_n(x)\}$  在  $X$  中一致有界, 且对于每个固定的  $x \in X$  单调, 级数  $\sum b_n(x)$  在  $X$  中一致收敛, 则 (2) 也在  $X$  中一致收敛.

**一致收敛级数的性质.** 若两个级数  $\sum a_n(x)$ ,  $\sum b_n(x)$  在  $X$  中一致收敛,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , 则级数

$$\sum \lambda a_n(x) + \mu b_n(x)$$

也在  $X$  中一致收敛.

若级数  $\sum a_n(x)$  在  $X$  中一致收敛,  $b(x)$  在  $X$  中有界, 则  $\sum b(x)a_n(x)$  也在  $X$  中一致收敛.

**级数和的连续性** (continuity of the sum of a series). 在函数级数和的研究中, 也使用“一致收敛的点”这个概念. 设  $X$  是拓扑空间, 级数 (1) 在  $X$  中收敛. 点  $x_0 \in X$  称为 (1) 的一致收敛的点 (point of uniform convergence), 如果对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $x_0$  的一个邻域  $U = U(x_0)$  及数  $n_\varepsilon$ , 使得对所有  $x \in U$  及所有  $n > n_\varepsilon$ , 不等式  $|r_n(x)| < \varepsilon$  成立.

若  $X$  是紧集, 则级数 (1) 在  $X$  中一致收敛的充要条件是每个点  $x \in X$  都是一致收敛的点.

若  $X$  是拓扑空间, 级数 (1) 在  $X$  中收敛,  $x_0$  是 (1) 的一致收敛的点, 且有如下有限极限.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a_n(x) = c_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则数值级数  $\sum c_n$  收敛, (1) 的和  $s(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时有极限, 同时

$$\lim_{x \rightarrow x_0} s(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} a_n(x) = \sum c_n. \quad (3)$$

即在对于 (1) 的假定下, 可以按公式 (3) 的意义逐项取极限. 由此得出, 若 (1) 在  $X$  中收敛, 且其项在一致收敛的点  $x_0 \in X$  连续, 则它的和也在该点连

续:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} s(x) = \sum \lim_{x \rightarrow x_0} a_n(x) = \sum a_n(x_0) = s(x_0).$$

因此, 若连续函数的级数在拓扑空间中一致收敛, 则它的和在该空间连续. 当  $X$  是紧统且 (1) 的项在  $X$  中非负时, (1) 的一致收敛也是和在  $X$  中连续性的必要条件 (见 **Dini 定理** (Dini theorem)).

一般情况下, 若级数 (1) 在拓扑空间  $X$  中收敛, 且所有项均在  $X$  中连续, 则级数 (1) 的和连续的充要条件是, 部分和序列  $s_n(x)$  伪一致收敛 (quasi-uniform convergence) 于和  $s(x)$  (**Arzelà-Aleksandrov 定理** (Arzelà-Aleksandrov theorem)).

**回答收敛函数级数** (这些函数在一区间上连续) 一致收敛的点存在性问题, 是由 Osgood-Hobson 定理 (Osgood-Hobson theorem) 给出的: 若 (1) 在区间  $[a, b]$  中每一点收敛, 项  $a_n(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则存在  $[a, b]$  中级数 (1) 一致收敛的点的处处稠密集. 由此得出, 在某区间收敛的任何连续函数级数的和, 在区间的一个稠密集上连续. 与此同时, 存在在区间中所有点都收敛的连续函数级数, 其不一致收敛的点组成该区间中的一个处处稠密集.

**一致收敛级数的逐项可积性.** 设  $X = [a, b]$ . 若级数

$$\sum a_n(x), \quad x \in [a, b] \quad (4)$$

的项在  $[a, b]$  上 Riemann (Lebesgue) 可积, 且 (4) 在该区间中一致收敛, 则其和  $s(x)$  也在  $[a, b]$  上 Riemann (Lebesgue) 可积, 且对任意  $x \in [a, b]$  有等式

$$\int_a^x s(t) dt = \int_a^x [\sum a_n(t)] dt = \sum \int_a^x a_n(t) dt. \quad (5)$$

上式右端的级数在  $[a, b]$  上一致收敛.

定理中, (4) 在  $[a, b]$  上一致收敛的条件不能用  $[a, b]$  上收敛代替, 因为有这样的级数, 尽管各项是连续函数且有连续和, 它在一个区间上收敛, 但 (5) 不成立. 与此同时有了各种推广. 下面一些结果是对 **Stieltjes 积分** (Stieltjes integral) 给出的.

若  $g(x)$  是  $[a, b]$  上的递增函数,  $a_n(x)$  是与  $g(x)$  有关的可积函数, (4) 在  $[a, b]$  上一致收敛, 则 (4) 的和  $s(x)$  是与  $g(x)$  有关的 Stieltjes 可积函数,

$$\int_a^x s(t) dg(t) = \sum \int_a^x a_n(t) dg(t).$$

上式右端级数在  $[a, b]$  上一致收敛.

公式 (5) 可推广到多变量函数.

级数在一致收敛下逐项微分的条件. 若(4)的项在  $[a, b]$  上连续可微, (4) 在区间中某点收敛, (4) 的各项导数的级数在  $[a, b]$  上一致收敛, 则级数(4)本身在  $[a, b]$  上一致收敛, 其和  $s(x)$  连续可微并且

$$\frac{d}{dx} s(x) = \frac{d}{dx} \sum a_n(x) = \sum \frac{d}{dx} a_n(x). \quad (6)$$

定理中, 逐项微分所得级数在  $[a, b]$  上一致收敛的条件不能用收敛代替, 因为存在连续可微函数的级数, 它在一个区间上一致收敛, 逐项微分得到的级数在区间上收敛, 但是原级数的和在整个区间上或者不可微, 或者虽可微但其导数不等于各项导数的级数之和.

这个方法要求级数有一致收敛的性质, 许多方法要求绝对收敛 (见绝对收敛级数 (absolutely convergent series)), 允许将关于有限和的一些运算法则移植到级数中: 对于一致收敛——可逐项取极限, 逐项积分和微分 (见(3)–(6)), 对于绝对收敛——可以排列级数项的次序而不改变和, 级数可逐项相乘.

对于函数级数, 绝对收敛的性质与一致收敛的性质互相独立. 如级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

它的所有项非负, 故在整个坐标轴上绝对收敛, 而  $x=0$  显然不是一致收敛的点, 因为它的和

$$s(x) = \begin{cases} 1+x^2, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \end{cases}$$

在这一点不连续 (尽管所有项都连续).

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$$

在整个实数轴上一致收敛, 但在任何点不绝对收敛.

参考文献见级数 (series).

Л. Д. Кудрявцев 撰 罗嵩龄 译

一致最大功效检验 [uniformly most-powerful test; равно-мерно наиболее мощный критерий]

检定复合假设  $H_0$  对复合备选假设  $H_1$  的, 具有给定显著性水平 (significance level) 的统计检验 (statistical test), 其功效不低于检定  $H_0$  对  $H_1$  的同样显著性水平任何其他统计检验的功效 (power of a statistical test).

假设拟检定复合假设  $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$  对复合备选

假设  $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ ; 给定第一类错误概率的上界  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ): 第一类错误是指在  $H_0$  本来成立的情形下被统计检验否定而犯的误差;  $\alpha$  称为检验的显著性水平 (significance level of the test), 而称检验本身的水平为  $\alpha$ . 这样, 对第一类错误概率的约束, 将检定  $H_0$  对  $H_1$  的所有统计检验的集合收缩为水平  $\alpha$  检验类. 用统计检验的功效函数 (power function of a test)  $\beta(\theta)$  ( $\theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ ), 可将固定显著性水平  $\alpha$  的统计检验表示为

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) = \alpha.$$

如果在检定  $H_0$  和  $H_1$  的所有水平  $\alpha$  统计检验类中, 存在这样的检验, 其功效函数  $\beta^*(\theta)$  满足条件

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta^*(\theta) = \alpha, \quad \beta^*(\theta) \geq \beta(\theta), \quad \theta \in \Theta_1,$$

其中  $\beta(\theta)$  是该类中其他任一检验的功效函数, 则这样的检验称为检定  $H_0$  对  $H_1$  的水平  $\alpha$  一致最大功效检验 (uniformly most-powerful test). 如果用检验的功效来衡量检验, 则一致最大功效检验是最优检验.

参考文献

[1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988. М. С. Никулин 撰 周概容 译

单峰分布 [unimodal distribution 或 single-peak distribution; унимодальное распределение]

直线上的概率测度 (probability measure), 对某一实数  $a$ , 其分布函数  $F(x)$  当  $x < a$  时为凸而当  $x > a$  时为凹. 此时数  $a$  称为众数 (mode) 或峰值 (peak), 一般而言不是唯一确定的; 说得更精确些, 一给定单峰分布的众数的集组成一个可能退化的闭区间.

单峰分布的例子包括正态分布 (normal distribution), 均匀分布 (uniform distribution), Cauchy 分布 (Cauchy distribution), Student 分布 (Student distribution) 及  $\chi^2$  分布 ("chi-squared" distribution). А. Я. Хинчин([1]) 得到了如下的单峰性准则 (unimodality criterion): 函数  $f$  为一众数为 0 的单峰分布的特征函数 (characteristic function), 其必要充分条件是

$$f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du, \quad f(0) = 1,$$

其中  $\varphi$  是一个特征函数. 用分布函数的语言, 这个方程等价于

$$F(x) = \int_0^1 G\left(\frac{x}{u}\right) du,$$

其中  $F$  与  $G$  对应于  $f$  与  $\varphi$ . 换句话说,  $F$  为众数在零点的单峰分布, 当且仅当它是两个独立随机变量之



积, 其中一个有  $[0, 1]$  上的均匀分布 (uniform distribution).

对于一个给定其特征函数的分布 (例如稳定分布 (stable distribution)), 其单峰性的证明是一个困难的分析问题. 表示一个给定分布为单峰分布的极限这种似乎是自然的方法并不能达到此目的, 因为一般两个单峰分布的卷积并不是单峰分布 (虽然对于对称分布, 单峰性在卷积下是保持的; 而在一个长时期总认为一般也应是如此). 例如, 如果  $F$  是一个在  $5/6$  处有大小为  $1/6$  的原子及密度

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 5/6, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

的分布, 那么  $F$  与其自身的卷积就有两个极大值. 因此引进了强单峰性的概念 (见 [2]); 一个分布称为是强单峰的 (strongly unimodal), 如果它与任何单峰分布的卷积仍是单峰的. 每个强单峰分布必是单峰的.

一个在点  $a + hk$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h > 0$ ) 给定概率  $p_k$  的格点分布 (lattice distribution) 称为单峰的, 如果存在整数  $k_0$ , 使  $p_k$  作为  $k$  的函数当  $k \leq k_0$  时是非减的, 而当  $k \geq k_0$  时是非增的. 单峰格点分布的例子有 Poisson 分布 (Poisson distribution), 二项分布 (binomial distribution) 及几何分布 (geometric distribution).

某些有关分布的结果在单峰性假设下可能得到加强. 例如, 对于一个有单峰分布的随机变量  $\xi$ , Чебышев 不等式 (Chebyshev inequality), 可以改进为, 对任何  $k > 0$ ,

$$P\{|\xi - x_0| \geq k\zeta\} \leq \frac{4}{9k^2},$$

其中  $x_0$  为众数,  $\zeta^2 = E(\xi - x_0)^2$ .

#### 参考文献

- [1] Хинчин, А. Я., Об унимодальных распределениях, «Изв. НИИ матем. и мех. ун-та», Томск, 2 (1938), 2, 1–7.
- [2] Ибрагимов, И. А., О композиции одновершинных распределений, «Теор. вероятн. и ее примен.», 1 (1956), 2, 283–288.
- [3] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1957–1971.

Н. Г. Ушаков 撰

【补注】 一个非退化强单峰分布有一对数凹密度.

#### 参考文献

- [A1] Dharmadhikari, S., Yong-Dev, K., Unimodality, convexity, and applications, Acad. Press, 1988.

潘一民 译

么模元 [unimodular element; унимодулярный элемент], 么模向量 (unimodular vector)

【补注】 令  $R$  是有 1 的环,  $M$  是右  $R$  模.  $M$  的一个元素  $x$  叫作么模的, 若  $\text{ann}_R(x) = \{r \in R: xr = 0\} = 0$ , 且由  $x$  生成的子模  $\langle x \rangle$  在  $M$  中有一个补  $N$ , 即存在子模  $N \subset M$ , 使  $\langle x \rangle \cap N = \{0\}$ ,  $\langle x \rangle + N = M$ , 从而  $\langle x \rangle \oplus N = M$ .

若  $M$  是自由的, 则  $M$  基底中的元素是么模的. 元素  $x \in M$  是么模的, 当且仅当存在模同态  $\rho: M \rightarrow R$ , 使  $\rho(x) = 1$ .  $R$  上一个么模矩阵 (unimodular matrix) 的行 (或列) 都是么模的. 在代数  $K$  理论 (algebraic  $K$ -theory) 中, 一个重要的问题是其逆何时真 (亦见稳定秩 (stable rank)).

#### 参考文献

- [A1] Hahn, A. J. and O'Meara, O. T. The classical groups and  $K$ -theory, Springer, 1989, p. 9, § 141 ff.

张英伯 译

么模群 [unimodular group; унимодулярная группа]

一个拓扑群 (topological group), 它的左不变 Haar 测度 (Haar measure) 是右不变的 (等价的说法是在变换  $a \mapsto a^{-1}$  之下不变). 一个 Lie 群  $G$  是么模的, 当且仅当

$$|\det \text{Ad } g| = 1 \quad (g \in G),$$

这里  $\text{Ad}$  是伴随表示 (adjoint representation). 对于一个连通 Lie 群  $G$  来说, 这就相当于要求  $\text{tr } \text{ad } x = 0$  ( $x \in \mathfrak{g}$ ), 这里  $\text{ad}$  是  $G$  的 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  的伴随表示. 任意紧的, 离散的或 Abel 局部紧的群以及任意连通的可简约或幂零 Lie 群都是么模群.

Л. Л. Онищик 撰

【补注】 有时, 比较不常用, 么模群这个词指的是一个环上的么模矩阵 (具有给定阶的) 的群, 即行列式是 1 的矩阵群, 这个群通常称为“特殊线性群”, 例如, 见 [A3].

#### 参考文献

- [A1] Reiter, H., Classical harmonic analysis and locally compact groups, Clarendon Press, 1968.
- [A2] Bourbaki, N., Intégration, Éléments de mathématique, Hermann, 1963, Chap. 7.
- [A3] Weyl, H., Classical groups, Princeton Univ. Press, 1946, p. 45.

郝炳新 译

么模格 [unimodular lattice; унимодулярная решетка]

【补注】  $\mathbf{R}^n$  中适合  $\text{vol}(\mathbf{R}^n/L) = 1$  的格  $L$ . 如果  $a_1, \dots, a_n$  是  $\mathbf{R}^n$  中的  $n$  个向量, 那么当且仅当  $|\det(a_1, \dots, a_n)| = 1$  时  $a_1, \dots, a_n$  张成的格是么模格. (因为  $\text{vol}(\mathbf{R}^n/L(a_1, \dots, a_n)) = |\det(a_1, \dots, a_n)|$ ).

#### 参考文献

- [A1] Milnor, J. and Husemoller, D., Symmetric bilinear forms, Springer, 1973, p. 16.

朱尧辰 译 戚鸣皋 校

**么模矩阵** [unimodular matrix; унимодулярная матрица]

行列式是  $\pm 1$  的方阵. 当考虑交换环上的矩阵时, 所谓一个么模矩阵往往理解为一个可逆矩阵.

O. A. Иванова 撰

【补注】么模矩阵也往往指的是其行列式为 1 的矩阵. 在任何意义上, 所有么模矩阵对于乘法构成一个群. 亦见么模变换 (unimodular transformation).

蒋滋梅 译

**么模变换** [unimodular transformation; унимодулярное преобразование]

有限维向量空间 (vector space) 的一个线性变换 (linear transformation), 其矩阵的行列式是  $\pm 1$ .

O. A. Иванова 撰

【补注】名称“么模变换”往往限定指行列式为 1 的线性变换. 在域  $k$  上向量空间  $V$  中取定一个  $k$  基  $a_1, \dots, a_n$ , 这里  $k$  是整环  $D$  的商域. 在此情况下, 一个线性变换称为么模的 (unimodular), 如果它关于基  $a_1, \dots, a_n$  的矩阵的元素在  $D$  中, 并且其行列式是  $D$  中的可逆元. 在每一种定义下, 所有么模变换构成一个群. 在行列式是 1 的线性变换的情形下, 往往称这种群为么模群 (unimodular group), 或现在更一般地称为特殊线性群 (special linear group). 蒋滋梅 译

**集合的并** [union of sets; объединение], 集合的和 (sum of sets)

集合 (族) 上的一种基本运算. 设  $\mathcal{X}$  为某集族 (有穷或无穷), 则所有至少属于  $\mathcal{X}$  中的一个集合的元素组成的汇集称作  $\mathcal{X}$  (中集合) 的并 (union), 个别时候也称作  $\mathcal{X}$  (中集合) 的和 (sum); 记为  $\bigcup \mathcal{X}$ .

M. И. Войцеховский 撰

【补注】在  $\mathcal{X} = \{A_\alpha: \alpha \in I\}$  的情形, 并也记作  $\bigcup_\alpha A_\alpha$ ,  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ,  $\bigcup_{A \in \mathcal{X}} A$ , 个别时候也记作  $\sum_\alpha A_\alpha$ .

在 Zermelo-Fraenkel 集合论 (set theory) 公理系统中, 并集公理 (sum-set axiom) 的表述是集合的并仍是集合.

如果集  $A_\alpha$  是互不相交的, 则在范畴 Set 中, 对象  $A_\alpha$  的并就是这些对象在范畴意义下的和. 一般地, 对象  $X_\alpha$  的和是不相交并 (disjoint union)  $\coprod_\alpha X_\alpha = \{(x, \alpha): x \in X_\alpha\}$ . 自然嵌入  $i_\alpha: X_\alpha \rightarrow \coprod_\alpha X_\alpha$  由  $i_\alpha(x) = (x, \alpha)$  给出. 于是  $\coprod X_\alpha$  及  $i_\alpha, \alpha \in I$ , 满足关于范畴和的泛性质 (universal property): 对每一映射族  $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y$ , 存在唯一的映射  $f: \coprod_\alpha X_\alpha \rightarrow Y$ , 使得  $f i_\alpha = f_\alpha$ .

参考文献

[A1] Kuratowski, K., Introduction to set theory and topology, Pergamon, 1961, p. 25 (译自法文).

赵希顺 译

**幂么元** [unipotent element; унипотентный элемент]

线性代数群 (linear algebraic group)  $G$  的元素  $g$ , 它与其在  $G$  中的 Jordan 分解 (Jordan decomposition) 的幂么部分  $g_u$  相一致. 如果  $G$  作为代数闭的基域  $K$  上有限维向量空间  $V$  的自同构群  $GL(V)$  的闭子群实现, 那么幂么元  $g$  恰是满足  $(g - 1)^n = 0$ ,  $n = \dim V$  的元素, 或等价地, 关于  $V$  的某一个基它的矩阵是主对角线全为 1 的上三角阵.  $G$  中所有幂么元的集合  $U(G)$  是 Zariski 拓扑闭的, 如果  $G$  定义在子域  $k \subset K$  上, 那么  $U(G)$  也定义在  $k$  上. 如果  $\text{char } K = 0$ , 那么每个幂么元  $g$  的阶是无限的, 此时  $G$  中含  $g$  的最小代数子群是 1 维幂么群 (unipotent group). 然而如果  $\text{char } K = p > 0$ , 那么对某个  $t \geq 0$ ,  $g$  有有限阶  $p^t$  时, 它恰好就是幂么元. 一个连通群不包含非平凡的幂么元  $g \neq e$ , 当且仅当它是个代数环面 (algebraic torus).

非迷向性准则可以通过幂么元给出, 见非迷向群 (anisotropic group).

幂么元在代数群和 Lie 群的离散子群 (discrete subgroup) 理论中有重要作用. 在具有有限体积的非紧基本域的对称空间的运动的离散群  $\Gamma$  中, 幂么元的存在是研究这些群的结构及其基本域的重要工具, 见 [5]; 幂么元在这样的  $\Gamma$  中的存在性的证明见 [4].

簇  $U(G)$  在群  $G$  的内自同构下不变. 设  $G$  是连通的和半单的, 则幂么元的共轭类的数目是有限的, 且对每个单群  $G$  的幂么元的共轭类的数目 (及幂么元的中心化子) 有一个完整的刻画, 见 [7]. 在典型群中, 这个刻画通过矩阵的 Jordan 形式得到, 见 [2]. 例如对群  $G = SL_n(K)$ , 在幂么元的共轭类与把  $n$  分成正整数  $m_i$ , 使  $m_1 \geq \dots \geq m_s$  的分划  $(m_1, \dots, m_s)$  之间有一个一一映射. 如果  $\lambda = (m_1, \dots, m_s)$  和  $\mu = (l_1, \dots, l_t)$  是  $n$  的两个分划, 那么恰好当  $\sum_{i=1}^j m_i \geq \sum_{i=1}^j l_i$  对所有的  $j$  成立时, 对应于  $\mu$  的类会在对应于  $\lambda$  的闭包中. 对应于分划  $(m_1, \dots, m_s)$  的类 (作为代数簇) 的维数等于  $n^2 - \sum_{i,j} \min(m_i, m_j)$ .

代数簇  $U(G)$  的所有单点的集合形成幂么元的一个共轭类——正则幂么元 (regular unipotent element). 如果  $G$  是单的, 那么簇  $U(G)$  中奇异点的簇也包含一个幂么元的 Zariski 开共轭类——次正则幂么元 (subregular unipotent element). 关于簇  $U(G)$  中奇异点的研究亦见 [6].

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Springer, 1991.



- [2] Borel, A. et al. (eds.), Seminar on algebraic groups and related finite groups, Lecture notes in math., 131, Springer, 1970.
- [3] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1981.
- [4] Каждан, Д. А., Маргулис, Г. А., «Матем. сб.», 75 (1968), 1, 163 – 168.
- [5] Selberg, A., Recent developments in the theory of discontinuous groups of motions of symmetric spaces, in Proc. 15 Scand. Congress (Oslo, 1968), Lecture notes in math., Vol. 118, Springer, 1970, 99 – 120.
- [6] Slodowy, P., Simple singularities and simple algebraic groups, Lecture notes in math., 815, Springer, 1980.
- [7] Spaltenstein, N., Classes unipotentes et sousgroupes de Borel, Lecture notes in math., 946, Springer, 1982.

В. Л. Попов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Springer, T. A., Linear algebraic groups, in W. Jäger, J. Moser and R. Remmert (eds.): Perspectives in Mathematics, Birkhauser, 1984, 455 – 496.

叶家琛 译

#### 幂么群 [unipotent group; унипотентная группа]

线性代数群 (linear algebraic group)  $G$  的幂么元 (unipotent element) 所成的子群  $U$ . 如果  $G$  等同于它在一个适当的有限维向量空间  $V$  的自同构群  $GL(V)$  中的同构嵌入的象, 那么幂么群是含在  $V$  的所有幂么自同构的集合

$$\{g \in GL(V) : (1 - g)^n = 0\}, \quad n = \dim V,$$

内的一个子群. 取定  $V$  的一个基, 可把  $GL(V)$  等同于一般线性群  $GL_n(K)$ , 其中  $K$  是代数闭的基域; 于是线性群  $U$  也称为幂么群. 幂么群的一个例子是  $GL_n(K)$  中所有主对角线全为 1 的上三角阵的群  $U_n(K)$ . 如果  $k$  是  $K$  的子域,  $U$  是  $GL_n(k)$  的幂么子群, 那么  $U$  在  $k$  上共轭于  $U_n(k)$  的一个子群. 特别,  $U$  的所有元素在  $V$  中有一个公共的非零不动点, 并且  $U$  是一个幂零群. 这个定理证明了对不同的  $n$  幂么代数群恰是  $U_n(k)$  的 Zariski 闭子群.

在任意的线性代数群  $H$  中, 存在唯一的连通正规幂么子群  $R_u(H)$  (幂么根 (unipotent radical)) 及约化商群  $H/R_u(H)$ , 见约化群 (reductive group). 这样, 在某种程度上把对任意代数群的结构的研究归结为对约化群和幂么群的结构的研究. 与约化群的情形相反, 幂么代数群的分类现在还不清楚.

幂么代数群的每个子群和商群仍是幂么的. 如果  $\text{char } K = 0$ , 那么  $U$  总是连通的; 而且指数映射  $\exp: \mathfrak{u} \rightarrow U$  是代数簇的同构 (其中  $\mathfrak{u}$  是  $U$  的 Lie

代数). 如果  $\text{char } K = p > 0$ , 那么存在非连通的幂么代数群, 例如基域的加法群  $G_a$  (它可以等同于  $U_2(K)$ ) 是一个  $p$  群且包含一个有限幂么群. 在连通幂么群  $U$  中存在正规子群的序列  $U = U_1 \supset \cdots \supset U_s = \{e\}$  使得每个商群  $U_i/U_{i+1}$  是 1 维的. 每个连通 1 维幂么代数群同构于  $G_a$ . 这样, 对连通幂么代数群的研究归结为型  $G_a$  的群的累次扩张的描述.

关于交换的幂么代数群的知识要比一般情形多得多, 见 [4]. 如果  $\text{char } K = 0$ , 那么交换幂么代数群恰好是同构于  $G_a \times \cdots \times G_a$  的代数群, 其中同构  $G_a \times \cdots \times G_a \rightarrow U$  由指数映射给出. 如果  $\text{char } K = p > 0$ , 那么连通交换幂么代数群  $U$  恰是连通交换代数  $p$  群. 这时,  $U$  未必同构于  $G_a \times \cdots \times G_a$ , 但它是同构的充分必要条件为  $g^p = e$  对所有的  $g \in U$  成立. 在一般情形下,  $U$  同源 (isogeny) 于某些特殊群 (所谓 Witt 群) 的积, 见 [2].

如果  $H$  和  $U$  是连通幂么代数群且  $H \subset U$ , 那么簇  $U/H$  同构于一个仿射空间. 仿射代数簇  $X$  的自同构的幂么代数群的任一轨道在  $X$  中闭 ([5]).

#### 参考文献

- [1] Borel, A., Linear algebraic groups, Springer, 1991.
- [2] Serre, J. -P., Groupes algébrique et corps des classes, Hermann, 1959.
- [3] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1981.
- [4] Kambayachi, T., Miyanishi, M. and Takeuchi, M., Unipotent algebraic groups, Springer, 1974.
- [5] Steinberg, R., Conjugacy classes in algebraic groups, Springer, 1974.

В. Л. Попов 撰 叶家琛 译

#### 幂么矩阵 [unipotent matrix; унипотентная матрица]

环上的方阵  $A$ , 具有性质  $A - I_n$  是幂零的, 即  $(A - I_n)^n = 0$ , 这里  $n$  是  $A$  的阶. 域上矩阵是幂么的, 当且仅当它的特征多项式 (characteristic polynomial) 是  $(x - 1)^n$ .

矩阵群称为幂么的 (unipotent), 若它的每个矩阵是幂么的.  $GL(n, F)$  的任何幂么子群在  $GL(n, F)$  中共轭于特殊三角群的一个子群 (Kolchin 定理 (Kolchin theorem)), 这里  $F$  是域. 该结论对除环上的幂么群也成立, 但要求除环的特征为零或大于某  $\gamma(n)$ .

Д. А. Супруненко 撰 石生明 译 王杰 校

#### 解析函数的唯一性性质 [uniqueness properties of analytic functions; единственности свойства аналитических функций]

解析函数的一些性质, 断言这些函数由它们在其定义域或其边界的某个子集上的值完全确定; 在这里可区分内部唯一性性质和边界唯一性性质.

**内部唯一性性质**. 设  $D$  是复平面  $C = C^1$  内的一个区域. 对于  $D$  上的全纯 (即单值解析) 函数的经典内部唯一性定理 (interior uniqueness theorem) 断言, 如果  $D$  内的两个全纯函数  $f(z)$  和  $g(z)$  在某个集合  $E \subset D$  上相同, 而  $E$  至少含有一个位于  $D$  内的极限点, 则在  $D$  内处处有  $f(z) \equiv g(z)$ . 换言之, 如果全纯函数  $f(z)$  在一个集合  $E$  上等于零, 而  $E$  至少含有一个位于  $D$  内的极限点, 则  $f(z) \equiv 0$ . 解析函数的这一内部唯一性性质的证明表明, 本质上这是单复变量幂级数的唯一性性质. 对于  $D$  内的亚纯函数  $f(z)$  和  $g(z)$ , 如果把  $f(z)$  和  $g(z)$  的极点看作函数取  $\infty$  值的点, 则唯一性性质仍然成立.

特别地, 如果两个解析函数  $f(z)$  和  $g(z)$  在某个点的任意小邻域内或某条连续曲线的任意小弧段上相同, 则  $f(z) \equiv g(z)$ . 另一推论: 解析函数  $f(z)$  的  $A$  点 ( $A$ -point) 即使得  $f(z) = A$  的点  $z$  的集合 (假定  $f(z) \neq A$ ) 在其定义域  $D$  内不可能有极限点.

Weierstrass 意义下的完全解析函数 (complete analytic function)  $F(z)$ ,  $G(z)$  一般是多值的, 它们有下述唯一性性质: 设  $f(z)$ ,  $g(z)$  是  $F(z)$ ,  $G(z)$  的分别定义于区域  $D_1$ ,  $D_2$  内的单值元素或分支,  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ ; 如果  $f(z)$  与  $g(z)$  在某个集合  $E \subset D_1 \cap D_2$  上相同, 而  $E$  至少有一个极限点  $z_0 \in D_1 \cap D_2$ , 则  $F(z)$  和  $G(z)$  具有相同的存在域且作为完全解析函数处处相同.

这些唯一性性质的表述不能照搬到多复变量  $z = (z_1, \dots, z_n)$  ( $n > 1$ ) 的函数  $f(z)$  的情形. 例如, 解析函数  $f(z) = z_1 z_2$  不恒等于零, 但在复  $n-1$  维解析平面  $z_1 = 0$  和  $z_2 = 0$  上都等于零. 对于这样的函数成立下列唯一性性质:

1) 如果  $f(z)$  是复空间  $C^n$  的区域  $D$  上的解析函数, 且在某个非空开子集  $U \subset D$  的所有点处等于零, 则在  $D$  上  $f(z) \equiv 0$ .

2) 如果  $f(z)$  是区域  $D \subset C^n$  上的解析函数, 它连同其偏导数  $\partial^k f / \partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}$  ( $k = k_1 + \cdots + k_n$ ;  $k_j = 0, 1, \dots$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) 在某点  $z^0 \in D$  处均等于零, 则在  $D$  上  $f(z) \equiv 0$ .

3) 如果  $f(z)$  是区域  $D \subset C^n$  上的解析函数, 并在点  $z^0 = x^0 + iy^0 \in D$  的一个实邻域  $U_\delta$  即在一个集合  $U_\delta = \{z = x + iy \in C^n: |x - x^0| < \delta, y = y^0\}$  上等于零, 则在  $D$  上  $f(z) \equiv 0$ .

$n = 1$  与  $n > 1$  两种情形下内部唯一性性质之间的差别来自一元与多元幂级数的不同性态.

**边界唯一性性质**. 上述关于单复变量解析函数  $f(z)$  的唯一性定理可以有下述情形的几种推广, 即  $f(z)$  的零点不是位于解析性区域  $D$  的内部, 而是位于  $D$  的边界  $\Gamma$  上. 最一般、最深刻的边界唯一性定

理是由 Н. Н. Лузин 和 И. И. Привалов 于 1925 年得到的 (亦见 Лузин - Привалов 定理 (Luzin-Privalov theorem)). 设  $D$  是  $z$  平面上由可求长曲线  $\Gamma$  所围的区域,  $f(z)$  是  $D$  内的亚纯函数. 再设  $\zeta_0$  是  $\Gamma$  上存在切线的一个点; 可求长曲线上几乎所有点都具有这一性质. 称  $f(z)$  在  $\zeta_0$  处具有角边界值 (angular boundary value)  $A$ , 如果当  $z$  保持位于区域  $D$  与以  $\zeta_0$  为顶点、以  $\Gamma$  在  $\zeta_0$  处的法线为分角线的任一小于  $\pi$  的角的内部之交中趋于  $\zeta_0$  时  $f(z)$  趋向于  $A$ .

下述 Лузин - Привалов 关于角边界值的边界唯一性定理 (Luzin-Privalov boundary uniqueness theorem) 成立: 如果  $f(z)$  在由可求长曲线  $\Gamma$  所围的区域  $D$  内亚纯, 且在一正 Lebesgue 测度集  $E \subset \Gamma$  上取零角边界值, 则  $f(z) \equiv 0$ . 一般地说, 亚纯函数在  $\Gamma$  上不一定有边界值; 但对相当大的一类亚纯函数, 例如对有界特征函数 (function of bounded characteristic), 已证明在  $\Gamma$  上几乎处处存在角边界值.

与此相联, 存在单位圆盘  $D$  内的有界解析函数, 它在单位圆周  $\Gamma$  的一个给定的零测度集  $E$  上按各种意义趋于零但在  $D$  内不恒等于零. Лузин 和 Привалов 还进一步构造出单位圆盘  $D$  内不恒等于零的解析函数的例子, 它们在一个全测度集 (即测度为  $2\pi$  的集合)  $E \subset \Gamma$  上具有零径向边界值 (radial boundary value). 结果表明, 集合的 Baire 范畴概念在唯一性问题中也很重要. 事实上, 有一条关于径向边界值的 Лузин - Привалов 边界唯一性定理 (Luzin-Privalov boundary uniqueness theorem): 如果函数  $f(z)$  在单位圆盘  $D$  内亚纯, 在位于单位圆周  $\Gamma$  的弧  $\sigma$  上的一个集合  $E$  上具有零径向边界值, 且  $E$  在  $\sigma$  中为度量稠密并为第二 Baire 范畴, 则  $f(z) \equiv 0$ . (集合  $E$  称为在  $\sigma$  中为度量稠密 (metrically dense), 如果  $E$  与  $\sigma$  的任一子弧之交具有正测度.)

亦见解析函数的边界性质 (boundary properties of analytic functions); 极限集 (limit set).

对于多复变量解析函数边界唯一性性质的研究还没有达到与单变量函数相同程度的完全性 (见 [5], [6]).

#### 参考文献

- [1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 3 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957, 第三章).
- [2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969, ч. 1, гл. 2, ч. 2, гл. 1 и сл. (第二卷英译本: Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part II Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992).
- [3] Привалов, И. И., Граничные свойства аналити-



ческих функций, 2 изд., М. - Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956).

[4] Collingwood, E. F., Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

[5] Rudin, W., Function theory in the polydisc, Benjamin, 1969.

[6] Хенкин, Г. М., Чирка, Е. М., 载于 Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, 13 - 142 (英译本: Henkin, G. M. [G. M. Khenkin], Ćirka, E. M. [E. M. Chirka], Boundary properties of holomorphic functions of several complex variables, J. Soviet Math., 5 (1976), 612 - 687).

[7] Rudin, W., Function theory in the unit ball of  $\mathbb{C}^n$ , Springer, 1980.

[8] Koosis, P., Introduction to  $H_p$  Spaces, Cambridge Univ. Press, 1980. Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】类似于 Лузин 和 Привалов 的不恒等于零几乎处处具有零径向边值的全纯函数的例子, 也已对  $\mathbb{C}^n$  中的单位球作出, 见 [A1].

#### 参考文献

[A1] Hakim, M., Sibony, N., Boundary properties of holomorphic functions in the ball in  $\mathbb{C}^n$ , Math. Ann., 276 (1987), 549 - 555. 沈永欢 译

**唯一性集** [uniqueness set; единственности множество],  $U$  集 ( $U$ -set)

具有如下性质的集合  $E \subset [0, 2\pi]$ : 如果一个三角级数 (trigonometric series) 在  $(0, 2\pi] \setminus E$  的每一点上都收敛到零, 则它必为零级数. 不是  $U$  集的集合称为**非唯一性集** (set of non-uniqueness) 或  $M$  集 ( $M$ -set). 这些概念与函数用可能除了给定集  $E$  以外处处收敛到它的三角级数表示的唯一性问题有关. G. Cantor (1872) 证明有限集 (包括空集) 是唯一性集, 将这一结果推广到无穷集的企图导致他创立了**集合论** (set theory).

具有正 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure) 的集合都是  $M$  集. 任意可数集都是  $U$  集. 在零测度的**完满集** (perfect set) 中, 既有  $M$  集 (Д. Е. Меньшов, 1916), 也有  $U$  集 (Н. К. Бари, 1921); 例如, 以有理常数比  $\theta$  构造的 **Cantor 集** (Cantor set) 是  $U$  集, 当且仅当  $1/\theta$  是整数, 也就是说, 一个数集是  $U$  集还是  $M$  集, 依赖于组成该集的数的算术性质. 但是, 存在满测度集  $E \subset [0, 2\pi]$  (所谓的  $U(\varepsilon)$  集 ( $U(\varepsilon)$ -set)), 如果一个三角级数在  $[0, 2\pi] \setminus E$  的每一点上都收敛到零而且它的系数是  $O(\varepsilon_n)$  ( $\varepsilon_n \downarrow 0$ ), 则它必是零级数.

$U$  集和  $M$  集的概念能被推广到 Fourier-Stieltjes

级数.

#### 参考文献

[1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

[2] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 - 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

[3] Бари, Н. К., «Успехи матем. наук», 4 (1949), 3 - 68. В. Ф. Емельянов 撰

【补注】 $M$  集也称为**多重性集** (set of multiplicity). 集合  $E \subset [0, 2\pi]$  称为  $U_0$  集 ( $U_0$ -set) 或**推广唯一性集** (set of extended uniqueness), 如果一个 **Fourier-Stieltjes 级数** (Fourier-Stieltjes series) 在  $(0, 2\pi] \setminus E$  的每一点上都收敛到零, 则它必为零级数. 不是  $U_0$  集的集合称为  $M_0$  集 ( $M_0$ -set) 或者**限制多重性集** (set of restricted multiplicity). 集合  $E$  是  $U_0$  集, 当且仅当它不支持非零 Rajchman 测度 (Rajchman measure), 即, 其 Fourier-Stieltjes 系数在无穷远处趋于零的测度. 在现代理论中,  $U_0$  集的作用比  $U$  集更显突出. 1983 年, R. Lyons 证明了: Rajchman 测度恰好是零化所有  $U_0$  集的测度. 在 [A1] - [A3] 中给出了更多的结果, 例如将唯一性集与 Helson 集 (Helson set) 以及**谱综合集** (set of spectral synthesis) (参见抽象调和分析 (harmonic analysis, abstract)) 联系起来.

考虑长度为  $l$  的闭区间  $[x, x+l]$ . 设  $\alpha(1), \dots, \alpha(d)$  ( $0 \leq \alpha(1) < \alpha(2) < \dots < \alpha(d) < 1$ ) 是  $d$  个数并考虑  $d$  个闭区间  $[x + \alpha(j)l, x + \alpha(j)l + \eta]$ , 其中的  $\eta$  足够小, 使得这些区间互不相交. 只保留这些区间 (并将剩余的区间去掉). 这一过程称为**作型**为

$$[d; \alpha(1), \dots, \alpha(d); \eta]$$

的**剖分**. 现在, 从任意一个长度为  $m$  的区间出发, 作型为  $[d_1; \alpha_1(1), \dots, \alpha_1(d_1); \eta_1]$  的剖分, 然后在得到的每一个小区间上作型为  $[d_2; \alpha_2(1), \dots, \alpha_2(d_2); \eta_2]$  的剖分, 并且继续作下去. 在作了  $p$  次之后, 得到  $d_1 \cdots d_p$  个区间, 每一个区间的长度是  $\eta_1 \cdots \eta_p m$ , 而且当  $p \rightarrow \infty$  时, 最终得到一个测度为  $m \lim_p d_1 \cdots d_p \eta_1 \cdots \eta_p$  (极限存在) 的闭集  $P$ . 如果对所有的  $p$  有  $d_p \geq 2$ , 则最终得到的  $P$  是一个无处稠密的**完满集** (perfect set). 如果对所有的  $p$  令  $d_p = 2$ ,  $\alpha_p(1) = 0$ ,  $\alpha_p(2) = 2/3$  及  $\eta_p = 1/3$ , 则得到 **Cantor 集** (Cantor set). 逐次作型为  $[2; 0, 1 - \xi_k, \xi_k]$  的剖分, 则得到所谓的 **Cantor 型集** (set of Cantor type). 如果对所有的  $k$  取  $\xi_k = \xi$ , 则得到 (剖分的)**常数比的 Cantor 型集** (set of Cantor type of constant ratio). 更详细的内容参见 [2] 中的第 194 页等.

#### 参考文献

[A1] Graham, C. C. and McGehee, O. C., Essays in

commutative harmonic analysis, Springer, 1979.

[A2] Kahane, J. - P., Séries de Fourier absolument convergentes, Springer, 1970.

[A3] Kechris, A. S. and Louveau, A., Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness, Cambridge Univ. Press, 1987. 朱学贤 译 刘和平 校

**单有理簇** [unirational variety; унирациональное многообразие]

域  $k$  上代数簇 (algebraic variety)  $X$ , 存在射影空间到  $X$  的有理映射  $\varphi: P^n \rightarrow X$  使得  $\varphi(P^n)$  在  $X$  内稠密且其有理函数域的扩张  $k(P^n)/k(X)$  是可分的. 换句话说,  $k(X)$  有一个可分扩域它是纯超越的 (见超越扩张 (transcendental extension)).

单有理簇很接近有理簇 (rational variety), 例如在单有理簇上不存在正则微分形式,  $H^0(X, \Omega_X^p) = 0$  时  $p \geq 1$ . 有理与单有理簇是否一致的问题称为 Lür-oth 问题 (Lüroth problem), 其回答是否定的.

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Вик. С. Куликов 撰 陈志杰 译

**单列环** [uniserial ring; однорядное кольцо]

一个环, 它的每个不可分解单侧理想有唯一的合成列, 并且, 它分解成准素环的直和. 略去后一要求便导致广义单列环 (generalized uniserial ring) 的定义, 也称为列环 (serial ring). 每个广义单列环同时是左和右的半链环. 见半链模 (semi-chain module); 半链环 (semi-chain ring). 广义单列环上的每个模分解成循环子模的直和. 一个环是广义单列环, 当且仅当环上所有左模是半链模. 单列环的一个例子是除环上的上三角矩阵环.

Л. А. Скорняков 撰 蔡传仁 译

**单位, 单位元** [unit; единица], 亦称幺元 (identity)

1) 最小的自然数 (natural number): 1. 任何数乘以 1 仍得原数.

2) 集合  $M$  中一个元素  $e$  称做关于定义在  $M$  上的二元运算  $\star$  的左 (右) 单位元 (left (right) unit) 或左 (右) 幺元 (left (right) identity), 如果下列方程对任何  $a \in M$  成立:

$$e \star a = a (a \star e = a).$$

如果至少存在一个左单位元并且至少存在一个右单位元, 那么它们相重合因而不存在其他的单位元. 如果在  $M$  上定义了多于一个的二元运算 (例如环中的加法和乘法), 那么术语“单位”仅用于这些运算中的一个, 通常是用于乘法. 关于加法的“单位元”称做

零元 (zero element).

3) 格的单位元 (unit of a lattice) 是它的最大元, 亦即关于“交”运算的幺元 (亦见格 (lattice)).

4) 在整环  $k$  中, 任何可逆元 (invertible element), 亦即这样的元素  $\varepsilon$ , 它有逆元  $\varepsilon^{-1}$ , 使得  $\varepsilon \varepsilon^{-1} = 1$ , 称做单位元 (unit), 或单位因子 (divisor of unity). 一个整环中的单位元在乘法运算下形成一个群. 有时同样的术语也在环  $k$  的分式域中保留使用 (这就是说,  $k$  中的单位元也称做分式域的单位元 (unit of the field of fractions)). 例如, 代数数域  $k$  的单位元就是  $k$  的代数整数环的单位元,  $p$  进单位元就是  $p$  进整数环的单位元 (见  $p$  进数 ( $p$ -adic number)), 等等.

5) 范畴 (category) 中一个对象  $X$  的单位态射 (unit morphism) 或恒等态射 (identity morphism) 是 (唯一的) 态射  $1_X: X \rightarrow X$ , 它满足  $1_X f = f$  及  $g 1_X = g$ , 对所有  $f: Y \rightarrow X$  及所有  $g: X \rightarrow Z$ .

О. А. Иванова 撰

【补注】在俄语中使用同一个词来翻译英语中的词“unit”及“identity”. 在英语中, 在上述 2) 和 5) 中词“identity”比词“unit”用得普遍, 而在其余三个条目中词“unit”则更为通用.

测量或比较物品时的标准长度称为长度单位 (unit of length), 或简称单位. 更一般地, 各种物品当它的主要参数之一等于单位长, 则将它称做“单位物品”, 例如单位向量 (unit vector), 单位圆 (unit circle), 单位圆盘 (unit disc), 单位立方体 (unit cube), 单位  $n$  立方体 (unit  $n$ -cube), 单位球面 (unit sphere), 单位球 (unit ball), 单位  $n$  球 (unit  $n$ -ball) 或单位胞腔 (unit cell), 等等.

朱尧辰 译 戚鸣皋 校

**单位除子** [unit divisor; делитель единицы]

环 (具有单位元素 1) 中的一个元素  $a$ , 它有逆 (inverse), 即使得  $ab = ba = 1$  的元素  $b$ . 在代数数论和代数函数论中这样的元素也称作单位 (units).

О. А. Иванова 撰

【补注】短语幺元的除子 (divisor of unity) 或可逆元素 (invertible element) 也用于此概念. 赵春来 译

**单位表示** [unit representation; единичное представление]

群  $G$  的一维表示, 它把  $G$  的每个元素映到 1. 更一般地, 群  $G$  在向量空间  $E$  中的单位表示是把  $G$  的每个元素都映到  $E$  中恒等算子的表示. 单位表示有时也称为平凡表示 (trivial representation).

А. И. Штерн 撰 石生明 译 王杰 校

**单位向量** [unit vector; единичный вектор]



一个向量 (vector), 其长度等于选定尺度的单位.

酉等价算子 [unitarily-equivalent operators; унитарно эквивалентные операторы]

作用在一个 Hilbert 空间上分别具有定义域  $D_A$  和  $D_B$  的两个线性算子  $A$  和  $B$ , 使得: 1)  $UD_A = D_B$ ; 且 2)  $UAU^{-1}x = Bx$  对任何  $x \in D_B$ , 其中  $U$  是一个酉算子 (unitary operator). 如果  $A$  和  $B$  是有界线性算子, 则 1) 可以省略. 如果  $A$  是一个自伴算子 (self-adjoint operator), 则  $B$  也是这样; 如果  $A$  和  $B$  是有界算子, 则  $\|A\| = \|B\|$ .

自伴酉等价算子有酉等价的谱函数, 即  $E_\lambda(B) = UE_\lambda(A)U^{-1}$ . 所以酉等价算子的谱有同样的结构: 或者两者都是纯点谱, 或者两者都是纯连续谱, 或者两者都是混合谱. 特别地, 在纯点谱的情形酉等价算子的本征值是相同的且对应本征值的重数一致; 此外, 对具有纯点谱的酉等价算子这不仅是必要条件而且是充分条件.

在复空间  $L_2(-\infty, \infty)$  中西等价算子对的例子是具有由  $(-\infty, \infty)$  上绝对连续且在这区间上有平方可和导数的所有函数组成的定义域  $D_A$  上的微分算子  $Ax = id x/dt$  和用自变量相乘的算子  $Bx = tx(t)$ . 在这情形实现酉等价的酉算子是 Fourier 变换 (Fourier transform).

#### 参考文献

- [1] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966 (英译本: Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, 1-2, Pitman, 1980).
- [2] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965 (中译本: Л. А. 刘斯铁尔尼克, В. И. 索伯列夫, 泛函分析概念, 第二版, 科学出版社, 1985).
- [3] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, B., Functional analysis, F. Ungar, 1955 (译自法文) (中译本: F. 黎茨, В. 塞克佛尔唯-纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷, 1963, 第二卷, 1980).

В. И. Соболев 撰

【补注】 对非自伴算子, 特征算子函数提供了辨识酉等价算子类的一个工具. 见 [3] 和 [A1].

#### 参考文献

- [A1] Brodskii, M. S., Triangular and Jordan representations of linear operators, Amer. Math. Soc., 1971.
- 葛显良 译 吴绍平 校

酉等价表示 [unitarily-equivalent representations; унитарно эквивалентные представления]

群 (代数, 环, 半群)  $X$  在 Hilbert 空间  $H_1, H_2$  中的表示 (见群的表示 (representation of a group))  $\pi_1, \pi_2$ , 满足条件

$$U\pi_1(x) = \pi_2(x)U,$$

其中  $U$  是  $H_1 \rightarrow H_2$  的某酉算子 (unitary operator), 且上式对所有  $x \in X$  成立. 见交结算子 (intertwining operator).

А. И. Штерн 撰 石生明 译 王杰 校

酉群 [unitary group; унитарная группа], 相对于型  $f$  的

除环  $K$  上  $n$  维右向量空间  $V$  中所有线性变换  $\varphi$  的群  $U_n(K, f)$ ,  $\varphi$  须保持  $V$  中一个固定的非奇异半线性 (对于  $K$  上的对合  $J$ ) 型  $f$ , 即  $\varphi$  满足

$$f(\varphi(v), \varphi(u)) = f(v, u), v, u \in V.$$

酉群是典型群 (classical group). 酉群的特殊情形是辛群 (symplectic group) (这时  $K$  是域,  $J=1$  且  $f$  是交错双线性型 (bilinear form)) 及正交群 (orthogonal group) ( $K$  是域,  $\text{char } K \neq 2$ ,  $J=1$  且  $f$  是对称双线性型). 下面假设  $J \neq 1$  及  $f$  具有性质 (T) (见 Witt 定理 (Witt theorem)). 用适当标量乘以  $f$ , 在不改变酉群的情形下能使  $f$  成为 Hermite 型, 进而改变  $J$  就可使  $f$  成为斜 Hermite 型.

如果排除  $n=2, K=F_4$  的情形, 则  $U_n(K, f)$  中每个元素都可写成至多  $n+1$  个伪反射 (pseudo-reflections) (即固定  $V$  中某非迷向超平面的所有元素的变换) 的乘积.  $U_n(K, f)$  的中心  $Z_n$  由  $V$  的形式为  $x \mapsto x\gamma, \gamma \in K, \gamma^J\gamma = 1$ , 的全部位似所组成.

令  $v$  是型  $f$  的 Witt 指数. 若  $v \neq 0$ , 取  $f$  为斜 Hermite 型是方便的. 令  $T_n(K, f)$  是  $U_n(K, f)$  的由酉平延 (unitary transvection) 所生成的正规子群. 所谓酉平延是形为  $x \mapsto x + a\lambda f(a, x)$  的线性变换, 其中  $a$  是  $V$  中的迷向向量,  $\lambda \in S = \{\gamma \in K | \gamma^J = \gamma\}$ . 群  $T_n(K, f)$  的中心是  $W_n = T_n(K, f) \cap Z_n$ . 当  $K \neq F_4, F_9$  且  $n \geq 2$  时, 商群  $T_n(K, f)/W_n$  是单群. 商群  $U_n(K, f)/T_n(K, f)$  的构造可描述如下. 令  $\Sigma$  是  $K$  的乘法群  $K^*$  的由  $K^* \cap S$  生成的子群, 令  $\Omega$  是  $K^*$  的由具有下面性质的元素  $\lambda \in K^*$  生成的子群: 在  $V$  中存在双曲平面 (hyperbolic plane) (即包含迷向向量的非迷向二维子空间) 使得对正交于给定平面的某向量  $v \in V$  有  $f(v, v) = \lambda - \lambda^J$ . 该子群在  $K^*$  中正规. 令  $[K^*, \Omega]$  是  $K^*$  的由换位子  $\lambda w \lambda^{-1} w^{-1}, \lambda \in K^*, w \in \Omega$ , 生成的子群. 若排除  $n=3, K=F_4$  的情形, 则当  $n \geq 2$  时,  $U_n(K, f)/T_n(K, f)$  同构于  $K^*/\Sigma [K^*, \Omega]$ .

在很多情形下, 群  $T_n(K, f)$  与  $U_n(K, f)$  的换

位子群重合; 例如当  $v \geq 2$  时就是如此. 若  $K$  是交换的且  $n \geq 2$ , 则  $T_n(K, f)$  与 **Dieudonné** 行列式 (见行列式 (determinant)) 等于 1 的所有元素组成的正规子群  $U_n^+(K, f)$  重合 (除去  $n = 3, K = F_4$  的情形). 当除环  $K$  在其中心上是有限维的情形, [1] 研究了  $U_n(K, f)$  和  $T_n(K, f)$  的关系.

现设  $v = 0$ , 则所述的很多结果不再成立 (有酉群的例子, 它有正规子群的无限列, 其因子皆为 Abel 的, 也存在  $n = 2$  的酉群使  $U_n^+(K, f)$  与换位子群不重合, 等等). 研究得最多的是在特征  $\neq 2$  的局部紧的除环和代数数域的情形.

关于酉群自同构的基本结果之一如下 (见 [1]):

若  $\text{char } K \neq 2$  且  $n \geq 3$ , 则酉群  $U_n(K, f)$  的每个自同构具有形式  $\varphi(u) = \chi(u) g u g^{-1}$ ,  $u \in U_n(K, f)$ , 其中  $\chi$  是  $U_n(K, f)$  到中心  $Z_n$  中的同态,  $g$  是  $V$  的酉半相似 (unitary semi-similitude) (即  $V \rightarrow V$  的满足条件  $f(g(x), g(y)) = r_g(f(x, y))^\sigma$  的一一对应的半线性映射 (semi-linear mapping), 其中  $x, y \in V$ ,  $r_g \in K^*$ , 而  $\sigma$  是  $K$  的与  $g$  相应的自同构). 若  $n$  是偶数,  $n \geq 6$ ,  $K$  是特征  $\neq 2$  的域且  $v \geq 1$ , 则  $U_n^+(K, f)$  的每个自同构由  $U_n(K, f)$  的自同构所诱导.

若  $K = \mathbb{C}$ ,  $J$  是复共轭自同构且 Hermite 型  $f$  是正定的, 则酉群  $U_n(K, f)$  用  $U_n$  表示; 它是实的紧连通 Lie 群, 通常简称为酉群. 在型  $f$  是不定的情形, 群  $U_n(\mathbb{C}, f)$  通常称为伪酉 (pseudo-unitary) 群. 适当选取  $V$  的一个基,  $U_n$  与全体酉矩阵 (unitary matrix) 的群等同. 这时群  $U_n^+(K, f)$  称为特殊酉群 (special unitary group) 并记为  $SU_n$ .

#### 参考文献

- [1] Dieudonné, J., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1963.
- [2] Bourbaki, N., Algèbre, Éléments de mathématique, Hermann, 1952 - 1959, Chaps. 7 - 9.
- [3] Dieudonné, J., On the automorphisms of classical groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2 (1951).
- [4] Weyl, H., The classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ. Press, 1946.
- [5] Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie. Sem. S. Lie., 1. Univ. Paris, 1955.
- [6] Залесский, А. Е., «Успехи матем. наук», 36 (1981), 5, 57 - 107. В. Л. Попов 撰

#### 【译注】

#### 参考文献

- [1] 华罗庚, 万哲先, 典型群, 上海科学技术出版社, 1963.
- [2] Wan, Z. X., Some recent progress on classical group in China, *Contemporary mathematics*, 82 (1987), 221 - 230. 石生明 译

#### 酉矩阵 [unitary matrix; унитарная матрица]

复数域  $\mathbb{C}$  上的方阵  $A = \|a_{ik}\|$ , 它的所有行构成一个规范正交系, 即

$$a_{i1}\bar{a}_{k1} + \cdots + a_{in}\bar{a}_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{对于 } i = k, \\ 0 & \text{对于 } i \neq k. \end{cases}$$

$i, k = 1, \cdots, n$ . 在酉空间 (unitary space) 里, 从一个规范正交基到另一个规范正交基的变换是由一个酉矩阵来实现的. 酉变换 (unitary transformation) 关于一个规范正交基的矩阵也是 (称为) 一个酉矩阵. 元素为复数的方阵  $A$  是酉的, 当且仅当它满足下列条件之一:

$$1) A^* A = E;$$

$$2) A A^* = E;$$

$$3) A^* = A^{-1};$$

4)  $A$  的所有列构成一个规范正交系 (这里  $A^*$  是  $A$  的共轭转置矩阵).

酉矩阵的行列式是模为 1 的复数.

О. А. Иванова 撰

#### 【补注】

[A1] Noll, W., Finite dimensional spaces, Nijhoff, 1987, 63.

[A2] Greub, W., Linear algebra, Springer, 1975, 329.

蒋滋梅 译

#### 么模 [unitary module 或 unital module; унитарный модуль], 亦称单式模

含单位元  $e$  的环上的左 (或右) 模 (module)  $M$ , 使得乘以  $e$  的运算是恒等算子, 即变换  $m \rightarrow em$  (相应地, 对右模  $m \rightarrow me$ ),  $m \in M$ , 是群  $M$  的恒等自同构.

О. А. Иванова 撰

【补注】有人把“么模”称为“酉模”, 这会引起混乱, 因为可能认为它是酉向量空间概念的某个模推广, 见酉空间 (unitary space).

一个模是么模的特性往往是包括在模的定义中, 例如见 [A3].

#### 参考文献

[A1] Cohn, P. M., Algebra, Wiley, 1991, 409.

[A2] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 1, v. Nostrand, 1958, 134.

[A3] Matsumura, H., Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 7. 蒋滋梅 译

#### 酉算子 [unitary operator; унитарный оператор]

把赋范线性空间  $X$  映到赋范线性空间  $Y$  上的一个线性算子 (linear operator)  $U$  使得  $\|Ux\|_Y = \|x\|_X$ . 最重要的酉算子是那些映一个 Hilbert 空间到自身上的. 这样一个算子是酉算子, 当且仅当对所有  $x, y \in X$ ,



$(x, y) = (Ux, Uy)$ . 一个酉算子  $U: H \xrightarrow{\pm} H$  的其他特征是: 1)  $U^*U = UU^* = I$ , 即  $U^{-1} = U^*$ ; 和 2)  $U$  的谱在单位圆周上且存在谱分解  $U = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} dE_\varphi$ . 作用在  $H$  上的酉算子的集合构成一个群.

空间  $L_2(-\infty, \infty)$  上的酉算子及其逆的例子是 Fourier 变换 (Fourier transform) 及其逆.

#### 参考文献

- [1] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, B., Functional analysis, F. Ungar, 1955 (译自法文) (中译本: F. 黎茨, B. 塞克佛尔维-纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷, 1963, 第二卷, 1980).
- [2] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966 (英译本: Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, 1, Pitman, 1980).
- [3] Плеснер, А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965 (英译本: Plessner, A. I., Spectral theory of linear operators, F. Ungar, 1965).  
В. И. Соболев 撰 葛显良 译 吴绍平 校

酉表示 [unitary representation; унитарное представление], 拓扑群的

拓扑群通过一个 Hilbert 空间内酉算子 (unitary operator) 的表示. 酉表示论是拓扑群表示论中最为发展的部分之一. 既联系着它的众多的应用又联系着它所具有的很多性质, 使得酉表示的研究变得容易. 就像是, 任意酉表示都是完全可约的; 对于酉表示来说, 完全不可约性, 张量不可约性, 拓扑不可约性, 和算子不可约性这几个条件是等价的; 由酉表示关于弱算子拓扑的连续性推出它关于强算子拓扑的连续性; 对于酉表示可以定义表示的张量积运算和过渡到反变表示的运算 (在 Hilbert 空间内这就是所给表示的复共轭), 并且对于直和运算, 张量积运算和过渡到反变表示运算来说, 很多自然的代数关系仍被保持.

酉表示一般理论中最高度发展和在应用上最为重要的部分就是局部紧群的酉表示. 还不存在对于如下这样群类的描述: 对于这样的群来说, 酉表示 (或不可约酉表示) 分离这个群的点 (1992). 然而, 如果群  $G$  是局部紧的, 则对于每一个非单位元素  $g \in G$ , 存在  $G$  的一个不可约酉表示  $\pi$ , 使得  $\pi(g)$  是表示空间内的非恒等算子 (Гельфанд-Райков定理 (Gel'fand-Raikov theorem)), 再者, 在群代数  $L_1(G)$  的非退化对称表示 (带有左 Haar 测度构造的) 与群  $G$  的连续酉表示之间存在一个自然的一一对应  $\pi' \rightarrow \pi$ , 由以下公式所定义:

$$\pi'(f) = \int_G f(y) \pi(g) dm(g), f \in L_1(G);$$

而且, 代数  $L_1(G)$  的表示  $\pi'$  是拓扑不可约的 (一个商表示, 一个给定类型的表示, 一个与另一表示等价或拟等价的表示), 当且仅当这个群的对应的酉表示  $\pi$  具有同样性质.

一个局部紧群  $G$  的与  $L_1(G)$  上正线性泛函理论有关的循环酉表示理论, 可以通过一个适当的球面函数来研究 (见拓扑群的表示 (representation of a topological group)). 与一个局部紧群  $G$  的酉表示相联系的球面函数 (spherical function) 是这个群上的连续正定函数, 反之,  $G$  上在单位元处等于 1 的任意连续正定函数都是与一个循环酉表示相联系的球面函数 (并且是由这个酉表示的循环向量定义的).  $G$  上一切连续正定函数的线性组合的集合  $B(G)$  形成一个交换 Banach 代数 (关于通常的乘法), 称为  $G$  的 Fourier-Stieltjes 代数 (Fourier-Stieltjes algebra);  $B(G)$  中由形如  $\varphi \cdot \psi$  的函数所生成的闭理想  $A(G)$  称为  $G$  的 Fourier 代数 (Fourier algebra), 这里  $\varphi, \psi \in L_2(G)$ . Banach 代数  $A(G)$  和  $B(G)$  确切到一个同构或反同构范围内确定了群  $G$ .

在  $G$  的单位元处等于 1 的连续正定函数的集合  $P_1$  上, 在  $G$  的紧子集上一致收敛拓扑 (topology of uniform convergence) 与由  $L_1(G)$  和  $L_\infty(G)$  之间的对偶性和  $P_1$  在  $L_\infty(G)$  内的嵌入所定义的弱拓扑 (weak topology) 一致.  $P_1$  内任意函数  $\varphi$  都是一个与  $G$  的不可约酉表示相联系的正定函数的凸组合的网的 (在这个拓扑内的) 极限; 如果  $G$  还是一个可分群, 则在  $G$  上连续正定函数的紧集上存在一个正测度  $\mu_\varphi$ , 其绝对值不超过 1, 集中于  $P_1$  上, 使得

$$\varphi(g) = \int_{P_1} \chi(g) d\mu_\varphi(\chi) \text{ 对一切 } g \in G.$$

由正定函数构造酉表示可以推广到  $G$  上正定测度的情形. 如果  $G$  是一个可分群, 则任意被一个正定测度所定义的表示都是循环的.

令  $G$  是一个局部紧群,  $H$  是一个 Hilbert 空间. 如果  $G$  或  $H$  是可分的, 则  $G$  在  $H$  内的酉表示可以分解成不可约酉表示的拓扑直积分 (对于非可分群和非可分空间来说, 一般不真). 而且, 在这一情形下, 酉表示  $\pi$  容许一个本质上是唯一的被分解成商表示直积分的分解. 联系到这个事实, 对偶空间 (dual space)  $\hat{G}$  ( $G$  的不可约酉表示空间对于酉表示的酉等价所定义的等价的商空间, 连同由在紧集上矩阵元素的一致收敛性所定义的拓扑和从属于这个拓扑的 Borel 结构一起考虑) 和拟对偶空间 (quasi-dual space)  $\tilde{G}$  ( $G$  的商表示空间的商空间, 连同从属于在紧集上矩阵元素的一致收敛性拓扑的 Borel 结构一起考虑) 扮演着重要角色. 这样,  $\tilde{G}$  是一个拓扑空间和一个 Borel



空间,  $\tilde{G}$  是一个 Borel 空间, 对于一个可分群可以配备这个拓扑将这个拓扑开拓到  $\hat{G}$  上. 群  $G$  称为 I 型群 (group of type I), 如果它所有的商表示都是 I 型的; 对于这种群来说, 酉表示论中的问题可以比一般情形更为简单地解决. I 型群包括代数 Lie 群和  $p$ -adic 域上代数 Chevalley 群, 幂零 Lie 群及其他. I 型单连通可解 Lie 群的刻画已经知道. 一个群  $G$  称为一个 CCR 群, 如果对于  $G$  的任意不可约酉表示  $\pi$  来说, 在表示  $\tilde{\pi}$  之下的象  $\tilde{\pi}(L_1(G))$  被包含在表示  $\pi$  的空间  $H_\pi$  的紧算子集合  $BC(H_\pi)$  内. 每一个 CCR 群都是 I 型的. 一个 I 型群是 CCR 群, 当且仅当它的对偶空间是  $T_1$  空间. 幂零 Lie 群和线性半单 Lie 群都是 CCR 群. 对于  $G$  的一切不可约酉表示  $\pi, \sigma$  来说, 表示  $(\pi \otimes \sigma)^\wedge$  的象被包含在  $BC(H_{\pi \otimes \sigma})$  内, 当且仅当所有不可约酉表示是有限维的.

一个可分局部紧群是 I 型的, 当且仅当它的对偶空间满足分离公理  $T_0$ . 这个谱的其他拓扑性质 ( $T_1$  分离性, Hausdorff 性质, 离散性及其他) 也与这个群的性质有联系. 群的拓扑和代数性质与其对偶空间之间的一个特别紧密的联系存在于满足各种紧性条件的群类中. 在局部紧群的这些类中包括: 1) 极大殆周期群类 [MAP] (可以连续地嵌入一个紧群内); 2) 包含一个在内自同构之下不变的单位元的基本邻域组的群类 [SIN]; 3) 具有准紧的共轭元素类的群类 [FC]; 4) 具有准紧的内自同构群的群类 [FIA]; 5) 一切不可约酉表示都是有限维的群类 [FIR]  $\subset$  [MAP]  $\cap$  [SIN]; 6) 对其中心的商群是紧的群类 [Z]  $\subset$  [FIR]. 类 [FC] 的群的对偶空间是 Hausdorff 空间, 而类 [FIR] 的群是离散的, 当且仅当它的对偶空间是紧的 (从而不需要可分). 类 [MAP] 的群的酉表示论与局部紧群上殆周期函数理论有联系.

一个局部紧群  $G$  的酉表示的特征标 (character of a unitary representation) 是在由族  $\pi(G)$  所生成的 von Neumann 代数 (von Neumann algebra)  $\mu_\pi$  的正元素集合上的一一正规半有限迹  $t$  (见  $C^*$  代数上的迹 (trace on a  $C^*$ -algebra)), 使得  $G$  的群  $C^*$  代数  $C^*(G)$  (群代数  $L_1(G)$  的包络  $C^*$  代数) 的这样的元素  $x$  的集合, 对  $x$  来说  $t(\pi(x^*), x)$  是有限的, 过渡到由 von Neumann 代数  $\pi(G)''$  所生成的集合内. 如果  $\pi$  是一个商表示 (或一个不可约酉表示), 则特征标  $t$  在一个拟等价 (相应地, 等价) 范围内唯一地确定这个酉表示  $\pi$ . 如果  $\pi_1, \pi_2$  是  $G$  的不可约酉表示, 分别有特征标  $t_1, t_2$ , 则它们迹的乘积在酉表示  $\pi_1 \otimes \pi_2$  所诱导的 von Neumann 代数上定义一个迹. 如果这个迹是表示  $\pi_1 \otimes \pi_2$  的特征标, 则 (对可分群或可分表示空间来说) 它定义了酉表示  $\pi_1 \otimes \pi_2$  分解成关于在

拟谱群  $\tilde{G}$  上唯一确定的测度 (对于  $\pi_1 \otimes \pi_2$  的 Plancherel 测度) 的带有一个迹的商表示的直积分的分解. 在酉表示的张量积上确定 Plancherel 测度是酉表示论中一般问题之一; 在很多情形下 (特别地, 对于群  $SL(2, \mathbb{C}), SL(2, \mathbb{R})$ , 其他半单 Lie 群的某些酉表示和某些可解 Lie 群) 这个问题已被解决 (利用 Laplace 算子的谱分解, 轨道方法或极限球面方法).

有时把在一个 Hilbert 空间  $H$  内的酉表示  $\pi$  的特征标 (character of a unitary representation) 理解为  $M(G)$  的一个平移不变的子代数  $D_\pi(G)$  上的线性泛函  $\chi^\pi$ , 这个泛函由方程  $\chi^\pi(a) = \text{Tr} \tilde{\pi}(a) (a \in D_\pi(G))$  定义, 这里  $\tilde{\pi}$  是  $D_\pi(G)$  的由  $\pi$  所定义的表示 (假定  $\pi$  是由表示  $\tilde{\pi}$  唯一确定的,  $\tilde{\pi}$  的算子是核算子并且代数  $D_\pi(G)$  到核算子空间内的映射  $\tilde{\pi}$  是连续的). 半单 Lie 群和幂零 Lie 群的不可约酉表示的特征标是由广义函数定义的, 在半单群的情形下是可测的, 并且是局部可积的. I 型可解 Lie 群的不可约酉表示的特征标已被定义, 一般地说, 只在  $G$  上一个具有紧支集的无穷次可微函数代数  $C_0^\infty(G)$  的一个子代数上. 一般来说, 特征标的计算基于诱导表示的特征标公式.

群  $G$  的一个紧子群  $K$  称为丰富的 (rich) (或大的 (massive)), 如果  $G$  的任意酉表示到  $K$  的限制都含有  $K$  的任意酉表示  $\sigma$  有限次. 令  $P_\sigma^\pi$  是由表示  $\pi$  的空间  $H$  到  $K$  的表示所作用的子空间上的射影算子, 它是  $\sigma$  的一个倍数; 形如

$$\varphi_\sigma^\pi(g) = \text{Tr}(P_\sigma^\pi \pi(g)), g \in G$$

的函数称为表示  $\pi$  的  $K$  球面函数 ( $K$ -spherical function) (见表示函数 (representation function)). 具有一个丰富紧子群的群  $G$  是 I 型的;  $G$  的每一不可约酉表示有一个特征标, 并且确切到等价的范围内由任意非零球面函数唯一确定; 群  $G$  的对偶空间  $\hat{G}$  可以表示成可数个 (相交的) 局部紧 Hausdorff 空间的并集 (描述这样的  $\pi \in \hat{G}$ , 它对于一个给定的  $\sigma \in \hat{K}_\pi$  来说有  $\varphi_\sigma^\pi = 0$ , 且对应的射影算子  $P_\sigma^\pi$  的维数有给定的值). 线性半单 Lie 群和 [Z] 群是具有丰富紧子群的群.

令  $\pi$  是群  $G$  在一个 Hilbert 空间  $H$  内的酉表示, 又令  $M_\pi$  是由族  $\pi(G)$  所生成的 von Neumann 代数. 表示  $\pi$  称为迹容许的 (trace-admissible), 如果存在  $M_\pi^+$  上一个迹, 它是  $\pi$  的一个特征标. 群  $G$  上的迹 (trace on the group) 被理解为  $C^*(G)^+$  上一个半有限下半连续迹;  $G$  上一个迹称为  $G$  的一个特征标 (character), 如果对应的  $G$  的酉表示是一个商表示. 在  $G$  的特征标集合, 确定到一个正因子的范围内, 与  $G$  的迹容许的商表示的拟等价类之间存在一个典范一一对应; 而且, 有限型的商表示对应于  $G$  上一



个连续中心正定函数.

局部紧群  $G$  在 Hilbert 空间  $L_2(G)$  内的正则表示 (regular representation) 是一个忠实连续酉表示; 由代数  $L_1(G)$  对应的表示的象所生成的  $C^*$  代数称为群  $G$  的约化  $C^*$  代数 (reduced  $C^*$ -algebra), 并且记作  $C_r^*(G)$ ; 令  $N$  是由这个正则表示所定义的由  $C_r^*(G)$  到  $C_r^*(G)$  上的典范满同态的核. 群  $G$  是顺从的 (amenable), 即在  $L_\infty(G)$  上有一个不变平均值, 当且仅当  $N = \{0\}$  (顺从群在一个 Hilbert 空间内的有界表示与酉表示等价). 这样的酉表示  $\pi \in \hat{G}$  的族, 其相应的  $C_r^*(G)$  的表示的核包含  $N$ , 称为基本系列 (fundamental series). 其余的表示  $\pi \in \hat{G}$  形成补系列 (supplementary series).

令  $G$  是一个 I 型么模可分局部紧群,  $W^*(G)$  是 von Neumann 代数  $\mu_\lambda$ , 这里  $\lambda$  是  $G$  的正则酉表示. 在  $G$  的谱  $\hat{G}$  上存在唯一的正测度  $\hat{\mu}$  它满足条件

$$\int_G |f(g)|^2 d\mu(g) = \int_{\hat{G}} \text{Tr}(\pi(f)\pi(f^*)) d\hat{\mu}(\tilde{\pi}), \quad (*)$$

对一切  $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$ . 测度  $\hat{\mu}$  称为 Plancherel 测度 (Plancherel measure). 再者, 存在空间  $L_2(G)$  到表示  $\pi \in \hat{G}$  的空间内 Hilbert-Schmidt 算子关于测度  $\hat{\mu}$  的直积分上的一个同构, 将左正则酉表示  $\lambda$  变到酉表示的一个直积分内, 这些酉表示都是  $\pi$  的倍数, 并且将  $W^*(G)$  上由  $G$  上的迹  $\varepsilon_e$  所定义的迹 ( $\varepsilon_e(f) = f(e)$  对一切  $f \in K(G)$ ) 变到迹的直积分内. 在  $(\mu \otimes C_1)^+$  上,  $T \otimes 1 \rightarrow \text{Tr } T$ .  $C^*(G)^+$  上的迹  $\varepsilon_e$  与迹  $f \rightarrow \int_{\hat{G}} \text{Tr } \pi(f) d\hat{\mu}(\pi)$  ( $f \in C^*(G)$ ) 重合. 公式 (\*) 称为 Plancherel 公式 (Plancherel formula); 它可以被推广到 I 型非可分么模局部紧群上, 同时也可以推广到非么模可分局部紧群和不是 I 型的可分群上. 酉表示论的任务之一就是对于一个给定的局部紧群明显地构造出一个 Plancherel 测度. 这个问题只是部分地被解决 (例如, 对于半单实 Lie 群, 对于 I 型可解 Lie 群, 以及对于某些运动群, 某些 Chevalley 群, 和某些满足一个紧性条件的群). 正则酉表示的分解和 Plancherel 公式与平方可积表示, 表示的离散系列 (discrete series of representations) 和可积表示 (integrable representation) 理论有联系.

对于局部紧群的不可约酉表示的完全描述还不知道, 即使在 Lie 群的情形也是如此. 只对 I 型可解 Lie 群, 某些可简约 Lie 群, 以及 Chevalley 群 (低维数的), 某些幂零局部紧 Lie 群和某些半直积得到了描述, 在这个描述中起决定性作用的是诱导算子 (和它的一般化); 特别是轨道方法 (orbit method) (和它的一般化). 对于更一般的射影酉表示和带有乘子的

酉表示问题的研究通过 (连续或 Borel) 上同调群的理论 与常酉表示论相联系. 对于不是 I 型的群来说, 对商表示的完全描述 (精确到拟等价的范围内) 还不存在, 虽然对于其中某些群来说, 有限型商表示的描述已经得到.

酉表示论在 (Banach 和拓扑) 群代数上级数理论中担当着基本角色: 在 Wiener 性质和完全对称性的研究中, 在极大单边和双边理想的描述中等等. 酉表示论也在要求利用非酉表示的表示论和调和分析中担当着重要的角色——例如在构造有界系列和补系列中; 在以显式给予算子定义中; 在由酉表示的基系列的解析开拓而来的分裂表示中; 在完全可约表示的纠缠的研究中; 在调和分析在群上函数空间和齐性空间上而不是在空间  $L_2$  上的发展中; 以及在群代数 (测度代数, 代数  $L_1(G)$ , 拓扑代数  $K(G)$ ) 的结构和性质的研究中.

#### 参考文献

- [1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2, изд., М., 1978 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).
- [2] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976 (英译本: Naïmark, M. A. and Shtern, A. I., Theory of group representations, Springer, 1982).
- [3] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本: Naïmark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984).
- [4] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970 (英译本: Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973).
- [5] Желобенко, Д. П., Штерн, А. И., Представления групп Ли, М., 1983.
- [6] Dixmier, J.,  $C^*$ -algebras, North-Holland, 1977 (译自法文).
- [7] Гельфанд, И. М., Граев, М. И., Пятецкий-Шапиро, И. И., Теория представлений и автоморфные функции, М., 1966 (英译本: Gel'fand, I. M., Graev, M. I. and Pyatetskii-Shapiro, I. I., Representation theory and automorphic functions, Saunders, 1969).
- [8] Виленкин, Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965 (英译本: Vilenkin, N. Ya., Special functions and the theory of group, Amer. Math. Soc., 1968).
- [9] Barut, A. and Raczka, R., The theory of group representations and applications, 1-2, PWN, 1977.
- [10] Климык, А. У., Матричные элементы и коэффициенты Клебша-Гордана представлений групп, К., 1979.
- [11] Mackey, G. W., Unitary group representations in

physics, probability and number theory, Benjamin/Cummings, 1978.

[12] Bernat, P. et al., Representations des groupes de Lie résolubles, Dunod, 1972.

[13] Brezin, J., Harmonic analysis on compact solvmanifolds, Springer, 1977.

[14] Carmona, G. and Vergne, M. (eds), Non-commutative harmonic analysis (Marseille, 1978), Lecture notes in math., 728, Springer, 1979.

А. И. Штерн 撰

【补注】关于“球面函数”这个术语的另一用法亦见表示函数 (representation function) 和球面函数 (spherical functions) (条目中的补注)。在[8]和[A1]里,  $G$  的一个子群  $H$  称为坚实的 (massive), 如果  $H$  的平凡表示出现在  $G$  的每一不可约表示中的重数至多是 1. 关于特殊函数作为酉表示的矩阵元素的解释, 见[8], [10] 和 [A1].

#### 参考文献

[A1] Vilenkin, N. Ya. and Klimyk, A. U., Representation of Lie groups and special functions, 1, Kluwer, 1991 (译自俄文). 郝柄新 译

#### 酉空间 [unitary space; унитарное пространство]

一种复数域  $C$  上的向量空间 (vector space), 其上给定了一个内积 (inner product) (这里两个向量  $a$  和  $b$  的积  $(a, b)$  一般是一复数) 满足以下公理:

$$1) (a, b) = \overline{(b, a)};$$

$$2) (\alpha a, b) = \alpha(a, b);$$

$$3) (a + b, c) = (a, c) + (b, c);$$

4) 如果  $a \neq 0$ , 则  $(a, a) > 0$ , 即非零向量的标量平方是一个正实数.

酉空间不必是有限维的. 在酉空间中, 正如在 Euclid 空间中一样, 可以引进正交性和正交规范向量系的概念, 而在有限维情形可以证明正交基的存在性.

О. А. Иванова 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Noll, W., Finite dimensional spaces, Nijhoff, 1987, 338.

[A2] Greub, W., Linear algebra, Springer, 1975, Chapt. XI. 葛显良 译 鲁世杰 校

#### 酉变换 [unitary transformation; унитарное преобразование], 酉映射 (unitary mapping)

酉空间 (unitary space)  $L$  上的一个线性变换 (linear transformation)  $A$ , 它保持向量的内积 (inner product) 不变, 即使得对  $L$  中任意向量  $x$  与  $y$ , 均有等式

$$(Ax, Ay) = (x, y).$$

特别地, 一个酉变换保持向量的长度. 反之, 如果酉空间的一个线性变换保持所有向量的长度, 那么它就是酉变换. 酉变换的本征值的模等于 1; 对应于不同的本征值的本征空间是彼此正交的.

有限维酉空间  $L$  的线性变换  $A$  是酉的, 当且仅当它满足下列条件之一:

1) 变换  $A$  在任意规范正交基下对应于一个酉矩阵 (unitary matrix);

2)  $A$  将任意一个规范正交基映成规范正交基.

3)  $L$  中存在由  $A$  的本征向量组成的一个规范正交基, 并且在这个基下,  $A$  对应一个对角矩阵, 其对角线上各元素的模都等于 1.

给定酉空间的所有酉变换对于变换乘法构成一个群 (称为酉群 (unitary group)). А. Л. Онищик 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Greub, W., Linear algebra, Springer, 1975, p. 338 ff.

蒋滋梅 译

#### 单叶性条件 [univalence conditions 或 conditions for univalence; однолиственности условия]

在复平面  $C$  的区域内的正则 (或亚纯) 函数为单叶的必要充分条件 (见单叶函数 (univalent function)).  $f(z)$  在点  $a$  的一个充分小的邻域内单叶的必要充分条件是  $f'(a) \neq 0$ . 在区域每一点的这种 (局部) 单叶性尚不能保证在区域内的单叶性. 例如, 函数  $e^z$  在圆盘  $|z| \leq R$  内非单叶, 此处  $R > \pi$ , 尽管该函数在平面的每一点均满足局部单叶性条件. 单叶函数的任一性质, 特别是所有单叶函数都满足的任一不等式都是单叶性的必要条件. 下面是关于单叶性的一些必要充分条件.

定理 1. 假定  $f(z)$  在  $z = 0$  的邻域内具有级数展开式

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots, \quad (1)$$

且设

$$\ln \frac{f(t) - f(z)}{t - z} = \sum_{p, q=1}^{\infty} \omega_{p, q} t^p z^q.$$

$a_n$  与  $\omega_{p, q}$  是常数系数. 为使  $f(z)$  在  $E = \{z: |z| < 1\}$  内正则单叶, 其必要充分条件是对于每个正整数  $N$  及一切  $x_p, p = 1, \cdots, N$ , 均满足 Grunsky 不等式 (Grunsky inequalities):

$$\left| \sum_{p, q=1}^N \omega_{p, q} x_p x_q \right| \leq \sum_{p=1}^N \frac{1}{p} |x_p|^2.$$

对于类  $\Sigma(B)$  (在区域  $B \ni \infty$  内亚纯单叶的函数  $F(\zeta) = \zeta + c_0 + c_1/\zeta + \cdots$  所组成的类; 见[2], 亦可见面积原理 (area principle)), 类似的条件成立.



定理 2 设有界区域  $D$  的边界  $l$  是一条 Jordan 曲线, 函数  $f(z)$  在  $D$  内正则, 在闭区域  $\bar{D}$  上连续.  $f(z)$  在  $\bar{D}$  内单叶的必要充分条件是  $f$  把  $l$  双射地映射为某个闭 Jordan 曲线.

关于圆盘  $E$  上的函数 (1) 是到凸域, 或星形区域, 或关于原点的螺线形区域的映上单叶映射的必要充分条件同定理 2 有关, 且可分别叙述如下:

$$\operatorname{Re} \left[ z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] + 1 \geq 0, \operatorname{Re} \left[ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right] \geq 0,$$

$$\operatorname{Re} \left[ e^{i\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} \right] \geq 0.$$

许多单叶性充分条件可用常微分方程 (定理 3) 或偏微分方程 (定理 4) 来描述.

定理 3 圆盘  $E$  内的亚纯函数  $f(z)$  在  $E$  内为单叶, 如果 Schwarz 导数

$$\{f, z\} = \left[ \frac{f''(z)}{f'(z)} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{f''(z)}{f'(z)} \right]^2$$

满足不等式

$$|\{f, z\}| \leq 2S(|z|), |z| < 1.$$

其中控制函数  $S(r)$  非负连续且满足如下条件: a)  $S(r)(1-r^2)^2$  对于  $0 < r < 1$  关于  $r$  非增; b) 对于  $-1 < t < 1$ , 微分方程  $y'' + S(|t|)y = 0$  有解  $y_0(t) > 0$ .

Nehari-Покорный 单叶性条件 (Nehari-Pokornii univalence conditions)

$$|\{f, z\}| \leq \frac{C(\mu)}{(1-|z|^2)^\mu}$$

成为定理 3 的一个特例, 其中

$$C(\mu) = \begin{cases} 2^{3\mu-1} \pi^{2(1-\mu)}, & \text{当 } 0 \leq \mu \leq 1, \\ 2^{3-\mu}, & \text{当 } 1 \leq \mu \leq 2. \end{cases}$$

定理 4 设  $f(z, t)$  是圆盘  $E$  内的正则函数且关于  $t$  连续可微,  $0 \leq t < \infty$ ,  $f(0, t) = 0$ , 并满足 Löwner-Курфарева 方程 (Löwner-Kufarev equation)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = zh(z, t) \frac{\partial f}{\partial z}, \quad 0 < t < \infty, z \in E,$$

其中  $h(z, t)$  在  $E$  内正则, 关于  $t$  连续,  $0 \leq t < \infty$ , 且  $\operatorname{Re} h(z, t) \geq 0$ . 若

$$f(z, t) = a_0(t)f(z) + O(1),$$

其中  $\lim_{t \rightarrow \infty} a_0(t) = \infty$ ,  $O(1)$  是当  $t \rightarrow \infty$  时对每个  $z \in E$  均为有界量,  $f(z)$  是  $E$  上非常数正则函数且具有展开式 (1), 则所有的函数  $f(z, t)$  都单叶, 包括函数  $f(z, 0)$  及  $f(z)$ .

定理 4 蕴含下列特殊的单叶性条件:

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{1}{1-|z|^2},$$

及

$$\operatorname{Re} \left[ e^{i\gamma} \left[ \frac{f(z)}{z} \right]^{\alpha+\beta-1} \frac{f'(z)}{\varphi'^{\alpha}(z)} \right] \geq 0,$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma$  是实数,  $\alpha > 0$ ,  $|\gamma| < \pi/2$ ,  $\varphi(z)$  是正则函数把圆盘  $E$  映射成一个凸域.

函数

$$w = f(z) \quad (2)$$

的单叶性等价于关于  $z$  的方程 (2) 的解的唯一性. 从这个意义上说, 单叶性充分条件可推广到一大类算子方程. 对于这些方程, 条件  $\operatorname{Re}[e^{i\gamma} f'(z)] \geq 0$  尤其可推广到  $n$  维 Euclid 空间的区域中一类实映射.

参考文献

- [1] Лебедев, Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975.
- [2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).
- [3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968.
- [4] Авхадиев, Ф. Г., Аксентьев, Л. А., «Успехи матем. наук», 30 (1975), 4, 3-60.
- [5] Гахов, Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977 (英译本: Gakhov, F. D., Boundary value problems, Pergamon, 1966).
- [6] Тумашев, Г. Г., Нужин, М. Т., Обратные краевые задачи и их приложения, 2 изд., Казань, 1965. Л. А. Аксентьев 撰

【补注】在英文文献中, 有时亦用德文字 “Schlicht” 来代替英文字 “univalence”.

参考文献

- [A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983. 杨维奇 译

单叶性半径 [univalence radius 或 radius of univalence; однолиственности радиус]

在其内所有属于在圆盘  $|z| < 1$  内正则且对于  $|z| < 1$  满足  $|f(z)| \leq M$  的形如

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

的函数族的函数均单叶的最大圆盘  $|z| < \rho$  的半径  $\rho(M)$ . 已证明

$$\rho(M) = M - \sqrt{M^2 - 1}, \quad M \geq 1,$$

且函数

$$Mz \frac{1-Mz}{M-z}$$

在圆盘  $|z| < \rho(M)$  内单叶, 但在任何 (以原点为心的) 更大的圆盘内非单叶. 对于在  $|z| < R$  内正则且满足  $f(0) = 0, f'(0) = c, c \neq 0, |f(z)| \leq M$  的函数, 其单叶性半径  $\rho^*(M)$  可类似定义, 而且其值容易从  $\rho(M)$  得到.

Г. К. АНТОНЮК 撰

【补注】亦可见单叶性条件 (univalence conditions); 单叶函数 (univalent function).

#### 参考文献

- [A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.
- [A2] Goodman, A. W., Univalent functions, 2, Mariner, 1983.
- [A3] Landau, E., Der Picard-Schottkysche Satz und die Blochse Konstanten, Sitzungsber, Akad. Wiss. Berlin Phys. Math. Kl., (1925), 467 - 474.

杨维奇 译

#### 单叶函数 [univalent function; однолиственная функция]

扩充复平面  $\bar{\mathbb{C}}$  的区域  $B$  内的正则或亚纯函数  $f$ , 使得每当  $z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in B$ , 有  $f(z_1) \neq f(z_2)$ , 即  $f$  是从  $B$  到  $\bar{\mathbb{C}}$  内的一一映射. 因而其反函数  $z = f^{-1}(w)$  亦为单叶的. 多叶函数 (multivalent function), 以及更特殊的  $p$  叶函数, 是单叶函数的推广.

在单叶函数研究领域, 基本的问题之一是, 是否存在从给定区域  $B$  到给定区域  $B'$  的单叶映射. 关于这样一个映射的存在性的一个必要条件是  $B$  与  $B'$  的连通性程度相同 (例如可见 [1]). 若  $B$  和  $B'$  都是边界包含多于一点的单连通区域, 则该条件亦是充分的 (见 Riemann 定理 (Riemann theorem)), 且该问题可归结为把给定区域映射成圆盘. 由于这层关系, 在圆盘  $\Delta = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$  上正则单叶, 满足标准化条件  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ , 且具有展开式

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots, z \in \Delta \quad (1)$$

的函数  $f$  所组成的类  $S$ , 在单连通区域单叶函数论中起着特殊的作用.

在多连通区域的情形, 把给定的多连通区域映成典型区域的映射已被人们所研究 (见共形映射 (conformal mapping)). 设  $\Sigma(B)$  是在包含点  $\infty$  的区域  $B$  上亚纯单叶且在  $\infty$  的邻域内具有展开式

$$F(z) = z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots + \alpha_n z^{-n} + \cdots \quad (2)$$

的函数  $F$  所组成的类. 若  $B = \{z \in \bar{\mathbb{C}}: |z| > 1\} = \Delta'$ , 则用  $\Sigma$  表示该类函数.

单叶函数论中有下列基本问题: 1) 研究共形映射下的边界对应 (见边界对应 (共形映射下的)) (boundary correspondence (under conformal mapping)); 极限元 (limit elements); 可达边界点 (attainable boundary point)); 2) 确定单叶性条件 (univalence condi-

tions); 以及 3) 求解函数论中的各种极值问题, 特别是求解某类函数的各种泛函的界限, 及泛函与泛函组的值域的界限或其他 (见下文).

假定  $K$  是某类正则或亚纯函数, 并假定在  $K$  上给定一个复泛函  $w = \varphi(f)$  (或泛函组  $\{\varphi_k(f)\}_{k=1}^n$ ). 类  $K$  上泛函  $\varphi(f)$  的值域 (range of values of the functional) (或泛函组  $\{\varphi_k(f)\}_{k=1}^n$  的值域) 是  $\mathbb{C}$  中点  $w = \varphi(f)$  组成的集合  $D$  (相应地, 是  $n$  维复空间  $\mathbb{C}^n$  中点  $(\varphi_1(f), \cdots, \varphi_n(f))$  的集合) 使得  $f \in K$ . 也考虑实值泛函. 包含  $D$  的任一集合  $D'$  称为泛函的控制域 (majorant domain of the functional) (或泛函组的控制域). 对泛函值域的了解使人们能够把求解一系列极值问题归结为分析中的简单问题. 例如, 若对于泛函  $f(z_0), f \in K(z_0)$  固定不变, 值域  $D$  已知, 则寻求  $|f(z_0)|$  的上下界限的问题归结为寻求  $D$  中离  $w = 0$  最远的点与最接近  $w = 0$  的点.

单叶函数论中第一批重大结果是应用面积原理 (area principle) 获得的. 借助于外面积定理 (1916), L. Bieberbach 得到关于类  $S$  的  $|f(z)|$  与  $|f'(z)|$  的精确上界与下界 (见畸变定理 (distortion theorems), 给出关于类  $S$  的界限  $|c_2| \leq 2$  并猜想对于  $f \in S$  有  $|c_n| \leq n$  (见 Bieberbach 猜想 (Bieberbach conjecture); 系数问题 (coefficient problem)). 他还找到了 Koebe 常数的精确值. 对于凸函数类, 星形函数类, 典型实照等函数类, 函数及其导数的模的界限及其他界限已求得 (见凸函数 (复变量的) (convex function (of a complex variable)); 星形函数 (star-like function); 典型实函数 (typically real function)). 对一系列函数类, 找到了凸性半径 (convexity radius) 与“星形性”半径 (见星形性极限 (limit of star-likeness)).

下面给出单叶函数论的一些基本方法及由这些方法获得的某些结果.

1. 积分表示法. 这一方法使人们能够十分简单地解决函数论中的许多问题, 特别是能用 Stieltjes 积分表示的函数类的极值问题, 如凸函数类, 近于凸函数类, 星形函数类, 典型实照函数类, 及正实部函数类 (见 Carathéodory 类 (Carathéodory class)). 对于可用 Stieltjes 积分表示的函数类建立了一种变分方法, 借此解决了一系列极值问题. 对这些函数类还建立了内变分的方法 (见内变分方法 (internal variations, method of)).

已求得  $S$  的某些子类的凸包 (见 [3]). 特别地, 对每个星形函数  $f$  已证明存在  $[0, 2\pi]$  上的非减函数  $\mu$  使得  $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$  且

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2} d\mu(\theta).$$



亦可见解析函数的积分表示 (integral representation of an analytic function); 单叶函数的参数表示 (parametric representation of univalent functions); 参数表示法 (parametric representation method).

2. 边界积分法. 特别值得一提的是, 借助这一方法已证明  $f \in S$  满足不等式 (见 [1])

$$\left| \frac{z}{f(z)} + c_2 z + 1 - |z|^2 - 2 \frac{E(|z|)}{K(|z|)} \right| \leq 2 \left[ 1 - \frac{E(|z|)}{K(|z|)} \right], |z| < 1,$$

其中  $E$  和  $K$  是完全椭圆积分 (见椭圆积分 (elliptic integral)). 若  $z$  固定 ( $0 < |z| < 1$ ), 则该不等式确定了类  $S$  上泛函  $c_2 z + z/f(z)$  的值域. 已得到畸变定理的较强形式, 并证明了关于类  $\Sigma$  与  $\Sigma(B)$  中的弦畸变的一些定理 (见畸变定理 (distortion theorems) 与 [1]).

亦可见边界积分法 (method of boundary integration); 面积原理 (area principle).

3. 面积方法. 设  $\mathfrak{M}(a_1, \dots, a_n)$  是函数组  $\{f_k(z)\}_{k=1}^n$  组成的类, 该函数组把圆盘  $\Delta = \{|z| < 1\}$  单叶共形地映射成两两不相交的区域  $B_k \ni a_k$  且满足标准化条件  $f_k(0) = a_k$ . 借助于关于类  $\mathfrak{M}(\infty, a_1, \dots, a_n)$  的面积定理已得到如下结果: 1) 若

$$\{f_k\}_{k=1}^n \in \mathfrak{M}(a_1, \dots, a_n), a_k \neq \infty,$$

则

$$\prod_{k=1}^n |f'_k(0)|^{|\gamma_k|^2} \leq \prod_{1 \leq k < l \leq n} |a_k - a_l|^{-2\operatorname{Re}(\gamma_k \bar{\gamma}_l)}, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k = 0;$$

该不等式把先前已知的关于实数  $\gamma_k$  的一个不等式推广到具有复数  $\gamma_k$  的这个类.

2) 若  $\{f_0, f_1\} \in \mathfrak{M}(0, \infty)$ , 则

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_0(e^{it})|^2 dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_1(e^{it})|^{-2} dt \leq 1. \quad (4)$$

对于 **Bieberbach-Eilenberg 函数** (Bieberbach-Eilenberg functions)

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k,$$

即推出不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_1(e^{it})|^2 dt \leq 1; \quad (4')$$

且已确定了 (4) 与 (4') 中等号成立的条件.

应用关于不相重叠区域的面积定理, 已得到关于在闭多连通区域上逼近一正则函数的界限. 这种逼近系通过在区域边界上一致分布的结点处用旋转函数插值给定的函数来实现 (见 [4]). 对于  $F \in \Sigma(B)$ , 其 Schwarz 导数

$$\{F(z), z\} = \left[ \frac{F''(z)}{F'(z)} \right]' - \frac{1}{2} \left[ \frac{F''(z)}{F'(z)} \right]$$

的值域已求得, 并且对于在多连通区域上给定的一些函数类也已求出一系列别的值域 (见 [4], [5]).

4. Löwner 法. K. Löwner 本人 (1923) 找到了关于函数  $f \in S$  的精确界限  $|c_3| \leq 3$  及  $f$  的反函数在  $w=0$  的邻域内的展开式的系数的精确界限. 尤其要指出, 类  $S$  的旋转定理的精确形式是用这一方法得到的 (见旋转定理 (rotation theorems)). 已证明如下定理: 对于  $f \in S$  及给定的  $z \in \Delta$  与  $|f(z)|$ , 有如下不等式:

$$|f'(z)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{1-|z|^2} \left| \frac{f(z)}{z} \right|^2 (1-x^2)^2 \left| \frac{x}{2} \right|^{4x^2/(1-x^2)}, \quad (5)$$

其中  $x, |x| < |z|$ , 由如下条件确定之:

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| (1+x)^2 \left| \frac{z}{x} \right|^{2x/(1+x)} = 1.$$

不等式 (5) 是精确的; 它蕴含关于类  $S$  的如下精确不等式 ( $0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq r < 1$ ):

$$\left. \begin{aligned} |f(re^{i\theta})| + |f(-re^{i\theta})| &\leq \frac{r}{(1-r)^2} + \frac{r}{(1+r)^2}, \\ |f'(re^{i\theta})| + |f'(-re^{i\theta})| &\leq \\ &\leq \frac{1+r}{(1-r)^3} + \frac{1-r}{(1+r)^3}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

借助畸变定理已确认, 当  $\rho > e^{\pi/e} r$  时, 圆周  $|w| = \rho$  被圆盘  $\Delta_r = \{|z| < r < 1\}$  在类  $S$  的函数映射下的象  $B(r)$  所覆盖的线测度的最大值由 Koebe 函数

$$K_\alpha(z) = z(1 - e^{i\alpha} z)^{-2} \in S$$

达到,  $\alpha$  是实数. 类  $S$  的函数的这一性质蕴含着区域  $B(r)$  的面积  $\sigma(r)$  的界限, 函数的平均模的界限以及类  $S$  中的其他界限; 当  $r \rightarrow 1$  时它们都是渐近地精确 (见 [1]).

$S$  及其某个子类上的极值问题可以方便地简化为一个更简单的类上的极值问题 (见 Carathéodory 类 (Carathéodory class)). 其结果可用来求解一些极值

问题, 特别是对于  $f \in S$  寻求泛函组  $\{\ln(f(z)/z), \ln f'(z)\}$  值域的问题 (此处  $z$  固定,  $0 < |z| < 1$ ) (见 [6]).

Löwner 法已被成功地用来研究阶层曲线的性质和解决由有界函数  $f \in S: |f(z)| \leq M, z \in \Delta$ , 所组成的子类  $S_M$  的极值问题 (见 [6]).

亦可见 Löwner 方程 (Löwner equation); Löwner 方法 (Löwner method); 参数表示法 (parametric representation method).

5. 变分方法. 在求解极值问题中, 边界变分与内变分分别导出关于极值区域的边界与极值函数的微分方程. 作为一种规定, 这些方程的左边是二次微分 (quadratic differential). 达到极值的函数的种种定性性质可通过研究相应的二次微分的性质得到. 特别可由此推出, 对于类  $S$  (及其他类) 中大量的极值问题, 其极值函数把圆盘  $\Delta$  映射成具有有限条解析裂纹的全平面. 有时关于极值函数的微分方程可积, 可求得所考虑的极值问题的极值量及其所有的极值函数. 更经常的是只能得到关于极值量的一个或几个方程. 下面列出由变分方法得到的一些结果.

假定  $F \in \Sigma$ ,  $w_k, k = 1, \dots, n, n \geq 2$ , 不属于区域  $\Delta' = \{|z| > 1\}$  在映射  $w = F(z)$  下的象, 且设

$$d_n(F) = \prod_{1 \leq k < l \leq n} |w_k - w_l|.$$

已证明

$$d_3(F) = |(w_1 - w_2)(w_2 - w_3)(w_3 - w_1)| \leq 12\sqrt{3},$$

等号仅对于

$$F(z) = z(1 + e^{i\alpha} z^{-3})^{2/3}$$

时成立, 其中  $\alpha$  是实数 (见 [1]).

已证明 (见 [1]) 对于  $F \in \Sigma$ , 泛函

$$w = \sum_{v, v'=1}^n \gamma_v \gamma_{v'} \ln \frac{F(\zeta_v) - F(\zeta_{v'})}{\zeta_v - \zeta_{v'}}$$

的值域是圆盘

$$|w| \leq -\operatorname{Re} \sum_{v, v'=1}^n \gamma_v \bar{\gamma}_{v'} \ln(1 - \zeta_v^{-1} \bar{\zeta}_{v'}^{-1}),$$

其中  $\gamma_v$  是给定的一组不全为 0 的数,  $\zeta_v$  是在  $\Delta'$  中给定的点.

已研究了在圆盘  $\Delta$  内正则单叶且不取  $\Delta'$  内指定的值  $a_1, \dots, a_n$  的函数  $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots$  所组成的类  $S_a$  中  $|c_n|$  的极值问题,  $n \geq 1$  (见 [1]).

$n = 1$  的特殊情形是确定具有最小容量的连续统的问题 (为考察这一问题及其推广可见 [7]).

已用一种变分的方法对不相重叠的区域的种种问

题作了研究. 例如已考察了类  $\mathfrak{M}(a_1, \dots, a_n)$  中乘积

$$I_n = \prod_{k=1}^n |f'_k(0)|$$

的最大值问题 (见 [1]). 对  $n = 2$  和  $3$ , 已得到乘积

$$\prod_{k=1}^n |f'_k(0)|^{\alpha_k}$$

的一个精确界限, 其中  $\alpha_k$  是任意给定的正数 (见 [1]). 这一问题等价于寻求类  $\mathfrak{M}(a_1, \dots, a_n)$  中泛函组  $(|f_1(0)|, \dots, |f_n(0)|)$  的值域  $D$  的问题.

亦可参看变分原理 (复变函数论中的) (variational principles (in complex function theory)); 单叶函数的变分 (variation of a univalent function); 内变分方法 (internal variations, method of); 边界变分方法 (boundary variations, method of); 变分-参数方法 (variation-parametric method).

6. 极值度量法. 在用极值度量法求解极值问题的过程中, 由某个二次微分  $Q(z)dz^2$  生成的度量起着基本的作用, 这已是一种规律. 这同用变分方法求解该问题的过程中所出现的是同一个二次微分. 作为例子, 下面介绍由该方法得到的两个结果 (见 [1], [7]—[9]).

借助一般系数定理, J. A. Jenkins (1960) 解决了在  $S$  的具有实系数  $c_2, c_3, \dots$  的函数所组成的类  $S_c$  中对圆盘  $\Delta = \{|z| < 1\}$  内固定的  $z$  泛函  $f(z)$  的值域问题. 对于类  $\Sigma$  与  $M$ , 此处  $M$  是在圆盘  $\Delta$  内亚纯单叶且满足  $f(0) = 0, f'(0) = 1$  的函数  $f$  所组成的类, 他搞清楚了开始某几个系数的消失对其后继系数增长的影响.

作为对一般系数定理的补遗已给出当二次微分  $Q(z)dz^2$  没有高于 1 阶的极点时的情形讨论; 此外, 借助于极值度量方法已建立了关于在单连通与二连通区域的单叶共形映射下曲线的覆盖的十分一般的定理, 尤其是包括关于圆盘上亚纯单叶函数的有关区间覆盖的结果的改进, 以及对于圆环的类似结果 (见 [1]).

亦可见 Grötzsch 原理 (Grötzsch principle); Grötzsch 定理 (Grötzsch theorems); 带形法 (解析函数) (strip method (analytic functions)); 二次微分 (quadratic differential); Bieberbach-Eilenberg 函数 (Bieberbach-Eilenberg functions); 极值度量法 (entremal metric, method of the).

7. 对称化方法. 一些不能用别的方法解决的复杂的极值问题已用此方法得到解决, 通常是与其他方法连用解决的. 例如下面的问题就是属于这一类的问题 (见 [1], [7]—[10]). 对于类  $S$  中的函数  $f$ , 圆周  $|w| = R$  上,  $1/4 \leq R < 1$ , 不属于圆盘  $\Delta$  在映射  $w = f(z)$  下的象的那些点所组成的集合的精确上界已



求得. 与极值度量法连用, 已求得当

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots \in S$$

具有给定的  $c_2 = c = \text{常数}$ ,  $0 \leq c \leq 2$ , 且  $|z| = r$  固定不变 ( $0 < r < 1$ ) 时  $|f(z)|$  的精确上界; 不等式 (6) 已被推广到圆周平均  $p$  叶函数

$$f(z) = z^p + c_{p+1} z^{p+1} + \cdots$$

所组成的类 (见多叶函数 (multivalent function)).

用对称化方法已证明: 若  $\varphi$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的非减凸函数, 则对于  $f \in S$  与  $0 < r < 1$  有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\ln |f(re^{it})|) dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\ln |K(re^{it})|) dt,$$

其中  $K(z) = z(1-z)^{-2}$  (见 [11]). 若对于某个  $r$ ,  $0 < r < 1$ , 及某个严格凸函数  $\Phi$  等号成立, 则

$$f(z) = e^{-i\alpha} K(e^{i\alpha} z),$$

其中  $\alpha$  是实数.

关于对称化方法在多连通区域的应用见 [12], [13]. 亦可见对称化方法 (symmetrization method).

#### 参考文献

- [1] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).
- [2] Александров, И. А., Лебедев, Н. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 94 (1968), 79 – 89.
- [3] Brickman, L., MacGregor, T. H. and Wilken, D. R., Convex hulls of some classical families of univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc., 156 (1971), 91 – 107.
- [4] Лебедев, Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975.
- [5] Милин, И. М., Однолистные функции и ортонормированные системы, М., 1971 (英译本: Milin, I. M., Univalent functions and orthonormal systems, Amer. Math. Soc., 1977).
- [6] Александров, И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976.
- [7] Кузьмина, Г. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 139 (1980), 1 – 241.
- [8] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal mappings, Springer, 1958.
- [9] Pommerenke, Ch., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, 1975 (中译本: Ch. 泊茂仁克, 单叶函数, 科学出版社, 1987).
- [10] Hayman, W. K., Multivalent functions, Cambridge Univ. Press, 1958.

[11] Baernstein, A., Integral means, univalent functions and circular symmetrization, Acta Math., 133 (1974), 139 – 169.

[12] Митюк, И. П., «Укр. матем. ж.», 17 (1965), 4, 46 – 54.

[13] Митюк, И. П., «Сиб. матем. ж.», 6 (1965), 6, 1282 – 1291. Н. А. Лебедев 撰

【补注】在英文文献中有时用 “Schlicht function” 代替 “univalent function”.

#### 参考文献

- [A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.
- [A2] Goodman, A. W., Univalent functions, 1 – 2, Mariner, 1983. 杨维奇 译

#### 泛代数 [universal algebra; универсальная алгебра]

一个具有空的关系集的代数系统 (algebraic system). 泛代数常简称为代数. 对于泛代数来说, 以下的同态定理 (homomorphism theorem) 成立: 如果  $\varphi$  是由一个泛代数  $A$  到另一代数  $B$  上的同态,  $\theta$  是  $\varphi$  的核合同, 则  $B$  同构于商代数  $A/\theta$ . 每一个泛代数都可以分解为次直不可约泛代数的次直积.

如果对一个代数  $A$  的基本运算添加一切导出运算, 就得到一个更大表征的泛代数  $\tilde{A}$ . 等式  $\tilde{A} = \tilde{B}$  即使在  $A \neq B$  时也是可能的, 这导致泛代数的有理等价的概念 (见泛代数簇 (variety of universal algebras)).

对于每一个泛代数  $A$  有如下的相关结构 (related structure) 与它关联: 一切自同态的幺半群  $\text{End } A$ , 一切自同构的群  $\text{Aut } A$ , 一切子代数的格  $\text{Sub } A$ , 以及一切合同的格  $\text{Con } A$ . 对于任意群  $G$  和任意代数格 (algebraic lattice)  $U$  和  $C$ , 存在一个泛代数  $A$  使得  $G \cong \text{Aut } A$ ,  $U \cong \text{Sub } A$  和  $C \cong \text{Con } A$  (见 [12]). 然而, 如果以  $\text{End } A$  取代  $\text{Aut } A$ , 则相应的结果不成立. 这种问题称为抽象实现问题 (abstract realization problem) 一个具体实现问题 (concrete realization problem) 的解的例子是: 一个集合  $A$  的子集系统  $U$  与某个以  $A$  为承载集的泛代数的子代数格  $\text{Sub } A$  相重合, 当且仅当  $U$  在直并与任意交之下是闭的 ([11]). 抽象的和具体的实现问题可以对于给定的泛代数类来解. 在相关结构上带有某些限制的泛代数已被研究. 例如, 曾研究过具有分配格或模合同格的泛代数, 具有二元合同格的泛代数 (合同单泛代数 (congruence-simple universal algebra)), 具有一元或二元子代数格的泛代数 (单泛代数 (simple universal algebra)), 具有交换的自同态幺半群的泛代数, 具有一元自同构群的泛代数 (刚性泛代数 (rigid universal algebra)) 等等. 具有交换合同的泛代数同构于有限个合同单代数的直积, 当且仅当它的合同格满足极大条件, 而它的极小合同的最小上界等于最大合同. 具有分配合同格且具

有可换合同的泛代数(算术泛代数(arithmetic universal algebra))可以被表示成适当层的整体截面. 对于被其某些相关结构所确定的泛代数扩展成何种形式的研究已经在做. 然而, 这类的主要结果都与具体的泛代数类有关([9]–[12], [15]).

一个泛代数称为函数完全的(functionally complete), 如果在其承载集上每一个运算都属于由它的基本运算和常量所生成的克隆(clone). 如果不包括常量, 就得到准素(primal)(或严格函数完全(strictly functional complete))泛代数(universal algebras). 如果所有保持合同的运算都在上面所说的克隆内, 就得到一个仿射完全泛代数(affine complete universal algebra). 每一个函数完全泛代数都是有限的. 因此, 有限性的要求常被包括在这些泛代数类的定义中(见[9], [13], [14]).

泛代数的研究开始于 1930 年代和 1940 年代, 当基本定义被陈述出来时, 泛代数簇已被刻画并且次直分解定理已被证明(见[7], [8]). 关于泛代数理论更早的历史要追溯到上一世纪. 在苏联, 对这个领域内活跃的研究开始于 50 年代前期(А. Г. Курош, А. И. Мальцев 和他们的学生们). 数理逻辑方法的应用导致对代数系统的考虑.

“泛代数”这个提法常在“泛代数论”的意义中被用到.

#### 参考文献

- [1] Birkhoff, G., Lattice theory, Amer. Math. Soc., 1967.
- [2] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.
- [3] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973 (中译本: 库洛什, 一般代数学讲义, 上海科学技术出版社, 1962).
- [4] Курош, А. Г., Общая алгебра, Лекции 1969 – 1970 учебного года, М., 1974.
- [5] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., algebraic systems, Springer, 1972 – 1973).
- [6] Скорняков, Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983.
- [7] Birkhoff, G., On the structure of abstract algebras, Proc. Cambridge Phil. Soc., 31 (1935), 433 – 454.
- [8] Birkhoff, G., Subdirect unions in universal algebra, Bull. Amer. Math. Soc., 50 (1944), 764 – 768.
- [9] Grätzer, G., Universal algebra, Springer, 1979.
- [10] Hu, Tah-Kai, Weak products of simple universal algebras, Math. Nachr., 42 (1969), 1 – 3, 157 – 171.
- [11] Jónsson, B., Topics in universal algebra, Springer, 1972.
- [12] Lampe, W. A., The independence of certain related structures of a universal algebra I – III, Algebra Universalis, 2 (1972), 270 – 283; 286 – 295; 296 –

302.

- [13] Pixley, A. F., A survey of interpolation in universal algebra, in B. Csákány, E. Fried and E. T. Schmidt (eds): Universal Algebra (Esztergom, 1977), Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 29, North-Holland, 1982, 583 – 607.
- [14] Werner, H., Discriminator algebras, Akad. Verlag, 1978.
- [15] Wolf, A., Sheaf representations of arithmetic algebras, Mem. Amer. Math. Soc., 148 (1974), 87 – 93.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】在英文里, “泛代数”这个词几乎常指的是“泛代数论”; 单个的泛代数(就像上面正文中所说的那样)简称为“代数”. 亦见代数系统(algebraic system)的补注.

“泛代数”这个词在印刷上第一次出现大概是在文献[A5], 虽然这本书所涉及的近代意义下的泛代数要比数理逻辑少.

代数理论 泛代数由于 F. W. Lawvere 所引入的范畴的表述而被加深和扩展了([A2]). 一个代数理论(algebraic theory)  $T$  被定义为一个对象  $T(1)$  的有限幂  $T(n)$  的范畴(带有  $T(1)$  到  $T(n)$  的特异内射  $i_1, \dots, i_n$ ). 于是, 在一个范畴  $C$  内,  $T$  的一个模型(model), 或一个  $T$  代数( $T$ -algebra), 是一个(反变)函子  $A: T^{op} \rightarrow C$ , 将上幂取到幂.  $A(1)$  是  $A$  的底对象(underlying object). 在集合的范畴内  $T$  的标准模型(standard model)  $Ens$  恰好形成一个代数簇. (这些就是这样的模型  $A$ , 对它们来说,  $A(n)$  是  $A(1)$  的标准  $n$  次幂集.) 在这个簇里, 有限生成的自由代数作成与  $T$  等价的范畴.

$T$  的运算是定义域为  $T(1)$  的态射,  $\alpha: T(1) \rightarrow T(n)$  是一个  $n$  元运算. 一个代数理论可以由生成运算和关系表现出来, 关系是代数等式, 见[A4]. 代数理论的态射或解释(interpretation), 可以由保持定义关系有效性的运算的生成集合的解释来定义. 解释  $T \rightarrow S$  诱导出模型范畴之间的代数函子(algebraic functors)  $Ens^S \rightarrow Ens^T$ ; 例如 Lie 环论在结合环论中的标准解释(将积  $[x, y]$  取作  $xy - yx$ ) 诱导出将每一结合环取它的方括号环的函子. 每一个代数函子都有一个伴随([A2]). (在这个例子里, 这给出包络代数.)

在一个范畴  $C$  内余代数(co-algebra)是  $C^{op}$  内的代数. 典型的代数理论(例如, 群论, 格论)在  $Ens$  内只有平凡上代数, 见[A1].

代数理论概念无约束的无限扩充, 到一个对象  $T(1)$  的一切上幂  $T(\mathbb{N})$  的范畴, 称为簇论(varietal theory), 但有时也称为(如在[A3]里)代数理论; 于是经典的概念成为有限理论(finitary theory). 关于簇论有两种等价的表述, 有些作者(如在[A3]中)取作定义: 作为



Ens 中的三元组和作为标准构造  $(F, U)$ ,  $F: A \rightarrow B$ ,  $U: B \rightarrow A$ , 其中  $A = \text{Ens}$ . (于是  $B$  就是模型范畴  $\text{Ens}^I$ .)

## 参考文献

- [A1] Davis, R. C., Universal coalgebra and categories of transition systems, *Math. Systems Th.*, 4 (1970), 91 – 95.
- [A2] Lawvere, F. W., Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 50 (1963), 869 – 872.
- [A3] Manes, E. G., *Algebraic theories*, Springer, 1976.
- [A4] Wraith, G., *Algebraic theories, Lecture Notes Aarhus Univ.*, 22 (1975).
- [A5] Whitehead, A. N., *A treatise on universal algebra with applications*, Cambridge Univ. Press, 1898.
- [A6] McKenzie, R. N., McNulty, G. F. and Taylor, W. F., *Algebras, lattices, varieties*, 1, Wadsworth, 1987.

郝钢新 译

通用算法 [universal algorithm; универсальный алгоритм], 对一给定算法类的

一个依赖于输入参数  $p$  的算法 (algorithm), 对  $p$  的不同的可允许的值模拟一给定类中任意算法的工作. 可计算性的不同陈述对应于通用算法的概念的不同精细化. 对递归函数 (recursive function) 它是通用部分递归函数 (见通用函数 (universal function)), 对 Turing 机它是通用 Turing 机 (Turing machine), 对正规算法它是通用正规算法 (universal normal algorithm), 等等.

## 参考文献

- [1] Успенский, В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960 (英译本: Uspenskiĭ, V. A., *Leçons sur les fonctions calculables*, Hermann, 1966).
- [2] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965 (英译本: Mal'tsev, A. I., *Algorithms and recursive functions* Wolters-Noordhoff, 1970).
- [3] Rogers, Jr. H., *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw-Hill, 1967.

С. Н. Артемов 撰 杨东屏 译

动力系统中的万有性态 [universal behaviour in dynamical systems; универсальное поведение в динамических системах]

【补注】在 70 年代末, P. Coullet 和 C. Tresser ([A6]) 以及 M. Feigenbaum ([A8]) 独立地发现了在一维动力系统由简单的动力学转到混沌动力学时, 有惊人的、未曾料到的特点出现 (亦见通向混沌的道路 (routes to chaos)). 以二次映射族  $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2$  为例, 这里  $f_\mu$  作用在区间  $x \in [-1, 1]$  上

( $0 \leq \mu \leq 2$ ), 它使人想起周期加倍的场景 (period-doubling scenario). 当  $\mu = 2$  时,  $f_\mu$  有每一个 (最小) 周期的周期点. 令  $\mu_i$  是使  $f_\mu$  具有最小周期  $2^i$  的周期轨道的参数值  $\mu$  之下确界. 于是

$$0 < \mu_0 < \mu_1 < \cdots,$$

而且

$$\sup \mu_i = \mu_\infty \sim 1.401155 \cdots.$$

当  $\mu_i < \mu \leq \mu_{i+1}$  时,  $f_\mu$  的动力学可以用以下三个命题来描述.

i)  $f_\mu$  具有恰好一个 (最小) 周期为  $2^j$  的周期轨道  $\Lambda_j$ ,  $j = 0, 1, \cdots, i$ , 而没有其他周期轨道.

ii)  $\Lambda_i$  的任一对相邻点都被  $\bigcap_{j < i} \Lambda_j$  中的唯一点所分离.

iii) 除了 (可能是可数多个) 轨道与  $\Lambda_j$ ,  $j < i$ , 相接触, 从而停留在  $\Lambda_j$  上以外, 每一个  $f_\mu$  轨道均渐近地趋向  $\Lambda_j$ .

对于  $\mu = \mu_\infty$  (这时  $f_\mu$  有时亦称为 Feigenbaum 映射 (Feigenbaum mapping)), 命题 i) 成立而  $j$  可取一切非负整数值, ii) 也对每个  $i = 0, 1, \cdots$  成立; 此外, 下面与 iii) 相类似的命题也成立:

iv) (当  $\mu = \mu_\infty$  时)  $f_\mu$  之图象的扭转点  $x = 0$  之轨道的闭包是一个 Cantor 集  $\Lambda_\infty$ , 而每一个不与任何周期轨道  $\Lambda_i$ ,  $i = 0, 1, \cdots$ , 相接触的轨道均以  $\Lambda_\infty$  为渐近极限. 映射  $f_\mu$  的限制  $f_\mu|_{\Lambda_\infty}$  是最小同胚 (即“加法机” (adding machine)).

最后,  $\mu = \mu_\infty$  是“混沌”在以下意义下的阈值:

v)  $\mu > \mu_\infty$  时  $f_\mu$  有无穷多不同的周期轨道以及正的拓扑熵.

这类“拓扑的”或组合的图象的许多特点, 已为这个领域的许多早期研究者所了解, 具体说来有 P. J. Myrberg ([A12]) 和 N. Metropolis, M. L. Stein 和 P. R. Stein ([A13]). 他们也认识到周期轨道  $\Lambda_j$  的组合构造是由  $f_\mu$  为单模的这一事实严格地决定了 (见 [A14]). 从本质上说, 上述的命题可以对任一族单模映射提出 (见 [A9]). 事实上,  $\mu_i$  的 (弱) 单调性, 还有以下事实, 即若  $\mu < \mu_\infty$ ,  $f_\mu$  必有最小周期  $2^j$  的周期轨道存在, 这里  $j = 0, 1, \cdots$  直到某个  $i$ , 而且再也没有其他周期轨道, 对于任何一族直线上的连续映射, 均可从 Шарковский定理 (Sharkovskii theorem) 推出 ([A16], [A2]); 最近的工作, 还对一维连续映射的周期轨道的组合构造提供了更一般的了解 (见 [A1]).

Coullet, Tresser 和 Feigenbaum 对上述的拓扑特性还加上了一些分析和数值的特性:

vi)  $\mu_i \uparrow \mu_\infty$  的收敛性是渐近几何级数形的:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_\infty - \mu_i}{\mu_\infty - \mu_{i+1}} = \delta \sim 4.669 \dots;$$

vii) 周期轨道是成比例的: 用  $\Lambda_i^*$  表示  $\mu = \mu_{i+1}$  时的轨道  $\Lambda_i$ ; 则

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(0, \Lambda_i^*)}{\text{dist}(0, \Lambda_{i+1}^*)} = \alpha \sim 2.5029 \dots.$$

这些命题是对二次映射的特殊族  $f_\mu$  提出的, 在技巧上虽然有趣, 却并不那么令人吃惊. 然而, 他们发现了, v) - vii) 对很广泛一类单模的单参数族也成立, 只要满足很平凡的“满”条件 (本质上就是  $f_0$  只有有限多个周期轨道, 而  $f_2$  有正熵) 以及一些光滑性条件 (本质上就是  $(x, \mu) \rightarrow f_\mu(x)$  为  $C^2$  而每一个  $f_\mu$  均有一个非退化临界点). 轰动的是常数  $\delta$  和  $\alpha$  对一切族  $f_\mu$  都是一样的.

在 [A6] 和 [A8] 中用来自重正化理论中的思想把这些断言归结成为关于作用于适当的函数空间上的加倍算子 (doubling operator)  $\mathcal{O}$  的技术性的猜想. O. Lanford 在 [A11] 中对下述基本的猜想给出了一个严格的、计算机辅助的证明, 即  $\mathcal{O}$  有一个鞍点型的不动点, 且有一个特征乘子  $\delta \sim 4.669 \dots$  (与 vi) 一样) 还有一个余维数 1 的稳定流形 (亦见 [A3], [A5]). D. Sullivan ([A17]) 证明了这个不动点在“二次形状”映射的空间中的唯一性. 关于稳定流形和某个分岐子流形横截这个最后的猜想仍未得证. 最近, Sullivan ([A8]) 引入了一些新思想, 绕过了这个困难, 对于  $C^2$  单模映射族的万有性态给出了一个相当完整的理论. 特别是关于 Cantor 集  $\Lambda_\infty$  和出现在参数的其他“阈”值 (即“有界型无限可重正化映射”) 时的类似集合的渐近几何性态都是万有的; 例如集合  $\Lambda_\infty$  的 Hausdorff 维数 (Hausdorff dimension) 项为 0.538045. [A18] 和 [A7] 中有这个理论的完整的叙述.

这些思想也已用于圆周的微分同胚 ([A10], [A15]) 和保面积平面微分同胚上 ([A4], [A15]).

#### 参考文献

- [A1] Alsedà, L., Llibre, J. and Misiurewicz, M., Combinatorial dynamics and entropy in one dimension, to appear.
- [A2] Block, L., Guckenheimer, J., Misiurewicz, M. and Young, L.-S., Periodic points and topological entropy of one dimensional maps, Lecture notes in math., 819, Springer, 1980, 18 - 34.
- [A3] Campanino, M., Epstein, H. and Ruelle, D., On the existence of Feigenbaum's fixed points, *Comm. Math. Phys.*, **79** (1981), 261 - 302.
- [A4] Collet, P., Eckmann, J.-P. and Koch, H., On universality for area-preserving maps of the plane, *Physica*, **3D** (1981), 457 - 467.
- [A5] Collet, P., Eckmann, J.-P. and Lanford, O., Universal properties of maps on an interval, *Comm. Math. Phys.*, **76** (1980), 211 - 254.
- [A6] Coullet, P. and Tresser, C., Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation, *J. Phys.*, **C5** (1978), 25 - 28.
- [A7] Mello, W. de and Strien, S. van, One-dimensional dynamics, to appear.
- [A8A] Feigenbaum, M., Quantitative universality for a class of non-linear transformations, *J. Stat. Phys.*, **19** (1978), 25 - 52.
- [A8B] Feigenbaum, M., The universal metric properties of a non-linear transformation, *J. Stat. Phys.*, **21** (1979), 669 - 706.
- [A9A] Jonker, L. and Rand, D., Bifurcations in one dimension, *Invent. Math.*, **62** (1981), 347 - 365.
- [A9B] Jonker, L. and Rand, D., Bifurcations in one dimension, *Invent. Math.*, **63** (1981), 1 - 16.
- [A10] Jonker, L. and Rand, D., Universal properties of maps of the circle with  $\varepsilon$ -singularities, *Comm. Math. Phys.*, **90** (1983), 273 - 292.
- [A11A] Lanford, O., A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **6** (1982), 427 - 434.
- [A11B] Lanford, O., Computer assisted proofs in analysis, in A. M. Gleason (ed.), *Proc. Internat. Congress of Mathem. (Berkeley 1986)*, Amer. Math. Soc., 1987, 1385 - 1394.
- [A12] Myrberg, P. J., Sur l'itération des polynômes réels quadratiques, *J. Math. Pures Appl.*, **41** (1962), 339 - 351.
- [A13] Metropolis, N., Stein, M. L. and Stein, P. R., On finite limit sets for transformations on the unit interval, *J. Comb. Theory*, **15A** (1973), 25 - 44.
- [A14] Milnor, J. and Thurston, W., On iterated maps of the interval, in J. C. Alexander (ed.), *Dynamical Systems (Proc. Maryland, 1986 - 7)*, Lecture notes in math., Vol. 1342, Springer, 1988, 465 - 563.
- [A15A] Rand, D., Universality and renormalization in dynamical systems, in T. Bedford and J. W. Swift (eds.), *New Directions in Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, 1987, 1 - 56.
- [A15B] Rand, D., Global phase space universality, smooth conjugacies and renormalization; the  $C^{1+\alpha}$  case, *Nonlinearity*, **1** (1988), 181 - 202.
- [A16] Sharkovskii, A. N., Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself, *Ukrain. Mat. Zh.*, **16** (1964), 61 - 71 (俄文).
- [A17] Sullivan, D., Quasiconformal homeomorphisms in dynamics, topology and geometry, in A. M. Gleason (ed.), *Proc. Internat. Congress Mathem. (Berkeley, 1986)*, Amer. Math. Soc., 1987, 1216 - 1228.
- [A18] Sullivan, D., Bounds, quadratic differentials, and renormalization conjectures, *Centennial Publ.*, **2**,



Amer. Math. Soc., 1991.

Z. Nitecki 撰 齐民友 译

万有覆盖 [universal covering; универсальное накрытие]

一个覆盖 (covering), 每个另外的覆盖都是从属于它的.

M. И. Войцеховский 撰

【补注】空间  $Y$  的一个覆盖  $p: X \rightarrow Y$  从属于覆盖  $p': X' \rightarrow Y$ , 如果存在一个覆盖  $f: X' \rightarrow X$  使得  $p' = pf$ .

徐森林 译

泛包络代数 [universal enveloping algebra; универсальная обертывающая алгебра], 交换环  $k$  上 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  的含单位元的

含单位元的结合  $k$  代数  $U(\mathfrak{g})$ , 连同映射  $\sigma: \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ , 使得下列性质成立: 1)  $\sigma$  是 Lie 代数的同态, 即  $\sigma$  是  $k$  线性的, 并且  $\sigma([x, y]) = \sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x)$ ,  $x, y \in \mathfrak{g}$ ; 2) 对每个具有单位元的结合  $k$  代数  $A$  和每个使得  $\alpha([x, y]) = \alpha(x)\alpha(y) - \alpha(y)\alpha(x)$  ( $x, y \in \mathfrak{g}$ ) 成立的  $k$  线性映射  $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow A$ , 存在唯一的结合代数同态  $\beta: U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ , 使得  $\alpha = \beta \circ \sigma$ , 并将单位元映到单位元. 泛包络代数在同构下是唯一的, 并且总是存在的: 若  $T(\mathfrak{g})$  是  $k$  模  $\mathfrak{g}$  的张量代数 (tensor algebra),  $I$  是由所有形如  $[x, y] - x \otimes y + y \otimes x$  ( $x, y \in \mathfrak{g}$ ) 的元素生成的双边理想,  $\sigma: \mathfrak{g} \rightarrow T(\mathfrak{g})/I$  是典范映射, 则  $T(\mathfrak{g})/I$  是  $\mathfrak{g}$  的泛包络代数.

若  $k$  是 Noether 的, 并且模  $\mathfrak{g}$  是有限阶的, 则代数  $U(\mathfrak{g})$  是左和右 Noether 的. 若  $\mathfrak{g}$  是整环  $k$  上的自由模, 则  $U(\mathfrak{g})$  没有零因子. 对域  $k$  上的任何有限维 Lie 代数  $\mathfrak{g}$ , 代数  $U(\mathfrak{g})$  满足 Ore 条件 (见半群的嵌入 (imbedding of semi-groups)), 因而有一个分式除环.

若  $V$  是任意  $k$  模, 则每个 Lie 代数同态  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{End } V$  可扩充为结合代数的同态  $U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End } V$ . 这建立了  $\mathfrak{g}$  模范畴和左  $U(\mathfrak{g})$  模范畴的一个同构, 这一同构的存在性构成泛包络代数在 Lie 代数表示论中应用的基础 (见 [3], [4]).

Lie 代数  $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n$  的直积的泛包络代数是代数  $U(\mathfrak{g}_i)$  的张量积. 若  $\mathfrak{h}$  是  $\mathfrak{g}$  的子代数,  $\mathfrak{h}$  和  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  是自由  $k$  模, 则典范同态  $U(\mathfrak{h}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$  是嵌入. 若  $k'$  是域  $k$  的扩张, 则  $U(\mathfrak{g} \otimes_k k') = U(\mathfrak{g}) \otimes_k k'$ . 泛包络代数有一个典范滤过  $U_0(\mathfrak{g}) \subset U_1(\mathfrak{g}) \subset \dots$ , 这里  $U_0(\mathfrak{g}) = k \cdot 1$ , 当  $n > 0$  时,  $U_n(\mathfrak{g})$  是  $U(\mathfrak{g})$  的由积  $\sigma(x_1) \cdots \sigma(x_m)$  生成的  $k$  子模, 这里  $m \leq n$ , 对所有  $i, x_i \in \mathfrak{g}$ . 同这一滤过相伴的分次代数  $\text{gr } U(\mathfrak{g})$  是交换的, 并且由自然同态  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{gr } U(\mathfrak{g})$  下的象所生成; 这个映射确定了  $k$  模  $\mathfrak{g}$  的对

称代数 (symmetric algebra)  $S(\mathfrak{g})$  到  $\text{gr } U(\mathfrak{g})$  上的一个同态  $\delta$ . 根据 Poincaré-Birkhoff-Witt 定理 (Poincaré-Birkhoff-Witt theorem), 当  $\mathfrak{g}$  是自由  $k$  模时,  $\delta: S(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr } U(\mathfrak{g})$  是代数同构. 以下是一个等价形式: 若  $I$  是一个全序集,  $\{x_i\}_{i \in I}$  是  $k$  模  $\mathfrak{g}$  的一组基, 则单项式  $\sigma(x_{i_1}) \cdots \sigma(x_{i_n})$  ( $i_1 \leq \dots \leq i_n, n \geq 0$ ) 构成  $k$  模  $U(\mathfrak{g})$  的一组基 (特别地,  $\sigma$  是单射).

设  $Z(\mathfrak{g})$  是  $U(\mathfrak{g})$  的中心, 则对特征为零的域上的任何有限维 Lie 代数  $\mathfrak{g}$ ,  $\text{gr } Z(\mathfrak{g}) \subset \text{gr } U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$  由  $S(\mathfrak{g})$  的  $G$  不变元子代数组成. 若  $\mathfrak{g}$  是半单的, 则  $Z(\mathfrak{g})$  是在  $\text{rk } \mathfrak{g}$  个变量上的多项式代数.

泛包络代数的一个重要研究方向是研究本原理想 (primitive ideal) (见 [3]).

## 参考文献

- [1] Bourbaki, N., Lie groups and Lie algebras, Elements of mathematics, Addison-Wesley, 1975, Chaps. 1-3 (译自法文).
- [2] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Éléments de mathématique, Hermann, 1975, Chaps. 7-8.
- [3] Dixmier, J., Enveloping algebras, North-Holland, 1977 (译自法文).
- [4] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).
- [5] Гельфанд, И. М., «Матем. сб.», 26 (1950), 103-112.
- [6] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965.

В. Л. Попов 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Jantzen, J. C., Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie Algebren, Springer, 1983.

蔡传仁 译

通用函数 [universal function; универсальная функция], 对一给定的类型为  $\mathbf{N}^n \rightarrow \mathbf{N}$  的函数的 (可数的) 类  $K$  的

一个类型为  $\mathbf{N}^{n+1} \rightarrow \mathbf{N}$  的函数  $F(y, x_1, \dots, x_n)$ , 使得对任意函数  $f(x_1, \dots, x_n) \in K$  有一  $i \in \mathbf{N}$  使下式成立

$$f(x_1, \dots, x_n) = F(i, x_1, \dots, x_n), \quad (*)$$

其中  $\mathbf{N}$  是自然数集且  $(*)$  的意思是函数  $f(x_1, \dots, x_n)$  和  $F(i, x_1, \dots, x_n)$  有相同的定义域, 且有定义时值相同. 有时通用函数定义还要求对每个  $i \in \mathbf{N}$ ,  $F(i, x_1, \dots, x_n)$  在  $K$  之中 (见 [4]). 有一些通用函数定义的其他变型 (见 [1], [2]).

对每个可数的函数类, 通用函数是存在的. 如下的通用函数在算法理论中起着重要作用: 1) 对一切  $n$

( $n \geq 0$ ) 元部分递归函数 (partial recursive function) 类的通用部分递归函数 (universal partial recursive functions); 对一切  $n$  元原始递归函数 (primitive recursive function) 类的通用一般递归函数 (universal general recursive functions).

若函数  $\psi(y, x)$  是一切一元部分递归函数类的通用函数, 那么它不可能扩张为一个全递归函数, 且集合  $\{x | \psi(x, x) \text{ 有定义}\}$  是一个自然数的递归可枚举但非递归的集合之例 (亦见可枚举集 (enumerable set)).

#### 参考文献

- [1] Peter, R., Recursive functions, Acad. Press, 1967 (译自德文).
- [2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951.
- [3] Успенский, В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960 (英译本: Uspenskiĭ, V. A., Leçons sur les fonctions calculables Hermann, 1966).
- [4] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions Wolters-Noordhoff, 1970).

С. Н. Артемов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Rogers, Jr. H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

杨东屏 译

### 通用正规算法 [universal normal algorithm; универсальный нормальный алгоритм]

一个正规算法 (normal algorithm)  $\mathfrak{A}$ , 它在一种意义上 (下面精确地说明) 将任何在字母表  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  上的正规算法的工作模型化. 一个正规的在字母表  $B \supset A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  (其中  $A$  不含有  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ) 上的算法称为是对  $A$  通用的, 如果对每一个  $A$  上的正规算法  $\mathfrak{U}$  和任意  $A$  上的字  $P$

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{U}'\delta P) \simeq \mathfrak{U}(P).$$

这里  $\mathfrak{U}'$  是正规算法  $\mathfrak{U}$  的一个表示 (见算法的表示 (algorithm, representation of an)),  $B$  中的符号  $\delta$  起分隔记号的作用. 通用正规算法的存在性是由 Марков 所证明的 (见 [1]). 一个通用正规算法的重要特征是它的复杂性 (complexity), 也就是说它的表示的长度 (亦见算法的描述复杂性 (algorithm complexity of description of an)). 一个具有最小复杂性的通用正规算法作为一个  $n$  的函数 ( $n$  是字母表  $A$  中字母的个数) 曾被求得, 它同  $5n + C$  的上界和下界只差一个可加常数 (见 [2]).

#### 参考文献

- [1] Марков, А. А., Теория алгоритмов, М.-Л.,

1954 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 42).

- [2] Жаров В. Г., О сложности универсального нормального алгоритма, в сб., Теория алгоритмов и математическая логика, М., 1974, 34 – 54.

С. Н. Артемов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Markov, A. A. and Nagornyi, N. M., The theory of algorithms, Kluwer, 1988, Chapt. V (译自俄文).

罗里波 译 王世强 校

### 泛问题 [universal problems; универсальные проблемы]

【补注】范畴 (category) 论中的一个概念. 令  $\mathcal{C}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  是范畴  $\mathcal{C}$  和  $\mathcal{D}$  之间的一个函子 (functor), 令  $D \in \mathcal{D}$ . 由这一体系定义的泛问题要求去寻找  $D$  在  $\mathcal{C}$  中的“最好的逼近”, 即由对象  $C \in \mathcal{C}$  和  $\mathcal{D}$  中的态射  $l: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}(C)$  组成的泛解  $(C, l)$ , 使得任取对象  $C' \in \mathcal{C}$  及态射  $f: D \rightarrow \mathcal{C}(C')$ , 存在唯一的态射  $g: C \rightarrow C'$ , 使图形

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{l} & \mathcal{C}(C) \\ & \searrow f & \downarrow \mathcal{C}(g) \\ & & \mathcal{C}(C') \end{array}$$

可交换.

泛解存在, 当且仅当函子  $\mathcal{C}(D, \mathcal{C} -): \mathcal{D} \rightarrow \text{Sets}$  是可表示的 (由  $C$  表示, 见可表示函子 (representable functor)). 对  $D$  的任意选择均有泛解, 当且仅当函子  $\mathcal{C}$  有左伴随函子 (adjoint functor)  $\mathcal{F}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ . 泛问题的泛解在同构意义下唯一.

例. 1) 若  $\mathcal{C}$  是从一个代数的范畴 (如结合代数, 交换结合代数, Lie 代数, 向量空间, 群) 到集范畴的底 (或遗忘) 函子, 则对任意集合  $X$ , 泛解是  $X$  上的自由代数 (free algebra).

2) 令  $\mathcal{C}$  是将每一个有 1 的结合代数  $A$  对应到 Lie 代数  $\text{Lie}(A)$  的函子, 其中  $[a, b] = ab - ba$ , 则对一个 Lie 代数  $\mathfrak{g}$ , 泛解是  $\mathfrak{g}$  的泛包络代数 (universal enveloping algebra)  $U(\mathfrak{g})$ .

3) 对于从交换群范畴到群范畴的嵌入函子  $\mathcal{C}: \text{comm. Groups} \rightarrow \text{Groups}$  及任意群  $G$ , 泛解是  $G$  的换位子商群 (commutator factor group) (见换位子群 (commutator subgroup)).

4) 一般来说, 代数范畴间的每一个底 (遗忘) 函子  $\mathcal{C}$  对应的泛问题均有泛解, 即这种函子  $\mathcal{C}$  的相对自由对象 (relatively free objects) 存在.

5) 令  $\mathcal{C}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  是对角函子,  $(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ , 泛问题可陈述如下: 找到  $\mathcal{C}$  中的一个对象  $C = A \sqcup B$  和  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  中的一对态射  $(l_A: A \rightarrow C, l_B: B \rightarrow C)$ , 使得任取对象  $C' \in \mathcal{C}$ , 任取态射对  $(f_A: A$



$\rightarrow C', f_B: B \rightarrow C'$ ), 存在唯一的态射  $f: C \rightarrow C'$ , 使图形

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{I_A} & C & \xleftarrow{I_B} & B \\ & \searrow f_A & \downarrow f & \swarrow f_B & \\ & & C' & & \end{array}$$

是交换的. 泛解是  $A$  和  $B$  的余积 (coproduct).

6) 考虑对偶情况, 即用对偶于  $\mathcal{C}$  和  $\mathcal{D}$  的范畴, 可以得到对偶概念. 令  $\mathcal{G}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  是对角函子,  $(A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ , 对偶泛问题的泛解是  $A$  和  $B$  的 (范畴) 积 (product)  $A \times B$ .

7) 一般来说, 极限 (limits) 和上极限 (colimits) 均可由适当的泛问题的泛解得到.

#### 参考文献

- [A1] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971.  
[A2] Parigis, B., Categories and functors, Acad. Press, 1970. B. Parigis 撰 张英伯 译

#### 泛性质 [universal property; универсальное свойство]

【补注】范畴 (category) 中对象的一种性质, 可刻画为定义于范畴上的某个 (共变或反变) 集值函子 (functor) 的表示对象. 更形式地, 令  $\mathcal{C}$  是一个范畴,  $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  是一个函子 (为确定起见, 此处仅处理共变函子), 则  $F$  的泛元 (universal element) 是一个对  $(A, x)$ , 其中  $A$  是  $\mathcal{C}$  的对象,  $x \in F(A)$ , 使得对每个其他的这种对  $(B, y)$ , 存在  $\mathcal{C}$  中唯一的态射  $f: A \rightarrow B$ , 满足  $F(f)(x) = y$ .  $y$  和  $f$  间的对应定义了  $F$  和函子  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$  间的自然同构; 对象  $A$  叫作函子  $F$  的表示对象 (representing object) 或表示 (representation). 其泛性质由泛元  $x$  体现.

例. 1) 在任意范畴  $\mathcal{C}$  中, (范畴) 积  $A \times B$  的泛性质由投射对  $(p: A \times B \rightarrow A, q: A \times B \rightarrow B)$  体现; 即  $(A \times B, (p, q))$  是一个 (反变) 函子的泛元, 该函子使对象  $C$  对应由所有态射对  $(f: C \rightarrow A, g: C \rightarrow B)$  组成的集合.

2) 在交换环  $R$  的模范畴中, 张量积  $M \otimes_R N$  的泛性质由双线性映射  $M \times N \rightarrow M \otimes_R N$  体现; 即  $M \otimes_R N$  是将模  $P$  送到双线性映射集  $M \times N \rightarrow P$  的共变函子的表示对象.

体现了给定泛性质的对象由适当范畴中的典范同构唯一确定. 通过泛性质刻画对象的想法是由 S. MacLane 最先提出来的 ([A1]).

#### 参考文献

- [A1] MacLane, S., Duality for groups, Bull. Amer. Math. Soc., 56 (1950), 485 - 516.  
P. T. Johnstone 撰 张英伯 译

全称量词 [universal quantifier 或 universal quantor;

всеобщности квантор]

一个逻辑算子, 用来形成“对于所有  $x$ ”的表示式所组成的命题. 在形式语言中全称量词最常见的表示式记作  $\forall x$ ,  $(\forall x)$ , 或者  $(x)$ , 也可以用记号  $(Ax)$ ,  $\bigwedge_x$ ,  $\bigcap_x$ ,  $\prod_x$  等.

В. Е. Плиско 撰

【补注】亦见量词 (quantifier).

罗里波 译 王世强 校

#### 通用级数 [universal series; универсальный ряд]

一种函数级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x), x \in [a, b], \quad (1)$$

借助于该级数, 一个给定函数类中的所有函数都可以用某种方式来表示. 例如, 存在这样的级数 (1), 使得对每个  $[a, b]$  上的连续函数  $f$ , 均可找到该级数的部分和子序列  $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x)$ , 它在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f(x)$ .

存在三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix + b_i \sin ix), \quad (2)$$

其中系数趋于零, 使得对每个在  $[0, 2\pi]$  上 (Lebesgue) 可测的函数  $f$ , 均有级数 (2) 的部分和子序列几乎处处收敛于  $f(x)$ .

称上述级数关于部分和子序列为通用的. 还可以考虑通用级数的其他定义. 例如, 关于子级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{i_k}(x)$  为通用的级数 (1), 或关于 (1) 的各项置换为通用的级数 (1).

#### 参考文献

- [1] Alexits, G., Convergence problems of orthogonal series, Pergamon, 1961 (译自德文).  
[2] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bari, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).  
[3] Талалян, А. А., «Успехи матем. наук», 15 (1960), 5, 77 - 141.

С. А. Теляковский 撰 王仁宏、檀结庆 译

#### 通用集 [universal set; универсальное множество], 全域 (universe), 亦称全集或泛集

一个固定于给定的基本理论框架之内并且含有在这个理论中所考虑的全体对象作为成员的集合. 例如在初等算术理论中通用集就是全体整自然数所成的集合. 通用集在集合论 (set theory) 中扮演了一个基本的角色. 在这里所研究的对象是集合, 所以通用集是所有集合的总体; 可是这个总体本身就不再是集合了, 也就是说它不再能被考虑成为集合论的一个对象. 从这一点产生了与所有集合的集合的概念有关的

悖论 (见 Cantor 悖论 (antinomy)).

全体集合的集合是集合与类的理论的研究对象. 在这个理论中与集合同时考虑的还有 (真) 类 —— 一些不可能作为其他集合或类的成员的对象.

#### 参考文献

- [1] Kleene, S. C., Mathematical logic, Wiley, 1967.
- [2] Fraenkel, A. A., and Bar-Hillel, Y., Foundations of set theory, North-Holland, 1958.

В. Е. Плиско 撰

【补注】亦见类型论 (types, theory of); 底集 (universe).

罗里波 译 王世强 校

万有空间 [universal space; универсальное пространство]

含有确定类中任意拓扑空间同胚象的拓扑空间 (topological space). 例如: 1)  $C[0, 1]$ , 见 Banach 空间 (Banach space); 2) Hilbert 立方体 (Hilbert cube) 与 Тихонов 立方体 (Tikhonov cube); 3) Menger 曲线 (见线 (曲线) (line (curve))); 4) 万有 Milnor 丛 (见主纤维丛 (principle fibre bundle)).

万有空间的存在使人们有可能把抽象对象当作 (范畴意义下) 一个更具体对象的子对象来研究, 并且赋予它们更多的“内在”性质. 换言之, 它特别强调的关系是“整体的部分”.

#### 参考文献

- [1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977 (英译本: Alexandrov, P. S., Introduction to set theory and general topology, Moscow, 1977).
- [2] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】万有空间也有对偶概念: 在确定类中的任何空间是本问题中空间的连续象. 例如, Cantor 集 (Cantor set) 对于紧度量空间类是万有的, 单位区间对于局部连通连续统 (见 Peano 曲线 (Peano curve)) 类是万有的, 伪弧 (pseudo-arc) 对于蛇形连续统 (snake-like continua) (见拟立方体连续统 (cube-like continuum)) 类是万有的.

泛函分析中的万有空间. 泛函分析中万有空间有着不同的概念. 拓扑向量空间  $X_0$ , 对于拓扑向量空间类  $\mathcal{X}$  是万有的 (universal), 如果对任意  $X \in \mathcal{X}$ , 存在  $X_0$  的一个闭子空间与  $X$  同构. 对任意类  $\mathcal{X}$ , 总存在平凡万有空间, 然而在  $\mathcal{X}$  自身或在与之紧密相关的空间类中是否存在万有空间又是另一回事. 下述定理成立 ([A2]): 对所有  $F^*$  空间类, 存在万有可分  $F$  空间. 这里,  $F$  空间与  $F^*$  空间定义如下:

线性空间  $X$  上的  $F$  范数 ( $F$ -norm), 是从  $X$  到非负实数的映射  $\|\cdot\|$ , 使得:

- 1)  $\|x\| = 0$ , 当且仅当  $x = 0$ ;
- 2)  $\|ax\| = \|x\|$ , 对所有  $a, |a| = 1$ ;
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ;
- 4) 当  $a_n \rightarrow 0$  时,  $\|a_n x\| \rightarrow 0$ ;
- 5) 当  $x_n \rightarrow 0$  时,  $\|a x_n\| \rightarrow 0$ ;
- 6) 当  $a_n \rightarrow 0, x_n \rightarrow 0$  时,  $\|a_n x_n\| \rightarrow 0$ .

条件 4), 5), 6) 中, 拓扑由平移不变度量  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  引进. 若  $\|\cdot\|$  无须满足 1), 就称之为  $F$  伪范数 ( $F$ -pseudo-norm). 若  $\|ax\| = |a|^p \|x\|$ , 则  $F$  范数或  $F$  伪范数是  $p$  齐次的 ( $p$ -homogeneous). 1 齐次  $F$  范数 ( $F$  伪范数) 就是范数 (norm) (伪范数 (pseudo-norm)).  $F^*$  空间 ( $F^*$ -space) 是具有  $F$  范数的线性空间;  $F$  空间 ( $F$ -space) 是完全  $F^*$  空间.

还有一些万有性结果:  $C[0, 1]$  对所有可分 Banach 空间是万有的 (Banach-Mazur 定理 (Banach-Mazur theorem), 见度量空间 (metric space));  $C(-\infty, \infty)$  对所有可分  $B_0$  空间是万有的 ( $B_0^*$  空间 ( $B_0^*$ -space) 是局部凸度量线性空间,  $B_0$  空间 ( $B_0$ -space) 是完全  $B_0^*$  空间)); 存在可分局部伪凸空间, 它对所有可分局部伪凸空间而言是万有的; 存在具有  $p$  齐次范数的可分局部有界完全空间  $X$ , 对于所有具有  $p$  齐次范数的可分局部有界空间而言是万有的. (这里,  $F$  空间局部有界是指它包含 0 的有界邻域; 局部伪凸空间 (locally pseudo-convex space) 是一个度量线性空间, 其拓扑可由  $p_n$  齐次伪范数族给出.)

对偶概念是上万有线性空间 (co-universal linear space).  $F$  空间  $X_0$  对  $F$  空间族  $\mathcal{X}$  是上万有的, 如果  $\mathcal{X}$  的所有元素同构于  $X_0$  关于其闭子空间  $Y$  的商空间  $X_0/Y$ .

一些上万有性结果是: 存在可分  $F$  空间, 它对所有可分  $F$  空间是上万有的 ([A2]); 任何具有  $p$  齐次范数的可分局部有界空间  $X$  是  $l_p$  在连续线性算子下的象 ([A3] - [A5]).

对度量线性空间, 包括上面所有内容的大量万有性定理和上万有性定理, 见 [A6].

#### 参考文献

- [A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.
- [A2] Kalton, N. J., Universal spaces and universal bases in metric linear spaces, *Studia Math.*, **61** (1977), 161 - 191.
- [A3] Shapiro, J. H., Examples of proper closed weakly dense subspaces in non-locally convex  $F$ -spaces, *Isr. J. Math.*, **7** (1969), 369 - 380.
- [A4] Stiles, W. J., On properties of subspaces of  $l_p$ ,  $0 < p < 1$ , *Trans. Amer. Math. Soc.*, **149** (1970), 405 - 415.
- [A5] Banach, S., Théorie des opérations linéaires, PWN, 1932.



[A6] Rolewicz, S., Metric linear spaces, Reidel, 1985.

罗嵩龄 译

全域 [universe; универсум], 亦称论域, 底集

【补注】 一个在形式并、独体、子元素、幂集和取对之下封闭的集合  $U$ ; 更精确地说, 即

1)  $I \in U, X_i \in U$  意味着  $\bigcup_{i \in I} X_i \in U$ ;

2)  $x \in U$  意味着  $\{x\} \in U$ ;

3)  $x \in X \in U$  意味着  $x \in U$ ;

4)  $x \in U$  意味着  $\mathcal{P}(X) \in U$ ;

5)  $(x, y) \in U$  当且仅  $x, y \in U$ .

在公理集合论 (axiomatic set theory) 中无限全域的存在性等价于强不可达基数的存在性 (见基数 (cardinal number)). 全域是 Zermelo-Fraenkel 集合论的模型. 全域的概念是 A. Grothendieck 在范畴 (category) 论中引出的, 目的是给出  $(U)$  范畴间函子的自然变换的“集合”, 以便得到更“大”的范畴论构造.

参考文献

[A1] Barwise, J. (ed.), Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977.

[A2] Gabriel, P., Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France, 90 (1962), 323 - 448.

[A3] Kunen, K., Set theory, North-Holland, 1980.

B. Pareigis 撰 张英伯 译

非分歧特征标 [unramified character; неразветвленный характер]

在局部域的 Galois 扩张  $K/k$  的 Galois 群 (Galois group)  $G(K/k)$  上的一个特征标 (见群的特征标 (character of a group)), 它在惯性子群上是平凡的. 任一非分歧特征标都可看作是扩张  $K_{\text{nr}}/k$  的 Galois 群的特征标,  $K_{\text{nr}}$  是  $K/k$  的极大非分歧子域. 非分歧特征标是所有特征标构成的群的子群. 局部域  $k$  的乘法群  $k^*$  的特征标, 在  $k$  的单位群上是平凡的, 也称为非分歧的 (unramified). 这定义与前面的定义是一致的, 因为根据局部类域论 (class field theory) 的基本定理, 对每个局部域的 Abel 扩张  $K/k$ , 存在一个典范互反同态  $\theta: k^* \rightarrow G(K/k)$ , 使得能将群  $G(K/k)$  的特征标集合等同于  $k^*$  的特征标群的某个子群.

对于整体域的 Galois 扩张  $K/k$ , Galois 群  $G(K/k)$  一个特征标  $\chi$  称为在  $k$  的一点  $\mathfrak{p}$  上非分歧的 (unramified) 是指对  $K$  上任一在  $\mathfrak{p}$  之上的一点  $\mathfrak{P}$ ,  $\chi$  局限于  $\mathfrak{P}$  的分解群上是前述意义下的非分歧特征标. 类似地, 在  $k$  的伊代尔类群  $C(k)$  上的一个特征标  $\chi$  称作在  $\mathfrak{p}$  上非分歧的 (unramified), 如果  $\chi$  在  $k$  相对于  $\mathfrak{p}$  的完全化  $k_{\mathfrak{p}}$  的单位群上的局限是平凡的, 群  $k_{\mathfrak{p}}^*$  是以标准方式嵌入  $C(k)$  的.

从整体类域论可知, 与局部情形一样, 这两种在点  $\mathfrak{p}$  上非分歧的定义是一致的.

参考文献

[1] Weil, A., Basic number theory, Springer, 1974.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 惯性子群的概念参见分歧素理想 (ramified prime ideal) 和惯性素理想 (inertial prime ideal).

冯绪宁 译

非分歧理想 [unramified ideal; неразветвленный идеал]

代数数域 (亦见代数数 (algebraic number); 数域 (number field))  $K$  中立于素数  $p$  之上的素理想 (prime ideal)  $\mathfrak{p}$ , 使得主理想  $(p)$  在  $K$  中分解为如下的素理想之积:

$$(p) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{e_s},$$

其中  $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_s \neq \mathfrak{p}$ ,  $e_1 = 1$ . 更精确地说, 这样的非分歧理想称为绝对非分歧的 (absolutely unramified). 一般地, 设  $A$  为 Dedekind 环 (Dedekind ring),  $k$  为  $A$  的分式域,  $K$  为  $k$  的有限扩域,  $B$  是  $A$  在  $K$  中的整闭包 (见环的整扩张 (integral extension of a ring)). 处于  $A$  的素理想  $\mathfrak{p}$  之上的  $B$  的素理想  $\mathfrak{P}$  称为在扩张  $K/k$  下不分歧, 如果

$$\mathfrak{p}B = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_s^{e_s},$$

其中  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$  是  $B$  中互不相同的素理想,  $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ ,  $e_1 = 1$ . 如果所有的  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$  都不分歧, 有时也称理想  $\mathfrak{p}$  在扩张  $K/k$  下是非分歧的. 对于 Galois 扩张  $K/k$ ,  $B$  的一个理想  $\mathfrak{p}$  是非分歧的, 当且仅当  $\mathfrak{p}$  在 Galois 群  $G(K/k)$  中的分解群等同于剩余类域扩张  $(B/\mathfrak{p})/(A/\mathfrak{p})$  的 Galois 群. 对于代数数域的任意有限扩张, 所有的理想除有限个外都是非分歧的.

参考文献

[1] Борович, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972 (英译本: Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1987).

[2] Lang, S., Algebraic number theory, Addison-Wesley, 1970.

[3] Cassels, J. W. S., and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1986.

Л. В. Кузьмин 撰 裴定一 译 赵春来 校

不可解性 [unsolvability; неразрешимость]

用规定方法确切地解决一个给定问题的不可能性. 下面是数学中已经考虑过的不可解性的最重要的例子.

算法不可解性 (algorithmic unsolvability). 在数学的各个领域中, 都提出了一些问题, 要求找一个统一

的方法(一个算法(algorithm)),从而能够解决一个给定的同型问题的无限类中的任何问题,这些问题称为可判定问题(decidability problems). Hilbert 第十问题就是一个例子,它要求构造一个算法,通过这个算法可以决定任意给定的整系数多项式有无整数零点.很长一段时间,很多可判定问题没有得到解决:后来发现,解决它们的困难是带有原则性的困难.只有后来,20世纪30年代在数理逻辑中精确地提出了算法概念并且证明了对于某些可判定问题所要求的算法不存在,这件事才得以证明.这样的可判定问题称为不可解的(unsolvable)或算法不可解的(algorithmically unsolvable).由数学的各个分支提出的很多其他算法问题原来都是不可解的;特别是 Hilbert 第十问题是不可解的(亦见算法问题(algorithmic problem)).

一旦证明了一个给定的可判定问题算法不可解,则该类中每一个具体问题的解法要求有独特的方法,因此没有一个统一的方法解决所有这些问题.

不可判定命题(undecidable propositions).构造数学理论的工具之一是公理化方法(axiomatic method).在一个理论的公理化构造中,它的许多命题像公理一样取作初始命题,而其他命题作为它们的结论而得到.在 D. Hilbert 和他的学派的著作中,公理化理论概念更精确地被构造为形式系统(formal system)概念. Hilbert 设计了建立数学的纲领,特别是对于数学基本分支的形式化体系:算术,分析,集合论,也就是说,从公理出发构造的形式系统实际上可以导出所有数学定理.然而,1931年 K. Gödel 证明了在一定意义下,算术的每个形式系统是不完全的,即在形式系统内可以用符号叙述一个命题,该命题在系统内不能证明也不能否定(即证明它的否定).那样的命题称为在给定系统内不可判定(undecidable)或形式不可判定的(formally undecidable).特别地,对于每一个包含算术的充分丰富部分的相容的形式系统,断言这个系统是相容的,证明在系统内是不可判定的(见 Gödel 不完全性定理(Gödel incompleteness theorem)).

在给定形式系统中一个命题的不可判定性表明,仅仅基于用公理和推导法则可以表达研究对象这一思想,不可能证明它的真或假.添加一些新公理以扩充形式系统,使得某些特殊的不可判定问题在扩张的系统中可以证明或否定,时常证明是可能的.在公理集合论中,不可判定命题的发现对于这个理论的发展有重要意义,它可促进对可以作为公理的新基本命题的探索.

初等数学中不可解的例子是几何中的作图问题,例如用直尺和圆规三等分一个角,以及把一个圆化为一个正方形.

#### 参考文献

- [1] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, 1 - 2, Springer, 1968 - 1970.

В. Е. Плиско 撰

【补注】上面提出的许多问题在不可判定性(undecidability)中讨论的更详细更深入;特别是如何证明不可解性,可解性与不可解性之间的分界线,以及不可判定命题的存在性独立于公理化的问题.

卢景波 译 罗里波 校

#### 上界与下界 [upper and lower bounds; верхняя и нижняя грани]

实数轴上点集的特征. 一个给定实数集的上确界是该集合上界中的最小数;它的下确界是它下界中的最大数. 现在再说得更详细些. 设  $X$  为给定的实数子集. 实数  $\beta$  称为  $X$  的上确界(least upper bound),记为  $\sup X$  (来自拉丁文 "supremum" —— 最大),是指,对每个  $x \in X$ , 成立不等式  $x \leq \beta$ , 而对任意的  $\beta' < \beta$ , 则有  $x' \in X$  使得  $x' > \beta'$ . 数  $\alpha$  称为  $X$  的下确界(greatest lower bound),记为  $\inf X$  (来自拉丁文 "infimum" —— 最小),是指一切  $x \in X$  均满足  $x \geq \alpha$ , 而对任意  $\alpha' > \alpha$ , 则有  $x' \in X$ , 使得  $x' < \alpha'$ .

例

$$\inf[a, b] = a, \sup[a, b] = b;$$

$$\inf(a, b) = a, \sup(a, b) = b;$$

若集合  $X$  仅含两点  $a$  与  $b$ ,  $a < b$ , 则

$$\inf X = a, \sup X = b.$$

这些例子表明,在特殊情况下,上确界(下确界)可能属于该集合(例如区间  $[a, b]$  的情形),也可能不属于该集合(例如区间  $(a, b)$  的情形). 如果集合有最大(最小)数,那么这数显然就是该集合的上确界(下确界).

无上界(无下界)的集合的上确界(下确界)用符号  $+\infty$  (相应地用  $-\infty$ ) 来表示. 若  $N = \{1, 2, \dots\}$  为全体自然数的集合, 则

$$\inf N = 1, \sup N = +\infty.$$

假若  $Z$  是所有正整数和负整数的集合, 那么

$$\inf Z = -\infty, \sup Z = +\infty.$$

每个非空实数集均有唯一有限或无限的上确界(下确界). 所有有上界的非空集都有有限的上确界, 而所有有下界的集合则有有限的下确界.

集合的上确界(下确界)有时也称为集合的上确



限 (least upper limit of a set) (下确界 (greatest lower limit)). 一个实值函数, 特别是一个实数列的上确界 (下确界) 定义为它的值组成的集合的上确界 (下确界) (亦见上极限与下极限 (upper and lower limits)).

#### 参考文献

- [1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971 (英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1-2, Mir, 1982).  
 [2] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973.  
 [3] Никольский, С. М., Курс математического анализа, т. 1, М., 1973 (中译本: С. М. 尼科尔斯基, 数学分析教程, 第一卷, 一、二分册, 人民教育出版社, 1980-1981). Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】通常, 某个实数集  $S$  的一个上界是一个数  $b$ , 满足  $x \leq b$  对一切  $x \in S$  成立. 而  $S$  的上确界定义为这样的一个上界  $B$ , 它对所有的上界  $b$ , 均有  $B \leq b$ .

下界以及下确界也有类似的定义. 如果  $S$  的上确界属于  $S$ , 那么它称为  $S$  的最大值 (maximum). 如果  $S$  的下确界属于  $S$ , 那么它称为  $S$  的最小值 (minimum).

#### 参考文献

- [A1] Apostol, T. M., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1974.  
 [A2] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1953 (中译本: W. 卢丁, 数学分析原理, 人民教育出版社, 1979).  
 [A3] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981. 王斯雷 译

#### 上函数与下函数方法 [upper-and-lower-functions method; верхних и нижних функций метод]

证明微分方程边值问题解的存在性的一种方法. 在 G. Peano 的工作 (1880) 中讨论了这个方法的思想在常微分方程中的应用. 对于 Dirichlet 问题 (Dirichlet problem) 的情况和 Laplace 方程 (Laplace equation) 的情况, 这个思想出现在 H. Poincaré 的扫除法 (balayage method) 中. 在后一情况中, O. Perron ([1]) 第一个给出上 (下) 函数方法完整的叙述.

设在空间  $R^n (n \geq 2)$  的区域  $G$  中对具有连续系数的二阶线性齐次椭圆型方程

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0, \quad c \leq 0, \quad x \in G \quad (1)$$

提出 Dirichlet 问题, 其边值条件是

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial G. \quad (2)$$

在问题 (1), (2) 局部可解的条件下, 上 (下) 函数方法中要引入上调和函数 (以及相应地, 下调和函数) 的一种推广.  $G$  中连续的函数  $v$  称作  $G$  中的广义上调和函数 (generalized superharmonic function) (或相应地, 广义下调和函数 (generalized subharmonic function)), 如果对于任一充分小的球  $K (\bar{K} \subset G)$ , 不等式  $(v)_K \leq v$  (或  $(v)_K \geq v$ ) 成立. 这里  $(v)_K$  是一个  $G$  中连续的函数, 它在  $K$  外和  $K$  的边界上等于  $v$ , 在  $K$  内则满足方程 (1). 对于在边界  $\partial G$  上连续的函数  $f$ , 一个广义上调和函数 (或相应地, 广义下调和函数)  $v$ , 若对  $x \in \partial G$  均有  $v(x) \geq f(x)$  (相应地,  $v(x) \leq f(x)$ ) 成立, 则  $v$  称为上 (upper) 函数 (相应地, 下 (lower) 函数).

所有的上与下函数的类  $\Phi(G, f)$  和  $\Psi(G, f)$  均非空, 且若  $v \in \Phi(G, f)$ ,  $w \in \Psi(G, f)$ , 则  $v \geq w$  ([3]). Dirichlet 问题的广义解 (generalized solution of Dirichlet problem) 就定义为  $\Phi(G, f)$  的最小包络或  $\Psi(G, f)$  的最大包络:

$$u(x) = \inf \{v(x) : v \in \Phi(G, f)\} = \sup \{w(x) : w \in \Psi(G, f)\}, \quad x \in G. \quad (3)$$

若边界  $\partial G$  在每一点上都有闸函数 (barrier) 存在, 则在  $\partial G$  上处处有  $u(x) = f(x)$ , 即  $u$  为 Dirichlet 问题的古典解. 在一般情况下, 椭圆型方程 (1) 的广义解 (3) 在边界点的性态与 Laplace 问题广义解的性态完全平行 (见 Perron 方法 (Perron method)).

上 (下) 函数方法也可以用于研究线性齐次二阶抛物型方程

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (x, t) \in G \times [0, T]$$

的第一边值问题, 其初始条件为

$$u(x, 0) = f(x, 0), \quad x \in G,$$

边值条件为

$$u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \partial G \times [0, T].$$

这时引入了与广义上调和 (下调和) 函数有类似性质的上抛物 (下抛物) 函数 ([4]).

#### 参考文献

- [1] Perron, O., Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für  $\Delta u = 0$ , Math. Z., 18 (1923), 42-54.  
 [2] Петровский, И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基, 偏微分方程讲义, 人民教育出版社, 1956).

[3] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文) (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, II, 科学出版社, 1977).

[4] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 4, 3 изд., М., 1957 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷, 高等教育出版社, 1958).

Л. И. Камынин, Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】在公理化位势理论中, 这个方法通常称为 Perron-Wiener-Brelot 法 (Perron-Wiener-Brelot method). 它的一般形式是对任意满足最小值原理 (minimum principle) 的开集  $\Omega$  以及任意数值边界函数  $f$ , 定义了 Dirichlet 问题的上解 (upper solution) 为所有上函数 (upper function) 之最大下界, 后者即  $\Omega$  上的下有界超调和函数 (hyperharmonic functions)  $u$  且在边界上有  $\liminf u \geq f$ , 在某个紧集外  $u \geq 0$ . 下解 (lower solution) 可用对偶的方式定义. 若上下解相等且为调和 (即满足微分方程), Dirichlet 问题就有广义解 (generalized solution). 这时就说边界函数是可解的 (resolutive). 见 [A1].

#### 参考文献

[A1] Constantinescu, C. and Cornea, A., Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972.

齐民友 译

#### 上极限和下极限 [upper and lower limits; верхний и нижний пределы]

1) 序列的上极限和下极限分别是给定的实数序列的所有部分 (有限的和无穷的) 极限 (limit) 中的最大极限和最小极限. 对于任何实数序列  $\{x_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 在扩充的数轴上 (即在增添符号  $-\infty$  和  $+\infty$  的实数集合中) 它的所有部分 (有限的和无穷的) 极限的集合是非空的, 并且具有最大元素和最小元素 (有限的和无穷的). 部分极限的集合的最大元素称为序列的上极限 (upper limit) ( $\limsup$ ), 记为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 或 } \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

而最小元素称为下极限 (lower limit) ( $\liminf$ ), 记为

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 或 } \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

例如, 如果

$$x_n = (-1)^n$$

则

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

如果

$$x_n = (-1)^n n,$$

则

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

如果

$$x_n = n + (-1)^n n,$$

则

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

任何序列都具有上极限和下极限, 并且如果一个序列是上 (下) 有界的, 则它的上 (下) 极限是有限的. 一个数  $a$  是序列  $\{x_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 的上 (下) 极限, 当且仅当对于任何  $\varepsilon > 0$ , 下述条件成立: a) 存在数  $n_\varepsilon$ , 使得对于所有的指标  $n > n_\varepsilon$ , 不等式  $x_n < a + \varepsilon$  ( $x_n > a - \varepsilon$ ) 成立; b) 对于任何指标  $n_0$ , 存在指标  $n' = n'(\varepsilon, n_0)$ , 使得对于所有的指标  $n' > n_0$ , 不等式  $x_{n'} > a - \varepsilon$  ( $x_{n'} < a + \varepsilon$ ) 成立. 条件 a) 意味着: 对于给定的  $\varepsilon > 0$ , 在序列  $\{x_n\}$  中只存在有限个项  $x_n$ , 使得  $x_n > a + \varepsilon$  ( $x_n < a - \varepsilon$ ). 条件 b) 意味着: 存在无穷多项  $x_n$ , 使得  $x_n > a - \varepsilon$  ( $x_n < a + \varepsilon$ ). 如果两个极限都是有限的, 则通过改变序列各项的符号, 可使下极限化为上极限:

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

为使序列  $\{x_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 具有极限 (有限的或无穷的 (等于符号  $-\infty$  和  $+\infty$  之一)), 其必要和充分条件是

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

2) 函数  $f(x)$  在一点  $x_0$  处的上 (下) 极限是  $f(x)$  在  $x_0$  的一个邻域中的值的集合的上 (下) 界当这个邻域收缩到  $x_0$  时的极限. 上 (下) 极限记为

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \left[ \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \right].$$

设函数  $f(x)$  定义在度量空间  $R$  上, 并且取实数值. 如果  $x_0 \in R$ ,  $O(x_0; \varepsilon)$  是  $x_0$  的  $\varepsilon$  邻域,  $\varepsilon > 0$ , 则

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \sup_{x \in O(x_0; \varepsilon)} f(x) \right]$$

和

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \inf_{x \in O(x_0; \varepsilon)} f(x) \right].$$

在每一点  $x \in R$  处, 函数  $f(x)$  具有上极限  $\overline{f(x)}$  和下极限  $\underline{f(x)}$  (有限的或无穷的). 函数  $\overline{f(x)}$  在  $R$  上是上半连续的, 函数  $\underline{f(x)}$  在  $R$  上是下半连续的 (在取值于扩充数轴的函数的半连续概念的意义下, 见半连续函数 (semi-continuous function)).

为使函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处具有有限的或无穷的 (等于  $+\infty$  或  $-\infty$ ) 极限, 其必要和充分条件是

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

函数在一点上的上极限 (下极限) 的概念可以自



然地推广到定义在拓扑空间上的实值函数的情况.

3) 集合序列  $\{A_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 的上极限和下极限分别是集合

$$\bar{A} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n},$$

它是由属于无穷多集合  $A_n$  的元素  $x$  组成的, 以及集合

$$\underline{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n,$$

它是由属于从某个指标  $n = n(x)$  开始的一切集合  $A_n$  的元素  $x$  组成的. 显然,  $\underline{A} \subset \bar{A}$ .

#### 参考文献

- [1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1971 (英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1-2, Mir, 1982).
- [2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976 (中译本: А. Н. 柯尔莫果洛夫, С. В. 佛明, 函数论与泛函分析初步, 上、下册, 高等教育出版社, 1992).
- [3] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973.
- [4] Никольский, С. М., Курс математического анализа, т. 1, М., 1973 (中译本: С. М. 尼科尔斯基, 数学分析教程, 第一卷, 人民教育出版社, 1980, 1981).
- [5] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914. Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】在英文中, 上极限又称 superior limit 或 limit superior, 下极限又称 inferior limit 或 limit inferior. 亦见上界和下界 (upper and lower bounds).

一个集合的子集序列  $A_1, A_2, \dots$  的上极限和下极限由下列公式给出:

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} A_m,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} A_m.$$

#### 参考文献

- [A1] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1953 (中译本: W. 卢丁, 数学分析基础, 人民教育出版社, 1979).

杜小杨 张鸿林 译

拓扑族的上界 [upper bound of a family of topologies; верхняя грань семейства топологий], 上确界 (least upper bound), 集合  $S$  上的

$S$  上所有拓扑 (包含给定族  $\mathfrak{M}$  的所有拓扑) 中最细的那个拓扑  $\xi$  (见拓扑的比较 (comparison of topologies)). 拓扑  $\xi$  的子基 (subbase of the topology  $\xi$ )

可用  $S$  的所有在族  $\mathfrak{M}$  的至少一个拓扑中是开的那些子集族构成.

集合  $S$  上 (具有上面定义的取任意子族的上界的运算及极小元 (平凡拓扑) 的) 所有可能拓扑的族是一个完全格 (complete lattice). 拓扑族的上界, 也称为拓扑族的归纳极限 (inductive limit of a family of topologies).

拓扑族的上界常采用下述解释. 设

$$T = \prod \{(S, \mathcal{T}): \mathcal{T} \in \mathfrak{M}\}$$

是把族  $\mathfrak{M}$  中不同拓扑赋予集合  $S$  得出的所有拓扑空间的 Тихонов 积 (Tikhonov product). 设  $S^*$  是 Тихонов 积的对角线 (diagonal of Tikhonov product), 即从  $\mathfrak{M}$  映入  $S$  的所有常值映射的集合 (换言之, 是所有脉络 (thread) 的集合  $\{S: \mathcal{T} \in \mathfrak{M}\}$ , 对所有  $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathfrak{M}, S_{\mathcal{T}} = S_{\mathcal{T}'}$ ). 集合  $S^*$  与集合  $S$  有一种自然的一一对应关系 (这可以通过将集合  $T$  投射到它的任何因子上来实现). 如果  $S^*$  具有由空间  $T$  导出的拓扑, 且这个拓扑可以利用上述对应转移到  $S$  上, 那就得到族  $\mathfrak{M}$  的上界. 拓扑族上界的这种解释, 有助于理解任意 Hausdorff 拓扑族的上界是 Hausdorff 拓扑, 任意 (完全) 正则拓扑族的上界是 (完全) 正则拓扑. 类似的结论不适用于正规拓扑族及仿紧拓扑族. 然而, 可数个 (有可数基的) 可度量化拓扑的上界是 (有可数基的) 可度量化拓扑. 通常, 对角线  $S^*$  不在  $T$  中闭, 因此, 两个紧拓扑的上界未必是紧的.

#### 参考文献

- [1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).
- [2] Bourbaki, N., Elements of mathematics, General topology, Springer, 1989 (译自法文).

А. В. Архангельский 撰 罗嵩龄 译

#### 瓮模型 [urn model; урновая схема]

概率论 (probability theory) 中最简单的模型之一. 瓮模型的一种描述如下: 考虑某个装着白和黑球的容器——瓮. 随机地从瓮中摸出一个球, 然后将它及  $c$  个与摸出的球有相同颜色的球和  $d$  个另一颜色的球放回瓮中. 在将瓮中的球搅混之后, 再重复这一手续若干次. 假定开始时瓮中装有  $a > 0$  个白球和  $b > 0$  个黑球. 瓮模型的参数  $c$  和  $d$  也可以是负数.

瓮模型为用条件概率来计算某些基本概率提供了一个便利的工具. 对于参数  $c$  和  $d$  取不同的值, 可以得到概率论的许多熟知的模型:  $c = 0, d = 0$  是有放回随机选择模型 (见 Bernoulli 试验 (Bernoulli trials));  $c = -1, d = 0$  是无放回随机选择模型;  $c = 1, d = -1$  是 Ehrenfest 扩散模型;  $c > 0, d = 0$

是 Pólya 瓮模型, 等等. 这些特殊情形可以作为很多实际现象的模型并提供了研究它们的方法. 例如, Pólya 瓮模型就被用来描述流行病, 其中任何事件的发生都增加了该事件随后发生的可能性. 在瓮模型的框架中, 概率论中的许多分布都可以被引进来, 例如二项分布, 超几何分布, 几何分布, 以及 Pólya 分布. 负二项分布与 Poisson 分布则产生于某些瓮模型的极限分布.

#### 参考文献

- [1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1-2, Wiley, 1957-1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 科学出版社, 上册 1964, 下册 1979). A. B. Прохоров 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Johnson, N. L., Kotz, S., Urn models and their application, Wiley, 1977. 潘一民 译

**Урысон-Брауэра 引理** [Urysohn-Brouwer lemma; Урысона - Брауэра лемма], Урысон-Брауэра - Тьетзе 引理 (Urysohn-Brouwer-Tietze lemma)

关于拓扑空间子空间上连续函数扩张到整个空间的可能性的一个论断. 设  $X$  为正规空间 (normal space),  $F$  为其闭子集, 则任何连续函数  $f: F \rightarrow \mathbf{R}$  可以扩张成连续函数  $g: X \rightarrow \mathbf{R}$ , 也就是能够找到一个连续函数  $g$ , 使得对所有  $x \in F$ ,  $g(x) = f(x)$ . 进而, 如果  $f$  有界, 则存在扩张  $g$ , 使得

$$\sup_{x \in F} |f(x)| = \sup_{x \in X} |g(x)|.$$

Урысон-Брауэра 引理, 对  $X = \mathbf{R}^n$  由 L. E. J. Brouwer 及 H. Lebesgue 证明, 对任意度量空间  $X$  由 H. Tietze 证明, 而上面的描述则是 П. С. Урысон 给出的 (它可以作为正规空间的刻画, 因此是最好的).

#### 参考文献

- [1] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, М.-Л., 1951, 177-218. И. Г. Кошечникова 撰

**【补注】** 这个论断也称为 Tietze-Урысон 扩张定理 (Tietze-Urysohn extension theorem), 或直接称为 Tietze 扩张定理 (Tietze extension theorem).

#### 参考文献

- [A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989. 罗嵩龄 译

**Урысон 方程** [Urysohn equation; Урысона уравнение]

形如

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, s, \varphi(s)) ds + f(x), x \in \Omega (*)$$

的一种非线性积分方程, 其中  $\Omega$  是有限维 Euclid 空间中的一个有界闭集而  $K(x, s, t)$  和  $f(x)$  是对  $x, s \in \Omega, -\infty < t < \infty$  的给定函数. 设  $K(x, s, t)$  对变量  $x, s \in \Omega, |t| \leq \rho$  的集合是连续的 (这里  $\rho$  是某正常量), 且设

$$\left| \frac{\partial K(x, s, t)}{\partial t} \right| \leq M = \text{常数}, x, s \in \Omega, |t| \leq \rho.$$

如果

$$|\lambda| M \text{meas}(\Omega) < 1,$$

$$|\lambda| \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} \max_{|t| \leq \rho} |K(x, s, t)| ds \leq \rho,$$

则方程

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, s, \varphi(s)) ds$$

有唯一的连续解  $\varphi(x)$ ,  $x \in \Omega$ , 满足不等式  $|\varphi(x)| \leq \rho$ . 如果  $\varphi_0$  是满足  $|\varphi_0(x)| \leq \rho (x \in \Omega)$  的任一连续函数, 则逼近序列

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \lambda \int_{\Omega} K(x, s, \varphi_{n-1}(s)) ds, \\ n &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

在  $\Omega$  上一致收敛到  $\varphi(x)$ .

设 Урысон 算子 (Urysohn operator)

$$A\varphi(x) = \int_{\Omega} K(x, s, \varphi(s)) ds$$

作用于空间  $L_p(\Omega) (p > 1)$  中, 且设对所有  $t_1, t_2, x, s \in \Omega$ , 满足不等式

$$|K(x, s, t_1) - K(x, s, t_2)| \leq K_1(x, s) |t_1 - t_2|,$$

其中  $K_1$  是满足

$$\Delta^p = \int_{\Omega} \left[ \int_{\Omega} K_1^{p/(p-1)}(x, s) ds \right]^{p-1} dx < \infty$$

的一个可测函数. 则对  $|\lambda| < \Delta^{-1}$  和  $f \in L_p(\Omega)$ , 方程 (\*) 在  $L_p(\Omega)$  中有唯一解.

方程 (\*) 在某些假设下首先由 П. С. Урысон 作了研究 (见非线性积分方程 (non-linear integral equation)).

#### 参考文献

- [1] Красносельский, М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956 (英译本: Krasnosel'skiĭ, M. A., Topological methods in the theory of nonlinear integral equations, Pergamon, 1964).  
[2] Интегральные уравнения, М., 1968 (Справочная матем. б-ка) (英译本: Zabreyko, P. P., et al., Integral equations - a reference text, Noordhoff, 1975).  
Б. В. Хведелидзе 撰 葛显良 译 吴绍平 校



**Урысон 引理 [Urysohn lemma; Урысона лемма]**

正规空间 (normal space)  $X$  的任何两个不交闭集  $A$  和  $B$ , 存在一个在所有点连续的实值函数  $f$ , 它在  $A$  的所有点取值 0, 在  $B$  的所有点取值 1, 而对所有  $x \in X$ , 满足不等式  $0 \leq f(x) \leq 1$ . 这个引理表明, 对于  $T_1$  空间  $X$  是正规空间, 这个条件不仅是必要的, 也是充分的 (亦见分离公理 (separation axiom); Урысон - Brouwer 引理 (Urysohn-Brouwer lemma)).

П. С. Александров 撰

【补注】“Урысон 引理”这个词, 有时也用“Урысон 度量化定理 (Urysohn metrization theorem)”代替.

**参考文献**

- [A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984, 123 - 124 (译自俄文).  
 [A2] Kelley, J. L. General topology, v. Nostrand, 1955, p. 115 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982). 罗嵩龄 译

**Урысон 度量化定理 [Urysohn metrization theorem; Урысона метризация теорема]**

1) 紧或可数紧 Hausdorff 空间 (Hausdorff space) 可度量化, 当且仅当它有一个可数基.

2) 有可数基的拓扑空间 (topological space) 可度量化, 当且仅当它是正规的 (见正规空间 (normal space)), 或者 (由 А. Н. Тихонов 加上的) 当且仅当它是正则的.

П. С. Александров 撰

**【补注】****参考文献**

- [A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984, Chapt. 5 (译自俄文).  
 [A2] Kelley, J. L., General topology, v. Nostrand, 1955, p. 125; 127 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982). 罗嵩龄 译

**Урысон 空间 [Urysohn space; Урысона пространство], 满足 Урысон 分离公理 (Urysohn separation axiom) 的空间**

一个拓扑空间 (topological space), 其中任何不同两点都有不相交闭包邻域.

**参考文献**

- [1] Александров, П. С., Урысон, П. С., Мемуар о компактных топологических пространствах, 3 изд., М., 1971.  
 [2] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).

blems and exercises, Reidel, 1984).

Б. А. Ефимов 撰

【补注】正则  $T_1$  空间 (见正则空间 (regular space); 分离公理 (separation axiom)) 是 Урысон 空间, Урысон 空间是 Hausdorff 空间 (Hausdorff space). 反之均不真.

**参考文献**

- [A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989. 罗嵩龄 译

**效用理论 [utility theory; полезности теория]**

研究个体偏好及其数值函数表示的理论. 备择 (alternative) 集  $X$  上的一个偏好关系 (preference relation) 是  $X$  上的完全传递二元关系  $R$ ; 它被表示为  $X$  上的数值函数  $u(x)$ , 且  $u(x)$  称为效用函数 (utility function), 如果对于任何  $x, y \in X$ ,  $x R y$  导致  $u(x) \geq u(y)$ , 反之亦然. 因此, 效用函数研究序集及其到数值空间 (通常是一维的) 的单调映射. 效用理论是由于经济学家在 18 世纪的研究所引起的; 现代效用理论的基础是 J. von Neumann 和 O. Morgenstern ([1]) 在 20 世纪 40 年代奠定的.

显然, 效用函数在有限集  $X$  情形下存在. 在无限集情形下, 效用函数存在的充要条件为效用稠密可数子集  $A \subset X$  的存在, 即对于任何满足  $x R^* y$  的  $x, y \in X \setminus A$ , 存在  $z \in A$ , 使得  $x R^* z$ , 且  $z R^* y$ , 这里  $R^*$  是强偏好关系 (strong preference relation) ( $x R^* y \Leftrightarrow x R y$  和非  $y R x$ ). 如果  $X$  是向量空间中的凸集,  $R$  在  $X$  上连续, 且对于任何  $x, y, z \in X$ ,  $x R^* y$  以及任何  $\alpha, 0 < \alpha < 1$ , 有  $[\alpha x + (1 - \alpha)z] R^* [\alpha y + (1 - \alpha)z]$  成立, 那么存在在相差一个正线性变换的意义下唯一的线性效用函数 ([3]). 各种较弱条件的组合导致非线性的、不连续的或在某种意义下不唯一的效用函数. 例如, 如果  $X$  是向量空间, 由  $x R^* y$  导致  $(x + y) R^* (y + z)$ , 且  $\alpha x R^* \alpha y$  对于所有  $z \in X$  和  $\alpha > 0$  成立, 那么效用函数是单值的和分段线性的.

效用理论也研究随机定序和备选集的和或差的定序 (在这些情形中, 效用函数是由  $X$  上的四元关系来构造的), 以至把二元关系代替为  $n$  元关系的推广, 其中效用函数的构造同时具有主观概率, 具有多分量备选集的效用和分量的效用间的关系, 等等 ([3], [4]).

**参考文献**

- [1] Neumann, J. von and Morgenstern, O., Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1947 (中译本: 约翰·冯·诺依曼, 奥斯卡·摩根斯特恩, 竞赛论与经济行为, 科学出版社, 1963).  
 [2] Birkhoff, G., Lattice theory. Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[3] Fishburn, P. S., *Utility theory for decision making*, Wiley, 1970.

[4] Супес, П., Зинес, Дж., *Психологические измерения*, М., 1967 (译自英文). Э. Й. Вилкас 撰

【补注】在效用理论的其他方面，可以提到可传递效用 (transferable utility) ([A4])，不完全偏好 (incomplete preference) ([A1])，非标准效用 (non-standard utility) ([A7])，以及大量有关效用表示对于经济理论有无意义的文献 (见，例如，[A5] 和 [A6])，但是在可凹化偏好定序的特殊情形下，人们得到某种基数效用函数的度量 ([A2], [A3]))。

#### 参考文献

[A1] Aumann, R. J., *Human Judgement and Optimality*, Wiley, 1964, 217 – 242.

[A2] Kannai, Y., The ALEP definition of complementary and least concave utility functions, *J. Economic Th.*, 22 (1980), 115 – 117.

[A3] Kannai, Y., *Generalized Concavity in Optimization*

and Economics, Acad. Press, 1981, 543 – 611.

[A4] Luce, R. D. and Raiffa, H., *Games and decisions*, Wiley, 1957.

[A5] Samuelson, P. A., *Foundations of economic analysis*, Havard Univ. Press, 1947.

[A6] Samuelson, P. A., *J. Economic Literature*, 12 (1974), 1255 – 1289.

[A7] Skala, H., Nonstandard utilities and the foundations of game theory, *Internat. J. Game Theory*, 3 (1974), 67 – 81.

[A8] Thrall, R. M., Coombs, C. H. and Davis, R. L., (eds.): *Decision processes*, Wiley, 1954.

[A9] Arrow, K. J. and Hahn, F. H., *General competitive analysis*, Oliver & Boyd, 1971.

[A10] Debreu, G., Continuity properties of Paretian utility, *Int. Econ. Review*, 5 (1964), 285 – 293.

[A11] Rader, J. T., The existence of a utility function to represent preferences, *Rev. of Econ. Studies*, XXX (1963), 229 – 232.

史树中 译



# V

淡拓扑 [vague topology; широкая топология], 亦称宽拓扑

【补注】 设  $X$  是局部紧 Hausdorff 空间, 假定  $X$  是第二可数的 (second countable) (即具有可数基), 则  $X$  是 Polish 空间 (Polish space) (存在完全可分度量). 设  $\mathfrak{X}$  是  $X$  的 Borel 域 (Borel field), 它由  $X$  的拓扑 ( $X$  的开子集的集合) 所生成 (见 Borel 集域 (Borel field of sets)),  $\mathfrak{B}$  是  $\mathfrak{X}$  的所有相对紧元素组成的环, 即有界 Borel 集环 (ring of bounded Borel sets),  $\mathfrak{M}$  是  $X$  上所有 Borel 测度 (Borel measure) 的集合. 令  $\mathfrak{F}_c$  是  $X$  上具有紧支集的实值连续函数的空间. 称元素  $\mu_n \in \mathfrak{M}$  构成的序列收敛于  $\mu \in \mathfrak{M}$ , 如果对一切  $f \in \mathfrak{F}_c$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x) \mu_n(dx) = \int_X f(x) \mu(dx), \quad (*)$$

这样得到的  $\mathfrak{M}$  上的拓扑, 称为淡拓扑或宽拓扑 (vague topology). 如果要求 (\*) 对一切有界连续函数成立, 就得到  $\mathfrak{M}$  上的弱拓扑 (weak topology). 这样, 淡拓扑弱于弱拓扑. 两者的差别可通过下述观察来阐明: 子集  $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$  关于淡拓扑为相对紧, 当且仅当对一切  $\mu \in \mathcal{A}$  有  $\mu(X) < \infty$ ;  $\mathcal{A}$  关于弱拓扑为相对紧, 当且仅当对一切  $\mu \in \mathcal{A}$  有  $\mu(X) < \infty$  且  $\inf_{B \in \mathfrak{B}} \sup_{\mu \in \mathcal{A}} \mu(X \setminus B) = 0$ .

设  $\mathfrak{N}$  是  $\mathfrak{M}$  的所有整值元 (即对一切  $B \in \mathfrak{B}$  有  $\mu(B) \in \{0, 1, 2, \dots\}$  的  $\mu \in \mathfrak{M}$ ) 构成的集合, 则  $\mathfrak{N}$  在  $\mathfrak{M}$  中是淡闭的.  $\mathfrak{N}$  和  $\mathfrak{M}$  对于淡拓扑都是 Polish 的.

如果概率空间  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  上实随机变量序列  $\{Y_n\}$  依概率收敛 (convergence in probability) 于随机变量  $Y$ , 则它们的相伴测度淡收敛. 如果  $Y$  是  $P$  几乎确定常数, 则逆命题也成立.

## 参考文献

[A1] Bauer, H., Probability theory and elements of mea-

sure theory, Holl, Rinehart & Winston, 1972, § 7.7.

[A2] Kallenberg, O., Random measures, Acad. Press & Akad. Verlag, 1986, Chapt. 15.

[A3] Grandell, J., Doubly stochastic Poisson processes, Springer, 1976, Appendix.

[A4] Bourbaki, N., Intégration, Éléments de mathématique, Hermann, 1965, Chapt. 1-4, § 3.9.

沈永欢 译

赋值 [valuation; нормирование], 对数范数 (logarithmic norm), 域上的

从域 (field)  $K$  到  $\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{\infty\}$  中的映射  $v: K \rightarrow \Gamma_\infty$ , 其中  $\Gamma$  是一全序的 Abel 群. 假定添加的元素  $\infty$  比  $\Gamma$  中任一元素都大, 并且对  $\Gamma$  中所有元素  $x$ , 有  $x + \infty = \infty + x = \infty$ . 下面是赋值必须满足的条件:

1)  $v(0) = \infty$ , 对于  $x \neq 0$ ,  $v(x) < \infty$ ;

2)  $v(a \cdot b) = v(a) + v(b)$ ;

3)  $v(a - b) \geq \min v(a), v(b)$ .

$K^* = K \setminus \{0\}$  在  $v$  之下的象是  $\Gamma$  的子群, 称为赋值  $v$  的值群 (value group of the valuation). 下面假定  $v(K^*) = \Gamma$ .

根据同样的公理, 可以定义环的对数赋值 (logarithmic valuations of rings). 每个具有非 Archimedes 范数 (见域上的范数 (norm on a field)) 的环可成为一个对数赋值环, 只要在其值域中将乘法变为加法, 并把次序颠倒一下就行了. 元素 0 自然地记为  $\infty$ . 反过来, 从有对数赋值的环到有非 Archimedes 范数的环的转换也是可行的. 若一环中给定了一非 Archimedes 实范数 (real norm), 则通过用  $-\log \alpha$  代替正实数  $\alpha$  可得到相应的变换, 所得到的对数赋值也称为实的 (real).

两个赋值  $v_1: K \rightarrow \Gamma_\infty^1$  和  $v_2: K \rightarrow \Gamma_\infty^2$  称为是等价的 (equivalent), 如果存在一个序群之间的同构  $\varphi: \Gamma^1 \rightarrow \Gamma^2$ , 使得对所有  $K$  中非零元  $x$  有

$$v_2(x) = \varphi(v_1(x)).$$

$K$  中使  $v(x) \geq 0$  的  $x$  的集合是  $K$  的一个子环  $A$ , 称为  $v$  在  $K$  中的赋值环 (valuation ring). 它恒为局部环 (local ring).  $K$  中使  $v(x) > 0$  的  $x$  构成  $A$  中一个极大理想  $m_v$ , 称为  $v$  的赋值理想 (valuation ideal). 商环  $A/m_v$  是一个域, 称为赋值  $v$  的剩余域 (residue field of valuation).

设  $v_1$  和  $v_2$  是域  $K$  中两个赋值. 它们的赋值环 (看作是  $K$  的子环) 是相同的, 当且仅当这两赋值是等价的. 这样, 欲知域  $K$  的所有赋值 (在等价意义下) 等同于欲知该域的所有可作为赋值环的子环.  $K$  的一个子环  $A$  是  $K$  的一个赋值环, 当且仅当对任一  $x \in K^*$ ,  $x$  与  $x^{-1}$  中至少一个属于  $A$ . 于是赋值环可以抽象地定义为一个整环 (整环 (integral domain)), 在其商域中满足上述条件. 每个这样环都是其商域的所谓典范赋值 (canonical valuation) 的环, 这种赋值的值群是  $K^*/U$ , 这里  $U$  是  $A$  的可逆元素生成的乘法群.  $K^*/U$  是依可除性排序的.

赋值环也用其他方法定义. 若  $A \subseteq B \subseteq K$  是两个局部环, 其极大理想分别为  $m$  和  $n$ . 如果  $m \subset n$ , 则  $B$  优于 (dominant)  $A$ . 优性在  $K$  的全部子环集合中定义了一个偏序, 这个集合之极大元恰是  $K$  的赋值环. 如果  $A$  是一赋值环,  $B \supset A$ , 且环  $B$  与  $A$  有同一商域, 则  $B$  也是赋值环, 它是  $A$  相对于某素理想的局部化.

### 赋值的例子

1) 由

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{如 } x \neq 0, \\ \infty, & \text{如 } x = 0, \end{cases}$$

定义的赋值称为非正常的 (improper) 或平凡的 (trivial), 任一有限域的赋值是平凡的.

2)  $k$  为域,  $K = k((t))$  是  $k$  上 Laurent 级数所构成的域, 定义级数  $a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \cdots$  ( $a_n \neq 0$ ) 的赋值为它的阶  $n$  ( $0$  级数赋值为  $\infty$ ), 此赋值的值群为  $\mathbb{Z}$  (整数加群). 赋值环为  $k[[t]]$ .

赋值的值在  $\mathbb{Z}$  中, 则称它为离散的 (discrete). 关于这种赋值环见离散赋范环 (discretely-normed ring). 关于有理数域上所有赋值的描述见 [4].

对每个全序 Abel 群  $\Gamma$ , 存在一个域的赋值, 以  $\Gamma$  为值群.

**赋值环的理想.** 赋值环中的理想集合按包含关系构成一全序集. 每个有限型理想是主理想, 即赋值环是一 Bezout 环 (Bezout ring). 利用赋值的值群可给赋

值环中理想的结构以最完全的描述.

全序集的一个子集  $M$  称为优 (major) 集. 如果由  $x \in M$ , 且  $y > x$ , 可得到  $y \in M$ . 设  $A$  是域  $k$  的赋值  $v$  的环, 值群为  $\Gamma$ .  $\Gamma^+$  记  $\Gamma$  中正元素作成的子半群,  $M$  是  $\Gamma^+$  中的一优集. 映射

$$M \mapsto \alpha(M) = \{x: x \in K, v(x) \in M \cup \{\infty\}\}$$

是  $\Gamma^+$  的优集与  $A$  的理想集之间的一个一一对应. 主理想对应一个有极小元的优集. 素理想也对应特殊形状的优集, 即  $M_H = \Gamma^+ \setminus H^+$ ,  $H^+$  是  $\Gamma$  的凸子群 (convex subgroup)  $H$  的正部分. 这样, 在  $A$  素理想集合与值群  $\Gamma$  的凸子群之间存在着——对应.

设  $p$  是对应于凸子群  $H$  的素理想, 则合成映射  $K \xrightarrow{v} \Gamma \rightarrow \Gamma/H$  是  $K$  的一个赋值. 赋值环为  $A_p$ , 赋值理想为  $pA_p$ , 进一步在  $A_p/pA_p$  上有一诱导赋值, 取值在  $H$  中, 赋值环为  $A/p$ . 用这方法将一个赋值分为较简单的几个赋值. 设  $A$  为赋值环.  $A$  去掉  $0$  的素谱 ( $\text{Spec } A \setminus (0)$ ) 是一全序集. 它的型称为对应的赋值的高 (height) 或秩 (rank). 如果  $\text{Spec } A$  是有限的, 则赋值的高就是  $\text{Spec } A \setminus (0)$  的元素个数, 这也就是  $\Gamma$  的真凸子群的个数. 有限秩赋值可约简为秩为  $1$  的赋值. 后者主要特征是其值群是 Archimedes 的 (见 Archimedes 群 (Archimedean group)), 即它们同构于实数加法群  $\mathbb{R}$  的子群. 此时映射  $x \mapsto \exp(-v(x))$  是  $K$  上超度量范数.

赋值环的一个重要性质是它是整闭的. 进而对任一整环  $A$ , 它的整闭包等于包有  $A$  的所有赋值环的交, 一赋值环是全整闭的, 当且仅当它取值为实数, 即秩为  $1$ . 一赋值环是 Noether 环, 当且仅当赋值是离散的.

**赋值与拓扑.** 设  $v: K \rightarrow \Gamma_\infty$  是域  $K$  的赋值, 设  $V_\gamma = \{x | x \in K, v(x) > \gamma\}$ , 其中  $\gamma \in \Gamma$ . 所有的  $V_\gamma$  ( $\gamma \in \Gamma$ ) 作为零的基本邻域组, 则得到  $K$  的拓扑  $\tau_v$ , 称为由赋值  $v$  定出的拓扑. 它是可分的且不连通的. 拓扑  $\tau_v$  可按通常法则诱导到  $A$  之上, 与局部环的拓扑不同. 对  $K$  上一非平凡赋值  $v$ , 拓扑  $\tau_v$  是局部紧的, 当且仅当  $v$  是离散的, 赋值环为完全的且剩余类域是有限域. 于是  $A$  是紧的.  $K$  在  $\tau_v$  之下的完全化  $\hat{K}$  是一个域. 由连续性  $v$  可扩张为  $\hat{v}: \hat{K} \rightarrow \Gamma_\infty$ ,  $\hat{K}$  的拓扑与  $\tau_v$  相同.  $\hat{v}$  的赋值环  $\hat{A}$  是  $v$  的赋值环  $A$  的完全化.

$K$  的两个赋值  $v_1$  和  $v_2$  称为无关的, 如果两个拓扑  $\tau_{v_1}$  与  $\tau_{v_2}$  是不同的. 这事实等价于环  $A_{v_1}$  和  $A_{v_2}$  生成  $K$ . 高为  $1$  的不等价赋值总是无关的. 我们有赋值逼近定理 (approximation theorem for valuations): 设  $v_i: K \rightarrow \Gamma_\infty^i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 是两两无关的赋值, 设  $a_i \in K$ ,  $\alpha_i \in \Gamma^i$ , 则存在  $K$  的一元素  $x$ , 使得对所有  $i$  有



$$v_i(x_i - a_i) \geq \alpha_i.$$

**赋值的扩张.** 若  $v: L \rightarrow \Gamma'_v$  是  $L$  的赋值,  $K$  是  $L$  的子域, 则  $v$  在  $K$  上限制  $v = v'|_K$  是  $K$  的赋值, 它的值群  $\Gamma$  是  $\Gamma'$  的子群.  $v'$  就称作  $v$  的扩张 (extension). 反之, 若  $v$  是  $K$  的赋值,  $L$  是  $K$  的扩张, 那么总有  $L$  的一个赋值是  $v$  的扩张.  $\Gamma$  在  $\Gamma'$  中的指数  $[\Gamma': \Gamma]$  称作  $v'$  相对于  $v$  的分歧指数 (ramification index), 记为  $e(v'/v)$ , 剩余类域  $k_v$  可与  $K_v$  中一子域等同, 扩张次数  $[k_{v'}: k_v]$  称为  $v'$  相对于  $v$  的剩余次数 (residue degree), 记为  $f(v'/v)$ .  $v$  的扩张  $v'$  称为直接的 (immediate), 如果  $e(v'/v) = f(v'/v) = 1$ .

设  $L$  是  $K$  的扩张, 并设  $\{v_i: i \in I\}$  是  $v$  对  $L$  的扩张的集合, 如果  $L$  是  $K$  上有限次扩张, 次数为  $n$ , 则  $v$  的所有扩张集合是有限的, 并有

$$\sum_{i \in I} e(v_i/v) f(v_i/v) \leq n.$$

在若干条件下, 等号成立. 例如, 当  $v$  是离散且或  $K$  完全或  $L$  在  $K$  上可分时; 若  $L$  是  $K$  的正规扩张,  $v$  在  $L$  上的扩张被  $L$  的  $K$  同构可迁地置换; 特别地, 如果  $L$  是  $K$  的纯不可分扩张, 则  $v$  只有一个扩张. 在任意域扩张  $K \subset L$  的情形,  $L$  在  $K$  上的超越次数大于或等于和

$$S(v'/v) + r(v'/v),$$

这里  $S(v'/v)$  是  $v'$  的剩余类域对  $v$  的剩余类域的超越次数,  $r(v'/v)$  是空间  $(\Gamma_{v'}/\Gamma_v) \otimes \mathbb{Q}$  的维数.

赋值概念是由 W. Krull ([1]) 引入和研究的. 它也被广泛地应用于代数几何中. 如用赋值的术语可以构造抽象 Riemann 曲面 (见 [3]).

#### 参考文献

- [1] Krull, W., Allgemeine Bewertungstheorie, J. Reine Angew. Math., 167 (1932), 160 - 196.
- [2] Bourbaki, N., Commutative algebra, Elements of mathematics, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).
- [3] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 2. Springer, 1975.
- [4] Курош А. Г., Лекций по общей алгебре, 2 изд., М. 1973 (英译本: Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsea, 1963). В. И. Данилов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [1] Endler, O. Valuation theory, Springer, 1972.

冯绪宁 译

**值分布论** [value-distribution theory; распределения значений теория], Nevanlinna 理论 (Nevanlinna theory)

由 R. Nevanlinna 于 20 世纪 20 年代开发的关于

亚纯函数的值之分布的理论 (见 [1]). 此理论的基本问题是研究区域  $G$  中使函数  $w(z)$  在其上取预先指定的值  $w = a$  的点 (称为  $a$  点 ( $a$ -point)) 构成的集合  $\{z_n\}$ , 这里  $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

**基本概念.** Nevanlinna 理论的基本内容可通过取  $w = f(z)$  为开复平面  $\mathbb{C}$  上的超越亚纯函数 (meromorphic function) 的情形加以说明. 以  $n(t, a, f)$  记  $f(z)$  位于圆盘  $\{|z| \leq t\}$  中的  $a$  点数 (计及重数). 再对每个  $a \in \mathbb{C}$ , 定义

$$N(r, a, f) = \int_0^r [n(t, a, f) - n(0, a, f)] d \ln t + n(0, a, f) \ln r,$$

$$m(r, a, f) = m \left[ r, \infty, \frac{1}{f-a} \right], \quad a \neq \infty,$$

$$m(r, \infty, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

$$T(r, f) = m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f).$$

$T(r, f)$  称为  $f(z)$  的 Nevanlinna 特征 (Nevanlinna characteristic) 或 Nevanlinna 特征函数 (Nevanlinna characteristic function). 函数  $m(r, a, f)$  描述当  $|z| \rightarrow \infty$  时  $f(z)$  趋于  $a$  的平均速率, 而函数  $N(r, a, f)$  描述  $f(z)$  的  $a$  点的平均分布密度. 由下述定理可得 Nevanlinna 特征  $T(r, f)$  的一个几何解释. 以  $F_r$  记  $f(z)$  的 Riemann 曲面 (Riemann surface) 对应于圆盘  $\{|z| \leq r\}$  的部分, 设  $\pi A(r, f)$  是曲面  $F_r$  的球面面积, 则

$$T(r, f) = \int_0^r A(s, f) d \ln s + O(1) \quad (r \rightarrow \infty).$$

$T(r, f)$  可用来确定  $f(z)$  增长的级  $\rho$  及其增长的下级  $\lambda$ :

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}, \quad \lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}.$$

Nevanlinna 第一基本定理 (Nevanlinna first main theorem): 当  $r \rightarrow \infty$  时, 有

$$m(r, a, f) + N(r, a, f) = T(r, f) + O(1);$$

这表明, 不计  $r \rightarrow \infty$  时的一个有界项, 上式左边取常值  $T(r, f)$  (不管  $a$  取何值). 在此意义下, 亚纯函数  $f(z)$  的所有值  $w$  是等价的. 函数  $N(r, a, f)$  当  $r \rightarrow \infty$  时的性态具有特殊意义; 在值分布论中它被用于函数  $N(r, a, f)$  和  $m(r, a, f)$  的增长相对于特征  $T(r, f)$  的增长的下述定量量度:

$$\begin{aligned} \delta(a, f) &= 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)} = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} \leq 1, \end{aligned}$$

$$\Delta(a, f) = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} \leq 1.$$

量  $\delta(a, f)$  称为  $f(z)$  在  $a$  处的 Nevanlinna 亏量 (Nevanlinna defect),  $\Delta(a, f)$  称为  $f(z)$  在  $a$  处的 Valiron 亏量 (Valiron defect). 令

$$D(f) = \{a: \delta(a, f) > 0\},$$

$$V(f) = \{a: \Delta(a, f) > 0\}.$$

$D(f)$  称为  $f(z)$  的 Nevanlinna 意义下的亏值 (见亏值 (defective value)) 集, 而  $V(f)$  称为  $f(z)$  的 Valiron 意义下的亏值集. 关于  $f(z)$  的亏量大小和亏值集的 Nevanlinna 定理 (Nevanlinna theorem) 如下: 对任何亚纯函数  $f(z)$ , 有 a) 集合  $D(f)$  至多为可数; b)  $f(z)$  的亏量满足关系

$$\sum_{(a)} \delta(a, f) \leq 2 \quad (1)$$

(亏量关系 (defect relation)). (1) 中的常数 2 是扩充复平面  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  的 Euler 示性数, 而扩充复平面为  $f(z)$  的 Riemann 曲面所覆盖.

**集合  $D(f)$  的结构.** Nevanlinna 关于集合  $D(f)$  至多为可数的论断不能再加强. 事实上, 给定扩充复平面中任一有限或可数点集  $E$  和任一值  $\rho$  ( $0 < \rho \leq \infty$ ), 存在  $\rho$  级亚纯函数  $f_\rho(z)$ , 使得  $E$  与  $D(f_\rho)$  相同. 对于下级为零的亚纯函数  $f$ ,  $D(f)$  可以至多含有一个点. 这样,  $D(f)$  的结构问题完全得解.

此外可以证明, 对任一  $\rho > 1/2$ , 存在  $\rho$  级整函数  $g_\rho(z)$ , 使集合  $D(g_\rho)$  是可数的. 下级  $\lambda \leq 1/2$  的整函数不可能有有限亏值.

**集合  $V(f)$  的结构.** Valiron 亏值集  $V(f)$  的研究仍不完全 (1992). G. Valiron 证明, 存在 1 级整函数  $g(z)$ , 使集合  $V(g)$  具有连续统基数. 另一方面可以证明, 对任一亚纯函数  $f(z)$ , 集合  $V(f)$  的对数容量 (logarithmic capacity) 恒为零.

对于任一对数容量为零的  $F_\sigma$  类集合  $E$ , 存在无穷级整函数  $g(z)$ , 使得  $E \subset V(g)$ .

**有限下级亚纯函数亏量的性质.** 一般地说, 对于无穷下级亚纯函数, 其亏量并不满足除亏量关系 (1) 之外的任何别的关系. 然而, 如果限于考虑有限下级亚纯函数, 则情形有相当大的变化. 事实上, 如果  $f(z)$  具有有限下级  $\lambda$ , 则对任一  $\alpha$  ( $1/3 \leq \alpha \leq 1$ ), 有

$$\sum_{(a)} \delta^\alpha(a, f) \leq K(\lambda, \alpha), \quad (2)$$

其中常数  $K(\lambda, \alpha)$  只依赖于  $\lambda$  和  $\alpha$ . 另一方面, 存在有限下级亚纯函数, 使得 (2) 左边的级数当  $\alpha <$

$1/3$  时发散. 对于下级  $\lambda \leq 1/2$  的亚纯函数  $f(z)$ , 满足  $\delta(a, f) \geq 1 - \cos \pi \lambda$  的亏值  $a$  的存在性影响  $f$  的渐近性态: 这样的函数不可能有别的亏值.

**值分布论的反问题.** 在多少有点简化的形式下, 能以下述方式表述任一亚纯函数类  $\mathcal{N}$  的值分布论的反问题. 对扩充复平面中某个序列  $\{a_k\}$  的每个点  $a_k$  指定一个数  $\delta(a_k)$  ( $0 < \delta(a_k) < 1$ ), 使它们满足  $\sum_k \delta(a_k) \leq 2$ . 需要求出函数  $f(z) \in \mathcal{N}$ , 使得  $\delta(a_k, f) = \delta(a_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 且对每个  $a \neq a_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 有  $\delta(a, f) = 0$ ; 或者证明  $\mathcal{N}$  不含有这样的函数. 对于无穷下级整函数类和无穷下级亚纯函数类, 反问题已完全得到肯定的解. 在解有限下级亚纯函数类反问题时出现了特殊困难, 这是由于此时亏量满足除 (1) 外的别的关系 (例如 (2)).

**亚纯函数的增长.** 给定亚纯函数  $f(z)$ , 令

$$L(r, \infty, f) = \max_{|z|=r} \ln^+ |f(z)|,$$

$$L(r, a, f) = L\left(r, \infty, \frac{1}{f-a}\right), \quad a \neq \infty,$$

$$\beta(a, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

$\beta(a, f)$  称为  $f(z)$  与  $a$  的离差 (deviation), 集合  $\Omega(f) = \{a: \beta(a, f) > 0\}$  称为  $f(z)$  的正离差集;  $D(f) \subseteq \Omega(f)$ . 已知如果  $g(z)$  是有限  $\rho$  级整函数, 则

$$\beta(\infty, g) = \begin{cases} \frac{\pi \rho}{\sin \pi \rho}, & \text{若 } 0 < \rho < 1/2, \\ \pi \rho, & \text{若 } \rho \geq 1/2. \end{cases}$$

于是就有下述结论: 如果亚纯函数  $f(z)$  具有有限下级  $\lambda$ , 则 a)  $\Omega$  是至多可数集; b) 对每个  $a$ ,

$$\beta(a, f) \leq \begin{cases} \frac{\pi \lambda}{\sin \pi \lambda}, & \text{若 } 0 < \lambda < 1/2, \\ \pi \lambda, & \text{若 } \lambda \geq 1/2; \end{cases}$$

c) 对任一  $\alpha$  ( $1/2 < \alpha \leq 1$ ),

$$\sum_{(a)} \beta^\alpha(a, f) \leq K(\lambda, \alpha),$$

其中常数  $K(\lambda, \alpha)$  只依赖于  $\lambda$  和  $\alpha$ ; d)  $\Omega(f) \subseteq V(f)$ .

再则, 存在有限下级亚纯函数  $f$ , 使得集合  $\Omega(f)$  具有连续统基数. 对任一亚纯函数  $f$ , 集合  $\Omega(f)$  (类似于  $V(f)$ ) 具有零对数容量. 下述定理刻画了  $\delta(a, f)$  与  $\beta(a, f)$  之间的差别: 对任一  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda < \infty$ ) 存在下级为  $\lambda$  的亚纯函数  $f_\lambda(z)$ , 使对某个  $a$  有

$$\delta(a, f) = 0, \quad \beta(a, f) \geq 1.$$

**亚纯函数在 Picard 和 Borel 意义下的例外值.**  $a$  称为亚纯函数  $f(z)$  的 Picard 意义下的例外值 (exceptional value), 如果  $f(z)$  在  $\{|z| < \infty\}$  中的  $a$  点数



为有限. 值  $a$  称为  $f(z)$  的 Borel 意义下的例外值, 如果当  $r \rightarrow \infty$  时  $n(r, a, f)$  的递增 (在某种意义下) 慢于  $T(r, f)$ . 非常值亚纯函数不可能有多于两个 Borel (从而 Picard) 例外值.

复流形的全纯映射的值分布论作为 Nevanlinna 理论的高维推广正成功地得到发展 (见 [6], [7]), 极小曲面的值分布论也是如此 (见 [9], [10]).

**圆盘内亚纯函数的值分布论.** 开复平面内亚纯函数的值分布论已如上述; 这是抛物情形. 也能建立双曲情形即  $f(z)$  是单位圆盘  $\{|z| < 1\}$  内的亚纯函数时的增长和值分布理论 (见 [1], [8]). 此时函数  $N(r, a, f)$ ,  $m(r, a, f)$ ,  $L(r, a, f)$  和  $T(r, f)$  对  $0 \leq r < 1$  如同抛物情形一样定义; 而  $f(z)$  在点  $a$  的 Nevanlinna 和 Valiron 亏量定义如下:

$$\delta(a, f) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)},$$

$$\Delta(a, f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

量

$$\beta(a, f) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{L(r, a, f)}{T(r, f)}$$

称为  $f(z)$  关于  $a$  的离差. 令  $D(f) = \{a: \delta(a, f) > 0\}$ ,  $V(f) = \{a: \Delta(a, f) > 0\}$ ,  $\Omega(f) = \{a: \beta(a, f) > 0\}$ .

抛物情形下关于  $\delta(a, f)$ ,  $\Delta(a, f)$  和  $\beta(a, f)$  的主要性质以及集合  $D(f)$ ,  $V(f)$  和  $\Omega(f)$  的结构都可移植到双曲情形, 但仅对于当  $r \rightarrow 1$  时  $T(r, f)$  (在某种意义下) 急速增长的那些函数.

#### 参考文献

- [1] Nevanlinna, R., *Analytic functions*, Springer, 1970 (译自德文).
- [2] Hayman, W. K., *Meromorphic functions*, Clarendon Press, 1964.
- [3] Аракелян, Н. У., «Докл. АН СССР», 170 (1966), 5, 999 – 1002.
- [4] Гольдберг, А. А., Островский, И. В., *Распределение значений мероморфных функций*, М., 1970.
- [5A] Петренко, В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 33 (1969), 6, 1330 – 1348.
- [5B] Петренко, В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 34 (1970), 1, 31 – 56.
- [6] Griffiths, P., King, J., *Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties*, *Acta Math.*, 130 (1975), 145 – 220.
- [7] Шабат, Б. В., *Введение в комплексный анализ*, 2 изд., ч. 2, М., 1976 (英译本: Shabat, B. V., *Introduction to complex analysis, Part II Functions of several variables*, Amer. Math. Soc., 1992).
- [8] Петренко, В. П., *Рост мероморфных функций*,

Хар., 1978.

- [9] Петренко, В. П., «Докл. АН СССР», 256 (1981), 1, 40 – 42.

- [10] Beckenbach, E. F., Hutchison, G. A., *Meromorphic minimal surfaces*, *Pacific J. Math.*, 28 (1969), 1, 17 – 47.

В. П. Петренко 撰

**【补注】** 值分布论反问题 (以比条中所述较为深刻的形式) 的解属于 D. Drasin ([A1]); 对于整函数的反问题先前已为 W. H. J. Fuchs 和 W. K. Hayman 解决 (见 [2], 第四章). 满足  $\sum_{(a)} \delta(a, f) = 2$  的有限下阶函数  $f$  的刻画也属于 Drasin ([A2]). (2) 中的和当  $\alpha = 1/3$  时为有限是 A. Weitsman 证明的 ([A3]); 先前 Hayman 证明对  $\alpha > 1/3$  此论断为真. 另一方面, 存在有限阶亚纯函数, 使 (2) 中的和对每个  $\alpha < 1/3$  发散. 对于整函数, 情形并不相同. 近来 J. L. Lewis 和 J.-M. Wu 证明 ([A4]), 存在  $\alpha_0 < 1/3$ , 使得 (2) 中的和对任一  $\alpha > \alpha_0$  和任何有限下阶整函数 (entire function)  $f$  均收敛. 事实上, 按照 Н. У. Аракелян 早先的一个猜想, 对于这类函数有  $\sum_{(a)} [\log 1/\delta(a, f)]^{-1} < \infty$ . 这或许是关于亏量尚未解决的主要问题.

关于多变量值分布论的详细讨论, 见 [A5] 和 [A7] 中的论文.

P. Vojta 于 1986 年前后 ([A6]) 发现了值分布论的基本定理与来自 **Diophantus 逼近** (Diophantine approximation) 的定理之间值得重视的类似性. 设  $k$  是  $d$  次代数数域,  $B \subset k$  是一无穷子集. 设  $S$  是  $k$  上的赋值 (适当加以规范化) 的一个有限集合, 其中包括无穷赋值. 所说类似性的指导原理在于, Nevanlinna 理论中  $r$  的集合代之以  $B$ , 角  $\theta$  变成  $S$  的元素, 而  $|f(re^{i\theta})|$  变成  $\|b\|_v$ . 关于更完整的定义, 见 [A6]. 类似于  $T(r, f)$  的是  $h(b) = (1/d) \cdot \sum_v \log^+ \|b\|_v$ , 类似于  $m(r, a, f)$  的是  $m(a, b) = (1/d) \sum_{v \in S} \log \|1/(b-a)\|_v$ , 而  $N(r, a, f)$  转为  $N(a, b) = (1/d) \sum_{v \notin S} \log^+ \|1/(b-a)\|_v$ . 于是第一基本定理变为  $N(a, b) + m(a, b) = h(b) + O(1)$ , 而这是代数数论 (algebraic number theory) 中关于高的一个熟知性质. 也能引进一种亏量  $\delta(a) = \liminf_{b \in B} m(a, b)/h(b)$ , 论断  $\sum_{a \in k} \delta(a) \leq 2$  恰是关于代数数由  $k$  中元素逼近的 Roth 定理 (Roth theorem).

多元亚纯函数值分布的类似转述导致 Diophantus 逼近和 Diophantus 方程领域中的一些令人极感兴趣的猜想.

#### 参考文献

- [A1] Drasin, D., The inverse problem of Nevanlinna theory, *Acta Math.*, 138 (1977), 83 – 151.
- [A2] Drasin, D., Proof of a conjecture of F. Nevanlinna

concerning functions which have deficiency sum two, *Acta Math.*, **158** (1987), 1 - 94.

[A3] Weitsman, A., A theorem on Nevanlinna deficiencies, *Acta Math.*, **125** (1972), 41 - 52.

[A4] Lewis, J. L., Wu, J.-M., On conjectures of Arakelyan and Littlewood, *J. d'Anal. Math.*, **50** (1988), 259 - 283.

[A5] Laine, I., Rickman, S. (eds.), Value distribution theory, Lecture notes in math., 981, Springer, 1983.

[A6] Vojta, P., Diophantine approximation and value distribution theory, Lecture notes in math., 1239, Springer, 1987.

[A7] Griffiths, P. A., Entire holomorphic mappings in one and several variables, Princeton Univ. Press, 1976.

#### 【译注】

#### 参考文献

[B1] 杨乐, 值分布论及其新研究, 科学出版社, 1982.

[B2] 张广厚, 整函数和亚纯函数理论: 亏值、渐近值和奇异方向, 科学出版社, 1986. 沈永欢 译

van der Pol 方程 [van der Pol equation; ван дер Поля уравнение]

二阶非线性常微分方程

$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ ,  $\mu = \text{正常数}$ ,

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}, \quad (1)$$

它是 **Liénard 方程** (Liénard equation) 的一个重要的特殊情形. van der Pol 方程描绘了最简单的振动系统之一 (van der Pol 振子 (van der Pol oscillator)) 的自振动 (auto-oscillation). 特别是, 在作出一些简化假定后, 方程 (1) 可为具有 3 次特性的三极管发生器提供数学模型. 方程 (1) 的解的特性由 B. van der Pol 首次详尽研究 ([1]).

方程 (1) 等价于两个相位变量  $x, v$  的下列两个方程的方程组:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -x + \mu(1 - x^2)v. \quad (2)$$

有时用变量  $z(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$  代替变量  $x$  是方便的; 此时方程 (1) 变为

$$\ddot{z} - \mu \left( \dot{z} - \frac{\dot{z}^3}{3} \right) + z = 0,$$

它是 **Rayleigh 方程** (Rayleigh equation) 的特殊情形. 如果连同  $x$  还考虑变量  $y = -x + (x^3/3) + (\dot{x}/\mu)$ , 并引进新的时间变量  $\tau = t/\mu$ , 令  $\varepsilon = -\mu^2$ , 则代替方程 (1) 可得方程组

$$\varepsilon x' = y - x + \frac{x^3}{3}, \quad y' = -x, \quad ' = \frac{d}{d\tau}. \quad (3)$$

对任一  $\mu > 0$ , 在方程组 (2) 的相平面上存在唯一的稳定极限环, 所有其他轨道 (除坐标系原点处的平衡位置外) 当  $t \rightarrow \infty$  时都收敛于此极限环; 这个极限环描绘了 van der Pol 振子的振动 ([2], [3], [4]).

对于小的  $\mu$  值, 振子 (1) 的自振动接近于周期为  $2\pi$  且具有特定振幅的简谐振动 (见非线性振动 (non-linear oscillations)). 为更精确地计算振动过程, 可用渐近方法. 当  $\mu$  增大时, 振子 (1) 的自振动越来越偏离谐振动. 当  $\mu$  取大的值时, 方程 (1) 描绘了具有周期  $1.614\mu$  (第一级近似) 的松弛振动 (relaxation oscillation). 已经知道刻画松弛振动的量的更精确的渐近展开式 ([5]); 这些振动的研究等价于具有导数前小系数  $\varepsilon$  的方程组 (3) 的解的研究 ([6]).

方程

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = E_0 + E \sin \omega t$$

描述受到周期外来扰动作用时 van der Pol 振子的行为. 这方面最重要的是研究频率俘获 (frequency capture) (周期振动的存在性)、拍 (beat) (殆周期振动的可能性) 和混沌行为 (chaotic behaviour) ([2], [4]).

#### 参考文献

[1A] Pol, B. van der, On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom, *Philos. Mag.*, (6) **43** (1922), 700 - 719.

[1B] Pol, B. van der, *Philos. Mag.* (7), **2** (1926), 978 - 992.

[2] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959 (中译本: А. А. 安德罗诺夫, А. А. 维特, С. Э. 哈依金, 振动理论, 科学出版社, 1973 - 1974).

[3] Lefschetz, S., Differential equations: geometric theory, Interscience, 1957 (中译本: S. 莱夫谢茨, 微分方程几何理论, 上海科学技术出版社, 1965).

[4] Stoker, J. J., Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems, Interscience, 1950.

[5] Дородницын, А. А., «Прикл. матем. и механика», **11** (1947), 313 - 328.

[6] Мищенко, Е. Ф., Розов, Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975 (英译本: Mischenko, E. F., Rozov, N. Kh., Differential equations with small parameters and relaxation oscillations, Plenum Press, 1980). Н. Х. Розов 撰

【补注】对于小的  $\mu$  值, 已用符号演算计算出振幅和周期的级数的前 164 项, 见 [A1]. [5] 中的计算在 [A2] 中得到改进. 关于自由和强迫 van der Pol 振子的最近概述, 见 [A3].

#### 参考文献

[A1] Dadfar, M. B., Geer, J. and Andersen, C. M., Per-



turbation analysis of the limit cycle of the free van der Pol equation, *SIAM J. Appl. Math.*, **44** (1984), 881 – 895.

[A2] Bavinck, H. and Grasman, J., The method of matched asymptotic expansions for the periodic solution of the van der Pol equation, *Int. J. Nonlin. Mech.*, **9** (1974), 421 – 434.

[A3] Grasman, J., Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications, Springer, 1987.

[A4] Guckenheimer, J. and Holmes, P., Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer, 1983. 沈永欢 译

**van der Waerden 检验** [van der Waerden test; ван дер Вардена критерий]

两个样本  $Y_1, \dots, Y_n$  和  $Z_1, \dots, Z_n$  齐一性的非参数检验 (non-parametric test), 基于秩统计量 (rank statistic)

$$X = \sum_{i=1}^m \Psi \left[ \frac{s(r_i)}{m+n+1} \right],$$

其中  $r_i$  是在  $Y_i$  和  $Z_i$  的联合顺序统计量序列中随机变量  $Z_i$  的秩 (序数); 函数  $s(r)$  决定于事先选定的置换

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & m+n-1 \\ s(1) & \cdots & s(m+n) \end{pmatrix},$$

而  $\Psi(p)$  是参数为  $(0,1)$  的正态分布 (normal distribution) 函数的反函数. 置换的选取, 应使对于给定备选假设检验的功效最大. 当  $m+n \rightarrow \infty$  时 (不管  $m$  和  $n$  单独如何变化),  $X$  的极限分布是正态的. 如果  $Y$  和  $Z$  独立, 都服从正态分布, 且方差相等, 则对于备选假设 ( $T$  为任意实数):

$$P\{Y < T\} < P\{Z < T\} \text{ 或 } P\{Y < T\} > P\{Z < T\}$$

(这时  $s(r) \equiv r$ ), van der Waerden 检验与 Student 检验 (Student test) 在渐近意义下有相同功效. 此检验是 B. L. van der Waerden 在 [1] 中提出的.

#### 参考文献

[1] Waerden, B. L. van der, Order tests for the two-sample problem and their power, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. A*, **55** (1952), 453 – 458.

[2] Waerden, B. L. van der, *Mathematische statistik*, Springer, 1957.

[3] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1983.

А. В. Прохоров 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[1] Lehmann, E. L., *Testing statistical hypotheses*, Wiley, 1988.

[2] Kendall, M. G. and Stuart, A., *The advanced theory of statistics*, 2, Griffin, 1979. 周概容 译

**van der Waerden 定理** [van der Waerden theorem; ван дер Вардена теорема], 关于算术级数的

【补注】 给定自然数  $l, m$ , 一定存在数  $N(l, m)$ , 使得当  $n \geq N(l, m)$  及集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  分拆成  $m$  个子集合时, 至少有一个子集合含有某个等差数列 (arithmetic progression) 中的相邻的  $l$  项 (见 [A1]). 此外, 对于非有限情况, 等价的表述如下: 设  $X_1 \cup \dots \cup X_l = N$  是自然数的有限分拆, 则至少有一个  $X_i$  含有任意长的算术级数. 这一结果是 A. Baudet 猜测的. 设  $\mathcal{A} \subset \{1, 2, \dots\}$  是一自然数集合而  $d(\mathcal{A})$  是其上渐近密度 (asymptotic density). 当讨论上述 van der Waerden 的定理时, P. Erdős 和 P. Turán 猜测若  $d(\mathcal{A}) > 0$  则  $\mathcal{A}$  含有任意长的算术级数 (见 [A2]).

设  $B(l, n)$  是  $\{1, \dots, n\}$  的不含有算术级数中相邻  $l$  个元素的极大子集,  $b(l, n)$  是  $B(l, n)$  中元素的个数, 则有 Szemerédi 定理 (Szemerédi theorem) (见 [A3]):  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} b(l, n) = 0$ . 这一结果隐含了 Erdős-Turán 猜想 (Erdős-Turán conjecture). Szemerédi 定理的另一证明由 H. Furstenberg 基于遍历理论 (ergodic theory) (见 [A4]) 的思想得出.

有关 van der Waerden 定理本身的历史说明见 [A6].

#### 参考文献

[A1] Waerden, B. L. van der, Beweis einer Baudetschen Vermutung, *Nieuw Arch. Wisk.*, **15** (1927), 212 – 216.

[A2] Erdős, P. and Turán, P., On some sequences of integers, *J. London Math. Soc.*, **11** (1936), 261 – 264.

[A3] Szemerédi, E., On sets of integers containing no  $k$ -elements in arithmetic progression, *Acta Arithm.*, **27** (1975) 199 – 245.

[A4] Furstenberg, H., Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions, *J. d'Anal. Math.*, **31** (1977), 204 – 256.

[A5] Furstenberg, H., *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton Univ. Press, 1981.

[A6] Хинчин, А. Я., Три жемчужины теории чисел, Гостехиздат, Москва (英译本: Khinchin, A. Ya., *Three pearls of number theory*, Graylock, 1952). 戚鸣皋 译 潘承彪 校

**Vandermonde 行列式** [Vandermonde determinant; Вандер -

монда определитель]

一个  $n$  阶行列式 (determinant), 具有下列形式:

$$B(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, (*)$$

其中  $a_1, \dots, a_n$  是一个交换环的元素, 对于任何  $n \geq 2$ , 有

$$B(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

如果该交换环不含零因子, 则下述 Vandermonde 行列式的基本性质成立:  $B(a_1, \dots, a_n) = 0$ , 当且仅当并非所有的元素  $a_1, \dots, a_n$  彼此都不相同. 这个行列式首先由 A. T. Vandermonde 对  $n = 3$  的情况进行研究 ([1]), 后来又由 A. L. Cauchy 进行研究 ([2]).

#### 参考文献

- [1A] Vandermonde, A. T., Histoire Acad. R. Sci. Paris (1771 (1774)), 365 - 416.
- [1B] Vandermonde, A. T., Histoire Acad. R. Sci. Paris (1772 (1776)), 516 - 532.
- [2A] Cauchy, A. A., Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs, J. École Polytechnique, 17 (1815), 10, 29.
- [2B] Cauchy, A. A., Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs, in Oeuvres Sér. 2, Vol. 1, Gauthier-Villars, 1905, 91 - 169.

B. H. Ремесленников 撰

【补注】 由 (\*) 中的元素构成的矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

称为 Vandermonde 矩阵 (Vandermonde matrix).

在逼近论中用到了 Vandermonde 矩阵. 例如, 应用这个矩阵就可以证明: 存在唯一的  $n$  次多项式, 在  $n+1$  个不同的点上取预先指定的值, 见 [A1], p. 58. 关于计算 Vandermonde 矩阵的逆矩阵的算法, 见 [A1], p. 64, 问题 13.

#### 参考文献

- [A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.

杜小杨 张鸿林 译

消没闭链 [vanishing cycle; исчезающий цикл]

【补注】 设  $X$  是  $n$  维有边界的复流形,  $U$  是 Riemann 曲面,  $f: X \rightarrow U$  是逆紧全纯映射, 它在  $X$  的边界上无临界点, 在内部只有具有不同临界值的非退化临界点. 设  $\gamma$  是  $U$  上一条道路, 使得  $\gamma(0)$  是  $f$  的临界值但  $\gamma(\tau)$  是正则值, 这里  $\tau \in (0, 1]$ . 对  $V \subset [0, 1]$  记  $X_V = \{(x, \tau) \in X \times V: f(x) = \gamma(\tau)\}$ , 则群  $H_n(X_{[0, 1]}, X_1)$  是无限循环群. 生成这个群的  $X_{[0, 1]}$  上的  $n$  链  $\Delta$  称为 Lefschetz 箍 (Lefschetz thimble), 它的边缘  $\delta = \partial \Delta \in H_{n-1}(X_1)$  是 (Lefschetz) 消没闭链 ((Lefschetz) vanishing cycle) ([A1]). 它被  $\gamma$  唯一确定到差一个符号. 有两个情形特别重要: 射影簇的超平面截面的 Lefschetz 束 (见单值变换 (monodromy transformation)) 以及孤立完全交奇点的半普遍形变 ([A2], [A3]). 在后一情形下首先限制半普遍形变到一条光滑曲线, 它与判别式横截地相交. 对于连接正则值  $t$  到临界值的道路的适当选择能导出 (或强或弱地) 消没同调群  $H_{n-1}(X_t)$  的特异基.

如果  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  是复空间  $X$  上的全纯函数,  $K$  是  $X$  上可构造的层复形, 则用以下方式可得到  $X_0 = f^{-1}(0)$  上的可构造层复形  $R\Psi_f(K)$ . 设  $H \rightarrow \mathbb{C}^*$  是万有覆叠,  $k: X \times_{\mathbb{C}} H \rightarrow X$ ,  $i: X_0 \rightarrow X$  是自然映射, 则  $R\Psi_f K = i^{-1} Rk_* k^{-1} K$ . 函子  $R\Psi_f$  称为邻近闭链函子 (nearby cycle functor). 在导出范畴  $\dot{D}_c^b(X_0)$  里存在特异三角形

$$i^{-1} K \rightarrow R\Psi_f K \rightarrow R\Phi_f K \xrightarrow{+1},$$

这里  $R\Phi_f$  是与  $f$  相伴的消没闭链函子 (vanishing cycle functor) ([A4]).

如果层复形  $K$  是反常的, 则对  $R\Psi_f K$  和  $R\Phi_f K$  有同样的结论. 如果  $X$  是复流形, 则根据 Riemann-Hilbert 对应, 在正则完整  $D_X$  模的范畴里也有消没与邻近闭链函子  $\varphi_f, \psi_f$  ([A5], [A6]) (亦见  $D$  模 ( $D$ -module), 导出范畴 (derived category)). 它们在混合 Hodge 模的理论里起着关键的作用 ([A7]).

#### 参考文献

- [A1] Lefschetz, S., L'analysis situs et la géométrie algébrique, Gauthiers-Villars, 1924.
- [A2] Arnol'd, V. I., Gusein-Zade, S. M. and Varchenko, A. N., Singularities of differentiable maps, II, Birkhäuser, 1988 (译自俄文).
- [A3] Ebeling, W., The monodromy groups of isolated singularities of complete intersections, Lecture notes in math., 1293, Springer, 1973.
- [A4] Deligne, P. and Katz, N. M. (eds.), Groupes de monodromie en géométrie algébrique, SGA 7<sup>II</sup>, Lecture notes in math., 340, Springer, 1973.
- [A5] Malgrange, B., Le polynôme de I. N. Bernstein d'une singularité isolée, Lecture notes in math., 459, Springer, 1976.



[A6] Mebkhout, Z., Systèmes différentiels. Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les  $D_X$ -modules cohérents, Hermann, 1989.

[A7] Saito, M., Mixed Hodge modules, Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ., 26 (1990), 221 - 333.

J. Steenbrink 撰 陈志杰 译

可变方向法 [variable-directions method; переменных направлений метод]

用差分法或射影差分法逼近, 例如, 椭圆型偏微分方程边值问题的解时, 求解出现的线性或非线性方程组的一种迭代法 (iteration methods).

例如, 假设有两个空间变量和一个正方形网格序列  $\omega_h$ , 其步长为  $h > 0$ , 结点为  $x_i \equiv (i_1 h, i_2 h)$ , 其中  $i = (i_1, i_2)$  是一个有整数分量的向量. 令  $\Omega_h$  是结点  $\omega_h$  的集合, 在 Euclid 空间  $H_h$ , 寻找形如

$$L_h(u_h) = f_h$$

的算子方程的差分或射影差分问题在  $\Omega_h$  上的解.  $H_h$  可以看作是在  $\Omega_h$  的结点上给出的函数空间;  $H_h$  的维数与  $\Omega_h$  的点数  $N_h$  一致.

令

$$A_h u_h(x_i) = \sum_{x_{i+j} \in \Omega_h} a_{i,j} u_h(x_{i+j}), \quad x_i \in \Omega_h, \quad (1)$$

是  $H_h$  映射到  $H_h$  的线性算子. 在算子 (1) 中有这样一种算子, 即 (1) 中非零系数  $a_{i,j}$  仅对应于有  $j_2 = 0$  的位移向量  $j \equiv (j_1, j_2)$ . 这样算子称为一维的 (one-dimensional), 它作用于  $x_1$ , 而且用  $A_{h,x_1}$  表示; 类似地, 对有  $j_1 = 0$  的位移向量, 定义作用于  $x_2$  的一维算子  $A_{h,x_2}$ .

方程组

$$A_{h,x_r} u_h = g_h, \quad r = 1, 2,$$

分裂成单个的子方程组, 其每个子方程组仅与网格中分离为水平 (对  $A_{h,x_1}$ ) 线或垂直 (对  $A_{h,x_2}$ ) 线结点上的  $u_h(x_j)$  值有关. 这个方法的特点在于应用形如

$$R_h = A_{h,x_1} A_{h,x_2}$$

的  $A_h$  的交替算子. 这时, 解方程组

$$A_{h,x_1} A_{h,x_2} u_h = g_h, \quad (2)$$

等于逐次解两个方程组

$$A_{h,x_1} v_h = g_h, \quad (3)$$

$$A_{h,x_2} u_h = v_h, \quad (4)$$

对上面的方程组, 先解网格中在水平线上的分离子方程组 (情况 (3)), 然后改变方向, 解垂直线上的子方

程组 (情况 (4)). 通常, 这样选取算子  $R_h$ , 使得求解 (3) 和 (4) 只含  $O(N_h)$  次算术运算, 因而 (2) 也只含  $O(N_h)$  次算术运算. 所以, 方法中形如

$$R_h^{(n)} u_h^{(n+1)} = R_h^{(n)} u_h^{(n)} - (L_h(u_h^{(n)}) - f_h), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

的每次迭代要求  $O(N_h)$  次算术运算, 其中上标  $n$  代表迭代次数.

这种交换方向的做法可以得到最有效的结果, 其中  $L_h$  是一个自伴正定算子, 而  $R_h^{(n)}$  是一个自伴且可以与  $L_h$  交换的算子. 在那种情况, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 经过  $M = O(|\ln \varepsilon| |\ln h|)$  次迭代, 初始逼近的误差的范数可以降至  $\varepsilon^{-1}$  倍. 只有边值问题才碰到交换情况, 这时, 变量可以分离, 所以, 区域应是矩形. 对方程

$$L_h u_h = (\Lambda_{h,x_1} + \Lambda_{h,x_2}) u_h = f_h,$$

方法 (5) 的最普通的情况是方法

$$\left[ \prod_{r=1}^2 (E_h + \tau_{r,h}^{(n)} \Lambda_{h,x_r}) \right] (u_h^{(n+1)} - u_h^{(n)}) = -\gamma_h^{(n)} (L_h u_h^{(n)} - f_h),$$

其中  $E_h$  是恒等算子.

也应用基于各种变分原理的方法, 在这种修正的方法里, 可这样选取迭代参数, 即使得从第 0 次迭代计算到一个给定指标的迭代时, 使算子的范数减至最小.

这个方法常常用来作为算子 (这些算子按谱等价) 的二步迭代法中的内迭代过程, 适用于变系数和非线性问题.

#### 参考文献

- [1] Peaceman, D. W. and Rachford, H. H., The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, SIAM J., 3 (1955), 1, 28 - 41.
- [2] Дьяконов, Е. Г., Итерационные метод решения разностных аналогов краевых задач для уравнений эллиптического типа, К., 1970.
- [3] Яненко, Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967 (中译本: Н. Н. 雅宁可, 分数步法——数学物理中多变量问题的解法, 科学出版社, 1992).
- [4] Самарский, А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971.
- [5] Марчук, Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980 (英译本: Marchuk, G. I., Methods of numerical mathematics, Springer, 1982).

Е. Г. Дьяконов 撰 袁国兴 张宝琳 译

可变网格法 [variable-grid method; подвижных сеток метод]

数学物理问题的一种数值求解方法, 其中差分网

格(在差分网格上逼近基本问题的方程)不保持固定;在计算的时候,计算区中的网格随时改变.与Descartes坐标系的轴平行的直线的交点就形成一个非常简单的差分网格(矩形网格),而且它极大地简化了描述基本问题的差分方程.但是,要精确地表示复杂形状的边界以及它们的边界条件有相当大的困难,而且如果计算机设备有限制,这些困难常常是不可克服的.这些困难在非定常数学物理问题中变得特别尖锐,这时,计算区域的边界是运动的,而且经受相当大的变形.为了处理这种问题,算法的最重要的任务是构造一个坐标系,在这个坐标系中坐标线与边界一致.

在可变网格法的应用中,一开始就将计算区域分成有限个网格,这些网格不重叠而且充满整个区域,不留空隙.当有两个空间变量时,最方便的是用两族线将计算区域分成矩形网格.这时网格的计数很简单(计数类似于矩阵元按照行和列的计数).

在这样一种网格中,结点坐标的计算可以看作是对所要寻找的函数  $x(\xi, \eta)$  和  $y(\xi, \eta)$  的差分模拟,它规定了  $(\xi, \eta)$  平面上某个参数区域,例如单位正方形  $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$  到  $(x, y)$  平面的物理区域(执行计算的区域)的单叶映射.这些函数的边界值确定了参数正方形边上的点与物理区域边界上的点之间的某种一一对应关系.这种对应应该是适合计算机计算的,它根据问题的详细内容计算在计算区域边界上网格的结点.

如果区域的形状简单,则结点的坐标可以用基于插值或一个具体映射形式的显式来计算.在复杂区域的情况,可以应用一个迭代过程,即在每次迭代中根据邻点的位置重新计算结点的位置.这样一类迭代过程通常是用来求解一个偏微分方程组而模拟的,在构造这些过程时,人们常常必须应用某些形式的共形或拟共形映射.

对数学物理问题(例如气体动力学),解的结构可以以区域的形态为特点,在这种区域中流参数有急剧的变化.这种区域的尺度实质上可能比特征线尺度还小,同时它们的确切的位置事先可能不知道,或者在计算的时候随时可能改变.由于这个原因,人们设计一些算法,以便能够应用更贴近这个区域的网格.

为了建立可靠的数值算法,构造网格的问题常常转变成求某个变分泛函极小的问题.这个泛函可以包含控制参数,为将网格调整到适应特定问题的性质,控制参数的调整提供了这种手段和可能.

#### 参考文献

- [1] Численное решение многомерных задач газовой динамики, М., 1976.
- [2] Сидоров, А. Ф., «Численные методы механики сплошной среды», 8(1977), 4, 149 – 156.

- [3] Мещеряков, Ю. П., Шапеев, В. П., «Численные методы механики сплошной среды», 9(1978), 2, 91 – 103.
- [4] Данаев, Н. Т., «Численные методы механики сплошной среды», 10(1979), 4, 60 – 74.
- [5] Томас, П. Д., Миддлкофф, Д. Ф., «Ракетная техника и космонавтика», 18(1980), 7, 55 – 61.

Г. П. Прокопов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Hackbusch, W., Multi-grid methods and applications, Springer, 1985. 袁国兴 张宝琳 译

#### 变分 [variation; вариация]

J. L. Lagrange ([1]) 引进的表示一个自变数或一个泛函的小位移的数学术语.变分法是研究极值问题的一种方法,在这种问题中研究由自变量的小位移而引起的泛函的变分.这是研究极值问题的主要方法之一(因此有变分学 (variational calculus) 这名称).

设  $f$  是给定在空间  $X$  上的一个泛函,又设  $V$  是一参数空间.自变量  $x_0 \in X$  的变分 (variation of the argument) 是空间  $X$  中一条普通曲线  $x(t, v)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ ,  $\alpha \leq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $v \in V$ , 它在有效限制所确定的某一邻域中通过  $x_0$ . 设  $t = 0$  的值对应于  $x_0$ . 当  $v$  跑遍所有参数的集合时,变分跑遍某一个由  $x_0$  出发的曲线族.在有限维和无穷维分析中,由 Lagrange 开始,常常用方向变分 (directional variation), 其中  $V = X$  而  $x(t, v) = x_0 + tv$ . 在这情况向量  $v$  被称为变分.然而,另外几类变分用于几何学,变分法,特别在最优控制理论中;这些包括折线变分 (polygonal variations), 针形变分 (needle-shaped variations) 或尖峰变分 (spiked variations) 和与滑动模态 (sliding regimes) 相联系的变分 ([2], [3]). 变分空间的选择和变分本身的构造是得出极值必要条件中的很重要的因素.亦见泛函的变分 (variation of a functional); Gâteaux 导数 (Gâteaux derivative); Fréchet 导数 (Fréchet derivative); 泛函导数 (functional derivative).

#### 参考文献

- [1] Lagrange, J., Essai, d'une nouvelle methode pour déterminer les maximas et les minimas des formules intégrales indéfinies, in Oeuvres, Vol. 1, Georg Olms, New York, 1973, 333 – 362.
- [2] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.
- [3] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969 (英译本: Pontryagin, L. S., et al., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1962).

В. М. Тихомиров 撰



## 【补注】

## 参考文献

[A1] Gel'fand, I. M. and Fomin, S. V., Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963 (译自俄文).

[A2] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983. 葛显良译 吴绍平校

## 函数的变差 [variation of a function; вариация функции]

与可微性有关的单实变元函数的一种数字特征.

1) 设  $f$  为  $[a, b]$  上定义的复数值函数; 它的变差是如下形式的和

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

的上确界, 其中  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  是  $[a, b]$  的任意一组分点. 这个定义是由 C. Jordan ([1]) 引入的. 如果  $V_a^b(f) < \infty$ , 就称  $f$  在  $[a, b]$  上有 (是) 有界 (有限) 变差 (bounded (finite) variation) (的), 所有这样函数构成的类记为  $BV([a, b])$ . 实值函数  $f$  属于类  $BV([a, b])$ , 当且仅当它能表示为  $f = f_1 - f_2$  的形式, 其中  $f_1$  与  $f_2$  为  $[a, b]$  上的增函数 (有界变差函数的 **Jordan 分解** (Jordan decomposition)).  $BV([a, b])$  类中两函数的和、差与积仍为  $BV([a, b])$  中的函数.  $BV([a, b])$  中两函数之商也属于  $BV([a, b])$ , 只要分母的模在  $[a, b]$  上大于一个正常数.  $BV([a, b])$  中每个函数都是有界的, 并且不可能有多于可数个不连续点, 且所有这些不连续点都是第一类的.  $BV([a, b])$  中函数的上述这些性质都是由 Jordan ([1]) 建立的.

$BV([a, b])$  中的函数在  $[a, b]$  上是几乎处处可微的, 且可表示为

$$f = A + S + D,$$

其中  $A$  是绝对连续函数,  $S$  是奇异函数而  $D$  为跃度函数 (有界变差函数的 **Lebesgue 分解** (Lebesgue decomposition)). 如果  $f(a) = A(a)$ , 上述分解是唯一的 ([3], [2]).

函数类  $BV([a, b])$  最初是由 Jordan 在研究逐段单调函数 Fourier 级数收敛性的 Dirichlet 判别准则的推广时引入的. 是他证明了,  $BV([0, 2\pi])$  中的  $2\pi$  周期函数的 Fourier 级数, 在实轴上处处收敛. 有界变差函数在数学的许多分支, 尤其是在 Stieltjes 积分的理论中有着广泛的应用.

有时也要考虑如下定义的函数类  $BV_\Phi([a, b])$ . 设  $\Phi(u)$  ( $u \geq 0$ ,  $\Phi(0) = 0$ ) 为连续函数, 且当  $u > 0$  时单调增加. 记  $V_a^b(f)$  为如下形式的和的上确界

$$\sum_{k=1}^n \Phi(|f(x_k) - f(x_{k-1})|),$$

其中  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  为  $[a, b]$  中任意的分点. 量  $V_{\Phi, a}^b(f)$  称为  $f$  在  $[a, b]$  上的  $\Phi$  变差 ( $\Phi$ -variation). 如果  $V_{\Phi, a}^b(f) < \infty$ , 那么称  $f$  在  $[a, b]$  上有有界的  $\Phi$  变差, 并记这样的函数组成的类为  $BV_\Phi([a, b])$  ([4]). 若  $\Phi(u) = u$ , 则得 Jordan 的类  $BV([a, b])$ , 而若  $\Phi(u) = u^p$ ,  $1 < p < \infty$ , 就得到 Wiener 类  $BV_p([5])$ . 函数类  $BV_\Phi([a, b])$  是由 L. C. Young ([6]) 提出的.

如果

$$\lim_{u \rightarrow +0} \sup \frac{\Phi_1(u)}{\Phi_2(u)} < \infty,$$

那么

$$BV_{\Phi_2}([a, b]) \subset BV_{\Phi_1}([a, b]).$$

特别, 在任何区间  $[a, b]$  上, 对于  $1 \leq p < q < \infty$ ,  $0 < \alpha < \beta < \infty$ , 关系式

$$BV_{u^p} \subset BV_{u^q} \subset BV_{\exp(-u^{-\alpha})} \subset BV_{\exp(-u^{-\beta})}$$

成立, 且均为严格包含式.

## 参考文献

- [1] Jordan, C., Sur la série de Fourier, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 92 (1881) 5, 228 - 230.
- [2] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957 (中译本: И. П. 那汤松, 实变函数论, 高等教育出版社, 1958).
- [3] Lebesgue, H., Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, 1928.
- [4] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.
- [5] Wiener, N., The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, J. Math. and Phys., 3 (1924), 72 - 94.
- [6] Young, L. C., Sur une généralisation de la notion de variation de puissance  $p^{\text{ème}}$  bornée au sens de M. Wiener et sur la convergence des séries de Fourier, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 204 (1937), 470 - 472.

Б. И. Голубов 撰

【补注】上面定义的函数的变差, 常称为全变差 (total variation). 它是负变差与正变差之和 (见函数的负变差 (negative variation of a function); 函数的正变差 (positive variation of a function)). 成立着公式

$$V_a^b(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(y, f) dy,$$

其中  $N(y, f)$  是  $f$  的 **Banach 指标** (Banach indicatrix). 如果  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , 则

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f(t)| dt.$$

## 参考文献

[A1] Hewitt, E. and Stromberg, K. R., Real and abstract analysis, Springer, 1965, p. 266; 270; 272.

[A2] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1937.

2) 对于多元函数, 存在着好几种有关变差的定义 (Arzelà 变差 (Arzelà variation); Vitali 变差 (Vitali variation); Pierpont 变差 (Pierpont variation); Tonelli 平面变差 (Tonelli plane variation); Fréchet 变差 (Fréchet variation); Hardy 变差 (Hardy variation)). 下面以应用 Banach 指标 (Banach indicatrix) 为基础的定义, 实践证明是很有效的. 设在  $n$  维方体  $Q_n$  上给定了一个 Lebesgue 可测的实值函数  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ .  $f$  在  $Q_n$  上的  $k$  阶变差  $V_k(f)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , 是指

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{k-1}(l_t) dt,$$

其中  $v_{k-1}(l_t)$  表示集合  $l_t = \{x: x \in Q_n, f(x) = t\}$  的  $(k-1)$  阶变差 (见集合的变差 (variation of a set)), 而积分理解为 Lebesgue 积分. 这个定义可使一元有界变差函数的许多性质转化到多元函数上去. 例如,

$$a) V_n(f+g) \leq V_n(f) + V_n(g);$$

$$V_k(cf) = |c| V_k(f), k = 1, 2, \dots, n.$$

b) 若在  $Q_n$  上, 函数列  $f_s$ ,  $s = 1, \dots$ , 一致收敛于  $f$ , 那么

$$V_k(f) \leq \liminf_{s \rightarrow \infty} V_k(f_s), k = 1, \dots, n.$$

c) 若函数  $f$  在  $Q_n$  上连续, 且它的各阶变差均有限, 那么  $f$  几乎处处有全微分.

d) 若函数  $f$  在  $Q_n$  上绝对连续, 则

$$V_n(f) = \int_{Q_n} |\text{grad } f| dx.$$

e) 如果  $f$  在边长为  $2\pi$  的方体  $Q_n$  上连续, 且在  $Q_n$  上有各阶有界变差, 此外它还可以关于每个变量  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , 以周期  $2\pi$  延拓成  $n$  维空间上的周期函数, 那么它的 Fourier 级数在  $Q_n$  上一致收敛于它自身 (Pringsheim 定理 (Pringsheim theorem)).

函数成为有界变差的一个充分条件是: 若函数  $f$  在方体  $Q_n$  上有直到  $n-k+1$  (包括  $n-k+1$ ) 阶连续导数, 那么它的  $k$  阶变差是有限的. 此定理在如下的意义下是最好的, 即光滑性条件对任意  $k$  不能再改进.

## 参考文献

[1] Витушкин, А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955. А. Г. Витушкин 撰 王斯雷 译

泛函的变分 [variation of a functional; вариация функ-

ционала], 一阶变分 (first variation)

一元函数微分 (differential) 概念的一种推广. 它是泛函在某一方向的增量的主要线性部分; 它用于极值问题理论中以得到对一极值的必要和充分条件. 这是早在 1760 年由 J. L. Lagrange ([1]) 给予“泛函的变分”这术语的意义. 他特别地考虑经典变分法的形如

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (1)$$

的泛函.

如果一个给定的函数  $x_0(t)$  换成  $x_0(t) + \alpha h(t)$ , 且把后者代入  $J(x)$  的表达式中, 假设被积函数是连续可微的, 则得到以下方程:

$$J(x_0 + \alpha h) = J(x_0) + \alpha J_1(x_0)(h) + r(\alpha), \quad (2)$$

其中  $|r(\alpha)| \rightarrow 0$  当  $\alpha \rightarrow 0$  时. 该函数  $h(t)$  常常称为函数  $x_0(t)$  的变分 (variation of the function), 且有时表示成  $\delta x(t)$ . 表达式  $J_1(x_0)(h)$  是关于变分  $h$  的一个泛函, 称为泛函  $J(x)$  的一阶变分 (first variation of the functional) 且表示成  $\delta J(x_0, h)$ . 当应用于泛函 (1) 时, 该一阶变分的表示式有形式

$$\delta J(x_0, h) = \int_{t_0}^{t_1} (p(t) \dot{h}(t) + q(t) h(t)) dt,$$

其中

$$p(t) = L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)),$$

$$q(t) = L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)).$$

对泛函  $J(x)$  的极值的一个必要条件是一阶变分对所有  $h$  为零. 在泛函 (1) 的情形, 这必要条件的一个推论和变分法基本引理 (见 du Bois-Reymond 引理 (du Bois-Reymond lemma)) 是 Euler 方程 (Euler equation):

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) + L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = 0.$$

类似于 (2) 的方法也用于确定高阶变分 (例如, 见泛函的二阶变分 (second variation)).

无穷维分析中一阶变分的一般定义是由 R. Gâteaux 于 1913 年给出的 (见 Gâteaux 变分 (Gâteaux variation)). 它本质上是与 Lagrange 的定义相同的. 一个泛函的一阶变分是齐次的, 但未必是线性泛函. 在该表示式  $\delta J(x_0, h)$  关于  $h$  是线性连续的附加假设下, 通常的名称是 Gâteaux 导数 (Gâteaux derivative). 诸如“Gâteaux 变分”, “Gâteaux 导数” “Gâteaux 微分” 这些术语比之“泛函的微分”这术语用得更频



繁, 后者专门保留用于经典变分法的泛函 ([3]).

#### 参考文献

- [1] Lagrange, J. L., Essai d'une nouvelle methode pour déterminer les maximas et les minimas des formules intégrales indéfinies, in Oeuvres, Vol. 1, G. Olms, 1973, 333 - 362.
- [2] Gâteaux, R., Fonctions d'une infinités des variables indépendantes, *Bull. Soc. Math. France*, **47** (1919), 70 - 96.
- [3] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).

В. М. Тихомиров 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Gel'fand, I. M. and Fomin, S. V., Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963 (译自俄文).
- [A2] Luenberger, D. G., Optimization by vectorspace methods, Wiley, 1969. 葛显良 译 吴绍平 校

#### 映射的变差 [variation of a mapping; вариация отображения]

与映射可微性有关的一种数字特征. 由 S. Banach ([1]) 所定义. 以下仅给出二维情形的定义. 考虑映射

$$\alpha: x = f(u, v), y = \varphi(u, v),$$

其中  $f$  和  $\varphi$  是正方形  $D_0 = [0, 1] \times [0, 1]$  上的连续函数. 称映射  $\alpha$  是有界变差的, 是指存在数  $M > 0$ , 使得对于任意一列互不相交的, 边平行于坐标轴  $u, v$  的正方形  $D^i \subset D_0$ , 成立不等式

$$\sum_i \text{mes } D_{xy}^i \leq M.$$

这里记号  $E_{xy}$  表示集合  $E \subset D_0$  在映射  $\alpha$  下的象, 而  $\text{mes } E$  是  $E$  的 Lebesgue 测度 (Lebesgue measure).  $\alpha$  的变差的数值  $V(\alpha)$  可以用不同的方法来确定. 例如, 假设  $\alpha$  为有界变差的. 变差  $V(\alpha)$  可用公式

$$V(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N(s, t) ds dt$$

确定, 其中  $N(s, t)$  为方程组  $f(u, v) = s, \varphi(u, v) = t$  的解的个数 ( $\alpha$  的 Banach 指标 (Banach indicatrix)).

若  $\alpha$  为有界变差的, 则广义 Jacobi 式  $J(P)$  ( $P \in D_0$ ) 在  $D_0$  上几乎处处存在, 且在  $D_0$  上可积, 此外

$$J(P) = \lim_{\text{mes } K \rightarrow 0} \frac{\text{mes } K_{xy}}{\text{mes } K},$$

其中  $K \subset D_0$  是包含点  $P \in D_0$  且边平行于坐标轴  $u, v$  的正方形 ([2]).

#### 参考文献

- [1] Banach, S., Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, *Fund. Math.*, **7** (1925), 225 - 236.
- [2] Кудрявцев, Л. Д., в. сб.: метрические вопросы теории функций и отображений, в. 1, К., 1969, с. 34 - 108. Б. И. Голубов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文). 王斯雷 译

#### 集合的变分 [variation of a set; вариация множества]

表征  $n$  维 Euclid 空间中一个集合的  $k$  维容量的数值. 有界闭集  $E$  的零变分  $V_0(E)$  是该集合的分量数.

在最简单的平面情形, 一个集合  $E$  的线性变分 (linear variation of a set) (即  $E$  的一阶变分) 是函数

$$\Phi(\alpha, E) = \int_{\Pi_\alpha} V_0(E \cap \Pi_{\alpha, z}^\perp) dz$$

的积分

$$V_1(E) = c \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha, E) d\alpha,$$

其中  $\Pi_\alpha$  是过坐标原点的直线,  $\alpha$  是  $\Pi_\alpha$  与给定轴之交角,  $\Pi_{\alpha, z}^\perp$  是  $\Pi_\alpha$  上点  $z$  处的垂直线, 规范化常数  $c$  的选择是使一个区间  $E$  的变分  $V_1(E)$  等于它的长度. 对于十分简单的集合, 例如可求长曲线, 其变分就是它的长度 (length). 对具有可求长边界  $\Gamma$  的闭域  $E$ , 其线性变分  $V_1(E)$  等于  $\Gamma$  长度的一半;  $E$  的第二变分 (即  $E$  的二阶变分) 是  $E$  的二维测度, 且  $V_k(E) = 0, k > 2$ .

在  $n$  维 Euclid 空间中, 有界闭集  $E$  的  $k=0, \dots, n$  阶变分  $V_k(E)$  (variation  $V_k(E)$  of order) 是,  $E$  与空间  $\Omega_k^n(\mathbb{R}^n)$  中所有  $(n-k)$  维平面) 中  $(n-k)$  维平面  $\beta$  的截口的零变分关于 Haar 测度 (Haar measure)  $d\mu_\beta$  的积分

$$V_k(E) = \int_{\Omega_k^n} V_0(E \cap \beta) d\mu_\beta;$$

这里, 规范化条件为: 对  $k$  维单位方体  $J_k$ , 其变分  $V_k(J_k) = 1$ .

变分  $V_n(E)$  恒同于集合  $E$  的  $n$  维 Lebesgue 测度 (Lebesgue measure). 对于凸体, 其集合之变分 (适当规范化) 恒同于 Minkowski 的混合容积 (见混合体积理论 (mixed-volume theory)) ([4]).

集合变分的性质 (properties of the variations of a set): 1)  $E \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n'}$  的变分与对  $E \subset \mathbb{R}^n$  和  $E \subset \mathbb{R}^{n'}$  所计算的有相同的容积.

2) 一个集合的变分可归纳地表达为公式

【补注】亦见容度 (content) 和函数的变差 (variation of a function).  
周民强 译

$$\int_{\Omega_i^n} V_i(E \cap \beta) d\mu_\beta = c(n, k, i) V_{k+i}(E), k+i \leq n,$$

其中  $c(n, k, i)$  是规范化常数.

3)  $V_i(E) = 0$  蕴含  $V_{i+1}(E) = 0$ .

4) 在一定意义下, 一个集合的各种变分是互不相关的, 即对任一数列  $a_0, \dots, a_n$ , 其中  $a_0$  是正整数,  $0 < a_i \leq \infty$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ),  $a_n = 0$ , 可以构造一集合  $E \subset \mathbb{R}^n$ , 使得  $V_i(E) = a_i, i = 0, \dots, n$ .

5) 如果  $E_1$  与  $E_2$  不相交, 那么  $V_i(E_1 \cup E_2) = V_i(E_1) + V_i(E_2)$ . 一般情况, 是

$$V_i(E_1 \cup E_2) \leq V_i(E_1) + V_i(E_2).$$

对  $i = 0, \dots, n-1$ , 变分  $V_i$  不是单调的, 即对  $E_1 \supset E_2$ , 有可能使得  $V_i(E_1) < V_i(E_2)$ .

6) 一集合的变分是半连续的, 即如果有界闭集列  $E_k$  收敛 (在距离之差的意义上) 于  $E$ , 那么

$$V_0(E) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} V_0(E_k),$$

如果其和  $V_0(E_k) + \dots + V_{i-1}(E_k)$  还是一致有界的, 那么

$$V_i(E) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} V_i(E_k), i = 1, \dots, n.$$

7) 如果  $V_{k+1}(E) = 0$ , 且有

$$V_0(E) + \dots + V_k(E) < \infty,$$

那么变分  $V_k(E)$  就等同于  $k$  维 Hausdorff 测度 (Hausdorff measure):

上列条件是可以满足的, 例如二次可微流形.

集合的变分概念是在 Cauchy-Riemann 系统的解的论述中引发的, 而其最终定式归于 А. Г. Витушкин 集合的各种变分在求解分析中的某些问题里, 已被证明为是一种有用的工具, 特别是对多元函数的叠加 (superposition of functions) 问题, 以及逼近问题 ([2]).

#### 参考文献

- [1] Витушкин, А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955.
- [2] Витушкин, А. Г., Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959.
- [3] Витушкин, А. Г., «Докл. АН СССР», 166 (1966), 5, 1022 - 1025.
- [4] Леонтович, А. М., Мельников, М. С., «Тр. Моск. матем. об-ва», 14 (1965), 306 - 337.
- [5] Иванов, Л. Д., «Матем. сб.», 72 (114), 3, (1967), 445 - 470.
- [6] Иванов, Л. Д., «Матем. сб.», 78 (120), 1, (1969), 85 - 100.

А. Г. Витушкин, Л. Д. Иванов 撰

单叶函数的变分 [variation of a univalent function; вариация однолистной функции]

单叶函数论中的一个概念 (见单叶函数 (univalent function)). 在复平面的给定区域中, 设存在一给定函数  $f(z)$  与一个依赖于实参数  $\lambda$  的函数族  $F(z, \lambda)$ ,  $0 \leq \lambda < \Lambda$ ,  $\Lambda > 0$ , 对所有  $\lambda \in [0, \Lambda]$  均在  $D$  内单叶. 假定  $F(z, 0) = f(z)$ . 作差  $F(z, \lambda) - f(z) \equiv \Phi(z, \lambda)$ . 函数  $f(z)$  (沿着族  $F(z, \lambda)$ ) 的  $n$  阶变分 ( $n$ -th order variation) 或  $n$  次变分 ( $n$ -th variation),  $n = 1, 2, \dots$ , 是  $\Phi(z, \lambda)$  关于参数  $\lambda$  的展开式中  $\lambda^n$  的系数  $q_n(z)$ , 且满足如下条件: 余项

$$\Phi_n(z, \lambda) = \Phi(z, \lambda) - q_1(z)\lambda - \dots - q_n(z)\lambda^n$$

是  $\lambda^n$  的高阶无穷小量, 且关于  $D$  中的  $z$  在  $D$  内紧集或  $D$  的闭包上一致. 这些附加条件之一的选取常常决定于问题的性质, 这些问题的解决涉及与单叶函数的变分有关的变分方法.

J. Hadamard ([1]) 与 М. А. Лаврентьев ([2]) 首先计算了一阶变分并给出了应用. 要在某个特殊单叶函数类中通过函数类本身得到变分是一项复杂的任务, 这是由于这种函数的非线性性质. 对单连通与多连通区域中的某些函数类, 这一任务已完成.

#### 参考文献

- [1] Hadamard, J., Leçons sur le calcul des variations, 1, Hermann, 1910.
- [2] Лаврентьев, М. А., «Матем. сб.», 4 (46) (1938), 3, 391 - 458.
- [3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, Г. М., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).
- [4] Бабенко, К. И., «Тр. матем. ин-та АН СССР», М., 101 (1972).

И. А. Александров 撰

【补注】在过去的半个世纪中, 在单叶函数的变分理论中最有影响的人物是 М. М. Schiffer, 他在该领域的最早的工作甚至囊括了 Лаврентьев 的工作. 见 [A2] 中关于 Schiffer 的工作的文献目录. 对这一课题最完全的处理可在 [A1] 中找到; 亦可见 [A2] 中的讨论.

还可见内变分方法 (internal variations, method of); 边界变分方法 (boundary variations, method of).

#### 参考文献

- [A1] Hummel, J. A., Lectures on variational methods in



the theory of univalent functions, Univ. of Maryland, 1972.

[A2] Duren, P. L. Univalent functions, Springer, 1983.  
杨维奇 译

常数变易法 [variation of constants; произвольных постоянных вариация]

求解非齐次线性常微分方程组 (或方程) 的一种方法. 对于一个非齐次方程组, 只要知道相应的齐次方程组的通解 (general solution), 用这个方法就可以把非齐次方程组的通解用封闭形式写出来. 常数变易法的思想在于, 把出现在齐次方程组通解中的任意常数换成自变量的函数. 这些函数必须选得使非齐次方程组得以满足. L. Euler 和 D. Bernoulli 已经就一些具体问题应用过这个方法, 但它的完全的叙述是由 J. L. Lagrange ([1]) 给出的.

设考虑以下非齐次线性方程组的 Cauchy 问题 (Cauchy problem)

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

其中

$$A: (\alpha, \beta) \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n),$$

$$f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$$

是在每个有限区间上均为可和的映射, 而  $t_0 \in (\alpha, \beta)$ . 若  $\Phi(t)$  是齐次方程组

$$\dot{y} = A(t)y \quad (2)$$

的基本矩阵解 (见基本解 (fundamental solution)), 则  $y = \Phi(t)c$ ,  $c \in \mathbf{R}^n$  是 (2) 的通解. 常数变易法就是在 (1) 中作变量变换

$$x = \Phi(t)u,$$

而由此得出 (1) 的解的 Cauchy 公式 (Cauchy formula)

$$x = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

这个公式有时也称为常数变易公式 (formula of variation of constants) (亦见线性常微分方程 (linear ordinary differential equation)).

常数变易法的思想有时也可用于较一般的非线性情况, 以描述扰动的完全系统的解和截断的非扰动系统的解的关系 (见 [3], [4]). 例如用于求出以下问题的解  $x(t)$ :

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

若  $A, f$  是连续映射, 以及在可以保证解的唯一性的

条件下, 常数变易公式仍是适用的. 它成了积分方程

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau.$$

这里  $\Phi(t)$  是 (2) 的基本矩阵解.

参考文献

- [1] Lagrange, J. L., Oeuvres, Vol. 4, Paris, 1869, 151 – 251.
- [2] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 5 изд., М., 1983 (中译本: Л. С. 庞特利雅金, 常微分方程, 上海科技出版社, 1962).
- [3] Алексеев, В. М., «Вестн. Моск. ун-та», 1961, 2, 28 – 36.
- [4] Рейзинь, Л. Э., Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений, Рига, 1971.

Н. Х. Розов 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Hille, E., Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley, 1964.
- [A2] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.
- [A3] Hale, J. K., Ordinary differential equations, Wiley, 1980.
- [A4] Coppel, W. A., Disconjugacy, Springer, 1971.

齐民友 译

Hodge 结构的变分 [variation of Hodge structure]

【补注】复流形  $\mathcal{S}$  上权  $w$  的 Hodge 结构的变分 (variation of Hodge structure of weight  $w$ ) 是一个二元组  $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_Z, \mathcal{F})$ , 这里  $\mathcal{V}_Z$  是  $\mathcal{S}$  上有限生成 Abel 群的局部常层,  $\mathcal{F}$  是由全纯子丛构成的  $V = \mathcal{V}_Z \otimes_Z \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  的有限下降滤过, 满足以下条件: i) 由  $\nabla(v \otimes f) = v \otimes df$  定义的  $V$  上平坦联络  $\nabla$ , 这里  $v, f$  分别是  $\mathcal{V}_Z$  和  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  的局部截面, 且此联络满足  $\nabla(\mathcal{F}^p) \subset \mathcal{F}^{p-1} \otimes \Omega_{\mathcal{S}}^1$  (Griffiths 横截性 (Griffiths transversality)); ii) 对每个  $s \in \mathcal{S}$ , 二元组  $(\mathcal{V}_{Z,s}, \mathcal{F}(s))$  是权  $w$  的 Hodge 结构 (Hodge structure of weight  $w$ ).

Hodge 结构的变分  $(\mathcal{V}_Z, \mathcal{F})$  的极化 (polarization) 是一个平坦双线性型  $\mathcal{V}_Z \otimes \mathcal{V}_Z \rightarrow \mathbf{Z}_{\mathcal{S}}$ , 它对每个  $s \in \mathcal{S}$  诱导了 Hodge 结构  $\mathcal{V}_{Z,s}$  的极化. 当  $\mathbf{Z}$  被换成  $\mathbf{Q}$  或  $\mathbf{R}$  时, 类似的概念仍然存在 ([A1], [A2]). 如果  $f: X \rightarrow S$  是  $\mathbf{C}$  上代数簇的光滑真态射, 则  $R^mf_*$   $\mathbf{Z}_X$  是  $\mathcal{S}$  上 Hodge 结构的可极化变分的底局部系. 根据 A. Borel 的一个结果, 对于形如  $\bar{S} \setminus D$  的复流形  $S$  上的 Hodge 结构的可极化变分, 这里  $\bar{S}$  是紧的且  $D \subset \bar{S}$  是具有正规交叉的除子, 则围绕  $D$  的每个局部分支的单值是拟么幂的 ([A3]) (单值定理 (monodromy theorem)).  $S$  上 Hodge 结构的极化变分引起了从  $S$  到 Hodge 结构的分类空间的一个全纯周期映射

(period mapping).

如果  $\mathcal{V} = \bar{S} \setminus D$ , 这里  $\bar{S}$  是紧 Kähler 流形,  $D$  是  $\bar{S}$  上具有正规交叉的除子, 则对于  $S$  上 Hodge 结构的极化变分  $(\mathcal{V}_Z, \mathcal{V})$ , 层  $\mathcal{V}_Z$  具有到  $\bar{S}$  上反常层 (perverse sheaf)  $IC(\mathcal{V}_Z)$  的一个极小扩张, 且  $I\dot{H}^*(\bar{S}, IC(\mathcal{V}_Z))$  带有纯 Hodge 结构 ([A4]–[A6]). 事实上  $IC(\mathcal{V}_Z)$  是极化 Hodge 模的一部分 ([A7]). 其推广有混合 Hodge 结构的变分 (variation of mixed Hodge structure) ([A8], [A9]) 和混合 Hodge 模 (mixed Hodge module) ([A10]) 的概念.

#### 参考文献

- [A1A] Griffiths, P., Periods of integrals on algebraic manifolds, I, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 568 – 626.
- [A1B] Griffiths, P., Periods of integrals on algebraic manifolds, II, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 808 – 865.
- [A1C] Griffiths, P., Periods of integrals on algebraic manifolds III, *Publ. Math. IHES*, **38** (1970), 228 – 296.
- [A2] Deligne, P., Travaux de Griffiths, in *Sem. Bourbaki Exp. 376*, Springer, 1970, 213 – 237.
- [A3] Schmid, W., Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping, *Invent. Math.*, **22** (1973), 211 – 319.
- [A4] Cattani, E., Kaplan, A. and Schmid, W.,  $L^2$  and intersection cohomologies for a polarizable variation of Hodge structure, *Invent. Math.*, **87** (1987), 217 – 252.
- [A5] Kashiwara, M. and Kawai, T., The Poincaré lemma for variations of polarized Hodge structures, *Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ.*, **23** (1987), 345 – 407.
- [A6] Zucker, S., Hodge theory with degenerating coefficients:  $L_2$ -cohomology in the Poincaré metric, *Ann. of Math.*, **109** (1979), 415 – 476.
- [A7] Saito, M., Modules de Hodge polarisables, *Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ.*, **24** (1988), 849 – 995.
- [A8] Steenbrink, J. and Zucker, S., Variation of mixed Hodge structure, I, *Invent. Math.*, **80** (1985), 489 – 542.
- [A9] Kashiwara, M., A study of a variation of mixed Hodge structure, *Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ.*, **22** (1986), 991 – 1024.
- [A10] Saito, M., Mixed Hodge modules, *Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ.*, **26** (1990), 221 – 333.

J. Steenbrink 撰 陈志杰 译

变分参数法 [variation-parametric method; вариационно-параметрический метод]

关于由把圆盘  $E = \{z: |z| < 1\}$  映射成从平面

$C_w$  沿若干逐段连续弧线切割而成的区域的单叶函数所组成的那个类  $S$  的重要子类的一种方法, 它是 Голузин 的变分方法 (见内变分方法 (internal variations, method of)) 与 Löwner 的参数表示法 (parametric representation method) 的综合. 对于仅有一条 Jordan 割线的最简单情形, 这一综合系通过由如下定理确定的一种特殊变分而得到. 设函数  $w = f(z) \in S$  把  $E$  映射成从  $\bar{C}_w$  去掉割线

$$L = \{w: w = \varphi(t), 0 \leq t \leq \infty\}, \varphi(\infty) = \infty$$

所得的区域  $B(0)$ , 其中  $\varphi(t)$  连续, 且区域  $B(\tau) = \bar{C}_w \setminus L(\tau)$  为单连通, 其中  $L(\tau) = \{w: w = \varphi(t), 0 \leq \tau \leq t \leq \infty\}$ . 考虑割线  $L$  的一种参数表示, 使得伴随  $f(z)$  的函数  $z = F(w, \tau)$ ,  $F(0, \tau) = 0$ , 把  $B(\tau)$  单叶共形映射为  $E$ , 且满足规范化条件  $F'_w(0, \tau) = e^{-\tau}$ . 以  $\Psi(z, \tau)$  表示  $F(w, \tau)$  当  $\tau$  固定时的反函数. 则对于所有的点  $z_k \in E$ , ( $k = 1, \dots, n$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ) 及一切常数  $A_k$ , 存在类  $S$  中的函数  $f_*(z)$  可表示成如下形式

$$f_*(z) = f(z) + \lambda \sum_{k=1}^n \left[ 2A_k H^2(z_k, \tau) \frac{f^2(z)}{f(z) - \Psi(z_k, \tau)} + A_k K(z, \tau, z_k) + \bar{A}_k K(z, \tau, 1/z_k) \right] + \gamma(\lambda, E),$$

其中

$$K(z, \tau, \zeta) = \frac{F(f(z), \tau)}{F'_w(f(z), \tau)} \cdot \frac{\zeta + F(f(z), \tau)}{\zeta - F(f(z), \tau)} + f(z)$$

$$H(z, \tau) = \frac{z \Psi'_z(z, \tau)}{\Psi(z, \tau)},$$

且  $\gamma(\lambda, E)$  是  $E$  内的全纯函数, 当  $\lambda \rightarrow 0$  ( $\lambda > 0$ ) 时在  $E$  的内部关于  $\lambda$  一致地趋于极限 0.

在研究  $S$  中的极值问题的过程中如果使用上文提及的特殊变分及函数  $F(w, \tau)$  所满足的在条件  $F(f(z), 0) = z$  下的 Löwner 方程 (Löwner equation)

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{\mu(\tau) + \zeta}{\mu(\tau) - \zeta},$$

$$\mu(\tau) = \Psi(\varphi(\tau), \tau).$$

常常可以得到与极值函数相伴随的该函数的两个方程. 无需考虑方程中所包含的能用极值函数的值表达的常数, 这些方程的深入研究常可导致所考虑的极值问题的完全解决, 特别是关于  $S$  中解析依赖于函数及其导数以及它们的共轭值的泛函的值域问题. 这一方



法是由 П. П. Куфарев ([1]) 提出的; 关于其后该方法的发展及应用可见 [2]—[5].

#### 参考文献

- [1] Куфарев, П. П., «Докл. АН СССР», 97 (1954), 3, 391—393.  
 [2] Александров, И. А., «Уч. зап. Томск. ун-та», 32 (1958), 41—57.  
 [3] Александров, И. А., «Сиб. матем. ж.», 4 (1963), 1, 17—31.  
 [4] Редьков, М. И., «Докл. АН СССР», 133 (1960), 2, 284—287.  
 [5] Редьков, М. И., «Изв. вузов. Математика», 29 (1962), 134—142. И. А. Александров 撰  
 【补注】联合使用变分方法与 Löwner 理论的思想似乎可追溯到 M. Schiffer, 见 [A2] 第 10 与 11 章; 关于进一步的参考文献亦可见 [A2].

#### 参考文献

- [A1] Aleksandrov, I. A., Parametric extensions in the theory of univalent functions, Moscow, 1976 (俄文).  
 [A2] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983. 杨维奇 译

变分学 [variational calculus 或 calculus of variations; вариационное исчисление]

数学的一个分支, 研究寻找一个或几个函数确定的泛函极值的方法, 其中函数满足各类约束 (相, 微分, 积分等). 这仍是称为经典变分学 (classical variational calculus) 问题的框架. 变分学这术语也有另一种更广的意义, 即极值问题理论的一个分支, 其中极值是用“变分” (variation) 的方法来研究的, 即自变量和泛函小扰动的方法; 在更广的意义下这些问题是相反于离散最优化问题 (discrete optimization problem) 的.

以下的概述描述经典变分学的较宽范围内的问题. 要求使得泛函

$$J(x) = \int_T f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (1)$$

极小化, 其中  $T \subset \mathbf{R}^m$ ,  $t = (t_1, \dots, t_m)$ ,  $x = (x^1, \dots, x^n)$ ,

$$\dot{x} = \left[ \frac{\partial x^i}{\partial t_j} \right], f: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{mn} \rightarrow \mathbf{R},$$

满足由以下类型的方程

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t, x(t), \dot{x}(t)) &= 0, \\ \varphi: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{nm} &\rightarrow \mathbf{R}^s, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

描述的约束, 且满足某种边界条件  $x|_{\partial T} \in \Gamma$ . 这种类型的问题称为 **Lagrange 问题** (Lagrange problem).

所考虑的其他类型的问题有 **Mayer 问题** (Mayer problem), **Bolza 问题** (Bolza problem) 等等.

经典变分学中最基本的问题是变分学中最简问题 (simplest problem), 其中 (1) 中的  $t$  和  $x$  是一维的, 没有约束 (2) 且边界条件是固定的:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt \rightarrow \inf; \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1. \quad (3)$$

这类型包括 **捷线** (brachistochrone) 问题, 或最速降线问题. 这问题通常被看成是变分学历史的出发点.

经典变分学的理论基础是在 18 世纪由 L. Euler 和 J. L. Lagrange 奠定的. 他们也发现了这学科与力学和物理学的重要联系. 许多特殊问题 (关于测地线, 旋转曲面, 等周问题等等) 在这个理论发展的最初阶段被解决了——主要归功于 G. Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, Euler 和 Lagrange.

变分学处理寻找极值的算法, 得到必要和充分条件的方法, 保证极值存在性的条件, 定性问题等等. 在寻找极值的算法中直接方法占有重要的地位.

**直接法**. Euler (1768) 提出了变分学中问题求近似 (数值) 解的一种方法, 它得到 Euler 折线法的名称. 这标志着研究极值问题数值解法的开端. Euler 方法是被称为变分学直接法的一大类方法中的第一个代表. 这些方法基于把求泛函的极值问题化成求多元函数的极值问题.

问题 (3) 可用 Euler 折线法求解如下. 区间  $[t_0, t_1]$  用点  $\tau_0 = t_0, \tau_1 = t_0 + \tau, \dots, \tau_N = t_0 + N\tau = t_1$  细分成  $N$  个相等部分. 设在这些点上的函数值分别是  $x_0, x_1, \dots, x_N$ . 点  $(\tau_0, x_0), \dots, (\tau_N, x_N)$  的每一个集合定义某折线. 该问题现在可表示如下: 在连结点  $(\tau_0, x_0)$  和  $(\tau_N, x_N)$  的所有可能的折线中, 求使得泛函 (1) 取极值的那条折线. 在区间  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  上导数  $\dot{x}$  的值是  $\dot{x}_i = (x_{i+1} - x_i)/\tau$ . 泛函  $J(x)$  变成有限个变量  $x_i$  的一个函数:

$$J(x) \sim J(x_0, \dots, x_n),$$

而问题 (3) 化成求函数  $J(x_0, \dots, x_n)$  的极值问题. 为了使得实现此函数极值的 Euler 折线以高精度逼近问题 (3) 的解, 通常数  $N$  应当充分大. 为求此函数 (3) 的极值必须实施的计算中的工作量是如此之大, 以致“手工”计算是很困难的. 由于这个缘故, 直接法长期以来被排除于变分学的基本研究工作之外.

在 20 世纪中直接法开始极广泛地被研究. 首先, 提出了新方法把问题化成求有限个变量的函数的

极值. 这些想法可以下面的例子来阐明: 在条件

$$x(t_0) = x(t_1) = 0$$

的制约下使泛函 (3) 极小化. 考虑这个问题的形如

$$x(t) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(t)$$

的解, 其中  $\{\varphi_n(t)\}$  是满足条件  $\varphi_i(t_0) = \varphi_i(t_1) = 0, i = 1, \dots, N$ , 的某个函数系. 泛函  $J(x)$  变成系数  $a_n$  的一个函数,  $J(x) \sim J(a_1, \dots, a_N)$ , 而该问题化成求这个  $N$  元函数的极值. 在加在函数系  $\{\varphi_n\}$  上的某些条件下, 该问题的解当  $N \rightarrow \infty$  时趋于问题 (3) 的解 (见 Галеркин 法 (Galerkin method)).

**变分法.** 第二个研究方向是研究达到泛函  $J(x)$  的极值的函数  $x(t)$  所满足的必要和充分条件. 求必要条件的主要方法是变分方法. 以某种方式构造某函数  $x(t)$ . 如何去测试这函数是否是变分问题 (3) 的解? 这问题的一个答案首先由 Euler 于 1744 年给出. 如下表述的答案涉及 Lagrange 于 1762 年引入的泛函  $J$  的变分  $\delta J$  这概念 (因此有“变分学”这一名称, 见变分 (variation); 泛函的变分 (variation of a functional)).

对变分学最简问题, 这变分定义为:

$$\delta J(x, h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] h(t) dt,$$

其中  $h(t)$  是满足条件  $h(t_0) = h(t_1) = 0$  的任一光滑函数. 条件  $\delta J = 0$  对函数  $x(t)$  达到泛函 (3) 的极值是必要的. 因此——且由变分  $\delta J$  的表示式——可以得出结论, 为了函数  $x(t)$  形成 (3) 的一个极值, 它必须满足以下的二阶微分方程:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (4)$$

以上方程称为 **Euler 方程** (Euler equation), 而这族积分曲线称为所考虑的变分问题的极值曲线 (extremals).  $J(x)$  在其上达到极值的函数  $x(t)$  必须表示成对方程 (4) 的边值问题  $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$  的一个解. 这样已经得到了解极值问题的第二个方法: 应当解 Euler 方程的边值问题 (在正则情况下这样的解的数目是有限的), 然后应对所得到的极值曲线作补充研究, 以确定其中是否有曲线确是原问题的解. 然而, 这方法的一个明显缺点是它并不提供解常 (非线性) 微分方程边值问题的一般方法.

**可移动端点的变分问题** (variational problems with mobile ends) 是经常遇到的. 例如, 在最简问题中, 点  $x(t_0)$  和  $x(t_1)$  可沿给定曲线移动. 在具有可移

动端点的问题中, 条件  $\delta J = 0$  蕴涵可移动端点所须满足的补充条件——所谓横截性条件 (transversality condition), 它与边界条件一起, 提供边值问题的封闭的条件组.

关于变分学最简问题的主要结果可应用于形如

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F \left[ x(t), \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^s x}{dt^s} \right] dt$$

的泛函的一般情形, 这里  $x(t)$  是任意维数的向量函数 ([3]).

**Lagrange 问题.** Euler 和 Lagrange 也研究条件极值问题. 这类型的最简问题是所谓的等周问题 (isoperimetric problem). 对一维的  $t$  的情形, Lagrange 陈述了问题 (1) 和 (2) 的类, 而且得到了类似于 Euler 方程的方程, 其中包括对这些问题的所谓 Lagrange 乘子. 这样一种类似也可对问题 (1) 和 (2) 的最一般情形得到. 在 20 世纪中叶由于最优控制的数学理论 (optimal control, mathematical theory of) 的创建, Lagrange 问题具有特殊的重要性. 以下借助于这理论给出涉及 Lagrange 问题的主要结果. 这些是由 Л. С. Понтрягин 和他的学派得到的.

考虑以下情形: 在问题 (1) 和 (2) 中  $t$  是一维的且组  $\varphi(t, x, \dot{x})$  可以对最后的变量部分地解出. 结果所得问题是在微分约束

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (5)$$

和边界条件

$$(x(t_0), x(t_1)) \in E \quad (6)$$

之下使泛函

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u) dt \quad (7)$$

极小化.

在方程 (5)–(7) 中,  $x = (x^1, \dots, x^n)$  是称为相向量的一个向量函数,  $u = (u^1, \dots, u^m)$  是称为控制的一个向量函数,  $F: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $E \subset \mathbf{R}^{2n}$ .

问题 (3) 的固定条件可以作为 (6) 型边界条件的一个例子. 在最优控制问题中除了条件 (5) 和 (6), 还要加某些“非经典”条件如

$$u(t) \in U \subset \mathbf{R}^m. \quad (8)$$

**弱极值与强极值.** 在变分学中通常区分两种拓扑——强的和弱的拓扑, 且对应地定义强极值 (strong extremum) 和弱极值 (weak extremum). 例如, 当应用于问题 (3) 时, 称曲线  $x_0(t)$  实现弱极小值 (weak minimum), 如果可以找到  $\varepsilon > 0$ , 使得对满足条件



$x(t_0) = x_0(t_0)$ ,  $x(t_1) = x_0(t_1)$  和

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t) - x_0(t)| + \max_{t \in [t_0, t_1]} |\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t_0)| < \varepsilon$$

的所有连续可微函数  $x(t)$ ,  $J(x) \geq J(x_0)$ . 换句话说, 这不仅确定相变量的邻近性, 而且要求速度(控制)的邻近性. 称函数  $x_0(t)$  给出强极值, 如果可以找到  $\varepsilon > 0$ , 使得对满足条件

$$x(t_0) = x_0(t_0), x(t_1) = x_0(t_1)$$

和

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t) - x_0(t)| \leq \varepsilon$$

的所有可能的绝对连续函数  $x(t)$  (对此  $x(t)$ ,  $J(x)$  存在),  $J(x) \geq J(x_0)$ . 上面的式子仅表示相变量的邻近性.

如果  $x_0(t)$  实现了一个强极值, 则它更不容置疑地也实现了一个弱极值; 由此, 对强极值的充分条件也是对弱极值的充分条件. 反之, 如果没有弱极值, 则也没有强极值, 即对弱极值的必要条件也是对强极值的必要条件.

**对极值的必要与充分条件.** 上面讨论过的 Euler 方程是对弱极值的一个必要条件. 20 世纪 50 年代后期 Понтрягин 对问题 (5) - (8) 提出了一个最大值原理, 它是对强极值的一个必要条件 (见 Понтрягин 最大值原理 (Pontryagin maximum principle)). 这最大值原理说明如果偶对  $(x, u)$  给予问题 (5) - (8) 的一个强极值, 则存在向量函数  $\psi$  和数  $\lambda_0$ , 使得关系式

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad -\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \max_{u \in U} H(t, x(t), \psi(t), u, \lambda_0) &= \\ &= H(t, x(t), \psi(t), u(t), \lambda_0) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

对 Hamilton 函数  $H(t, x, \psi, u, \lambda_0) = (\psi, f) - \lambda_0 F$  成立.

如果把 Понтрягин 最大值原理应用到问题 (3), 则可以推出, 曲线  $x(t)$  达到问题 (3) 中强极小值的必要条件是它为极值曲线 (即满足 Euler 方程 (4)) 且满足必要的 Weierstrass 条件 (对变分极值的) (Weierstrass conditions (for a variational extremum))

$$\mathcal{E}(t, x(t), \dot{x}(t), \xi) \geq 0 \quad \text{对所有 } t \in [t_0, t_1],$$

$$\xi \in \mathbf{R}, \quad (10)$$

这里

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, \xi) =$$

$= L(t, x, \xi) - L(t, x, \dot{x}) - ((\xi - \dot{x}) L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}))$  是所谓的 Weierstrass 函数.

除了带有局部 (local) 特征 (即可在每一极值点检验) 的 (4) 和 (10) 类型的条件之外, 还有整体必要条件 (global necessary condition), 与给定极值曲线的邻域中的极值曲线集合的性态有关 (见 Jacobi 条件 (Jacobi condition)). 对问题 (3) Jacobi 的条件可描述如下. 为了极值曲线  $x(t)$  提供问题 (3) 中的一个极小值, 必要条件是带有边界条件  $h(t_0) = 0$ ,  $\dot{h}(t_0) \neq 0$  的 Jacobi 方程 (Jacobi equation)

$$\begin{aligned} & - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \right]_{x(t)} \frac{d}{dt} h(t) + \\ & + \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \right]_{x(t)} h(t) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

的解在区间  $(t_0, t_1)$  中无零点. 方程 (11) 的解  $h(t)$  的零点称为与  $t_0$  共轭的点 (points conjugate with the point  $t_0$ ). 这样, Jacobi 的条件是指区间  $(t_0, t_1)$  中不包含共轭于  $t_0$  的点.

对弱极小值的必要条件  $\delta J = 0$ ,  $\delta^2 J \geq 0$  是关于一元函数极小值条件  $f'(x) = 0$ ,  $f''(x) \geq 0$  的严格类似. 如果 (强) Legendre 条件 (Legendre condition) 满足, 则 Jacobi 条件是二阶变分非负的一个必要条件. 这导致以下结果: 为了函数  $x(t)$  实现泛函 (3) 的弱极小, 必须: a)  $x(t)$  满足 Euler 方程; b) 满足 Legendre 条件  $(\partial^2 L / \partial \dot{x}^2)|_{x(t)} > 0$ ; 和 c) 区间  $(t_0, t_1)$  不包含共轭于  $t_0$  的点 (如果满足强 Legendre 条件).

关于弱极小值的充分条件如下: 函数  $x(t)$  必定是在其上满足强 Legendre 条件的极值曲线, 且半开半闭区间  $(t_0, t_1]$  必定不包含共轭于  $t_0$  的点. 为了曲线  $x(t)$  达到强极大值只须 Weierstrass 充分条件和上面表述的对弱极小值的充分条件满足.

**最优控制中的问题.** 变分法发展的主要方向之一是很像上述问题 (5) - (8) 的非经典问题的变分法. 这类问题有重要的实际意义. 例如, 设 (5) 描述某动力体, 如宇宙飞船的运动. 控制——向量  $u$ ——是发动机的推进力. 宇宙飞船的初始位置是某轨道, 而它的最终位置是不同半径的轨道. 泛函  $J$  描述在完成这样的动作中的燃料消耗. 那么问题 (5) - (7) 可应用到这种情况如下: 确定由宇宙飞船发动机所施加的、在一给定期内完成从一轨道到另一轨道转移所需要的推进力变化的规律使得燃料消耗最小. 同时必须顾及控制上所加的约束: 发动机的推进力必须不超过某一给定的值; 转动角度也是有界的. 这样, 推进力的分量  $u^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 是受约束

$$a_i^- \leq u^i \leq a_i^+$$

支配的情形, 其中  $a_i^-$  和  $a_i^+$  是给定的数.

很多问题都可以化成在 (8) 型补充限制下的 Lagrange 问题. 这样一些问题称为最优控制问题 (problems of optimal control). 对最优控制理论发展一个特殊的工具是值得的. Понтрягин 最大值原理可以说就是这样一种工具.

对最优控制理论中这些问题另外的途径也是可能的. 设  $S(t, x)$  是泛函 (7) 沿一个最优解从一点  $(t_0, x_0)$  到一点  $(t, x)$  的值. 为了函数  $u(t)$  是这样一种情形下的最优控制, 其必要条件 (在某些情形下也是充分条件) 是被称为 Bellman 方程 (Bellman equation) 的偏微分方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \min_{u \in U} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)', (f(t, x(t), u(t))) + \right. \\ \left. - F(t, x(t), u(t)) \right] = 0$$

成立 (见动态规划 (dynamic programming)). 在经典变分学的问题中, 函数  $S(t, x)$  (作用积分) 必须满足 Hamilton-Jacobi 方程 (Hamilton-Jacobi equation)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left[ t, x, \frac{\partial S}{\partial x} \right] = 0,$$

其中  $H$  是 Hamilton 函数 (Hamilton function). 问题 (3) 中, 该函数是被积函数  $L(t, x, \dot{x})$  关于  $\dot{x}$  的 Legendre 变换 (Legendre transform). Hamilton-Jacobi 理论是研究许多与经典力学有关的变分问题的有力工具.

变分学与偏微分方程理论之间的联系早在 19 世纪就被发现了. P. G. L. Dirichlet 证明了解 Laplace 方程的边值问题等价于解某一个变分问题. 例如, 考虑一个给定的线性算子方程

$$Ax = f, \quad (12)$$

其中  $x(\xi, \eta)$  是两个自变量的某个函数, 且它在闭曲线  $\Gamma$  上为零. 在对某类物理问题是自然的假设下, 求方程 (12) 解的问题等价于求泛函

$$J(x) = \iint_{\Omega} A_{xx} d\xi d\eta - 2 \iint_{\Omega} f x d\xi d\eta \quad (13)$$

的极小值, 这里  $\Omega$  是被曲线  $\Gamma$  界定的区域. 方程 (12) 在这情形下是对泛函 (13) 的 Euler 方程.

举例说, 如果  $A$  是正定自伴算子, 则把问题 (12) 化成 (13) 是可能的. 偏微分方程问题与变分问题之间的联系, 特别地使得建立各种存在性和唯一性定理的正确性成为可能; 它在广义解概念的形成中起

着重要作用. 这样的转换在计算数学中也是很重要的, 因为变分学的直接方法可用来解偏微分方程理论中的边值问题.

**定性方法.** 这些方法使得有可能解决关于解的存在性和唯一性问题, 也可解决关于极值曲线 (极值曲线族) 的定性特征问题. 20 世纪中建立了变分问题解的数目依赖于该泛函定义于其上的空间的性质. 例如, 如果泛函  $J$  定义于连结两给定点的环面上的所有可能的光滑曲线上, 或定义于拓扑等价于环面的曲面上的所有可能的闭曲线上, 则临界元素——在其上变分  $\delta J = 0$  的曲线——的个数在这两情形下都是无穷的. Л. А. Люстерник 和 Л. Г. Шнирельман ([7]) 证明在每个拓扑等价于球面的曲面上至少存在三个不同长度的闭自交测地线; 如果这些测地线中只要有二个的长度相等, 则存在无穷多个相等长度的闭测地线. 这样一些问题指出变分学与微分方程定性理论和拓扑学之间的紧密的联系. 泛函分析的发展对定性方法的研究作出了实质性贡献. 亦见大范围变分学 (variational calculus in the large).

**变分学与锥理论之间的联系.** 变分学中研究的问题的范围仍在增加. 特别地, 对定义在赋范空间的元素集合  $G_k$  上的很一般类型的泛函有很大兴趣. 在这类问题中引进变分概念是困难的, 而必须利用另一类工具. 这就是 Banach 空间中的锥理论. 例如, 考虑使  $f(x)$  极小化的问题, 其中  $x$  是闭集  $G$  中的元素. 锥 (cone)  $\Gamma_G(x_0)$  是这样一些非零向量  $e$  的集合,  $e$  可与一个正数  $\lambda_e^*$  对应使得对所有的  $\lambda \in (0, \lambda_e^*)$  向量  $x = x_0 + \lambda e \in G$ . 而锥  $\Gamma_f(x_0)$  是这样一些非零向量  $e$  的集合,  $e$  可与一个正数  $\lambda_e^*$  对应使得对所有的  $\lambda \in [0, \lambda_e^*]$ ,

$$f(x_0 + \lambda e) \geq f(x_0).$$

为了  $x_0$  实现  $f(x)$  的极小值, 锥  $\Gamma_G(x_0)$  和  $\Gamma_f(x_0)$  的交必是空的. 这条件恰如变分为零的条件那样初等, 但是并非所有由它推出的结果可用变分学的经典方法得到. 它使得可能处理复杂得多的问题, 如在关于不可微泛函的极值的研究中 ([6]).

#### 参考文献

- [1] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷第一、二分册, 人民教育出版社, 1958).
- [2] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).
- [3] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.



- [4] Михлин, С. Г., Вариационные методы в математической физике, М., 1957.
- [5] Понтрягин, Л. С. (и др.), Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969 (英译本: Pontryagin, L. S., et al., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1962).
- [6] Пшеничный, Б. Н., Необходимые условия экстремума, М., 1969 (英译本: Pshenichnyi, B. N., Necessary conditions of an extremum, Interscience, 1962).
- [7] Люстерник, Л. А., Шнирельман, Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930.

Н. Н. Моисеев 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Noton, A. R. M., Introduction to variational methods in control engineering, Pergamon Press, 1965.
- [A2] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975.
- [A3] Elsgoloc, L. E., Calculus of variations, Pergamon Press, 1961 (译自俄文) (中译本: Л. Е. 艾利斯哥尔兹, 变分法, 高等教育出版社, 1960).
- [A4] Rockafellar, R. T., The theory of subgradients and its applications to problems of optimization. Convex and nonconvex functions, Heldermann, 1981.

葛显良 译 吴绍平 校

## 大范围变分学 [variational calculus in the large; вариационное исчисление в целом]

数学的一个分支, 包括用拓扑学的概念和方法对变分问题作定性的研究: 极值曲线的存在性和数目的估计, 它们的一些定性性质的研究和许多不同类型的极值曲线之间的关系 (见变分问题 (variational problem)). 这领域有时也认为包括流形上函数的平稳 (临界) 点的“总体”理论, 对这些点类似问题也被研究. (在所有情况下, 后面的理论是与大范围变分学紧密联系的且有相同的来源, 而且其中的一些问题常常作为真正变分问题的简化模型. 有时后者也借助于用前者的逼近来作研究). 给定问题中存在的所有极值曲线 (平稳点) 都是有意义的, 不管它们是否有对应的该泛函的 (或函数的) 真正极值 (即极大值或极小值) 或者它们只是平稳的. 这是大范围变分法和变分学 (variational calculus) 的较早分支之间的差别之一, 在较早分支中, 在对所有极值曲线都同样的平稳性条件的比较简单的推演以后, 研究集中在极值 (通常是局部的) 上——通常是极小值. 此外, “经典”课题的大部分包括对极值曲线的小邻域的研究, 而大范围变分学中要利用变分问题的整个函数空间, 即所考虑的泛函在其上定义的曲线 (函数, 曲面, 等等)

的整个空间 (或所考虑函数在其上定义的任一流形) 的拓扑性质. 这些性质也与这些曲线 (曲面) 所在的或这些函数定义在其上并 (或) 取值的空间 (区域, 流形, 等等) 的拓扑有联系 (且也与边界条件或任何补充条件的性质有联系). 大范围变分学的这种“整体”特征被“大范围”这名称所强调. (在大范围变分学发展过程中显示了必须研究纯粹是局部的二阶变分 (second variation) 的性质 ([1])). 这些性质以前仅在涉及到泛函的极小条件时才被研究.)

大范围变分法是 1920—1930 年间在试图解决关于估计闭 Riemann (或更一般地, Finsler) 流形上闭测地线 (closed geodesic) 的数目问题中具体化的. 这问题也被称为大范围变分法的周期问题 (periodic problem) ([1], [2], [4]).

大范围变分学中一般的研究方法可描述如下. 对给定的函数, 包括泛函, 看成对应的无穷维泛函空间上的函数, 研究函数的变化水平 (level)  $C$  的较小值区域 (domain of smaller values)

$$f^{-1}(-\infty, C] = \{x: f(x) \leq C\}$$

的各种拓扑性质的变化. 试图证明只有当  $C$  通过平稳值 (对应于该函数的平稳点) 时这些性质才变化且去描述伴随这种转移而起的变化与相应的平稳点性质之间的联系.  $f$  的平稳点为一方, 具有充分大  $C$  的较小值区域  $f^{-1}(-\infty, C]$  或甚至  $f$  在其上定义的整个空间的拓扑性质为另一方的两者之间的某些联系被得到了. 如果知道了后者的性质, 则所建立的联系可以引出关于平稳点的某些结论. 对变分问题本身还要实施另外的一步 (它可以是平凡的或很困难的): 关于辅助对象 (某泛函空间的点) 所得出的结果, 必须用原问题被提出时所用的说法来进行解释. 这最后一步正是闭测地线问题中最困难的一步.

刚才描述的程序对闭流形  $M$  上的光滑函数  $f$  可以容易地实现. 与对各种  $C$  的较小值区域  $f^{-1}(-\infty, C]$  相比较, 更常用梯度下降 (gradient descent), 即按照由  $f$  和  $M$  上任何辅助 Riemann 度量定义的梯度动力系统 (gradient dynamic system) 的点的运动. 各个平稳点近旁的情形被独立地考虑. 如果它们都是非退化的, 则当  $C$  通过一个平稳水平时较小值区域中的改变可以很详细地加以描述——精确到相差一个微分同胚. 这样一种描述, 恰如水平流形 (level manifolds)  $f^{-1}(C)$  中变化的类似描述, 已证明在拓扑学中是重要的 ([5], [6]), 而在大范围变分学中借助于某个数值不变量——Люстерник-Шнирельман 范畴  $\text{cat } M$ ——和借助于同调论只要不太完全的信息就足够了. 同调的信息导致 Morse 不等式 (Morse inequalities), 它们通常比上述范畴给予非退化临界点个数的多得多

的估计. 同时, 即使不假设这些平稳点是非退化的, 这种范畴和 Morse 不等式的估计都适用, 虽然 Morse 不等式给出一种估计, 其中认为退化平稳点具有特别指定的重数, 在这方面就论及解析地不同的平稳点 (analytically-different stationary points) 的个数和这些点的代数个数 (algebraic number) 的估计. 另一方面, 上述范畴给出在通常意义下平稳点个数的估计 (强调这种情况, 称之为几何地不同的平稳点 (geometrically-different stationary points) 的个数的估计). 此外, 可以给出某种附加信息: 或者平稳水平的数目不小于  $\text{cat } M$ , 不然就要谈到平稳点的一个连续统.

为了对无穷维流形上函数得到类似结果, 必须作某些附加的假设, 如对这些函数的解析性质 (除光滑性以外). 与有限维情形最完全类似的结果由应用所谓 Palais-Smale 条件 (Palais-Smale condition)  $C$  而得出 ([7]), 但是对有些有兴趣的情形这条件不满足, 又如果满足较弱的条件, 则所得结果也较弱. 对梯度下降的轨道及其类似物的任一种的研究都会导致困难. 例如, 对来源于几何的某些问题——Riemann 流形的极小闭子流形, 调和映射——这问题化成非线性抛物型偏微分方程组解的性态问题 ([8]). 满意的结果有时仅对极小点得到. 主要应用是对非线性算子的本征值 ([7], [8], [9]) 和对变分学中多维问题 (multi-dimensional problems)——即在这些问題中所考虑的泛函表成某种多重积分——包括上面提到的来源于几何的问题.

对一维问题 (one-dimensional problems) (即其中考虑的泛函表成一个自变量的积分), 比梯度下降法更初等的特殊方法也可用; 事实上, 很多结果被用这样一些方法所得到 ([1], [2], [3]). 闭测地线问题和完全连通 Riemann 流形  $M$  上连结两点的测地弧的数目的估计问题都是一维的. 后面的问题已经完全解决: 如果  $M$  不能被缩成一点, 则这样的弧的数目是无限的 ([10]).

看来大范围变分学在数学其他分支的第一个应用是计算经典 Lie 群的同调 ([11]). 最重要的现代应用——与函数的平稳点理论在拓扑学中的应用 (见上面) 一起——是 Lie 群的平稳同伦群的计算 (所谓的 Bott 理论 ([12])). 大范围变分学也用于整体微分几何学 (differential geometry) ([13]) 中.

#### 参考文献

- [1] Morse, M., The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc., 1934.
- [2] Люстерник, Л. А., Шнирельман, Л. Г., «Успехи матем. наук», 2 (1947), 1, 166 – 217.
- [3] Seifert, H. and Threlfall, W., Variationsrechnung im Groszen (Morsesche Theorie), Teubner, 1938.
- [4] Birkhoff, G. D., Dynamical systems with two degrees

of freedom, Trans. Amer. Math. Soc., 18 (1917), 199 – 300.

- [5A] Milnor, J., Topology from the differential viewpoint, Univ. of Virginia Press, 1965 (中译本: J. 米尔诺, 从微分观点看拓扑, 上海科学技术出版社, 1983).
- [5B] Wallace, A. H., Differential topology, First steps, Benjamin, 1968.
- [6] Milnor, J., Lectures on the  $h$ -cobordism theorem, Princeton Univ. Press, 1965.
- [7] Eells, J., A setting for global analysis, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), 751 – 807.
- [8] Альбер, С. И., «Успехи матем. наук», 25 (1970), 4, 57 – 122.
- [9] Berger, M. S., A bifurcation theory for nonlinear elliptic partial differential equations and related systems, in J. B. Keller and S. Antman (eds.): Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems, 1969, 113 – 216.
- [10] Serre, J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. of Math., 54 (1951), 425 – 505.
- [11A] Понтрягин, Л. С., «Матем. сб.», 6 (1939), 3, 389 – 422.
- [11B] Понтрягин, Л. С., «Успехи матем. наук», 23 (1968), 6, 151 – 185.
- [12] Milnor, J., Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963 (中译本: J. 米尔诺, 莫尔斯理论, 科学出版社, 1988).
- [13] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 E. Witten ([A2]) 指出, 对临界点和连接下降流形可以指定一个复形, 其同调同构于该空间的同调. 这蕴涵 Morse 不等式. Morse 指数的一种在应用中很有用的精细的改进是 Conley 指数 (Conley index), 见 [A3].

关于用 Hilbert 流形的现代处理见 [A1].

#### 参考文献

- [A1] Klingenberg, W., Lectures on closed geodesics, Springer, 1978.
- [A2] Witten, E., Supersymmetry and Morse theory, J. Diff. Geom., 17 (1982), 661 – 692.
- [A3] Conley, C. and Zehnder, E., Morse type index theory for Hamiltonian equations, Comm. Pure Appl. Math., 37 (1984), 207 – 253.
- [A4] Morse, M. and Cairns, S. S., Critical point theory in global analysis and differential topology, Acad. Press, 1969.

葛显良 译 吴绍平 校

变分学的数值方法 [variational calculus, numerical methods of ; вариационное исчисление, численные



методы]

计算数学的一个分支, 其中讨论泛函极值的确定.

变分学的数值方法通常分成两大类: 间接和直接的方法. 间接方法是基于运用最优化的必要条件 (见变分学 (variational calculus); Euler 方程 (Euler equation); Weierstrass 条件 (对泛函极值) (Weierstrass conditions (for a variational extremum)); 横截性条件 (transversality condition); Понтрягин 最大值原理 (Pontryagin maximum principle)), 借助于这些条件把原变分问题化成边值问题. 这样, 间接方法计算上的优点和缺点完全由相应的边值问题的性质所决定. 直接方法中, 泛函的极值是直接寻求的. 这样用的最优化方法是数学规划 (mathematical programming) 思想的一种发展.

变分学的数值方法分成直接方法与间接方法, 这在很大程度上是有条件的. 某些算法中两种方法都要用. 此外, 某些方法不能被归入两者中的任一类. 这样, 基于最优化充分条件的一些方法构成另一单独的类.

变分法中的第一批数值方法出现于 L. Euler 的工作中. 然而它们的最快速发展发生在 20 世纪中叶作为电子计算机技术的传播和由此提供的解决工业技术中复杂问题的可能性的结果. 变分学中数值方法的发展与最优控制理论有极大关系, 从实际应用观点看, 这是最重要的 (见最优控制的数学理论 (optimal control, mathematical theory of)).

间接方法. 随着 Понтрягин 最大值原理的出现 (1956), 变分问题经常可化成边值问题.

考虑最优控制中的以下问题: 求轨道  $x(t)$  和控制  $u(t)$  使得对此泛函

$$J = \int_{t_0}^T f^0(t, x, u) dt \quad (1)$$

在给定的微分约束

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (2)$$

边界条件

$$x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

$$x(T) = x_T, \quad (4)$$

和控制限制

$$u \in U \quad (5)$$

下取到其最小值, 其中  $x = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $u = (u^1, \dots, u^m)$  是相坐标向量和控制向量,  $f = (f^1, \dots, f^n)$ ,  $U$  是一个  $m$  维空间中的闭集, 而  $t$  (时间) 是自变量.

按照 Понтрягин 最大值原理, 最优控制  $u(t)$  一定对任何  $t$  产生 Hamilton 函数 (Hamilton function)

$$H(\tilde{u}) = \max_{u \in U} H(u) = \max_{u \in U} \left[ \sum_{i=1}^n \psi_i f^i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] \quad (6)$$

的绝对极大值, 这里  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  由方程组

$$\dot{\psi}_i = - \frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

定义. 控制  $u(t, x, \psi)$  由条件 (6) 求得且被代入 (2) 和 (7) 中. 作为结果, 得到带有  $2n$  个边界条件 (3) 和 (4) 的  $2n$  个微分方程的方程组 (2) 和 (7) 的封闭边值问题.

对这边值问题最常用的数值解方案包括用分数步的 Newton 法 ([3]). 引入差异向量

$$\varphi_i = x^i(T) - x_T^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

其中  $x^i(T)$  的值由解具有初始条件 (3) 和  $\psi_j(t_0) = \psi_{j0}$ ,  $j = 1, \dots, n$  的方程组 (2), (7) 的 Cauchy 问题得到. 差异 (8) 看作未知量  $\psi_{10}, \dots, \psi_{n0}$  的函数, 由方程组

$$\varphi_i(\psi_{10}, \dots, \psi_{n0}) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

定义. 方程组 (9) 用 Newton 法 (Newton method) 求解; 所涉及的偏导数

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_{j0}}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

由公式

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_{j0}} \approx \frac{\varphi_i(\psi_{10}, \dots, \psi_{j0} + \Delta \psi_{j0}, \dots, \psi_{n0}) - \varphi_i(\psi_{10}, \dots, \psi_{n0})}{\Delta \psi_{j0}}$$

数值地确定, 其中  $\varphi_i(\psi_{10}, \dots, \psi_{j0} + \Delta \psi_{j0}, \dots, \psi_{n0})$  的值由解带有初始条件 (3) 和条件

$$\psi_l(t_0) = \psi_{l0}, \quad \psi_j(t_0) = \psi_{j0} + \Delta \psi_{j0}, \quad l \neq j$$

的方程组 (2), (7) 的 Cauchy 问题得到, 其中  $\Delta \psi_{j0}$  是  $\psi_{j0}$  的一个小增量.

这些偏导数可用一个更精确但是更繁琐的方法 ([4]) 来确定, 包括要积分方程组 (2), (7) 的变形形式的一个  $2n$  个方程的组.

Newton 方法中的困难首先在于对  $\psi_{j0}$  的恰当的初始逼近的选取, 其次在于该 Cauchy 问题的不稳定性, 这在大区间  $[t_0, t_1]$  上很强烈地显示出来. 没有一般有效的程序去克服第一个困难. 很多方法可用来处理 Cauchy 问题的不稳定性 (见 Cauchy 问题, 常

微分方程的数值方法 (Cauchy problem, numerical methods for ordinary differential equations)).

如果边值条件和泛函以比 (3), (4) 和 (1) 中更一般的形式给定 (例如在 **Bolza 问题** (Bolza problem) 中具有可移动端点, 在具有自由 (可移动) 端点的变分问题 (variational problem) 中), 加入横截性条件 (transversality condition) 以补充最优性条件 (6) 和 (7). 在消去出现于这些条件中的任意常数后, 得到一个封闭的边值问题和对应的 (9) 型的方程组.

方程组 (9) 的解也可由用于解非线性组的其他方法得到.

解特殊类型的边值问题的特殊方法已经有了发展. 例如, 线性边值问题用边界条件转移法 (打靶法 (shooting method)) 求解. 这方法也用来作为非线性边值问题迭代解法的一个组成部分 ([1]).

变分学问题很经常地借助于电子计算机求解, 因为按这方式间接方法可有效地且比较简单地实现. 然而, 这种技巧并非可应用于所有的情形; 对变分学中某些重要的问题类, 例如包含相限制的问题, 写出必要条件是困难的, 这就导致有复杂结构的边值问题. 此外, 这些边值条件不一定保证所找到的解确实给出该泛函的一个极值. 这必须用引进最优化的充分条件来检验. 所有这些限制了间接方法的应用范围.

**直接方法.** 第一个直接方法是 Euler 为解变分学中最简问题而提出的. 它被称为 Euler 折线法 (或 Euler 有限差分法). 在这方法中泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt \quad (10)$$

是在满足给定边界条件

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \quad (11)$$

的连续折线  $x(t)$  上考虑的, 且这些折线由端点在给定横坐标的  $N$  个直线段组成. 这样, 该泛函数变成该折线顶点的纵坐标的一个函数, 而原来的问题化成一个多元函数求极小的问题 (见 **Euler 法** (Euler method)).

由于包含在这样的计算中的工作量是相当大的, 直接法在变分学的传统的研究中长期被忽视. 在 20 世纪初它们再次被采用. 化成求多元函数极值问题的新方法被提出来了. 其中最重要的是 **Ritz 法** (Ritz method), 按照这方法在条件 (11) 制约下使 (10) 极小化的解是在具有形式

$$x = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(t)$$

的函数类中去寻找, 这里  $\varphi_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , 是满

足边界条件

$$\varphi_0(t_0) = x_0, \varphi_0(t_1) = x_1, \varphi_i(t_0) = \varphi_i(t_1) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots,$$

的一个完全的无限的线性无关函数系中的元素. 该问题化成求  $N$  个变量的函数

$$J = J(a_1, \dots, a_N)$$

的极小值. Ritz 法是足够一般的方法. 它被用于解数学物理中变分问题, 包含依赖于多元函数的一个泛函的极小化. 该方法的包括这类问题的进一步推广是这样的方法 ([2]), 其中系数考虑为自变量之一的未知函数 (例如, 如果问题包含两个自变量  $t$  和  $\tau$ , 则  $a_i$  可以给定  $a_i(\tau)$ ). 原来的泛函变为依赖于  $N$  个函数  $a_i(\tau)$ , 而它们可以借助于必要条件来决定, 即归根到底, 由解  $N$  个 Euler 方程的方程组的边值问题来决定.

实际需要增加了最优控制的非经典问题的价值. 在技术问题中出现的在相坐标和控制函数上的复杂限制, 微分方程右边的不连续性, 奇异的和滑动最优控制条件的可能存在性, 等等, 所有这一切刺激了新直接方法的发展. 最流行是包含控制空间中下降的思想和变式的逐次分析思想的那些方法 (**动态规划** (dynamic programming) 型的).

控制空间中下降方法是基于求出形如

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \delta u_k(t) \quad (12)$$

的控制序列  $u_k \in U$ , 它对应于该泛函值的一个单调减小序列. 例如, 假设需要求泛函

$$J = F(x(T)) \quad (13)$$

在条件 (2), (3) 和 (5) ( $U$  是凸的单连通集) 的制约下的一个极小值. 寻找增量  $\delta u_k(t)$  如下. 借助于在右端点受条件

$$\psi_i(T) = - \frac{\partial F(x(T))}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n$$

制约的 (2) 的变分方程和共轭组 (7), 泛函 (13) 的增量的线性部分由变分  $\delta u$  表成形式

$$\delta J = - \int_{t_0}^T \frac{\partial H}{\partial u} \delta u dt.$$

为了减小泛函 (13) 的值, 必须对每一次迭代选择增量

$$\delta u_k(t) = \kappa \frac{\partial H}{\partial u}, \kappa > 0,$$

其中  $\partial H / \partial u$  的值在控制  $u_k(t)$  和在对应的轨道  $x_k(t)$  上计算. 该线性化的正则性, 以及由此, 泛函 (13) 的值的减小是由选取  $\kappa$  的充分小的值来加以保证的. 下降过程 (12) 从某个  $u_0(t)$  开始, 而作为最



后一次迭代的结果, 当  $|\delta J|$  变得小于某个给定的  $\varepsilon$  时, 就终止了. 在如上描述的自由右端点的情形, 所得到的算法最简单 ([5], [6], [7]). 不涉及原问题线性化的另一种方法对解具有一个自由端点的问题很有效 ([8]). 如果右端点也受边界条件约束, 所有算法变得复杂得多. 为了处理边界条件, [5] 中用了一种梯度投影程序, 而在 [6] 中当不满足边界条件时引入罚函数, 即代替 (13) 考虑泛函

$$J = F(x(T)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (x^i(T) - x_T^i)^2, \lambda_i > 0. \quad (14)$$

控制增量是由解一辅助线性规划问题而决定的方法类似于梯度方法 ([9]).

最优控制问题数值解的一大类直接方法是基于变式的逐次分析的思想 ([10], [11], [12]). 这些方法的重要特征是可以用来解形如

$$x \in G \quad (15)$$

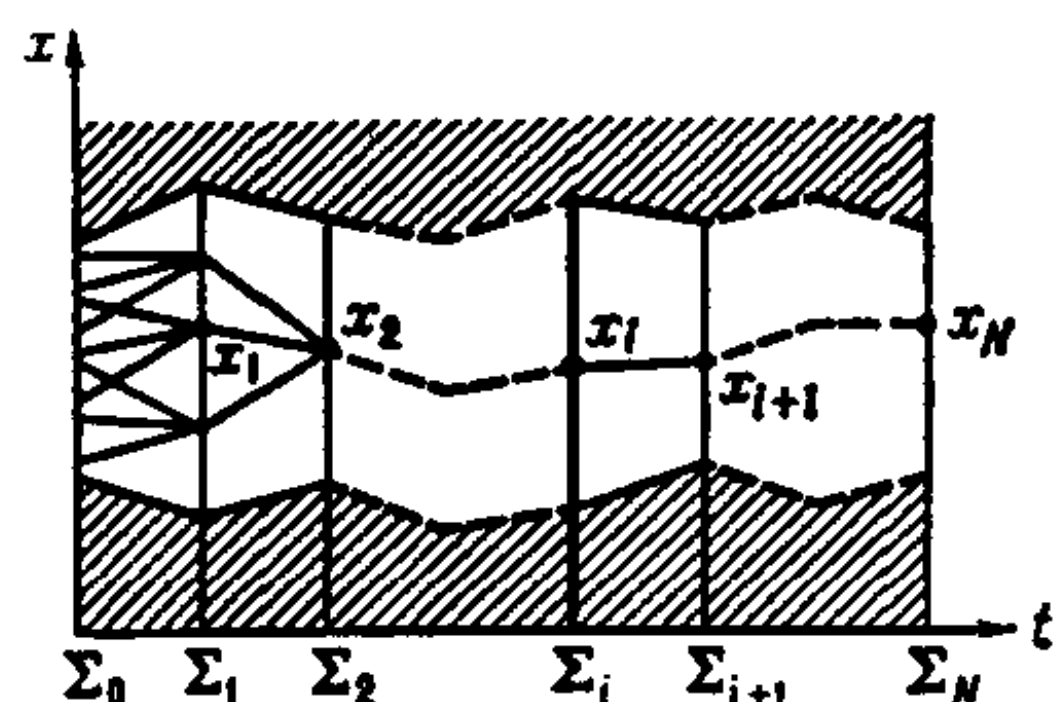
这一类的相限制的问题, 其中  $G$  是  $n$  维空间中闭集. 其主要缺点是当空间维数增加时其应用迅速地变得越来越困难. 在这些方法中原问题化成特殊类型的非线性规划问题. 实现这种转化的两种方式经常用到. 第一种方法最后化成仅依赖于在轴上离散网格点上给定控制的一个函数的极小化问题 ([13]). 在第二种方法中丢弃了控制而问题是化成其类型如

$$J(x_0, \dots, x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}) \quad (16)$$

的一个函数的极小化, 其中  $x_i$  是向量  $x_i$  在点  $t_i (i = 0, \dots, N)$  的值, 且受限制

$$x_i \in G_i, \quad (17)$$

它们是由限制 (3), (4) 和 (15) 而来的. 用来使得 (16) 在 (17) 约束下极小化的程序可几何地解释如下.



每一族向量  $\{x_0, \dots, x_N\}$  对应一条折线, 如图所示, 该折线通过  $x_0, \dots, x_N$  且位于由方程  $t = t_i$  所定义的超平面  $\Sigma_i$  中. 折线长度  $J(x_0, \dots, x_N)$  是其各连接线长度  $f_i(x_i, x_{i+1})$  之和. 容许的  $x_i$  值的区域由 (17) 定义, 且用某个折线与禁止区域分隔 (禁止

区域在图中用阴影表示). 问题是求位于容许区域内且连接超平面  $\Sigma_0$  和  $\Sigma_N$  的一条折线的极小长度. 用以解决这个问题的算法是个多步过程, 在此过程中在每一阶段  $i$ , 某一个已知不包含最优折线的变元的集合  $\Omega_i$  被划出. 在第零步定义函数

$$l(x_1) = \min_{x_0 \in G_0} f_0(x_0, x_1),$$

即连接每一点  $x_1 \in \Sigma_1$  与超平面  $\Sigma_0$  的最短连线的长度. 由于

$$\min_{x \in G_0} J(x_0, \dots, x_N) = l(x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}),$$

不包含线段  $l(x_1)$  的折线的集合  $\Omega_0$  被丢弃. 在第一步构造连接每一点  $x_2 \in \Sigma_2$  与  $\Sigma_0$  的最短折线

$$l(x_2) = \min_{x_1 \in G_1} (l(x_1) + f_1(x_1, x_2)),$$

而不包含直线  $l(x_2)$  的折线的集合  $\Omega_1$  也被丢弃, 等等. 在第  $i$  步构造连接每一点  $x_{i+1} \in \Sigma_{i+1}$  和  $\Sigma_0$  的最短折线

$$l(x_{i+1}) = \min_{x_i \in G_i} (l(x_i) + f_i(x_i, x_{i+1})), \quad (18)$$

而不包含折线  $l(x_{i+1})$  的折线的集合  $\Omega_i$  被丢弃. 最后一步得出原问题的解——连接超曲面  $\Sigma_N$  和  $\Sigma_0$  的最短折线:

$$l = \min_{x_N \in G_N} l(x_N).$$

公式 (18) 是描述寻求此解的多步过程的一个递推关系. 它是动力规划和 Bellman 最优化原理的基础.

按照 (18), 极小值必须在集合  $G_i$  上找, 一般而言该集合具有连续统的势. 数值实现包括它们的有限维逼近. 为此, 除了关于  $t$  的网格 (例如具有常数步长  $\tau$ ) 外, 构造关于  $x^j$  的步长为  $h^j (j = 1, \dots, n)$  的网格. 问题然后化成在一种以网格结点为顶点的特殊图中求最短道路. 设  $P_k(i)$  是位于超平面  $\Sigma_i$  上的结点  $k$ ; 令

$$l_{ks}(i) = f_i(P_k(i), P_s(i+1))$$

是连接邻近的超平面上两结点  $k$  和  $s$  的线段的长度; 又设  $l_k(i)$  是连接结点  $P_k(i)$  与超平面  $\Sigma_0$  的最短道路的长度. 则递推关系 (18) 取形式

$$l_s(i+1) = \min_k (l_k(i) + l_{ks}(i)),$$

其中最小值是对位于超平面  $\Sigma_i$  的容许区域  $G_i$  中的所有结点号码  $k$  取的. 一般情形下这最小值是由检查所有结点而找到. 这方法使得可能找到函数 (16) 在约束 (3), (4) 和 (15) 下的一个总体极值, 具有由网格步长  $\tau$  和  $h^j$  所决定的精确度. 为了这方法收敛于原问题的解, 这些步长之间的一定的关系 (例如

$h' = o(\tau)$  型) 必须成立. 这方法需要用具有大存储量的快速计算机. 由于这个缘故, 实际工作的第一步是在粗的网格上求解, 此后在所得的解的邻域中用更细的网格去得到更精确的解. 做这工作是借助于求局部极值的方法之一 (见行进管法 (travelling tube method); 局部变分方法 (local variations, method of); 行进波法 (travelling wave method)).

#### 参考文献

- [1] Моисеев, Н. Н., Численные методы в теории оптимальных систем, М., 1971.
- [2] Канторович, Л. В., Крылов, В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.-Л., 1962 (中译本: Л. В. 康脱洛维奇等, 高等分析近似方法, 上, 科学出版社, 1966).
- [3] Исаев, В. К., Сонин, В. В., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 5 (1965), 2, 252 - 261.
- [4] Джурович, С., Макинтайр, Д., «Ракетная техника», 1962, 9, 47 - 53.
- [5] Денхэм, В., Брайсон, В., «Ракетная техника и космонавтика», 1964, 1, 34 - 37.
- [6] Шатровский, Л. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 2 (1962), 3, 488 - 491.
- [7] Эннеев, Т. М., «Космические исследования», 4 (1966), 5, 651 - 669.
- [8] Крылов, И. А., Черноусько, Ф. Л., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 2 (1962), 6, 1132 - 1139.
- [9] Федоренко, Р. П., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 4 (1964), 6, 1045 - 1064.
- [10] Bellman, R., Dynamic programming, Princeton Univ. Press, 1957.
- [11] Михалевич, В. С., «Кибернетика», 1 (1965), 1, 45 - 46.
- [12] Моисеев, Н. Н., «Кибернетика», 1966, 3, 1 - 29.
- [13] Ермольев, Ю. М., Гуленко, В. П., «Кибернетика», 1967, 3, 1 - 20.

И. Б. Вапнярский, И. А. Ватель 撰

【补注】“相坐标”在西方文献中通常称为“状态变量”.

#### 参考文献

- [A1] Bryson, A. E. Jr. and Ho, Y. C., Applied optimal control, Hemisphere, 1975.

葛显良 译 吴绍平 校

变分方程 [variational equations 或 equations in variation; уравнение в вариациях], 变分方程组 (system of variational equations)

一微分 (或差分) 方程之解对一参数的导数所满足的线性微分 (或差分) 方程. 令  $x(\cdot):(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$  是 Cauchy 问题 (Cauchy problem)  $\dot{x} = f(x, t)$ ,

$x(t_0) = x_0$  的解, 其图象位于区域  $G$  内, 而  $f$  和  $f'_x$  均在  $G$  内连续. 这时, 对任意区间  $[p, s] \subset (\alpha, \beta)$  和每一个  $\varepsilon > 0$ , 都可以找到一个  $\delta > 0$ , 使得对任一连续函数  $g: G \rightarrow \mathbf{R}^n$ , 并且  $g'_x$  也在  $G$  中连续, 且满足不等式

$$\|g - f\|_{C(G)} = \sup_{(x, t) \in G} |g(x, t) - f(x, t)| < \delta,$$

Cauchy 问题  $\dot{y} = g(y, t)$ ,  $y(t_0) = y_0$  都有一个解  $y(\cdot)$ , 对满足  $|y_0 - x_0| < \delta$  的每一个  $y_0 \in \mathbf{R}^n$ , 此解都定义在区间  $[p, s]$  的一个邻域上. 对这两个解的差  $y(\cdot) - x(\cdot)$  有公式

$$y(t) - x(t) = z(t) + o(|y_0 - x_0| + \|g - f\|_{C^1(G)})$$

成立, 其中  $z(\cdot)$  是线性微分方程

$$\dot{z} = A(t)z + h(t) \quad (1)$$

之解, 而  $A(t) = f'_x(x(t), t)$ ,  $h(t) = g(x(t), t) - f(x(t), t)$ , 并有初值  $z(t_0) = y(t_0) - x(t_0)$ ;  $o(\cdot)$  是对  $t \in [p, s]$  的一致“小  $o$ ”, 而范数  $\|g - f\|_{C^1(G)}$  定义为

$$\sup_{(x, t) \in G} \{|g(x, t) - f(x, t)| + \|g'_x(x, t) - f'_x(x, t)\|\}.$$

方程 (1) 称为  $\dot{x} = f(x, t)$  沿解  $x(\cdot)$  的变分方程 (variational equation).

在文献中时常引用上述定理的较弱形式 (其中使用一种较弱的可微性代替 Fréchet 可微性): 若在区域  $G \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$  与一区间  $(a, b) \subset \mathbf{R}$  之乘积  $G \times (a, b)$  上函数  $f(x, t, \mu): G \times (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^n$  为连续, 且有连续偏导数  $f'_x, f'_\mu$ ; 而函数  $x_0(\cdot): (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^n$  是连续可微的, 则 Cauchy 问题  $\dot{x} = f(x, t, \mu)$ ,  $x(t_0) = x_0(\mu)$  之解  $x(\cdot, \mu)$  对  $\mu$  在区间  $(a, b)$  中连续可微, 且其导数  $x'_\mu(\cdot, \mu)$  是线性微分方程 (即  $\dot{x} = f(x, t, \mu)$  沿解  $x(\cdot, \mu)$  的变分方程)

$$\dot{z} = A(t)z + h(t)$$

之解, 且适合初值条件  $z(t_0) = x'_{0\mu}(\mu)$ , 这里  $A(t) = f'_x(x(t, \mu), t, \mu)$ ,  $h(t) = f'_\mu(x(t, \mu), t, \mu)$ .

$k$  阶变分方程就是一个微分 (差分) 方程之解对一参数之  $k$  阶导数所满足的线性微分 (差分) 方程. 任意阶变分方程都相应于同样的线性齐次方程 (即与  $k$  无关), 差别在非齐次项  $h(t)$ .

若微分方程的右方不变 (在第一种提法下即指  $g = f$ , 而在第二种提法下则指  $f(x, t, \mu)$  不含  $\mu$ ), 则 (一阶) 变分方程是齐次的.

自治系统  $\dot{x} = f(x)$  在一不动点处 (即沿解  $x(\cdot) = x_0$ ) 的变分方程是一常系数线性微分方程组, 而若  $f(\cdot)$  不改变, 则一阶变分方程组是齐次的. 高阶的



变分方程组则“具有拟多项式的右方”。自治系统沿周期解(殆周期解)的变分方程是具有周期(殆周期)系数的线性微分方程组(见周期系数的线性微分方程组(linear system of differential equations with periodic coefficients));殆周期系数的线性微分方程组(linear system of differential equations with almost periodic coefficients)。

上面给的定义适用于任意阶方程。例如,摆方程  $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$  在下平衡位置( $x = 0, \dot{x} = 0$ )的变分方程(如果只有相空间中的初始点变化)是  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ , 称为摆的小振动方程(equation for small oscillations of a pendulum),而在上平衡位置( $x = \pi, \dot{x} = 0$ )的变分方程是  $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ 。对于微分流形上的微分方程,解的变分方程可以类似于上面讲过的  $\mathbf{R}^n$  上的情况来定义;变分方程的解之值在流形的切丛中。有两种方法把任意微分流形的情况化为  $\mathbf{R}^n$  的情况,第一种是把流形嵌入一个维数充分高的 Euclid 空间中,并把微分方程(向量场)拓展到一个邻域中去,第二种方法是在轨道的一个邻域中,用一个坐标卡中的坐标写出定义于微分流形上的微分方程,而这个坐标卡的选取光滑依赖于此点(例如,在 Riemann 流形上应用指数测地映射)。这样就可以把这个方程写成  $\mathbf{R}^n$  上的方程,而且(和第一种化法一样)其右方和流形上的微分方程的右方(即向量场)有相同的光滑性。对于 Riemann 流形上的微分方程  $\dot{x} = F(x)$ , 若不改变  $F$ , 则其沿轨道  $x(t)$  的变分方程可以写成

$$\nabla_{F(x(t))} \xi = \nabla_{\xi} F(x(t)),$$

这里  $\nabla_a$  是共变导数(covariant derivative)。一个微分映射  $f: V^n \rightarrow V^n$  ( $V^n$  是一微分流形)沿着轨道  $\{f^t x\}_{t \in \mathbf{Z}}$  的变分方程(若不变动  $f$ )是方程

$$\xi(t+1) = df_{f^t x} \xi(t);$$

这方程之解  $\xi(\cdot)$  在  $t$  点取值于  $V^n$  在点  $f^t x$  处的切空间  $T_{f^t x} V^n$  中,而解本身就是序列

$$\{d(f^t)_x \xi\}_{t \in \mathbf{Z}}, \quad \xi \in T_x V^n,$$

$d(f^m)_x$  即  $f$  的  $m$  阶迭代在  $x$  之导数。

令  $V^n$  为闭微分流形。映  $V^n$  到  $V^n$  上的  $C^1$  类微分同胚  $f$  之集合可赋以  $C^1$  拓扑。以下的断言是成立的(见[4]): 1) 对每一个  $k \in \{1, \dots, n\}$ , **Ляпунов特征指数**(Lyapunov characteristic exponent)

$$\lambda_{n-k+1}(f, x) = \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(T_x V^n)} \sup_{\xi \in \mathbf{R}^k} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |df^t \xi|, \quad (2)$$

这里  $G_k(T_x V^n)$  是切空间  $T_x V^n$  的  $k$  维向量子空间所成的 Grassmann 流形。它是一个第二 Baire 类(Baire classes)函数  $\lambda_{n-k+1}(\cdot): S \times V^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ; 2) 空间  $S$

$\times V^n$  中有一个  $G_\delta$  型处处稠密集  $D$ , 它具有以下性质: a) 对每一个  $k \in \{1, \dots, n\}$ , 函数  $\lambda_k(\cdot): S \times V^n \rightarrow \mathbf{R}$  在  $D$  上每点均为上半连续; b) 对每个  $(f, x) \in D, \lambda \in \mathbf{R}$ , 子空间

$$l_\lambda(f, x) = \left\{ \xi \in T_x V^n : \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |df^t \xi| \leq \lambda \right\}$$

与其在切空间  $T_x V^n$  中的代数补空间  $l_\lambda^\perp$  是指数分离的(exponentially separated), 即存在  $\alpha, \beta > 0$ , 使对一切  $\xi \in l_\lambda^\perp, \eta \in l_\lambda(f, x)$  以及任意整数  $t \geq s \geq 0$ , 以下不等式恒成立:

$$|df^t \xi| \cdot |df^s \eta| \geq \alpha |df^s \xi| \cdot |df^t \eta| \exp(\beta(t-s)).$$

闭微分流形  $V^n$  上的  $C^1$  类向量场的集合  $S$  赋有  $C^1$  拓扑。一个向量场  $F \in S$  在  $V^n$  上诱导出一个动力系统  $f^t$  (它是群  $\mathbf{R}$  的  $C^1$  类作用)。对于每一个  $k \in \{1, \dots, n\}$ , **Ляпунов指数**之定义即(2)之右方。

以下的断言成立:

$\alpha$ ) 对每一个  $k \in \{1, \dots, n\}$ , 函数  $\lambda_k(\cdot): S \times V^n \rightarrow \mathbf{R}$  属于第二 Baire 类([4]);

$\beta$ ) 对每一个  $F \in S$ , 对于每一个概率分布, 若它对于由  $V^n$  上的向量场  $F$  诱导出的动力系统  $f^t$  为不变的(其  $\sigma$  代数包含所有的 Borel 子集), 几乎每个点  $x$  都使得  $\dot{x} = F(x)$  沿轨道  $\{f^t x\}$  的变分方程都是正则的线性微分方程组(见[5], [6])。

$\gamma$ ) 对每个  $m \in \mathbf{N}$ , 令  $S^{(m)}$  记  $V^n$  上所有  $C^m$  类向量场的集合, 它赋有  $C^m$  拓扑; 令  $P$  是  $V^n$  上的概率分布, 其  $\sigma$  代数包含所有 Borel 集, 再令  $S_p^{(m)}$  是  $S^{(m)}$  中这样一些向量场的子空间, 使分布  $P$  在这些向量场诱导出的动力系统下不变; 这时有(见[7]):

A) 对每个  $m \in \mathbf{N}, k \in \{1, \dots, n\}$ , 函数

$$\sum_{i=1}^n \int_{V^n} \lambda_i(\cdot, x) dP(x): S_p^{(m)} \rightarrow \mathbf{R}$$

(即变分方程的最高 **Ляпунов指数**的相平均和)是上半连续的。

B) 对每个  $m \in \mathbf{N}$ , 在  $S_p^{(m)}$  中均有一个  $G_\delta$  型处处稠密集, 使对每一个  $k \in \{1, \dots, n\}$  函数

$$\int_{V^n} \lambda_k(\cdot, x) dP(x): S_p^{(m)} \rightarrow \mathbf{R}$$

连续, 即是说在  $S_p^{(m)}$  中, 对于变分方程的 **Ляпунов指数**的相平均, 连续性是典型情况。

#### 参考文献

- [1] Ляпунов, А. М., Собр. соч. т. 2, М.-Л., 1956 (英译本: Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966)。
- [2] Whittaker, E. T., Analytical dynamics of particles and rigid bodies, Dover, reprint, 1944。
- [3] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974 (中译本: Л. С. 庞特

利雅金, 常微分方程, 上海科学技术出版社, 1962).

[4] Миллионщиков, В. М., «Дифференц. уравнения», 19 (1983), 2, 215 – 220.

[5] Оселедец, В. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 19 (1968), 179 – 210.

[6] Миллионщиков, В. М., «Матем. сб.», 77 (1968), 163 – 173.

[7] Миллионщиков, В. М., «Дифференц. уравнения», 14 (1978), 4, 759 – 760. В. М. Миллионщиков 撰

【补注】对于更广泛的许多方程, 特别是偏微分方程, 变分方程也有意义.

在 [A1] 中使用 一阶变分的方程 (equation of first variation) 一词. 亦见 [A2].

#### 参考文献

[A1] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[A2] Hille, E., Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley, 1964. 齐民友 译

变分数值方法 [variational numerical methods; вариационные численные методы], 微分方程的

【补注】在物理学中有些原理不能用微分形式而只能用变分形式表示. 这些原理称作 变分原理 (variational principles), 它们描述了某些量达到 极值 (即极大值或极小值) 的条件. 例如 Hamilton 原理 (Hamilton principle), 经典力学中的 最小作用原理 (principle of least action) (亦见 最小反作用原理 (principle of least reaction)) 和几何光学中的 Fermat 原理 (Fermat principle); 其他一些例子可以在数学物理、结构力学、流体力学、热传导理论等中找到.

变分学 (variational calculus) 与泛函的极值问题有关, 它们是定义在函数空间子集上的实值或复值函数. 这个子集由定义在某个区域上的函数组成. 而子集中的一个元素称作 容许函数 (admissible function) (或 变函数 (argument function)). 在 1696 年 Johann Bernoulli 叙述 捷线问题 (brachistochrone problem) (见 捷线 (brachistochrone)) 时首先提及这种类型的问题后引起了广泛的注意.

变分计算的基本准则如下:  $v = u$  为积分

$$J(v) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, v, v_x) dx, \quad v_x = \frac{dv}{dx}$$

的平稳点的充要条件是  $v = u$  为满足 Euler 方程 (Euler equation)

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial v_x} \right] = 0$$

的容许函数. 它的解称为 极值曲线 (extremals). 为了求解这个问题, 必须在所有的极值曲线中找出满足规

定边界条件的一条极值曲线.

寻找一个积分的极值问题可以扩展到如下多个自变量的多重积分的情况

$$J(v) = \int F(x_1, \dots, x_n, v, v_x, \dots, v_{x_n}) d\Omega,$$

其中

$$v_{x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad d\Omega = dx_1 \cdots dx_n.$$

变分计算研究泛函  $J(v)$  的极值和 Euler 方程解  $u$  之间的对应. 这样, 求一个极值问题的解可以变成寻找对应 Euler 方程的解, 相反地, 当给定一个微分方程后, 有时, 可以构造一个泛函, 它的 Euler 方程就是这个微分方程. 在这种情况下, 就某种意义上说, 极值问题和 Euler 方程是等价的. 为了求解 Euler 方程, 必须给定边界条件 (例如, Dirichlet 型或 Neumann 型), 加在容许函数上的这些边界条件称为 必要的 (essential) (例如, Dirichlet 型), 而由极值问题的解自动满足, 不明显加在容许函数集上的这些条件称为 自然的 (natural) (例如 Neumann 型).

作为一个例子, 令  $\Omega$  是  $n$  维空间  $\mathbb{R}^n$  中的一个开有界域,  $f \in L_2(\Omega)$  是一个实值函数. 研究泛函

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\text{grad } v|^2 d\Omega - \int_{\Omega} f v d\Omega$$

极小化的问题. 容许函数集是这样的 Hilbert 空间, 即在  $\Omega$  中有紧支集的完全的无限可微函数空间, 其 Sobolev 范数为

$$\|v\|_1 = \left\{ \int_{\Omega} |\text{grad } v|^2 d\Omega + \int_{\Omega} v^2 d\Omega \right\}^{1/2}.$$

可以证明, 应用 Riesz 表示定理 (见 Riesz 定理 (Riesz theorem)), 该极值问题等价于 (概括地说, 分布意义上) 下面  $u$  的 Euler 方程 (即具有 Dirichlet 边界条件的 Poisson 方程):

$$-\text{div grad } u = f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中,}$$

$$u = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 的边界 } \partial\Omega \text{ 上.}$$

用求解极值公式 (如果存在) 来代替解微分方程有一些优点, 这是因为一些边界条件能自动满足, 而且只要求更低阶的微分.

在函数空间  $V$  上, 考虑求泛函  $J$  极小化的问题, 而且令  $\varphi_1, \dots, \varphi_N, \dots$  是  $V$  的一个基. 而  $V_N$  是用前面  $N$  个基函数  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  生成的对空间  $V$  的一个逼近. 将逼近问题定义为: 求  $u_N \in V_N$ , 使泛函  $J$  在  $V_N$  上极小.

因为  $u_N$  可以写成



$$u_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i,$$

其中  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  是未知数, 则逼近问题变成: 求  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  使  $J(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  是  $J$  的极值.

这就得到了  $N$  个未知数  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  的下面  $N$  个 (必要) 条件:

$$\frac{\partial J(\alpha_1, \dots, \alpha_N)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

原先的极值问题已经化成含有  $N$  个未知数  $N$  个方程的一个方程组, 这个方程组可以数值求解. 逼近解  $u_N$  的精度与基函数的个数  $N$  有关. 一般说来, 随  $N$  的增加精度提高, 即  $u_N$  收敛到  $u$ .

用确定  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots)$  值来构造一个序列  $u_1, u_2, \dots$  的方法称作 **Ritz 法** (Ritz method). 不必要求  $V_m$  包含在  $V_{m+1}$  中; 因为要求收敛, 逼近空间必须满足稠密性质:  $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$  在  $V$  中稠密.

**Галеркин 法** (Galerkin method), 这个方法可以认为是 Ritz 法的推广, 它可以直接应用于微分方程, 而不考虑等价极值公式的存在. Галеркин法可以作如下说明: 考虑下面的线性二阶微分方程, 和 (必要) Dirichlet 边界条件 (边值问题 (boundary value problem)):

$$Lu = f, \quad \text{在 } \Omega \subset \mathbf{R}^n \text{ 内,}$$

$$u = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.}$$

在函数空间  $V$  (假定其基是  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N, \dots)$ ) 中寻找上面问题的解. 任何元素  $w \in V$  都可以写成上述基函数的一个无限线性组合. 对任意  $w \in V$ , 称表达式  $Lw - f = R(w)$  为剩余 (residual). 现在的问题就是要寻找一个元素  $u \in V$ , 使剩余变为零. 这就是说, 解  $u$  突出地表现为下面的射影要求:

$$\int_{\Omega} (Lu - f) \varphi_i d\Omega = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

用 Green 公式将微分降阶而且代换边界条件就得到下面边值问题的变分 (或者弱) 公式: 找  $u \in V$ , 使得

$$a(u, \varphi_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots,$$

其中  $a(u, \varphi)$  是  $V \times V$  上的一个双线性形式. 例如, 当  $L$  是 Laplace 算子时,  $a(u, \varphi)$  为

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } \varphi d\Omega.$$

Галеркин法包括得到一个  $N$  个基函数  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  生成的  $V$  的有限维子空间  $V_N$ . 逼近的有限维问题定义为: 求  $u_N \in V_N$ , 使得

$$a(u_N, \varphi_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

因为  $u_N \in V_N$ , 故  $u_N$  为

$$u_N = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j,$$

而且这个逼近问题与下列以  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  为未知数的  $N$  个线性代数方程的方程组等价:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega, \quad i = 1, \dots, N.$$

这个方程组可以用 Gauss 消去法或迭代法求解.

当微分算子  $L$  的系数和函数  $f$  是空间中的周期函数, 而且挑选正弦函数或余弦函数为基函数时, Галеркин法与 Fourier 法 (Fourier method) 等价, 而且可以有效地应用快速 Fourier 变换 (fast Fourier transform) 来执行 (见离散 Fourier 变换 (Fourier transform, discrete)). Галеркин法也可以用于发展方程的数值求解, 得到一个关于时间的常微分方程组, 它可以用积分法求数值解.

Ritz 法和 Галеркин法都把无限维问题变成一个 (有限维) 线性方程组. 有限元法 (finite-element method) 是在任意区域  $\Omega$  上生成基函数的一种系统的方法, 它给出一个稀疏矩阵  $A$  (即有许多零元素的矩阵). 有限元法由三步组成:

第一步是将区域  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \subset \mathbf{R}^n$  分成有限个非交叠的子区域 (单元 (elements)), 它的长度不超过  $h > 0$ . 单元的标准例子是子区间 ( $n = 1$ ), 二维是三角形, 三维是四面体.

第二步, 在每个单元中选有限个点 (称结点 (nodal points)), 例如: 子区间的两个端点; 三角形的顶点; 四面体的顶点. 更复杂的例子是子区间的两个端点和中点, 或者是三角形顶点和边的中点. 所有结点的 (有限) 集合将用  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_N\}$  表示.

第三步, 对每个结点  $P_i \in \mathcal{P}$ , 在  $\bar{\Omega}$  上定义一个连续基函数  $\varphi_i$ , 这些基函数满足下面一些性质: 1) 在结点  $P_i$ ,  $\varphi_i$  的值是 1, 而在所有其他结点则为 0; 2) 在每个单元上,  $\varphi_i$  有规定的形状 (与每个单元的结点数有关). 例如, 在  $n$  维情况: 每个单元有  $n+1$  个结点的线性基函数, 或者每个单元有  $(n+1)(n+2)/2$  个结点的二次基函数.

应用这些基函数, 可以构造近似解  $u_N$ . 事实上, 函数

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j \varphi_j(x)$$

是基函数  $\varphi_j$  的线性组合, 它在  $\bar{\Omega}$  上连续, 而且在单元上有规定的性质. 由于基函数的特殊构造, 参数  $\tilde{u}_j$  在结点  $P_j$  处精确地等于  $u_N$  的值.

得到的线性方程组可以写成

$$\sum_{j=1}^N \tilde{u}_j a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega, \quad i = 1, \dots, n,$$

其中矩阵元素  $a(\varphi_i, \varphi_j)$  仅当结点  $P_i$  和  $P_j$  属于同一单元时才不为 0. 这导致了矩阵 (常称刚性矩阵 (stiffness matrix)) 是稀疏的.

如果单元的集合满足某些正则性质, 则可以证明  $u_N$  收敛于  $u$ . 为了改进精度, 每个单元可用高次多项式. 应用等参元 (isoparametric elements) 可以处理曲线边界.

可以将有限元法推广和扩展到高阶问题 (例如, 双调和方程的混合有限元 (mixed finite elements for the biharmonic equation), 见双调和函数 (biharmonic function)), 及特殊困难的问题 (例如, 不可压流体的 Navier-Stokes 方程 (Navier-Stokes equations) 的非协调有限元 (non-conforming finite elements) 和应力分析, 静电学和地下水水力学中的混合-杂交有限元 (mixed-hybrid finite elements) 或发展问题 (质量集中 (mass lumping) 和相容质量格式 (consistent mass schemes)).

#### 参考文献

- [A1] Ciarlet, P. G., The finite element method for elliptic problems, North-Holland, 1978.
- [A2] Courant, R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 (1943), 1-23.
- [A3] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, 1-2, Interscience, 1953-1962 (译自德文) (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, 科学出版社, 1962, 1977).
- [A4] Cuvelier, C., Segal, A. and Steenhoven, A. A. van, Finite element methods and Navier-Stokes equations, Reidel, 1986.
- [A5] Gel'fand, I. M. and Fomin, S. V., Calculus of variations, 1963 (译自俄文).
- [A6] Glowinski, R., Lions, J. L. and Trémolières, R., Numerical analysis of variational inequalities, North-Holland, 1981 (译自法文).
- [A7] Mikhlin, S. G., Variational methods in mathematical physics, Macmillan, 1964 (译自俄文).
- [A8] Mikhlin, S. G., The problem of the minimum of a quadratic functional, Holden-Day, 1965 (译自俄文) (中译本: C. Г. 米赫林, 二次泛函的极小问题, 科学出版社, 1964).
- [A9] Sobolev, S. L., Applications of functional analysis in mathematical physics, Amer. Math. Soc., 1963 (中译本: C. Л. 索伯列夫, 泛函分析在数学物理中的应用, 科学出版社, 1959).
- [A10] Strang, G. and Fix, G. J., An analysis of the fin-

ite element method, Prentice-Hall, 1973 (中译本: G. 斯特朗, G. J. 非克斯, 有限元法分析, 科学出版社, 1983).

[A11] Temam, R., Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis, North-Holland, 1979.

[A12] Zienkiewicz, O. C., The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, 1977.

C. Cuvelier 撰 袁国兴 张宝琳 译

变分原理 (复变函数论中的) [variational principles (in complex function theory); вариационные принципы]

显示在平面区域的某些形变过程中那些支配映射函数变分的法则的断语.

主要的定性变分原理是 Lindelöf 原理 (Lindelöf principle), 可描述如下. 设  $B_k$  是  $z_k$  平面上边界点多于一点的单连通区域,  $0 \in B_k$ ,  $k = 1, 2$ ; 设  $L(r, B_k)$  是对于  $B_k$  的 Green 函数的阶层曲线, 即圆盘  $\{\zeta: |\zeta| < 1\}$  到  $B_k$  而使原点保持不变的单叶共形映射上映射下圆周  $C(r) = \{\zeta: |\zeta| = r\}$  的象,  $0 < r < 1$ . 进而设函数  $f(z_1)$  实现  $B_1$  到  $B_2$  的共形单射,  $f(0) = 0$ . 在这些假定下有: 1) 对于  $L(r, B_1)$  上任一点  $z_1^0$ , 存在位于阶层曲线  $L(r, B_2)$  上 (这仅当  $f(B_1) = B_2$  才有可能) 或其内部的一点与之对应; 及 2)  $|f'(0)| \leq |g'(0)|$ , 其中  $g(z_1)$  满足  $g(0) = 0$  是  $B_1$  到  $B_2$  的单叶共形映射 (等号仅当  $f(B_1) = B_2$  时成立). Lindelöf 原理系从 Riemann 映射定理 (见 Riemann 定理 (Riemann theorem)) 与 Schwarz 引理 (Schwarz lemma) 推出. 相当精细的构造使之能够求出由被映射区域的给定形变所引起的映射函数的逐点偏差.

定量的基本变分原理系由 M. A. Лаврентьев ([1]) 获得 (亦可见 [2]), 可叙述如下. 设  $B_1$  是具有解析边界的单连通区域,  $0 \in B_1$ . 假定存在给定区域族  $B_1(t)$ ,  $0 \in B_1(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $T > 0$ ,  $B_1(0) = B_1$ , 具有 Jordan 边界  $\Gamma_1(t) = \{z_1: z_1 = \Omega(\lambda, t)\}$ ,  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ ,  $\Omega(0, t) = \Omega(2\pi, t)$ , 其中  $\Omega(\lambda, t)$  关于  $t$  在  $t=0$  可微且对  $\lambda$  是一致的; 设  $F(z_1, t)$ ,  $F(0, t) = 0$ ,  $F'_{z_1}(0, t) > 0$ , 是把  $B_1(t)$  单叶共形映射为  $B_2 = \{z_2: |z_2| < 1\}$  的函数, 设  $\Phi(z_2, t)$  是  $F(z_1, t)$  当  $t$  固定时的反函数. 则

$$F(z_1, t) = F(z_1, 0) - tK(F(z_1, 0)) + \gamma_1(z_1, t),$$

$$\Phi(z_2, t) = \Phi(z_2, 0) +$$

$$+ t\Phi'_{z_2}(z_2, 0)K(z_2) + \gamma_2(z_2, t),$$

其中

$$K(z) =$$



$$= \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{C(r)} \frac{\partial \ln |F(\Omega(\lambda, t), 0)|}{\partial t} \bigg|_{t=0} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

且当  $t \rightarrow 0$  时  $\gamma_k(z_k, t)/t$  在  $B_k$  的紧子集上一致地趋于 0 ( $k=1, 2$ )。该结果已被推广到二连通区域 ([3])。若加以进一步的限制, 就能得到映射函数在  $B_1(t)$  内关于表征所考虑区域边界形变的参数的展开式余项的估计式 (在闭区域内一致) ([4])。

#### 参考文献

- [1] Лаврентьев, М. А., «Тр. Физ.-матем. ин-та АН СССР», 5 (1934), 159 – 246.  
 [2] Куфарев, П. П., «Матем. сб.», 13 (55) (1943), 1, 87 – 118.  
 [3] Александров, И. А., «Сиб. матем. ж.», 4 (1963), 5, 961 – 976.  
 [4] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965. И. А. Александров 撰  
 【补注】 存在大量的变分原理, 见 [A3] 第 10 章。亦可见变分参数法 (variation-parametric method); Löwner 方法 (Löwner method); 内变分方法 (internal variations, method of)。

还可见边界变分方法 (boundary variations, method of)。M. Schiffer 对单叶函数的变分方法做出了重要的贡献, 见 [A3] 第 10 章。

#### 参考文献

- [A1] Heins, M., Selected topics in the classical theory of functions of a complex variable, Holt, Rinehart & Winston, 1962.  
 [A2] Hille, E., Analytic function theory, II, Ginn, 1962.  
 [A3] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983. 杨维奇 译

### 经典力学的变分原理 [variational principles of classical mechanics; вариационные принципы классической механики]

分析力学的基本原理, 它在数学上用变分关系的形式加以表示; 从这些变分关系式出发, 在逻辑上可求得运动的微分方程和所有力学上的原理和定律。经典力学的变分原理把物质系统在力作用下的实际运动与施加于系统的约束所允许并满足一定条件的运动学上可能的运动进行比较。在大多数情况下, 从所考虑的运动学上可能的运动类中选出实际运动所遵循的准则是个能够保证论述不变性的标量函数或泛函取极值 (驻值)。

各种经典力学的变分原理无论从其形式和变分方式上, 还是从统一性上都各有不同, 但是它们中的每一个在其应用范围内都形成唯一的基础, 好似归纳了

相应物质系统的全部力学。换言之, 任何一个经典力学的变分原理隐含着该学科领域的全部内容, 并把其全部原理合并到统一的表达式中。

经典力学的基础是为自由质点所建立的 **Newton 力学定律** (Newton laws of mechanics) 和约束公理。经典力学的变分原理的有效性就基于这些定律和公理。换句话说, 每一个经典力学的变分原理都可以看作为一个公理, 由此可导得力学的诸定律。

变分原理根据其形式可区分为微分变分原理和积分变分原理。微分变分原理描写运动在任何给定时刻的性质, 它包括虚位移原理, d'Alembert-Lagrange 原理, Gauss, Hertz, Четаев 和 Jourdain 原理等。积分变分原理描写运动在任何有限时间段内的性质, 它们乃是 Hamilton-Остроградский, Lagrange, Jacobi 等形式的最小作用量原理。

第一个经典力学的变分原理是早在 1665 年由 G. Galileo 应用过的可能 (虚) 位移原理。1717 年, J. Bernoulli 首先认识到该原理的普遍意义以及它对求解静力学问题的效应。J. L. Lagrange 在其著作《分析力学》(Mécanique analytique, 1788) 中对该原理给出一个证明, 并加以发展和应用, 正确地将其作为整个力学的基础。应用该原理可以求得一个质点系的平衡位置, 即  $r_v = r_v(t_0)$ ; 如初始速度  $v_v(t_0)$  为零的话, 该系统将在无限长时间内保持在该位置之上。其中,  $r_v(t_0)$  为可能的位置,  $v_v = 0$  为任何时刻运动学上可能的速度。以上,  $r_v$  为系统相对于惯性坐标系  $Oxyz$  的原点  $O$  的矢径;  $v_v = \dot{r}_v$ ;  $\delta r_v$  是系统上的约束在该时刻所允许的可能位移;  $F_v(t, r_v, \dot{r}_v) \in C^1$  是给定的主动力,  $R_v$  为约束反力。进一步假定约束为理想 (双面或双边) 的, 即

$$\sum_v R_v \cdot \delta r_v = 0.$$

**虚位移原理** (principle of virtual displacements): 一个力学系统在给定位置上处于平衡的充分必要条件是在任何时刻, 主动力在可使系统离开该位置的所有的可能位移上所做的 (无限小) 元功的和等于零:

$$\sum_v F_v \cdot \delta r_v = 0, \quad (1)$$

式 (1) 是静力学的普遍适用的方程, 静力学的任何问题都可以在数学上化为对于此方程的研究。对于有势力的特殊情况:

$$F_v = \text{grad}_{r_v} U(t, r_1, \dots, r_N), \quad U(t, r_v) \in C^2.$$

其中  $N$  为系统中的点的个数, 式 (1) 有如下形式:

$$\delta U = 0 \quad (2)$$

它在任何时刻  $t$  成立。也就是说, 在有势力作用下的

力学系统处于平衡状态的充分必要条件是其力函数取驻值。

动力学的方程可以借助于所谓 d'Alembert 原理 (d'Alembert principle) 用静力学的方法来处理。如果在作用于系统的主动力和约束的反作用力之上加上惯性力  $-m_v w_v$ , 那么该系统将处于平衡。上面  $m_v$  是系统的第  $v$  点的质量,  $w_v = \ddot{r}_v$  则为其加速度。Lagrange 在 1788 年将 d'Alembert 原理和虚位移原理加以推广。

d'Alembert-Lagrange 原理 (d'Alembert-Lagrange principle): 对于一个系统的实际运动来说, 其主动力和惯性力在所有可能位移上所作的元功之和在任何时刻为零:

$$\sum_v (F_v - m_v w_v) \cdot \delta r_v = 0, \quad (3)$$

d'Alembert-Lagrange 原理把系统在实际运动中的位置与所考虑时刻的约束所允许的无限靠近的位置加以比较。式 (3) 确定了主动力、该主动力在所加约束条件下引起的各点的加速度和可能位移之间的关系。实际运动可以作为是由主动力确定的运动学上可能的运动中间的一个, 式 (3) 表示的则是其对应关系的充分必要条件, 因此是动力学的普遍方程 (general equation of dynamics)。如其中所有的加速度  $w_v = 0$ , 则式 (3) 即为静力学的普遍方程 (1)。

式 (3) 内包含运动方程。为了得到全部独立的动力学微分方程, 只需将可能位移  $\delta r_v$  用独立的位移表示出来, 并将其代入式 (3)。由此可以得到 Lagrange 方程、Appell 方程和其它独立的运动微分方程。另一方面, 如果在可能的位移族中选出某一个位移, 将其代入式 (3), 这样得到的关系式或者是系统运动微分方程中的一个, 或者是由运动微分方程导出的结果。例如, 动力学的普遍定理 (定律) — 动量定理、动量矩定理和动能定理——都可以由此方法得到。

系统的动力学普遍定理描写了运动的某些性质, 但与经典动力学的变分原理不同, 它们都无法代替全部运动微分方程, 或完全描写系统的运动。

d'Alembert-Lagrange 原理是经典力学最普遍的变分原理之一, 它不仅适用于完整力学系统, 也适用于非完整力学系统。所有其他的变分原理或者是与此变分原理完全等效, 只不过是形式不同, 或者是这个变分原理的一个推论。但是, d'Alembert-Lagrange 原理与函数极值的概念毫不相干。它涉及的只是一个无限小量——给定力和惯性力在离开给定位形的一个无限小位移上所作的元功之和; 它与式 (2) 不同, 不是函数的变分。

C. F. Gauss 在 1829 年提出了一个新的变分原

理, 它是 d'Alembert-Lagrange 原理的一个修正。在所有运动学上可能的运动之中, Gauss 研究那些满足施加于系统的约束条件的运动, 而且在所考虑的时刻  $t$ ,  $r_v$  和  $v_v$  保持为常数。于是在时刻  $t + dt$  有

$$\delta r_v = \frac{1}{2} \Delta w_v (dt)^2, \quad \Delta w = \frac{\delta v_v}{dt} - \frac{dv_v}{dt},$$

其中  $dv_v$  和  $\delta v_v$  表示实际位移和某个虚位移在时刻  $dt$  内所发生的运动速度的改变; 因之, 式 (3) 可写成:

$$\Delta Z = 0, \quad Z = \frac{1}{2} \sum_v \frac{m_v}{2} \left[ w_v - \frac{F_v}{m_v} \right]^2, \quad (4)$$

其中  $\Delta^2 Z > 0$ 。

Gauss 最小强迫原理 (Gauss principle of least compulsion) (Gauss 原理 (Gauss principle)): 对于一个以某种方式联结起来质点系, 在受任何影响作用时, 它在任何时刻的运动将是尽可能地与这些质点处于完全自由状态下所发生的运动相符合, 也就是说, 如果我们把在时刻  $dt$  之内强迫的度量定义为量  $Z$ , 它等于每个质点的质量与该点在完全自由时将处的位置相对于该点实际位置的偏差之平方的乘积的和, 那么, 运动将与最小可能的强迫相适应。换言之, 在任何时刻  $t$ , 在由作用力所引起的加速度之间, 系统各点的实际加速度  $w_v$  将使加速度的二次函数  $Z$  最小。

平衡是这个普遍原理的一个特殊情况: 如果各点的速度为零, 并且系统保持静止状态接近系统在无约束条件下的自由运动更甚于接近约束所允许的可能运动, 就达到平衡。

如果  $Z$  用系统独立的加速度来表示, 则 Appell 方程可由 Gauss 原理得到。Gauss 原理是误差理论中的最小二乘法 (least squares, method of) 在物理上的体现。Gauss 原理与 d'Alembert-Lagrange 原理相等效, 但根据 P. Appell 和 E. Delassus (1911-1913) 对于  $\varphi_s(t, r_v, \dot{r}_v) = 0$  类型的非线性微分约束的研究表明, 这两个原理并不相容。这个问题已由 Г. Четаев (1932-1933) 解决。他提出, 非线性约束的可能位移由下列类型的条件来确定:

$$\sum_v \text{grad}_{r_v} \varphi_s \cdot \delta r_v = 0.$$

最小反作用原理 (principle of least reactions): 这是 Gauss 原理的一个推论, 它指出, 对于实际运动, 下面的量应为最小:

$$\sum_v \frac{R_v^2}{2m_v}$$

Gauss 原理已被推广到从系统中除掉一些约束的情况。因为原始系统的可能位移包括在自由系统的可能



位移之中, 因此, 下面的关系式是成立的:

$$\frac{(dt)^2}{2} \sum_v \left[ m_v \frac{\partial v_v}{dt} - F_v \right] \cdot \Delta w_v = 0,$$

其中  $\partial v_v$  为自由系统在时间  $dt$  之内运动速度的改变. 根据式 (4), 上面的方程可以化为

$$A_{d\delta} + A_{d\partial} + A_{\partial\delta} = 0, \quad (5)$$

其中:

$$A_{\partial\delta} = \frac{1}{2} \sum_v m_v \left[ \frac{\partial v_v}{dt} - \frac{\delta v_v}{dt} \right]^2$$

它描写在时间  $dt$  之内运动 ( $\partial$ ) 偏离运动 ( $\delta$ ) 的度量.  $A_{d\delta}$  和  $A_{d\partial}$  的式子可以用同样的方式写出. 由式 (5) 可得如下推论:

$$A_{d\delta} < A_{\partial\delta}, \quad A_{d\partial} < A_{\partial\delta}, \quad (6)$$

上式表示了下面的定理: 系统的实际运动 ( $d$ ) 与假想运动 ( $\delta$ ) 的偏离 (以及与实际的自由运动 ( $\partial$ ) 的偏离) 小于运动 ( $\delta$ ) 与运动 ( $\partial$ ) 之间的偏离. 此定理由 Четаев 在 1932—1933 年证明. 由式 (6) 中第二个不等式所表示的定理, 是在 1883 年为 E. Mach 针对线性非完整约束的情况提出的, 并在 1916 年为 E. A. Бологов 所证明.

与 Gauss 原理紧密联系的一个原理是最直接路径原理, 这是由 H. Hertz 在 1894 年作为他所发展的力学的基本定律提出的. 在 Hertz 所发展的力学中, 与 Newton 力学不同, 力的概念为潜约束、潜质量和潜运动的概念所代替.

**最直接路径原理** (principle of the most direct path), (**最小曲率原理** (principle of least curvature), Hertz 原理 (Hertz principle): 任何自由系统将处于静止状态, 或沿着最直接的路径作匀速运动. 根据 Hertz 的定义, 一个“自由”的系统是指其上无主动力的作用, 仅受到限制组成系统各点相互位置的内部约束的作用. 最直接路径是指由下列弧元所组成的轨迹: 与任何其他为约束所允许的、且具有与所考虑弧元具有共同起始点和相同切线的弧相比, 它具有最小的曲率;  $\Sigma$  在这里解释为代表系统位置在  $3N$  维 Euclid 空间中的点的轨迹的曲率, 该空间的直角坐标为  $\sqrt{m_v} x_v, \sqrt{m_v} y_v, \sqrt{m_v} z_v$ . 换言之, Hertz 原理说, 在所有与约束相容的轨迹中, 实际的轨迹具有最小的曲率.

对于仅有静态约束作用而无主动力的系统来说, Hertz 原理与 Gauss 原理是等效的. Четаев 在 1941 年提出了对 Gauss 原理的下列修改:

**Четаев 最大功原理** (Chetaev principle of maximum work): 在由给定力场中的直接运动和假定力学

系统完全自由时足以产生实际运动的力场中的相反运动所组成的基本周期上所作的功

$$A_\delta = \sum_v (F_v - m_v w_v) \cdot \left[ v_v + \frac{\delta v_v}{dt} \frac{dt}{2} \right] dt + \dots$$

在一类 Gauss 意义下的想象运动中相对于实际运动取最大值. Четаев 原理使通常利用热力学中的 Carnot 原理所研究的力学系统的性质加以推广成为可能.

上面概述的原理按其变分的方式可以分为两类: 在虚位移原理和 d'Alembert - Lagrange 原理中, 要变分的是系统在给定时刻的位置  $r_v$ , 而在 Gauss, Hertz 和 Четаев 原理中, 要变分的是系统的加速度  $\ddot{r}_v$ , 而  $r_v$  和  $\dot{r}_v$  保持不变. Jourdain 原理 (Jourdain principle). 处于上述两者之间, 要变分的是在时刻  $t$  的速度  $\dot{r}_v$ , 而  $r_v$  保持不变. 在时刻  $t + dt$ , 可能位移是  $\delta r_v = \delta \dot{r}_v dt$ , 而式 (3) 成为

$$\sum_v (F_v - m_v w_v) \cdot \delta \dot{r}_v = 0.$$

对于经典力学的积分变分原理, 实际运动和运动学上可能的运动之间的比较是在有限的时间段内进行的. 实际上是对系统的两种状态, 把根据实际的和运动学上可能的运动在一定条件下计算得到的某些给定的积分值 (所谓的作用量 (actions)) 进行比较. 经典力学的积分变分原理没有微分变分原理那样普遍, 主要适用于有势力作用下的完整力学系统. 最普遍的积分变分原理是 W. Hamilton 在 1834—1835 年针对稳态完整约束的情况所建立的变分原理, 它被 М. В. Остроградский 于 1848 年推广到非稳态几何约束的情况. 考虑一个完整系统在给定的作用力和反作用力作用下运动期间分别相应于时刻  $t_0$  和  $t_1$  的两个已知位置  $P_0$  和  $P_1$ . 在这个运动中,  $r_v$  将是满足约束条件的时间函数, 当  $t = t_0$  和  $t = t_1$  时它分别取相应于状态  $P_0$  和  $P_1$  的值. 令  $r_v + \delta r_v$  是与  $r_v$  充分接近的、属于  $C^2$  类的时间函数, 它也满足约束条件, 并在  $t = t_0$  和  $t = t_1$  时与  $r_v$  取同样的值. 于是, 函数  $\delta r_v$  在  $t = t_0$  和  $t = t_1$  时为零, 从而是可能位移. 如  $F_v = \text{grad}_{r_v} U$ , 则

$$\delta S = 0, \quad S = \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt, \quad (7)$$

其中泛函  $S$  即为在  $t_1 - t_0$  段上的 Hamilton 作用量 (Hamilton action).

**驻值作用量原理** (principle of stationary action) (Hamilton - Остроградский 原理 (Hamilton - Ostrogradski principle)): 相对于任何其他无限靠近、运动学上可能、持续时间相同、且其初值和终值与实际运动

相应状态相同的运动来说, Hamilton 作用量对系统的实际运动取驻值. 如果作用力不是有势的, 那么 Hamilton - Остроградский 原理可以用下式表示:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \delta T + \sum_v F_v \cdot \delta r_v \right] dt = 0, \quad (8)$$

也就是说, 如果  $r_v(t)$  为相应于系统实际运动的时间函数, 那么对于函数  $r_v(t)$  的任何与约束条件相容的、在积分的两个端点处为零的变分, 积分式 (8) 为零.

式 (7) 和式 (8) 为在给定力作用下, 系统的运动为实际运动的充分必要条件. 式 (8) 也可用于非完整系统, 但对于非完整系统, 运动  $r_v + \delta r_v$ , 一般来说, 已非运动学上可能的运动了. 式 (7) 则不能适用于非完整系统.

如果几何约束方程可表示为:

$$r_v = r_v(t, q_1, \dots, q_n), \quad n = 3N - k,$$

其中  $k$  为约束的个数, 并引入下面的 Lagrange 函数:

$$L(t, q_i, \dot{q}_i) = T + U$$

那么有

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt.$$

在扩充的  $(n+1)$  维坐标空间  $(t, q_1, \dots, q_n)$  中, 式 (7) 相应于通常的、具有固定端点的变分学 (非参数的) 问题. 对于坐标为  $t, q_i, p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$  的  $(2n+1)$  维相空间来说, 式 (7) 相应于自由端点的变分问题 ( $t$  和  $q_i$  固定,  $p_i$  自由), 而且有

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right] dt$$

其中  $H(t, q_i, p_i)$  为 Hamilton 函数.

由式 (7) 可导出 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

以及正则 Hamilton 方程

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

为了求解动力学的基本问题, 只需知道作用量函数

$$v(t, q_i, q_{i0}) = \int_{t_0}^t L dt \quad (11)$$

但是, 由式 (11) 去求作用量函数, 则必须知道运动的规律. 为了克服这个困难, Hamilton 导得如下作用

量函数必须满足的微分方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H \left[ t, q_i, \frac{\partial v}{\partial q_i} \right] = 0 \quad (12)$$

C. G. J. Jacobi 证明了 (1837), 若知道式 (12) 的完全积分  $v(t, q_i, \alpha_i)$  (此积分依赖于  $n$  个任意常数  $\alpha_i$ , 它们都不可加), 则方程 (10) 的通解为

$$p_i = \frac{\partial v}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial v}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

其中  $\beta_i$  为任意常数.

对于具有稳态约束、作用力为不显式地依赖于时间的有势力的系统, 存在下面的能量积分:

$$E = T - U = h \quad (13)$$

这个能量积分的存在, 使我们有可能把用以比较的运动学上可能的运动 (它使系统由状态  $P_0$  转变到状态  $P_1$ ) 的范围缩小为其全部机械能  $E$  有一固定值  $h$  的运动. 从而, 积分式 (13) 可以看作为一个非完整条件, 力学原理可以表示为条件变分原理. 这个问题是 Lagrange 在 1760 年解决的.

Lagrange 驻值作用量原理 (Lagrange principle of stationary action): 对于一个存在能量积分的完整系统, 给定初始时刻  $t_0$  以及它的初始和最终位置, 实际运动应满足下面的方程式:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0. \quad (14)$$

该式所比较的运动具有与实际运动相同的初始和最终状态以及相同的能量值  $h$ . 符号  $\delta$  表明在式 (13) 的条件下进行变分.

如果对于根据 Lagrange 原理进行比较的所有运动, (13) 都得到满足, 其常数为  $h$ , 这就为这些运动的速率施加了某些限制性条件, 而从  $P_0$  到  $P_1$  位移所需的时间取决于运动所执行的曲线. 因此, Lagrange 原理式 (14) (考虑到式 (13)) 是一个具有自由上端点的条件变分问题.

如果对于这些系统, 用能量积分式 (13) 消去式 (14) 中的时间  $t$ , 将得到一个新的变分原理, 它是 Jacobi 在 1837 年取得的.

系统的动能可以用广义坐标  $q_i$  表示如下:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

坐标空间的度量由下式表示:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dq_i dq_j. \quad (15)$$

系统的某个实际运动的初始和最终位置  $P_0$  和  $P_1$  也是给定的.



Jacobi 驻值作用量原理 (Jacobi principle of stationary action): 如果给定一个完整保守系统的初始和最终位置, 那么实际运动满足下面的方程:

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(U+h)} ds = 0, \quad (16)$$

与之比较的是所有与实际运动无限接近的、具有与实际运动相同初始和最终位置和相同能量常数  $h$  的运动。

Jacobi 原理把研究一个完整保守系统运动的问题化为一个几何问题, 即在具有度量式 (15) 的 Riemann 空间中求解变分问题 (16) 的极值。求得的即为系统在 Riemann 空间中的真实轨迹。Jacobi 原理揭示, 一个完整保守系统的运动和 Riemann 空间的几何性质有密切的关系。如一个系统在无作用力的条件下运动, 即  $U=0$ , 则系统将以恒定的速率沿着坐标空间  $(q_1, \dots, q_n)$  的短程线运动。这个事实是 Galilio 惯性定律的推广。如  $U \neq 0$ , 一个完整保守系统的运动的确定也可以化为求解 Riemann 空间短程线的问题, 其度量为

$$ds^2 = 2(U+h)ds^2 = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} dq_i dq_j.$$

对于单质点的情况, 线元  $ds$  为三维 Euclid 空间的线元, Jacobi 原理即为光学中的 Fermat 原理在力学中的比拟。

Lagrange 方程式 (9), 或 Hamilton-Остроградский, Lagrange 和 Jacobi 变分原理中的极值方程式都是根据 Hamilton、Lagrange 和 Jacobi 的、相应的积分或作用量取极值的必要条件。如果满足取最小值的充分条件, 这些积分对于实际运动将取最小值。于是, 经典力学的积分变分原理也称之为最小作用量原理 (principles of least action)。

使用经典力学的积分变分原理很自然地导致广义解的概念以及在其中寻求数学物理问题解的函数空间类的扩展。

事实证明, 经典力学的变分原理不仅适用于离散的质点系统, 而且也适用于有分布参数的系统和连续介质; 在场论和数学物理中也有重要的应用。光学-力学比拟, 正则变换理论, Lie 群理论和守恒定律都与经典力学的变分原理有密切关系。这些原理都极有启发性的价值, 也可应用于物理学的其他领域, 特别是相对论、量子力学和波动力学, 其中最小作用量原理和 Lagrange 和 Hamilton 的一些原理都起着重要的作用。

#### 参考文献

- [1] Appell, P., *Traité de mécanique rationnelle*, Gauthier-Villars, 1953.  
[2] Бологов, Е. А., *Опринципе Гаусса*, «Изв. физ.»

матем. об-ва при Казан. ун-те. Сер. 2», 21 (1916), 3, 99-152.

- [3] Вариационные принципы механики, сб. статей, М., 1959.  
[4] Lanczos, C., *The variational principles of mechanics*, Univ. Toronto Press, 1962.  
[5] Pars, L. A., *A treatise on analytical dynamics*, Heinemann, London, 1965.  
[6] Розе, Н. В., *Лекции по аналитической механике*, ч. 1, Л., 1938.  
[7] Четаев, Н. Г., *Устойчивость движения. Работы по аналитической механике*, М., 1962.

В. В. Румянцев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Arnol'd, V. I., *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1978 (中译本: В. И. Арнольд, *经典力学的数学方法*, 高等教育出版社, 1992).  
[A2] Whittaker, E. T., *Analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Dover, reprint, 1944.  
[A3] Goldstein, H., *Classical mechanics*, Addison-Wesley, 1950.  
[A4] Gantmacher, F. R., *Lectures in analytical mechanics*, Mir, 1975 (译自俄文)。

王克仁 译 诸德超 校

#### 变分问题 [variational problem; вариационная задача]

1) 具有固定端点的变分问题 (variational problem with fixed ends) 是变分学 (variational calculus) 中这样一个问题, 其中给出极值的曲线的端点是固定的。例如, 在变分学的最简问题中, 带有固定端点的  $\inf \int_{(t_0, x_0)}^{(t_1, x_1)} F(t, x, \dot{x}) dt$  所求的曲线  $x(t)$  应通过的起点和终点  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_1) = x_1$  是给定的。由于最简问题的 Euler 方程 (Euler equation) 的一般解依赖于两个任意常数,  $x = x(t, c_1, c_2)$ , 给出极值的曲线将在对应的边值问题的解中寻找。结果, 该边值问题可以有唯一解, 多于一个解或根本没有解。

2) 具有自由 (可移动) 端点的变分问题 (variational problem with free (mobile) ends) 是变分学中这样一个问题, 其中给出极值的曲线的端点可沿给定流形运动。例如, 如果在 Bolza 问题 (Bolza problem) 中所寻找曲线  $x = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  要满足的边界条件数目严格地小于  $2n+2$ :

$$\psi_\mu(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = 0, \mu = 1, \dots,$$

$$p < 2n + 2, \quad (*)$$

则曲线端点可沿着  $(2n+2-p)$  维流形 (\*) 运动。如果边界条件 (\*) 以形式

$$\psi_\rho(t_1, x(t_1)) = 0, \psi_\sigma(t_2, x(t_2)) = 0,$$

$$\rho = 1, \dots, r, \sigma = 1, \dots, q$$

给出, 且  $n+1-r > 0$  或  $n+1-q > 0$ , 则曲线端点可沿着相应的  $n+1-r$  维或  $n+1-q$  维流形运动. 在极值曲线的端点横截性条件 (transversality condition) 必须满足; 这条件与条件 (\*) 一起, 使得可以得到导致某个边值问题的关系式的封闭系统. 这值问题的解有任意常数, 这些常数出现在 Euler 方程的通积分中.

变分问题和多元函数求极值问题的性质之不同在于这样的事实, 在前者情形不是在有限维空间中寻找一个点, 而是寻找一个函数 (或一个无穷维空间中的点).

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Noton, A. R. M., Introduction to variational methods in control engineering, Pergamon Press, 1965.
- [A2] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975.
- [A3] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.
- [A4] Akhiezer, N. I., The calculus of variations, Blaisdell, 1962 (译自俄文). 葛显良 译 吴绍平 校

顺序统计量序列 [variational series 或 series of order statistics; вариационный ряд], 亦称变量序列或变列

分布函数为  $F(X)$  的随机样本  $(x_1, \dots, x_n)$  的值按照递增顺序的排列:  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ . 顺序统计量序列用于构造经验分布函数  $F_n(x) = m_x/n$ , 其中  $m_x$  小于  $x$  的变列项数. 顺序统计量序列的重要特征是其极端项 ( $x_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$ ,  $x_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ ) 和极差 (range)  $R_n = x_{(n)} - x_{(1)}$ . 设

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy,$$

则顺序统计量序列中最小项和最大项的分布密度相应为

$$p_{(1)}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} p(x),$$

$$p_{(n)}(x) = nF^{n-1}(x) p(x).$$

如果考虑时间指标为  $i (i = 1, \dots, n)$  的随机过程, 则顺序统计量序列形成非奇次 Марков 链 (Markov chain).

参考文献

- [1] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.
- А. И. Шалыт 撰

【补注】 这一名称在西方文献中几乎没有用过. 亦见

顺序统计量 (order statistic).

参考文献

- [A1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.
- 周概容 译

范畴中的簇 [variety in a category; многообразие категорий]

泛代数的簇 (variety of universal algebras) 的一个推广. 令  $\mathcal{R}$  是有积的双范畴 (bicategory). 满足下述条件的  $\mathcal{R}$  的满子范畴 (full subcategory)  $\mathcal{M}$  叫作一个簇 (variety): a) 若  $\mu: A \rightarrow B$  是一个容许单射, 且  $B \in \text{Ob } \mathcal{M}$ , 则  $A \in \text{Ob } \mathcal{M}$ ; b) 若  $\nu: A \rightarrow B$  是一个容许满射, 且  $A \in \text{Ob } \mathcal{M}$ , 则  $B \in \text{Ob } \mathcal{M}$ ; c) 若  $A_i \in \text{Ob } \mathcal{M}$ ,  $i \in I$ , 则  $A = \prod_{i \in I} A_i \in \text{Ob } \mathcal{M}$ .

如果  $\mathcal{R}$  是良势的, 即任意对象的容许子对象构成一个集合, 则每一个簇都是  $\mathcal{R}$  的自反子范畴 (reflective subcategory). 这意味着包含函子  $I: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{R}$  有左伴随  $S: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{M}$ . 这个伴随对的单位, 自然变换  $\eta: I \rightarrow T = SI$  有下述性质, 任取  $A \in \text{Ob } \mathcal{R}$ , 态射  $\eta_A: A \rightarrow T(A)$  是容许满射. 在许多重要的情况下, 函子  $T$  是右正合的, 即如果  $(\alpha, \beta)$  是态射  $\nu$  的核对 (kernel pair),  $T$  将态射对  $\alpha, \beta: A \rightarrow B$  的余核  $\nu$  变到态射对  $T(\alpha), T(\beta)$  的余核, 更进一步地, 右正合性和自然变换  $\eta: I \rightarrow T$  的出现是  $T$  的特征性质.

簇继承了原范畴的许多性质. 它有双范畴结构, 如果初始范畴完备, 则簇也是完备的.

在有正规余象的范畴中, 如同群簇的情况, 可以定义簇的积. 簇的这一广群结构仅对几种特殊情况有所研究.

参考文献

- [1] Цаленко, М. Ш., Шульгейфер, Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.
  - [2] Fröhlich, A., On groups over a d. g. near ring II, Categories and functors, Quart. J. Math., 11 (1960), 211 - 228.
- М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 在拓扑斯 (topos) 中人们也考虑指数簇 (exponential varieties) ([A1]), 这是在任意子对象, 积, 和幂对象下封闭的满子范畴. 这样的子范畴在商对象下也是封闭的; 它自身是一个拓扑斯, 且包含函子有双边伴随.

参考文献

- [A1] Freyd, P. J., All topoi are localic, or why permutation models prevail, J. Pure Appl. Alg., 46 (1987), 49 - 58.
- 张英伯 译

群簇 [variety of groups; групп многообразие]

满足固定的一组等式关系或定律

$$v(x_1, \dots, x_n) = 1$$



的全部群的类, 其中  $v$  遍及群字 (group words), 即具有自由生成元  $x_1 \cdots x_n \cdots$  的自由群 (free group)  $X$  的元素, 的某个集合  $V$ . 正像代数系统的任何簇 (见代数系统簇 (algebraic systems, variety of)) 一样, 群簇也能由在子系 (子群) 下, 在同态象下和 Descartes 积下的封闭性质来定义. 包含给定群类  $\mathfrak{G}$  的最小簇由  $\text{var } \mathfrak{G}$  表示. 对于由下述公式定义的簇的交和并的运算

$$\mathfrak{U} \vee \mathfrak{B} = \text{var}(\mathfrak{U} \cup \mathfrak{B}),$$

群簇形成完全模格, 但不是分配格. 两个簇  $\mathfrak{U}$  和  $\mathfrak{B}$  的积  $\mathfrak{U} \mathfrak{B}$  是一个群簇, 它由所有具有正规子群  $N \in \mathfrak{U}$  且使  $G/N \in \mathfrak{B}$  的群  $G$  组成. 除了平凡群的群簇和所有群的群簇, 任何群簇都可唯一地表成一些群簇的积, 且这些群簇不能再分裂.

群簇的例子: 所有 Abel 群的簇  $\mathfrak{A}$ ; 由  $x^n = 1$  定义的方指数为  $n$  的所有群的 Burnside 簇 (Burnside variety)  $\mathfrak{B}_n$ ; 簇  $\mathfrak{U}_n = \mathfrak{B}_n \wedge \mathfrak{A}$ ; 类  $\leq c$  的所有幂零群的簇  $\mathfrak{N}_c$ ; 所有长度  $\leq l$  的可解群的簇  $\mathfrak{U}^l$ ; 特别地, 若  $l = 2$ ,  $\mathfrak{U}^2$  是亚交换群的簇.

令  $\mathcal{P}$  是群的某性质. 称群簇  $\mathfrak{B}$  有性质  $\mathcal{P}$  (局部地), 如果  $\mathfrak{B}$  中任何 (有限生成) 群有性质  $\mathcal{P}$ . 正是在这种含义下, 称簇是幂零的, 局部幂零的, 局部有限的, 等等.

可解的群簇  $\mathfrak{B}$  的性质依赖于  $\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{U}^2$ . 例如, 设  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{U}^2$ , 则对某适当的  $n$  和  $c$  有  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}_n \mathfrak{N}_c \mathfrak{B}_n$  ([2], [3]). 亚交换群簇的描述很大程度上归结为局部有限群簇的描述: 设亚交换簇  $\mathfrak{B}$  不是局部有限的, 则

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2 \vee \mathfrak{B}_3,$$

其中  $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{U}_m \mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{B}_2$  唯一表示成有限个形为  $\mathfrak{N}_c \mathfrak{U}_k \wedge \mathfrak{U}^2$  的群簇的并集, 而  $\mathfrak{B}_3$  是局部有限的 ([4]). 某些局部有限亚交换簇已得到描述, 例如类  $\leq p+1$  的  $p$  群的簇 (见 [5]).

一个群簇称为 Cross 簇 (Cross variety), 若它由一个有限群生成. Cross 群簇是局部有限的. 一个群簇称为近 Cross 簇 (near Cross variety), 如它不是 Cross 簇但它的每个真子簇是 Cross 簇. 簇  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{U}_p^2$ ,  $\mathfrak{U}_p \mathfrak{U}_q \mathfrak{U}_r$ ,  $\mathfrak{U}_p \mathfrak{Z}_q$  是全部的可解近 Cross 簇, 这里  $p, q, r$  是不同的素数,  $\mathfrak{Z}_q = \mathfrak{B}_q \wedge \mathfrak{N}_2$  对奇的  $q$ , 以及  $\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{B}_4 \wedge \mathfrak{N}_2$  ([6]). 然而存在别的近 Cross 簇; 例如这样的簇被包含在方指数  $p \geq 5$  的局部有限群的任何簇  $\mathfrak{K}$  中 ([7]). 在局部有限的群簇的研究中, 临界群 (critical group) 起重要作用, 它是不含在它的所有真子群和所有商群所生成的簇中的群. Cross 簇可以仅含有有限个不同构的临界群. 所有局部有限簇皆由它们的临界群生成.

一个群簇称为有限基的 (finitely based), 如它能由给定的有限个恒等式所确定. 例如, 这样的簇有: 全部 Cross 簇, 幂零和亚交换簇. 已经证明 ([8]) 存在非有限基的群簇, 且全部群簇的数目有连续统的势. 无限个恒等式的独立组的例子可见 [9]. 有限基的群簇的乘积不一定是有限基的: 特别地  $\mathfrak{B}_4 \mathfrak{B}_2$  没有有限基.

一个群簇是 Lie 型簇 (variety of Lie type), 若它由它的无挠幂零群生成. 此外若一个簇的自由群的下中心列的因子是无挠群, 则该簇称为 Magnus 型的 (Magnus type). Lie 型簇的类与 Magnus 型的簇的类并不一致; 它们中每一个对于簇的乘法运算都是封闭的 ([10]). Magnus 型的簇的例子包括全部群的簇, 簇  $\mathfrak{N}_c$ ,  $\mathfrak{U}^n$ , 以及由  $\mathfrak{N}_c$  应用有限次交和乘法运算所得的簇 ([1]).

#### 参考文献

- [1] Neumann, H., Varieties of groups, Springer, 1967.
- [2] Каргаполов, М. И., Чуркин, В. А., «Алгебра и логика», 10 (1971), 6, 651 – 657.
- [3] Groves, J. R. J., On varieties of solvable groups II, Bull. Austr. Math. Soc., 7 (1972), 3, 437 – 441.
- [4] Bryce, R. A., Metabelian groups and varieties, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 266 (1970), 281 – 355.
- [5] Brisley, W., Varieties of metabelian  $p$ -groups of class  $p, p+1$ , J. Austr. Math. Soc., 12 (1971), 53 – 62.
- [6] Ольшанский, А. Ю., «Матем. сб.», 85 (1971), 1, 115 – 131.
- [7] Размыслов, Ю. П., «Алгебра и логика», 10 (1971), 1, 33 – 44.
- [8] Ольшанский, А. Ю., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 34 (1970), 2, 376 – 384.
- [9] Адян, С. И., Проблема Бернсайда и тождества в группах, М., 1975.
- [10] Шмеркин, А. Л., «Тр. Моск. матем. об-ва», 29 (1973), 247 – 260.
- [11] Горчаков, Ю. М., «Сиб. матем. журнал», 10 (1969), 5, 1023 – 1033.

А. Л. Шмелькин 撰

【补注】 Oates-Powell 定理 (Oates-Powell theorem) 说, 由有限群生成的簇是 Cross 簇. 作为推论得出有限群的恒等式允许有有限基.

[A1] 中对一大类代数结构引入了簇的概念. 群簇的第一个系统的研究是 [A2].

#### 参考文献

- [A1] Birkhoff, G., On the structure of abstract algebras, Proc. Cambridge Phil. Soc., 31 (1935), 433 – 454.
- [A2] Neumann, B. H., Identical relations in groups, I, Math. Ann., 114 (1937), 506 – 525.

石生明 译 王杰 校

环簇 [variety of rings; колец многообразие]

满足给定的一组多项式等式的环的一个类  $\mathfrak{M}$ . 环簇可以公理化地定义为代数的一个遗传类, 它对于取同态像和取完全直和是封闭的 (见代数系统簇 (algebraic system, variety of)). 因为在一个给定的环内被满足的多项式等式的全体作成自由环的全特征理想 (一个  $T$  理想 ( $T$ -ideal)), 在环簇与一个可数生成的自由环的  $T$  理想之间存在一一对应. 如果对于两个环簇来说有包含关系  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ , 那么就说  $\mathfrak{N}$  是  $\mathfrak{M}$  的子簇 (subvariety). 与环  $A$  的等式的  $T$  理想相对应的簇称为由环  $A$  生成的簇. 每一个环簇都是由它的一个泛对象生成的, 这就是所给的簇的一个包含无限自由生成元系的自由环: 每一个从自由生成元集到这个簇的任意环内的映射都可以开拓为一个同态.

令  $M_n$  是由  $n$  阶方阵代数所生成的簇. 对于每一个特征为零的结合环簇 (即环的加法群是无挠群) 来说, 存在一个正整数  $n = n(\mathfrak{M})$ , 使得  $M_n \subseteq \mathfrak{M}$ , 但  $M_{n+1} \not\subseteq \mathfrak{M}$ . 一个环簇称为一个 Specht 簇 (Specht variety), 如果其中每个环都有一个等式的有限基. 由一个有限结合环或一个有限 Lie 环生成的簇是 Specht 簇. 是不是每一个结合代数簇都是 Specht 簇的问题构成 Specht 问题 (Specht problem) 的内容. 如果一个簇  $\mathfrak{M}$  是由一个特征为零的域上有限个生成元的结合代数生成的, 并且  $M_2 \not\subseteq \mathfrak{M}$ , 则  $\mathfrak{M}$  是一个 Specht 簇.

亦见 PI 代数 (PI-algebra).

#### 参考文献

- [1] Procesi, C., Rings with polynomial identities, M. Dekker, 1973.
- [2] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

В. Н. Латышев 撰

【补注】 A. P. Кремер 已经证明了特征为零的域上每一个结合代数簇都是有限基的 ([A1]).

除了在特征零的情形解决 Specht 问题外, Кремер 还通过一个有限  $\mathbb{Z}_2$  分次代数  $A$  和一个无限 Grassmann 代数  $G$  讨论了一个簇的  $T$  理想. 他证明了, 给定一个  $T$  理想  $I$ , 存在一个有限维  $\mathbb{Z}_2$  分次代数  $A = A_0 \oplus A_1$  使得  $I = T(A_0 \otimes G_0 + A_1 \otimes G_1)$ , 代数  $A_0 \oplus G_0 \otimes G_1$  的等式  $T$  理想, 这里  $G_0$  和  $G_1$  是无限 Grassmann 代数  $G$  的偶项和奇项.

#### 参考文献

- [A1] Кремер, А. Р., «Докл. Акад. наук СССР», 298 (1988), 273 – 277.
- [A2] Rowen, L. H., Polynomial identities in ring theory, Acad. Press, 1980.

郝钢新 译

半群簇 [variety of semi-groups; полугрупп многообра-

ние]

由某一组恒等式或一组法则所确定的半群 (semi-group) 类 (见代数系统簇 (algebraic systems, variety of)). 每个半群簇或者是周期的 (periodic) (即由周期半群组成的簇), 或者是扩交换 (overcommutative) 的 (即包含所有交换半群的簇). 半群簇的各种性质可利用某些类型的恒等式来分类. 恒等式  $u = v$  称为正规的 (normal) (也称为同型的 (homotypical)), 正则的 (regular), 或一致的 (uniform), 如果出现于字  $u$  和  $v$  中的变量的集合相同, 否则, 称为非正规的 (anomalous) (或异型的 (heterotypical)). 恒等式  $u = v$  称为平衡的 (balanced), 如果每个变量出现在字  $u$  和  $v$  中的次数相同. 平衡恒等式的一个特殊情形是置换恒等式 (permutation identity) —— 如果  $u = x_1 \cdots x_m$ , 且  $v$  可由置换  $u$  的变量而得到. 半群簇是扩交换的, 当且仅当它的所有恒等式是平衡的. 半群簇  $\mathfrak{M}$  的恒等式的一个基称为不可约的 (irreducible), 如果这个基的任何真子集都确定一个不同于  $\mathfrak{M}$  的簇. 每个扩交换半群簇都有一个不可约的恒等式基. 存在没有不可约恒等式基的半群簇. 具有有限基的半群簇的例子是: 任意交换半群簇, 任意带有一个置换恒等式的周期半群簇, 由置换恒等式所定义的半群簇. 元素个数小于 6 的半群必存在有限的恒等式基. 但存在没有有限恒等式基的六元素半群.

关于半群簇  $\mathfrak{M}$ , 下列条件等价:  $\mathfrak{M}$  由正规恒等式定义;  $\mathfrak{M}$  的所有恒等式是正规的;  $\mathfrak{M}$  包含一个二元半格 (semi-lattice). 半群簇  $\mathfrak{M}$  的恒等式中存在一个非正规的恒等式, 当且仅当  $\mathfrak{M}$  由周期的 Archimedes 半群 (Archimedean semi-group) 组成.

极小半群簇只有下列五种簇: 1) 半格簇; 2) 左零半群簇; 3) 右零半群簇 (见幂等元半群 (idempotents, semi-group of)); 4) 具有零乘积的半群簇; 5) 对任意素数  $p$ , 幂  $p$  的 Abel 群簇. 在所有半群簇的格中, 对每个非单位元, 都存在覆盖它的元素; 单位元不等于有限个非单位元的并. 所有半群簇的格不满足任何非平凡的格恒等式, 并且具有连续统的势. 所有满足恒等式  $x^2 = 0$  的诣零半群簇的子格及所有扩交换半群簇的子格也均具有连续统的势. 关于某些半群簇  $\mathfrak{M}$ , 已经得到  $\mathfrak{M}$  的子簇格  $L\mathfrak{M}$  的清晰刻画, 其子簇格  $L\mathfrak{M}$  满足某些条件的半群簇  $\mathfrak{M}$  也被刻画.

半群簇  $\mathfrak{M}$  称为小的 (small), 如果  $L\mathfrak{M}$  是有限的. 半群簇  $\mathfrak{M}$  称为有限指数簇 (variety of finite index), 如果  $\mathfrak{M}$  中的幂零半群的幂零次数是一致有界的 (这等价于:  $\mathfrak{M}$  中每个诣零半群是幂零的; 也等价于:  $\mathfrak{M}$  不含所有满足恒等式  $x^2 = 0$  的交换诣零半群簇). 任何小半群簇均有有限指数.



关于周期半群簇  $\mathfrak{M}$ , 下列条件等价 ([4]):  $\mathfrak{M}$  由 Archimedes 半群的带组成;  $\mathfrak{M}$  中的任意半群的每个挠类是子半群;  $\mathfrak{M}$  不含 Brandt 半群  $B_2$  (见周期半群 (periodic semi-group)). 子簇格  $L\mathfrak{M}$  是模格的半群簇  $\mathfrak{M}$  和有限指数半群簇 (特别地, 小簇) 均满足上述条件. 小簇是局部有限的 (locally finite) (即由局部有限半群构成), 当且仅当  $\mathfrak{M}$  中的所有群的簇是局部有限的; 小的局部有限群簇恰好是交叉簇 (见群簇 (variety of groups)). 关于其他的局部有限半群簇, 见局部有限半群 (locally finite semi-group). 由剩余有限半群组成的半群簇已被刻画 ([3]).

所有半群簇的集合关于 Мальцев 积 (Mal'tsev product) 是一个部分广群  $G$ .  $G$  中的幂等元是已知的, 且这些幂等元的个数为 9. 由一组  $w=0$  型恒等式所定义的全体半群簇的集合构成  $G$  中的一个极大广群 (groupoid).

带有附加运算的半群的簇, 例如, 么半群 (monoid) (有恒等元的半群) 簇, 带零的半群簇, 逆半群簇等也已经被研究.

#### 参考文献

- [1] Evans, T., The lattice of semigroup varieties, *Semigroup Forum*, 2 (1971), 1, 1 - 43.
- [2] Айзенштат, А. Я., Богута, Б. К., В сб., Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов, Л., 1979, 3 - 46.
- [3] Глубов, Э. А., Сапир, М. В., «Докл. АН СССР», 247 (1979), 5, 1037 - 1041.
- [4] Сапир, М. В., Суханов, Е. В., «Изв. Вузов. Математика», 25 (1981), 4, 48 - 55.
- [5] Шеврин, Л. Н., «Изв. Вузов. Математика», 29 (1985), 11, 3 - 47.
- [6] Шеврин, Л. Н., Суханов, Е. В., «Изв. Вузов. Математика», 33 (1989), 6, 3 - 39.

Л. Н. Шеврин 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Ljapin, E. S. [E. S. Lyapin], *Semigroup*, Amer. Math. Soc., 1978, Chapt. XII (译自俄文).
- [A2] Reilly, N. R., On the lattice of varieties of completely regular semigroup, in S. M. Gopherstein and P. M. Higgins (eds.): *Semigroups and their Applications*, Reidel, 1978, 153 - 167.

田振际 郑恒武 译 郭聿琦 校

泛代数簇 [variety of universal algebras; универсальных алгебр многообразие]

由一组等式所定义的泛代数 (universal algebra) 的类 (见代数系统簇 (algebraic systems, variety of)). 一个泛代数簇可以被刻画为一个代数的非空类, 它关于

取商代数, 子代数和直积是闭的. 后两个条件可以用在子直积下是闭的要求来代替. 一个泛代数类称为平凡的 (trivial), 如果它是由一个元素的代数所组成. 每一个非平凡泛代数类都含有一个具有任意基数的基的自由代数 (free algebra). 如果  $X$  和  $Y$  是在一个非平凡簇内同一自由代数的基且  $X$  是无限的, 则  $X$  与  $Y$  是等势的. 对其中一个基是无限的要求是本质性的, 然而如果这个簇含有多于一个元素的有限代数的话, 这个要求可以去掉.

由一个类  $K$  生成的泛代数簇由  $K$  中代数的子直积的所有商代数组成. 如果一个泛代数簇由有限代数生成, 则这个簇内每一个有限生成的代数都是有限的. 在一个表征为  $\Omega$  的泛代数簇  $M$  内, 任意合同是交换的, 当且仅当存在这个表征  $\Omega$  的一个三元项 (term)  $f$ , 使得对  $M$  中一切代数来说都有

$$f(x, x, y) = y = f(y, x, x).$$

用类似的方式可以刻画其中代数有模合同或分配合同格的泛代数簇 (见 [1] - [4], [7], [9], [10]).

在一个簇  $M$  内, 一个  $n$  元运算称为平凡的 (trivial), 如果对于  $M$  中每一个代数来说, 等式  $f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$  成立. 例如, 在有零乘法的环簇内, 乘法运算是平凡的. 每一个平凡运算  $f$  可以被由方程  $v_f = f(x_1, \dots, x_n)$  所定义的 0 元运算  $v_f$  来代替. 假设两个泛代数簇  $M, M'$  各自的表征为  $\Omega, \Omega'$ , 不含平凡运算. 一个由  $\Omega$  到  $\Omega'$  的项的集合  $W(\Omega')$  内的映射  $\Phi$  称为容许的 (admissible), 如果对于一切运算  $f \in \Omega$  来说,  $f$  与  $\Phi(f)$  的元数重合. 一个容许的映射可以开拓为  $W(\Omega)$  到  $W(\Omega')$  的映射, 仍以自然方式记作  $\Phi$ . 簇  $M$  与  $M'$  称为有理等价的 (rationally equivalent), 如果存在容许映射  $\Phi: \Omega \rightarrow W(\Omega')$  和  $\Phi': \Omega' \rightarrow W(\Omega)$ , 使得对于一切  $f \in \Omega$  有  $f = \Phi'(\Phi(f))$ , 对一切  $f' \in \Omega'$  有  $f' = \Phi(\Phi'(f'))$ , 并且对于  $M$  (相应地,  $M'$ ) 的每一个定义等式  $u = v$  (相应地,  $u' = v'$ ) 来说, 等式  $\Phi(u) = \Phi(v)$  (相应地,  $\Phi'(u') = \Phi'(v')$ ) 对  $M'$  内 (相应地,  $M$  内) 一切代数成立. 最后的要求等价于这样的事实,  $M$  内每一个代数  $A$  ( $M'$  内每一个代数  $A'$ ) 对应于  $M'$  内 ( $M$  内) 一个代数, 其中  $\Omega'$  内每一个  $n$  元运算  $f'$  ( $\Omega$  内每一个  $n$  元运算  $f$ ) 都由方程  $f'(x_1, \dots, x_n) = \Phi(f)(x_1, \dots, x_n)$ , ( $f(x_1, \dots, x_n) = \Phi'(f')(x_1, \dots, x_n)$ ) 所定义. Boole 环簇和 Boole 代数 (Boolean algebra) 簇是有理等价的. 表征为  $\Omega$  的一元代数 (unary algebra) 簇具有定义关系

$$\{u_l(x) = v_l(x): l \in \mathfrak{J}\},$$

有理等价于所有左  $R$  多边形 (见多边形 (么半群上

的)) (polygon (over a monoid)) 的簇, 这里  $R$  是由  $\Omega$  生成的自由幺半群关于由对  $\{(u_i, v_i): i \in \mathbb{S}\}$  所生成的合同的商幺半群. 一个泛代数簇  $M$  有理等价于某一结合环上一切右模的簇, 当且仅当  $M$  中任意代数上的合同是交换的, 只要  $M$  内有限自由积 (free product) 与直积 (direct product) 重合, 只要存在 0 元导出运算形成一个特异子代数. 前两个条件可由以下的要求来代替:  $M$  内任意代数的子代数都是某一合同的类而  $M$  内任意代数的合同是由这个子代数所形成的类唯一确定 ([3], [5]–[7]).

由某一泛代数簇的所有代数的合同格生成的格簇称为一个合同簇 (congruence variety). 并非每一格簇都是合同簇. 存在这样的合同簇, 它不是模的, 并且不同于一切格的簇 ([7], [8]).

#### 参考文献

- [1] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.
- [2] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973 (中译本: А. Г. 库洛什, 一般代数学讲义, 上海科学技术出版社, 1962).
- [3] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973).
- [4] Скорняков, Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983.
- [5] Чакань, Б., Acta Scient. Math., 24 (1963), 1–2, 157–164.
- [6] Чакань, Б., Acta Scient. Math., 25 (1964), 3–4, 202–208.
- [7] Grätzer, G., Universal algebra, Springer, 1979.
- [8] Jónsson, B., Varieties of lattices, some open problems, in B. Csákány, E. Fried and E. T. Schmidt (eds), Universal Algebra (Esztergom, 1977), Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 29, North-Holland, 1982, 421–436.
- [9] Smith, J. D. H., Mal'cev varieties, Springer, 1976.
- [10] Taylor, W., Characterizing Mal'cev conditions, Algebra Universalis, 3 (1973), 3, 351–397.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】泛代数簇这个术语也用于在一个给定的簇内 (在上述定义意义下) 所有的代数和它们之间所有的同态所形成的范畴 (category); 对于一个在给定的表征  $\Omega$  内的代数来说, 这些恰是一切  $\Omega$  代数范畴中的簇 (variety in a category). 作为簇而出现的范畴可以被刻画为对于集合范畴配备一个底函子, 它是一元的 (见三元组 (triple)) 且保持滤过上极限.

两个簇称为森田等价的 (Morita equivalent), 如果它们作为 (抽象的) 范畴是等价的; 这推广了环的森田等价 (Morita equivalence) 概念. 两个簇作为具体范畴是等价的 (即在它们之间有一个等价, 它在基础集上约缩为恒等函子), 当且仅当它们是如上

所定义的有理等价. 簇的很多在有理等价范围内不变的性质可以用范畴的术语来定义. 例如, 一元代数簇正是那些基础集函子保持上积的簇, 有理等价于模簇的簇正是那些是 Abel 范畴 (Abelian category) 的簇. 注意, 这些簇类的第二个在森田等价之下是封闭的, 而第一类则不是. 簇的任何可以用子代数格或合同格的语言来叙述的性质都自动地在森田等价范围内保持不变.

在相反的方向上, 可以寻求对应于一个簇常见的范畴性质的语法条件 (即在运算和它们所满足的方程上的条件). 例如, 对于那些是 Descartes 闭的范畴的簇, 那些是拓扑斯 (topos) 的簇, 这种刻画已被给出 ([A3]).

第一部关于泛代数的权威性论述已经出现 ([A5]). 关于 Мальцев 运算 (Mal'tsev operations) (三元运算  $f$  满足条件  $f(x, x, y) = f(y, x, x)$ ) 的课题有强劲发展的势头; 截止到 1989 年, 主要的工作是 E. Faro 和 J. Lambek 在 [A6] 中所做的 (见 Мальцев 积 (Mal'tsev product)).

#### 参考文献

- [A1] Manes, E. G., Algebraic theories, Springer, 1976.
- [A2] Wraith, G. C., Algebraic theories, Lecture notes series, 22, Aarhus Univ., 1975.
- [A3] Johnstone, P. T., Collapsed toposes and cartesian closed varieties, J. Algebra, 129 (1990), 446–480.
- [A4] Freese, R. and McKenzie, R., Commutator theory for congruence modular varieties, Cambridge Univ. Press, 1987.
- [A5] McKenzie, R., McNulty, G. and Taylor, W., Algebras, lattices, varieties, 1, Wadsworth, 1987.
- [A6] San Luis Fernandez, A. M., Sobre teorías algebraicas con una operación de Malcev, Algebra, 55 (1989).

郝炳新 译

#### Varignon 定理 [Varignon theorem; Вариньона теорема]

滑移向量 (vector) 理论的基本定理之一. 根据 Varignon 定理, 如果滑移向量系  $F_v$  可以化简为一个单一的合矢量  $F$ , 则该合矢量对于某一点  $O$  (或  $l$  轴) 的矩等于组成该向量系的所有向量对于该点 (或该轴) 的矩的和:

$$\text{mom}_O F = \sum_v \text{mom}_O F_v, \quad \text{mom}_l F = \sum_v \text{mom}_l F_v.$$

该定理是 P. Varignon 在 1687 年对于收敛力系确定的, 其在几何静力学、刚体运动学和材料力学中有广泛应用.

В. В. Румянцев 撰 王克仁 译

#### 向量 [vector; вектор], 几何向量 (geometric vector)

Euclid 空间的一条直线上一个定向线段, 它的一



个末端(点  $A$ )称为起点,而另一个(点  $B$ )称为该向量的终点. 这样一个向量可以记作  $\mathbf{a}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{a}$  或  $\overrightarrow{AB}$ . 起点和终点相重合的向量称为零向量 (zero vector), 通常记作  $\mathbf{0}$ . 刻画一个向量是由它的模 (modulus) (或长度 (length)), 它等于线段  $AB$  的长且记作  $|\mathbf{a}|$ , 以及它的方向: 由  $A$  到  $B$ . 向量  $\overrightarrow{BA}$  称为与  $\overrightarrow{AB}$  相反的向量. 长度等于 1 的向量称为单位向量 (unit vector). 零向量可以赋以任意方向. 两个向量称为共线的 (collinear), 如果它们位于同一条直线或两条平行直线上; 称它们为共面的 (coplanar), 如果它们位于同一个平面或两个平行平面上. 两个共线的向量称为指向相同 (identically directed) (指向相反 (oppositely directed)), 如果它们的终点在连接其起点的直线的同侧 (相对的侧), 或者在它们的公共起点的同侧. 位于同一条直线的两个向量  $\overrightarrow{AB}$  和  $\overrightarrow{A'B'}$  称为指向相同 (相反), 如果两半直线  $AB$  与  $A'B'$  之中有 (没有) 一条被完全包含于另一条里. 两个向量称为相等的 (equal), 如果它们具有相等的模且指向相同 (这种向量亦称为自由向量 (free vectors)). 所有零向量称为相等的.

除自由向量外, 即其起点是不重要的向量, 而在力学与物理学里往往考虑向量是由它们的长度、方向及其起点的位置 (作用点 (point of application)) 来刻画的. 位于同一条直线上的一组相等的向量称为一个滑动向量 (sliding vector). 同样考虑约束向量 (bound vectors), 两约束向量称为相等的, 如果它们不仅具有相等的模和方向相同, 而且有一个共同的作用点. 向量演算 (vector calculus) 研究向量运算, 它是基于自由向量的, 因为给定一个滑动或约束向量相当于给定两个自由向量.

事物的数学的抽象产生了向量的概念, 所论对象用其长度和方向来描述, 诸如位移、速度、磁场或电场强度.

向量的概念可以按照公理被引入 (见向量空间 (vector space)).

А. Б. ИВАНОВ 撰

【补注】上面所定义的几何向量来自力学中力的概念, 一个具有长度、方向和作用点的量. 数学的描述是一个仿射空间 (affine space) 的设定, 它是一个向量空间 “不计其原点的位置”, 或者更精确地说, 向量空间  $L$  在一个集合  $A$  上的一个单可迁的群 (基础加群) 作用  $\varphi$ . 该单可迁性定义映射  $\theta: A \times A \rightarrow L$ , 由  $\varphi(\theta(x, y), x) = y$  来刻画.  $\theta(x, y)$  记作  $\overrightarrow{xy}$ ,  $\overrightarrow{xy}$  是由约束向量或几何向量所定义的自由向量,  $(x, y)$  或  $(x, \overrightarrow{xy})$  (它具有作用点  $x$  以及由  $\overrightarrow{xy}$  给出的方向和长度). 对于任意三个点  $x, y, z \in A$ , 在  $L$  中有  $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} + \overrightarrow{zx} = \mathbf{0}$ , 它称为 Chasles 关系 (Chasles relation) (见 [A1] 和仿射空间 (affine space)).

力学中位移定律指出, 一个力作用于刚体可以沿着其作用线位移到任何一个新的作用点, 因此, 一个力作用于一个刚体是一个滑动向量 (sliding vector).

#### 参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1, Springer, 1987, Chapt. 2 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一—五卷, 科学出版社, 1987—1991).

[A2] Ziegler, H., Mechanics, 1, Addison-Wesley, 1965.

【译注】设  $A$  为与域  $k$  上向量空间  $L$  相关联的仿射空间,  $\varphi$  是加群  $L$  在  $A$  上的单可迁的群作用, 映射  $\theta: A \times A \rightarrow L$ , 使得  $\varphi(\theta(x, y), x) = y$ , 对任意  $x, y \in A$ . 令  $\theta(x, y) = \overrightarrow{xy}$ , 有时称  $\overrightarrow{xy}$  为与点偶  $(x, y)$  或约束向量  $(x, \overrightarrow{xy})$  相关联的自由向量 ([A1]).

蒋滋梅 译

#### 向量代数 [vector algebra; векторная алгебра]

向量演算 (vector calculus) 的一个分支, 讨论有关 (自由) 向量 (vector) 的最简单的运算. 这些包括线性运算 (linear operations), 即向量的加法及向量乘以数的乘法.

两个向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$ , 如果  $\mathbf{a}$  的终点与  $\mathbf{b}$  的起点相重合, 则其和 (sum)  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  是由  $\mathbf{a}$  的起点画到  $\mathbf{b}$  的终点的向量. 向量的加法运算具有以下性质:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ (交换性);}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \text{ (结合性);}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a} \text{ (零元素的存在);}$$

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0} \text{ (逆元素的存在).}$$

这里  $\mathbf{0}$  是零向量,  $-\mathbf{a}$  是与向量  $\mathbf{a}$  相反的 (opposite) 向量 (它的逆 (inverse)). 两个向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的差 (difference) 是向量  $\mathbf{x}$ , 它使得  $\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$ .

向量  $\mathbf{a}$  乘以数  $\lambda$ , 如果  $\lambda \neq 0$ ,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , 则其积  $\lambda \mathbf{a}$  是模等于  $|\lambda| |\mathbf{a}|$  的向量, 当  $\lambda > 0$ , 其方向就是  $\mathbf{a}$  的方向, 当  $\lambda < 0$ , 其方向与  $\mathbf{a}$  相反. 如果  $\lambda = 0$  或 (且)  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , 则  $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$ . 向量乘以数的乘法运算具有性质:

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} \text{ (关于向量加法的分配性);}$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a} \text{ (关于数的加法的分配性);}$$

$$\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a} \text{ (结合性);}$$

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \text{ (乘以数 1).}$$

空间的所有自由向量的集合连同这些引进的加法运算, 乘以数的乘法运算就构成一个向量空间 (vector space) (线性空间). 以下 “向量” 意指自由向量, 或等价地, 指一个给定向量空间的元素.

向量的线性相关概念是向量代数中一个重要概念. 向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{c}$  称为线性相关的 (linear dependent), 如果存在数  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ , 其中至少有一个不为零, 使得等式

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \dots + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (1)$$

成立. 两个向量线性相关的充分必要条件是它们是共线的; 三个向量线性相关的充分必要条件是, 它们是共面的. 如果向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{c}$  中有一个零向量, 那么这些向量线性相关. 向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{c}$  称为线性无关的 (linearly independent) 如果由 (1) 式可得数  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  均为零. 平面上 (相应地三维空间) 最多两个 (相应地三个) 向量线性无关.

三维空间 (平面) 的三 (两) 个线性无关的向量  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  的集合, 取确定的次序, 组成一个基 (basis). 任何向量  $\mathbf{a}$  可以唯一表为和式

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3.$$

数  $a_1, a_2, a_3$  称为  $\mathbf{a}$  在给定基下的坐标 (coordinates) (分量 (components)); 记作  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ .

两个向量  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  与  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$  相等, 当且仅当在同一个基下它们的坐标相等. 两个向量  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  与  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$  ( $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ) 共线的充分必要条件是它们对应的坐标成比例:  $a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3$ . 三个向量  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$  和  $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$  共面的充分必要条件是等式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

成立. 向量的线性运算可以简化为坐标的线性运算. 两个向量  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  与  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$  的和的坐标等于对应坐标的和:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$ . 向量  $\mathbf{a}$  乘以数  $\lambda$  的积的坐标等于  $\mathbf{a}$  的坐标乘以  $\lambda$  的积:  $\lambda \mathbf{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$ .

两个非零向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的标量积 (scalar product) (或内积 (inner product)) ( $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ) 是它们的模乘以它们之间的夹角  $\varphi$  的余弦的积:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi.$$

在这里,  $\varphi$  理解为两向量间不超过  $\pi$  的那个角. 如果  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  或  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , 那么它们的标量积规定为零. 标量积具有以下性质:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad (\text{交换性});$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \quad (\text{关于向量加法}$$

的分配性);

$$\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b}) \quad (\text{关于乘以一个数的结合性});$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \text{ 仅当 } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ 或 (且) } \mathbf{b} = \mathbf{0}, \text{ 或 } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}.$$

向量的标量积往往适合于使用正交 Descartes 坐标 (orthogonal Cartesian coordinates), 即在相互垂直的单位向量  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  所组成的一个基 (规范正交基 (orthonormal basis)) 下的向量坐标. 两个向量

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\} \text{ 与 } \mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\},$$

定义在一个规范正交基下, 其标量积由公式

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

来计算. 两个非零向量  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  与  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$  间的夹角  $\varphi$  的余弦可由公式

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

来计算, 其中  $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$  及  $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ .

向量  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$  与基向量  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  所构成的诸夹角的余弦称为  $\mathbf{a}$  的方向余弦 (direction cosines):

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

这些方向余弦有以下性质:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

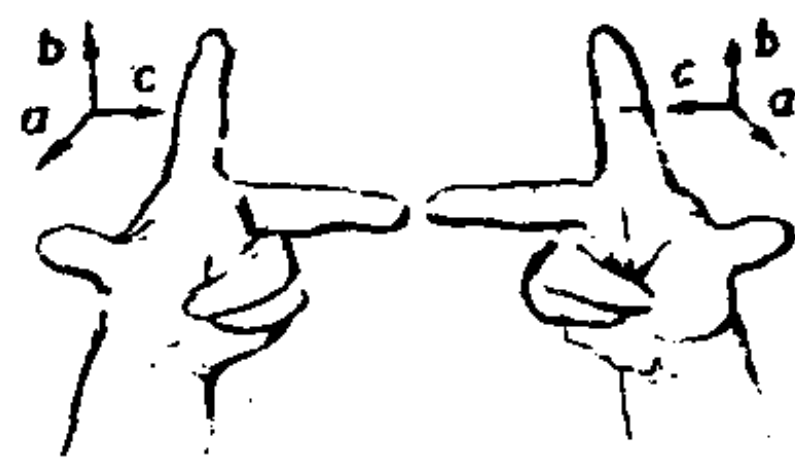
一条直线, 在其上选定一个单位向量  $\mathbf{e}$ , 这就规定了该直线的正方向, 称为轴 (axis). 向量  $\mathbf{a}$  在这个轴上的投影 (projection)  $Pr_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})$  是该轴上的有向线段, 其代数值等于  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{e}$  的标量积. 投影是加性的:

$$Pr_{\mathbf{e}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = Pr_{\mathbf{e}} \mathbf{a} + Pr_{\mathbf{e}} \mathbf{b},$$

和齐次的:

$$\lambda Pr_{\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = Pr_{\mathbf{e}}(\lambda \mathbf{a}).$$

一个向量在规范正交基下的每个坐标等于这个向量在相应的基向量所规定的轴上的投影.





空间里的左和右向量三元组是有区别的. 不共面的向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  的三元组称为右的 (right), 如果观察者在公共的向量起点, 按  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  这个顺序的该三向量的运转, 呈现为顺时针方向. 若呈现为逆时针方向, 则  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  称为左三元组 (left triple). 空间里右 (左) 向量三元组的方向可以伸出右 (左) 手的大拇指、食指和中指来模拟, 如图所示. 所有右 (左) 向量三元组称为指向相同. 在下文中, 基向量  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  这个向量三元组假设为右三元组.

假设在平面上正旋转方向 (由  $\mathbf{i}$  到  $\mathbf{j}$ ) 已给定. 那么两个非零向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的伪标量积 (pseudo-scalar product)  $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$  定义为它们的长度 (模) 乘以由  $\mathbf{a}$  到  $\mathbf{b}$  正旋转的角  $\varphi$  的正弦的积:

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \varphi.$$

由定义, 如果  $\mathbf{a}$  或  $\mathbf{b}$  是零, 它们的伪标量积规定等于零. 伪标量积具有下列性质:

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = -\mathbf{b} \vee \mathbf{a} \text{ (反交换性);}$$

$$\mathbf{a} \vee (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \vee \mathbf{b} + \mathbf{a} \vee \mathbf{c} \text{ (关于向量加法的分配性);}$$

$$\lambda(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} \vee \mathbf{b} \text{ (关于乘以一个数的结合性);}$$

$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = 0$ , 仅当  $\mathbf{a} = 0$  或 (且)  $\mathbf{b} = 0$ , 或  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  共线.

在规范正交基下, 如果向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  具有坐标  $\{a_1, a_2\}$  和  $\{b_1, b_2\}$ , 那么

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

两个不共线的非零向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的向量积 (vector product)  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  是这样一个向量, 它的模等于这两个向量的模乘以它们之间的夹角  $\varphi$  的正弦, 这个向量垂直于  $\mathbf{a}$ , 且垂直于  $\mathbf{b}$ , 并且其指向使得向量三元组  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  为一个右三元组:

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \varphi.$$

这个积规定为零, 如果  $\mathbf{a} = 0$  或 (且)  $\mathbf{b} = 0$ , 或这两个向量共线. 向量积具有下列性质:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}] \text{ (反交换性);}$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathbf{c}] \text{ (关于向量加法的分配性);}$$

$$\lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b}] \text{ (关于乘以一个数的结合性);}$$

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$  仅当  $\mathbf{a} = 0$  或 (且)  $\mathbf{b} = 0$ , 或  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  共线.

在规范正交基下, 如果向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的坐标是  $\{a_1, a_2, a_3\}$  和  $\{b_1, b_2, b_3\}$ , 那么

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

三个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  的混合积 (mixed product)  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  是  $\mathbf{a}$  与向量  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  的向量积之标量积:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

混合积具有下列性质:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ &= -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}); \end{aligned}$$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ , 仅当  $\mathbf{a} = 0$ , 或 (且)  $\mathbf{b} = 0$ , 或 (且)  $\mathbf{c} = 0$ , 或向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  共面;

如果向量三元组  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  是右三元组, 则  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$ ; 如果  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  是左三元组, 则  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$ .

混合积的模等于在向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  上构造的平行六面体的体积. 如果在规范正交基下, 向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  具有坐标  $\{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\{b_1, b_2, b_3\}$  和  $\{c_1, c_2, c_3\}$ , 那么

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

三个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  的二重向量积 (double vector product)  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$  是  $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$ .

下列公式用来计算二重向量积:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, (\mathbf{a}, \mathbf{c})] - [\mathbf{c}, (\mathbf{a}, \mathbf{b})],$$

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

$$\begin{aligned} [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] &= (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{d}. \end{aligned}$$

#### 参考文献

- [1] Александров, П. С., Лекции по аналитической геометрии ..., М., 1968.
- [2] Ефимов, Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 9 изд., М., 1967 (中译本: 叶菲莫夫, 解析几何简明教程, 高等教育出版社, 1956).
- [3] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Аналитическая геометрия, М., 1968 (英译本: Ilin, V. A. and Poznyak, E. G., Analytical geometry, Mir, 1984).
- [4] Погорелов, А. В., Аналитическая геометрия, 3 изд., М., 1968. Ю. П. Пытьев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Halmos, P. R., Finite-dimensional vector spaces, v. Nostrand, 1958.
- [A2] Capildeo, R., Vector algebra and mechanics, Addison-Wesley, 1968. 蒋滋梅 译

向量分析 [vector analysis; векторный анализ]

研究标量场及向量场的向量演算 (vector calculus) 的一个分支 (见标量场 (scalar field); 向量场 (vector field)).

向量分析中研究标量场的基本概念之一是梯度 (gradient). 一个标量场  $u(M)$  称为在区域  $D$  中的点  $M$  处是可微的, 如果场在  $M$  处的增量能被写成

$$\Delta u = f(\Delta \mathbf{r}) + o(\rho),$$

这里  $\mathbf{r}$  是连结点  $M$  和  $M'$  的向量,  $\rho = \rho(M, M')$  是  $M$  和  $M'$  之间的距离,  $f(\Delta \mathbf{r})$  是应用于向量  $\Delta \mathbf{r}$  的一个线性形式. 线性形式  $f(\Delta \mathbf{r})$  可唯一地表为

$$f(\Delta \mathbf{r}) = (\mathbf{g}, \Delta \mathbf{r}),$$

这里  $\mathbf{g}$  是一个不依赖于  $\Delta \mathbf{r}$  (即不依赖于  $M'$  的选取) 的向量. 称向量  $\mathbf{g}$  为标量场的梯度 (gradient), 并用记号  $\text{grad } u$  来表示. 如果标量场在某区域的每点处都可微, 则  $\text{grad } u$  是一个向量场. 梯度的方向总正交于标量场  $u$  的等值线 (面)  $u(M) = \text{常数}$ ,  $u$  的方向导数由

$$\nabla_e u = (\text{grad } u, \mathbf{e})$$

给出.

散度 (divergence) 和旋度 (curl) 的概念也被用于向量场的研究之中. 设向量场  $\mathbf{a}(M)$  在某区域  $D$  中的点  $M$  处是可微的, 即在  $M$  点处的场增量能被唯一地表为

$$\Delta \mathbf{a} = A \Delta \mathbf{r} + o(|\Delta \mathbf{r}|),$$

这里  $\Delta \mathbf{r} = |\mathbf{M} \mathbf{M}'|$  和  $A$  是一个与  $\Delta \mathbf{r}$  ( $M'$  的选取) 无关的线性算子. 向量场  $\mathbf{a}(M)$  的散度 (divergence)  $\text{div } \mathbf{a}$  是下列的线性算子  $A$  的数值不变量:

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv (\mathbf{r}^i, A \mathbf{r}_i), \quad (*)$$

这里  $\mathbf{r}^i, \mathbf{r}_i$  是对偶基:  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^k) = \delta_i^k$  (Kronecker 符号). 如果向量场  $\mathbf{a}(M)$  是不可压缩流体的稳定流的速度场, 在点  $M$  处的  $\text{div } \mathbf{a}$  表示存在于  $M$  处的源的强度 ( $\text{div } \mathbf{a} > 0$ ) 或者收点的强度 ( $\text{div } \mathbf{a} < 0$ ), 或它们都不存在 ( $\text{div } \mathbf{a} = 0$ ).

在  $\mathbf{R}^3$  中的一个区域上的向量场  $\mathbf{a}(M)$  的旋度 (curl 或 rotor)  $\text{rot } \mathbf{a}$  是 (\*) 式中的线性算子  $A$  的下述向量不变量:

$$\text{rot } \mathbf{a} \equiv [\mathbf{r}_i, A \mathbf{r}^i],$$

这里  $\mathbf{r}^i, \mathbf{r}_i$  是对偶基. 向量场的旋度可解释成该场的“旋转分量”.

对  $C^2$  类的向量场和标量场, 可重复施行运算, 例如:

$$\text{rot grad } u = 0,$$

$$\text{div rot } \mathbf{a} = 0,$$

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a},$$

$$\text{div grad } u = \Delta u,$$

这里  $\Delta$  是 Laplace 算子 (Laplace operator).

梯度、散度和旋度一起通常称为向量分析的基本微分运算 (basic differential operations). 对其性质及在特殊坐标系中的表达式, 见旋度 (curl) 梯度 (gradient); 散度 (divergence).

联系着体积、曲面和围道积分的基本积分公式可借助于向量分析的基本运算写出. 设向量场在一个具有分段光滑边界  $L$  的有界连续区域  $V$  中是连续可微的.

令  $S$  为有界、完全、分段光滑的双侧 (定向) 曲面, 且具有分段光滑的边界  $\partial S$ , 则 Stokes 公式 (Stokes formula) 是适用的:

$$\iint_S (\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{a}) dS = \oint_{\partial S} (\mathbf{a}, \mathbf{t}) dl,$$

这里,  $S$  的法向量  $\mathbf{n}$  和  $\partial S$  的切向量  $\mathbf{t}$  必须根据曲面  $S$  及其边界  $\partial S$  的定向来确定. 积分  $\oint_{\partial S} (\mathbf{a}, \mathbf{t}) dl$  称为  $\mathbf{a}$  沿  $\partial S$  的环流 (circulation). 如果一个向量场沿在给定区域中的任意一条闭的分段光滑曲线的环流为 0, 则称向量场在此区域中为位势的 (potential) (或保守的 (conservative)). 在单连通区域中, 如果  $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ , 则向量场是保守的. 对一个保守向量场, 存在所谓的标量位势 (scalar potential), 它是一个函数  $v(M)$ , 使得  $\mathbf{a} = \text{grad } v$ ; 这里

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, \mathbf{t}) dl = v(B) - v(A),$$

其中点  $A, B \in D$ ,  $AB$  是  $D$  中的一条分段光滑曲线,  $\mathbf{t}$  是  $AB$  的单位切向量,  $dl$  是  $AB$  的线元.

设向量场  $\mathbf{a}(M)$  在具有分段光滑边界  $\partial V$  的有界连通区域  $V$  中是连续可微的, Остроградский 公式 (Ostrogradski formula) 为

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{a} d\sigma = \iint_{\partial V} (\mathbf{n}, \mathbf{a}) dS,$$

这里  $\mathbf{n}$  是  $\partial V$  的外法向量.

称积分  $\iint_{\partial V} (\mathbf{n}, \mathbf{a}) dS$  为  $\mathbf{a}(M)$  跨越  $\partial V$  的流量 (flux). 如果对  $V$  中任意分片光滑、不自交, 且可作为  $V$  的某个有界子区域的边界的定向曲面, 向量场跨越该曲面的流量为 0, 则称向量场  $\mathbf{a}(M)$  在  $V$  中是螺线的 (solenoidal). 一个连续可微的向量场是螺线的充要条件是在  $V$  的每点, 有  $\text{div } \mathbf{a} = 0$ . 对螺线向量场  $\mathbf{a}(M)$ , 存在一个所谓的向量位势 (vector potential): 函数  $A(M)$ , 使得

$$\mathbf{a} = \text{rot } A(M).$$



如果向量场的散度和旋度在单连通区域  $D$  的每点  $M$  处均有定义, 则向量场在  $D$  中处处能表为势场  $\mathbf{a}_1(M)$  和螺线场  $\mathbf{a}_2(M)$  之和 (Helmholtz 定理) (Helmholtz theorem):

$$\mathbf{a}(M) = \mathbf{a}_1(M) + \mathbf{a}_2(M).$$

满足  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  和  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  的向量场称为调和的 (harmonic). 调和向量场的势  $v$  满足 Laplace 方程. 标量场  $v$  也称为调和的. 参考文献见向量演算 (vector calculus).

А. Б. Иванов 撰

【补注】通常称 Остроградски 公式为 Gauss 公式 (Gauss formula).

条件  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  是向量场为螺线的必要条件. 在例如凸区域上, 它也是充分的. 一般的附加条件是区域的二阶同调为 0. 这可容易地从 de Rham 上同调理论中看出. 存在定义在除去了一点的三维空间中向量场的例子, 其散度为 0, 但不是螺线的.

向量场的梯度、散度、Laplace 算子、流量的概念以及所给的积分公式可容易地推广至高维 Euclid 空间及 Riemann 流形上去, 而且所有其他的概念均可推广至三维 Riemann 流形.

在这方面, 所给出的积分公式以统一的方式呈现为 Stokes 公式:  $k$  形式在光滑的定向  $(k+1)$  维子流形的分段正则边界上的积分等于其外微分在子流形本身上的积分.

#### 参考文献

- [A1] Marsden, A. and Weinstein, A., Calculus, III, Springer, 1988.  
[A2] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965. 沈纯理 译

向量公理学 [vector axiomatics; векторно-точечная аксиоматика], 向量点公理学 (vector point axiomatics)

一个  $n$  维仿射空间  $R^n$  的公理学, 其基本概念是“点”和“向量”; 它们之间的联结是由建立点偶与一个唯一确定的向量之间的对应来实现. 下列公理成立.

I.  $R^n$  的所有向量的集合是一个  $n$  维向量空间  $V^n$ .

II. 任意两个点  $A$  和  $B$ , 给了确定的次序, 就唯一确定一个向量  $\mathbf{u}$ .

III. 如果任意给定一个向量  $\mathbf{u}$  和点  $A$ , 那么唯一存在点  $B$  使得  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ .

IV. 如果  $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{AB}$  与  $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{BC}$ , 那么  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \overrightarrow{AC}$ .

偶“点  $A$  与向量  $\mathbf{u}$ ”称为“向量  $\mathbf{u}$  作用在点  $A$ ”(或“定位在那个点”); 点  $A$  自身称为作用于其

上的向量  $\mathbf{u}$  的起点, 而点  $B$ , 它是由偶  $A, \mathbf{u}$  唯一确定, 称为向量  $\mathbf{u}$  (作用于  $A$ ) 的终点.

任给向量  $\mathbf{u}$  就形成  $R^n$  的所有点的集合到它自身的一个完全确定的一一映射, 它称为  $R^n$  在向量  $\mathbf{u}$  上的平移 (translation), 该映射为每个点  $A \in R^n$  联系了向量  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  的终点  $B$ .

#### 参考文献

- [1] Александров, П. С., Лекции по аналитической геометрии ..., М., 1968.  
[2] Александров, П. С., Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963.

А. Б. Иванов 撰

【补注】亦见向量 (vector) (补注) 或 [A1].

#### 参考文献

- [A1] Berger, M. Geometry, I, Springer, 1987, Chapt. 2 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一—五卷, 科学出版社, 1987—1991). 蒋滋梅 译

向量丛 [vector bundle; векторное расслоение]

纤维空间 (fibre space)  $\pi: X \rightarrow B$ , 它的每个纤维  $\pi^{-1}(b)$  具有某个除环  $\mathcal{F}$  上 (有限维) 向量空间 (vector space)  $V$  的结构, 并满足如下局部平凡性条件 (local triviality condition). 每个点  $b \in B$  有一个开邻域  $U$  以及纤维丛的  $U$  同构  $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times V$ , 使得对于每个点  $b' \in U$ ,  $\varphi|_{\pi^{-1}(b')}: \pi^{-1}(b') \rightarrow b' \times V$  是向量空间的同构;  $\dim V$  称为该向量丛的维数 (dimension of the vector bundle). 向量丛  $\pi$  的所有截面构成  $B$  上取值于  $\mathcal{F}$  的连续函数环上的一个局部自由模  $\Gamma(\pi)$ . 两个向量丛  $\pi, \pi'$  间的态射是一个纤维丛的态射  $f: \pi \rightarrow \pi'$ , 它在每个纤维上的限制均是线性映射. 向量丛以及它们之间的态射构成范畴 **Bund**. 向量丛的概念作为微分几何学中切丛 (tangent bundle) 与法丛 (normal bundle) 的拓展而产生; 现已成为研究许多数学分支的基本工具: 微分与代数拓扑学, 线性连络理论, 代数几何学, (伪) 微分算子理论等等.

对于子空间  $X' \subset X$ , 如果  $\pi|_{X'}: X' \rightarrow B$  是一个向量丛, 并且  $X' \cap \pi^{-1}(b)$  是  $\pi^{-1}(b)$  的子向量空间, 则称  $\pi|_{X'}: X' \rightarrow B$  是向量丛  $\pi$  的子丛 (sub-bundle of the vector bundle). 例如, 当  $V$  是一个向量空间,  $G_k(V)$  是  $V$  中  $k$  维线性子空间的 Grassmann 流形 (Grassmann manifold) 时, 乘积空间  $G_k(V) \times V$  中所有满足  $v \in P$  的点对  $(p, v)$  构成的子空间, 是平凡向量丛  $G_k(V) \times V$  的一个子丛  $\nu_k$ . 在商拓扑下, 所有向量空间  $\pi^{-1}(b)/\pi_2^{-1}(b)$  的并, 这里  $\pi_2$  是  $\pi$  的某个子丛, 称为  $\pi$  的一个商丛 (quotient bundle). 进一步, 如果  $V$  是一个向量空间,  $G^k(V)$  是  $V$  中余维数为  $k$  的线性子空间的 Grassmann 流形,

则定义平凡向量丛  $G^k(V) \times V$  的商丛  $\gamma^k$  为乘积空间  $G^k(V) \times V$  关于所有点对  $(p, v)$ ,  $v \in p$ , 构成的子丛的商空间. 利用收缩和粘合的运算在商空间上构造向量丛时, 通常要用到子丛和商丛的概念.

向量丛的一个  $B$  态射  $f: \pi \rightarrow \pi'$  称为常秩的 (纯的) (constant rank (pure)), 如果  $\dim \ker f|_{\pi^{-1}(b)}$  在  $B$  上局部常值. 单、满态射均属常秩态射, 并且分别称为向量丛的单态射和满态射 (monomorphism and epimorphism of the vector bundle). 对于一个局部常秩的态射  $f$ , 如下四个向量丛是唯一确定的:  $\text{Ker } f$  ( $f$  的核 (kernel)), 它是  $\pi$  的一个子丛;  $\text{Im } f$  ( $f$  的象 (image)), 它是  $\pi'$  的一个子丛;  $\text{Co-ker } f$  ( $f$  的余核 (cokernel)), 它是  $\pi$  的商丛; 最后  $\text{Coim } f$  ( $f$  的余象 (co-image)), 它是  $\pi'$  的商丛. 任何一个子丛  $\pi_1$  是某个单态射  $i: \pi_1 \rightarrow \pi$  的象, 而任何一个商丛  $\pi_2$  又是某个满态射  $j: \pi \rightarrow \pi_2$  的余核. 向量丛的  $B$  态射序列

$$\cdots \rightarrow \pi' \rightarrow \pi \rightarrow \pi'' \rightarrow \cdots$$

叫做正合的 (exact), 如果对于每个点  $b \in B$ , 向量空间的同态序列

$$\cdots (\pi')^{-1}(b) \rightarrow (\pi)^{-1}(b) \rightarrow (\pi'')^{-1}(b) \rightarrow \cdots$$

是正合的. 作为特例, 如果用  $0$  表示零维向量丛, 则序列

$$0 \rightarrow \pi_1 \xrightarrow{i} \pi \xrightarrow{j} \pi_2 \rightarrow 0$$

是正合的, 如果  $i$  是单态射,  $j$  是满态射, 并且  $\text{Im } i = \text{Ker } j$ .  $B$  上的所有向量丛与局部常秩的  $B$  态射的集合, 构成范畴 **Bund** 的一个正合子范畴 **Bund**<sub>B</sub>.

对于任意一个向量丛  $\pi: X \rightarrow B$  以及映射  $u: B_1 \rightarrow B$ , 诱导纤维丛 (induced fibre bundle)  $u^*(\pi)$  具有向量丛的结构, 使得态射  $U: u^*(\pi) \rightarrow \pi$  是向量丛态射. 这个结构是唯一的, 并具有下述性质: 每一个纤维映射  $(u^*(\pi))^{-1}(b) \rightarrow \pi^{-1}(b)$  是向量空间的同构. 例如, 对于仿紧空间  $B$  上的一个  $k$  维向量丛, 存在确定的映射  $u: B \rightarrow G_k(V)$  以及  $\tilde{u}: B \rightarrow G^k(V)$ , 使得该向量丛同构于诱导丛  $u^*(\gamma_k)$  与  $\tilde{u}^*(\gamma^k)$  之一; 此外, 同伦的映射诱导同构的向量丛, 并且当  $\dim V \neq \infty$  时, 逆命题也成立: 彼此同构的向量丛对应于彼此同伦的映射  $u$  和  $\tilde{u}$ . 这正是向量丛同伦分类的基本定理之一, 它阐述了向量丛  $\gamma_k$  与  $\gamma^k$  对于分类映射  $u$  和  $\tilde{u}$  的万有性质.

向量空间范畴上的任意一个连续运算 (函子 (functor)), 唯一地决定了空间  $B$  上向量丛范畴上的一个连续函子; 正是由于这个缘故, 有可能从给定的向量丛, 来构造新的向量丛: 张量丛, 态射向量丛  $\text{Hom}_B(\pi, \pi')$ , 尤其是, 对偶向量丛  $\pi^*$ , 向量丛的外

幂等等, 它们的截面赋予向量丛附加的结构. 这些新向量丛在实际应用中广泛被使用.

对于两个向量丛  $\pi$  和  $\pi'$ , 已经定义了它们的直和 (Whitney 和 (Whitney sum))  $\pi \oplus \pi'$  与张量积  $\pi \otimes \pi'$ . 对于这两种运算,  $B$  上的所有向量丛的同构类的集合  $\text{Vect}_B$  构成一个半环, 它在  $K$  函子 ( $K$ -functor) 的构造中起了重要的作用; 具体地说, 对于向量丛  $\pi$  和  $\pi'$ , 如果存在平凡丛  $\theta$  和  $\theta'$  使得  $\pi \oplus \theta$  同构于  $\pi' \oplus \theta'$  (即  $\pi$  稳定等价于  $\pi'$ ), 则它们在半环  $\text{Vect}_B$  的“完全化”  $K(B)$  中决定同一元素. 此外, 仿紧空间  $B$  上任意向量丛的逆丛的存在性, 保证了环  $K(B)$  与向量丛的稳定等价类的集合一致.

对于仿紧空间  $B$  上的任意一个向量丛  $\pi: X \rightarrow B$ , 存在向量丛

$$\pi^* \oplus \pi^* = \text{Hom}(\pi \oplus \pi, P)$$

的一个截面  $\beta$ , 这里  $P$  是一维平凡向量丛, 它在每个纤维  $\pi^{-1}(b)$  上是一个正定二次型, 换言之,  $\pi$  可度量化; 值得一提的是, 利用这一事实, 可以证实向量丛的任何一个正合序列

$$0 \rightarrow \xi \xrightarrow{u} \pi \xrightarrow{v} \zeta \rightarrow 0,$$

其中  $\pi$  可度量化, 都有可裂性, 即存在态射  $w: \xi \oplus \zeta \rightarrow \pi$ , 使得  $wi = u$ ,  $vw = j$ , 这里  $i$  是到第一项的嵌入,  $j$  是到第二项的投射.

在向量丛  $\pi: X \rightarrow B$  的每个纤维  $\pi^{-1}(b)$  中, 将通过原点的每条直线上的所有点等同, 得到一个丛  $\pi_0: \Pi(\pi) \rightarrow B$ , 它与  $\pi$  相配、并且称为  $\pi$  的射影化 (projectivization);  $\pi_0$  的纤维是与  $V$  相配的射影空间  $\Pi(V)$ . 向量丛的射影化丛, 常用于研究 Thom 空间 (Thom space)  $T(\pi) = \Pi(\pi \oplus P) / \Pi(\pi)$ , 用于流形配边类的同伦解释, 以及利用向量丛的示性类描述流形的同调性质等等.

向量丛的概念可以推广到纤维是无穷维向量空间的情形; 但是同时, 需要区别态射空间  $\text{Hom}(\pi, \pi')$  的不同拓扑, 恰当地修改纯态射、态射的正合序列的定义, 以及与无穷维向量空间的范畴上的连续函子相对应的向量丛构造的定义.

#### 参考文献

- [1] Godbillon, C., Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969.
- [2] Atiyah, M. F., K-theory: lectures, Benjamin, 1967.
- [3] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967.
- [4] Husemoller, D., Fibre bundle, McGraw-Hill, 1966.
- [5] Chern, S. S., Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979.
- [6] Hirzebruch, F., Topological methods in algebraic geo-



metry, Springer, 1978 (译自德文).

A. Ф. Шекутьев 撰

【补注】关于丛  $v^k$  和  $v_k$  的万有性和分类性质的详细内容, 见分类空间 (classifying space) 或 [A1].

#### 参考文献

[A1] Milnor, J. W. and Stasheff, J. D., Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974.

段海豹 译 沈信耀 校

### 代数向量丛 [vector bundle, algebraic; векторное алгебраическое расслоение]

一个簇态射  $E \rightarrow X$ , 它在局部上 (在 Zariski 拓扑 (Zariski topology) 下) 具有从直积  $k^n \times X$  到  $X$  的投影结构, 并且使得粘合保持向量空间的线性结构. 这里  $E$  称为纤维空间 (fibre space) (或丛空间 (bundle space)),  $X$  称为底 (base), 而  $n$  称为该丛的秩 (rank) 或维数 (dimension). 一个代数向量丛的态射的定义方式, 与拓扑情形相同. 一个较为一般、适用于任何一个概形的定义, 涉及层 (sheaf) 的概念. 令  $\mathcal{E}$  为一个有限 (常) 秩  $\mathcal{O}_X$  模的局部自由层; 设  $\text{Sym}(\mathcal{E})$  为  $\mathcal{E}$  的一个对称代数层, 则仿射态射  $V(\mathcal{E}): \text{Spec}(\text{Sym } \mathcal{E}) \rightarrow X$  称为与  $\mathcal{E}$  相伴的向量丛 (vector bundle associated with  $\mathcal{E}$ ). 有时这一术语也用于  $\mathcal{E}$  是任意一个拟凝聚层的情形. 层  $\mathcal{E}$  可以由代数向量丛  $V(\mathcal{E})$  唯一地复原, 并且  $X$  上的代数向量丛的范畴对偶于  $\mathcal{O}_X$  模的局部自由层的范畴. 此外, 对于一个  $X$  概形  $Y$ ,  $X$  态射  $Y \rightarrow V(\mathcal{E})$  的集合——映射地对应于  $\mathcal{O}_X$  模同态  $\mathcal{E} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_Y)$  的集合, 这里  $f$  是一个  $X$  概形  $Y$  的结构同态. 尤其是, 代数向量丛  $V(\mathcal{E})$  截面的芽层等同于  $\mathcal{E}$  的对偶层  $\mathcal{E}^\vee$ . 代数向量丛  $V(\mathcal{O}_X^n)$  称为秩  $n$  的平凡丛 (trivial vector bundle of rank  $n$ ). 概形  $X$  上的所有秩  $n$  代数向量丛的集合——对应于上同调集  $H^1(X, \text{GL}(n, \mathcal{O}_X))$ , 这里  $\text{GL}(n, \mathcal{O}_X)$  是  $n$  秩平凡向量丛的自同构层. 秩 1 的代数向量丛也称为线丛 (line bundle); 它们对应于  $\mathcal{O}_X$  模的可逆层, 并且和  $X$  上的除子 (divisor) 密切相关; 在张量积的运算下线丛的集合构成一个群  $\text{Pic}(X) \approx H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$  (见 Picard 群 (Picard group)).

和拓扑的情形相同, 对于代数向量丛可以定义直和, 张量积, 对偶丛, 对称与外幂, 诱导代数向量丛等等. 对于一个  $n$  秩的代数向量丛  $E$ , 线丛  $\lambda_n E$  称为行列式丛 (determinant bundle). 正如一个向量空间可以联系到一个射影空间, 一个代数向量丛  $E$  可以联系到一个射影丛 (projective bundle)  $P(E)$  (见射影概形 (projective scheme)).

非平凡代数向量丛的例子包括 Grassmann 流形 (Grassmann manifold) 上的典型代数向量丛; 尤其是, 射影空间  $P^n$  上存在一个与层  $\mathcal{O}(1)$  相对应的典

型线丛. 如果概形  $X$  上的代数向量丛  $E$  是一个平凡代数向量丛的子丛, 则这一嵌入决定  $X$  到相应 Grassmann 流形的一个态射, Grassmann 流形上的典型代数向量丛用于诱导此态射. 决定  $X$  到  $P^n$  中的一个嵌入的线丛, 称为极丰富的 (very ample) (见丰富向量丛 (ample vector bundle)).

代数向量丛的其他例子包括光滑簇  $X$  的切丛  $T(X)$ , 以及由它出发利用不同的运算所构造的丛 (见切丛 (tangent bundle); 法丛 (normal bundle); 典范类 (canonical class)).

定义在复数域  $\mathbb{C}$  上的某个簇上的一个代数向量丛既可认为是一个解析的, 亦可认为是一个拓扑的 (在复合形的拓扑学中) 代数向量丛. 在一个完全代数簇上, 解析向量丛等价于代数向量丛 (见比较定理 (comparison theorem) (代数几何学中的)); 解析向量丛 (vector bundle, analytic). 拓扑向量丛并非总是具有代数结构, 即使有, 这样的结构通常也不唯一. 如果把一个代数向量丛认为是一个拓扑丛, 则可以应用拓扑方法; 特别可以引进代数向量丛的陈 (省身) 类 (Chern class). 陈类也有一个抽象的定义, 需要涉及  $K$  函子 ( $K$ -functor) 或艾达尔上同调 (étale cohomology) 的一个不变量.

代数向量丛的性质取决于它的底是完全的, 还是仿射的概形. 在底是仿射的情形,  $X = \text{Spec } A$ , 代数向量丛对应于环  $A$  上的有限型投射模 (projective module). 如果代数向量丛  $E$  的秩大于底  $X$  的维数, 则  $E$  可以表示为  $E' \oplus 1$ , 此处  $1$  是 1 维平凡丛而  $E'$  在通常情况下不是唯一确定的. 此外当  $E$  的秩数大于底  $X$  的维数且  $E \oplus 1 \simeq F \oplus 1$  时, 则  $E \simeq F$  ([4]). 如果  $X$  是一个非奇异一维概形 (即  $A$  是一个 Dedekind 环 (Dedekind ring)),  $X$  上的任意一个代数向量丛是一个平凡丛与某个线丛的直和. 这一结论也适用于代数闭域上的双有理等价于直纹面的非奇异仿射曲面上的代数向量丛.

射影底的情形. 研究射影簇上线丛是代数几何学的一个经典课题 (见 Picard 群 (Picard group); Picard 概形 (Picard scheme)). 对高秩代数向量丛的研究开始于 1957 年, 当时 A. Grothendieck 证明了射影直线上的代数向量丛是线丛的直和. M. Atiyah 对椭圆曲线  $X$  上的代数向量丛做了分类: 如果用  $\mathcal{E}(r, d)$  表示不可分解 (为直和) 的秩  $r$  度  $d$  的代数向量丛的集合 (“度” 应理解为丛的行列式的度数), 则  $\mathcal{E}(r, d)$  等同于曲线  $X$  自身的点的集合 ([3]).

在曲线上的代数向量丛的研究中, 稳定代数向量丛的概念十分有用. 对于给定代数向量丛  $E$ , 令  $\mu(E)$  等于  $\deg(E)/\text{rank}(E)$ ; 于是丛  $E$  称为稳定的 (stable) (或半稳定的 (semi-stable)), 如果对于任意



子丛  $E' \subset E$ , 都有  $\mu(E') < \mu(E)$  (或  $\mu(E') \leq \mu(E)$ ). 稳定向量丛是单的 (即  $\text{End}(E) \simeq K$ ), 并且是不可分解的. 一条亏格  $\geq 2$  的代数曲线  $X$  上的度 0 代数向量丛是稳定的, 当且仅当它与基本群  $\pi_1(X)$  的某个不可约酉表示相配 ([1]). 令  $U(r, d)$  为所有秩  $r$  度  $d$  且可表为稳定代数向量丛的直和的半稳定代数向量丛的集合, 并设  $US(r, d)$  为稳定代数向量丛构成的子集合. 如果一条光滑曲线  $X$  的亏格  $g$  大于 1, 那么  $U(r, d)$  具有某个  $r^2(g-1)+1$  维正规射影簇的自然结构, 同时  $US(r, d)$  是  $U(r, d)$  的一个光滑开子簇 ([1]). 如果  $r$  与  $d$  互素, 则  $U(r, d) = US(r, d)$ , 从而也是光滑的. 半稳定代数向量丛的模空间已经被广泛地研究过. 事实上, 已知的结论有:  $U(1, d)$  是  $X$  的 Picard 概形的一个分支; 行列式映射  $\det: U(r, d) \rightarrow U(1, d)$  的纤维是单有理簇; 如果  $r$  与  $d$  互素,  $U(r, d)$  唯一决定原来的曲线  $X$ . 由于在  $U(r, d)$  上, 代数向量丛的万有族并非总是存在,  $U(r, d)$  不能做为某个适当函子的表示对象 ([1]). 这些结果中的大多数在域  $C$  上成立, 尽管它们中的许多也适用于任意一个代数闭域. 代数曲面以及射影空间上的代数向量丛的某些特殊性质也被认识到 ([5]).

#### 参考文献

- [1] Narasimhan, M. and Seshadri, C. S., Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, *Ann. of Math.*, **82** (1965), 540 – 567.
- [2] Тюрин, А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», **30** (1966), 6, 1353 – 1356.
- [3] Atiyah, M. F., vector bundles over an elliptic curve, *Proc. London. Math. Soc.* (3), **7** (1957), 414 – 452.
- [4] Bass, H., Algebraic K-theory, Benjamin, 1968.
- [5] Долгачев, И. В., Исковских, В. А. в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, 77 – 170.

В. И. Данилов 撰

【补注】 S. Donaldson 的近期工作 (见 [A2] – [A3]) 表明, 紧复代数曲面上稳定秩 2 向量丛的模空间, 同构于相应的 4 维光滑流形上瞬子酉向量丛的模空间. Riemann 流形上的一个瞬子向量丛 (instanton vector bundle), 是一个配有联络的可微丛, 它的曲率形式满足某个确定的非线性微分方程组. 这些瞬子的模空间与 Riemann 度量的取法无关, 因而是光滑 4 维流形的新的不变量. 代数向量丛的理论使得这些不变量的计算在某些场合成为可能. 这种方法提供了同胚, 但不微分同胚的紧单连通光滑 4 维流形的第一批例子.

代数曲线与射影空间上的代数向量丛理论中的许多新观念, 来源于理论物理学 (挠量理论, Yang-Mills 理论以及弦论).

#### 参考文献

- [A1] Atiyah, M. F. and Bott, R., The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **308** (1982), 523 – 615.
- [A2] Donaldson, S. K., Instantons in Yang-Mills theory, in D. Quillen, G. Segal and S. Tsou (eds.), *The interface of Mathematics and Partical Physics*, Oxford Univ. Press, 1990.
- [A3] Donaldson, S. and Kronheimer, P., *The geometry of four-manifolds*, Oxford Science Publ., 1990.
- [A4] Friedman, R. and Morgan, J., Algebraic surfaces and 4-manifolds: some conjectures and speculations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **18** (1988), 1 – 15.
- [A5] Okonek, C. and Ven, A. van de, Stable bundles, instantons and  $C^*$ -structures on algebraic surfaces, in A. G. Vitushkin, et al. (ed.): *Several Complex Variables VI*, *Encycl. Math. Sci. Vol. 69*, Springer, 1990, 197 – 249.
- [A6] Okonek, C., Schneider, M. and Spindler, H., *Vector bundles on complex projective spaces*, Birkhäuser, 1987.
- [A7] Rudakov, A., et al., *Helices and vector bundles*, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [A8] Seshadri, C., Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques, *Astérisque*, **96** (1982).
- [A9] Tyurin, A., Algebraic geometric aspects of smooth structure 1. The Donaldson polynomial, *Russian Math. Surveys*, **44** (1989), 113 – 178. (*Uspekhi Mat. Nauk*, **44** (1989), 93 – 143).
- [A10] Mumford, D. and Fogarty, J., *Geometric invariant theory*, Springer, 1982.
- [A11] Hartshorne, R., Algebraic vector bundles on projective spaces: a problem list, *Topology*, **18** (1979), 117 – 128.
- [A12] Ven, A. van de, Twenty years of classifying vector bundles, in A. Beauville (ed.), *Algebraic Geometry (Angers, 1979)*, Sythoff & Noordhoff, 1980, 3 – 20.
- [A13] Harshorne, R., Four years of algebraic vector bundles, in A. Beauville (ed.): *Algebraic Geometry (Angers, 1979)*, Sythoff & Noordhoff, 1980, 21 – 28.

段海豹 译 沈信耀 校

#### 解析向量丛 [vector bundle, analytic; векторное аналитическое расслоение]

某个解析空间上的一个局部平凡的解析丛, 它的纤维具有某个基域  $k$  上的  $n$  维向量空间结构 (当  $k = \text{复数域 } C$  时, 解析丛也称为全纯的 (holomorphic)). 数  $n$  称为该丛的维数 (dimension) 或秩 (rank). 类似于拓扑丛 (见向量丛 (vector bundle)) 的情形, 解析丛的范畴, 以及子丛、商丛、直积、张量积、外积等等概念, 都可以定义.



以  $X$  为底空间的解析向量丛  $E$  的解析截面, 构成底空间上解析函数代数  $A(X)$  上的一个模  $\Gamma(E)$ . 如果  $k = \mathbb{C}$  并且  $X$  是紧的, 则  $\Gamma(E)$  是  $\mathbb{C}$  上的有限维向量空间 (见有限性定理 (finiteness theorems)). 另一方面, 如果  $X$  是有限维复 Stein 空间 (Stein space), 则  $\Gamma(E)$  是  $A(X)$  上的有限型投射模 (projective module), 并且对应  $E \rightarrow \Gamma(E)$  规定了  $X$  上解析向量丛范畴与有限型射影  $A(X)$  模的范畴之间的一个等价 ([4]).

解析向量丛的例子包括解析流形  $X$  上的切丛 (它的解析截面是  $X$  上的解析向量场) 以及子流形  $Y \subset X$  的法丛.

解析空间  $X$  上全体  $n$  秩解析丛的分类问题、等价于  $X$  上以  $GL(n, k)$  为结构群的主解析纤维化 (principal analytic fibration) 的分类问题, 并且当  $n > 1$  时, 只有若干个特殊情形得到完全解答. 对于复射影代数簇  $X$  而言, 分类问题等价于代数向量丛的分类 (见比较定理 (代数几何学中的)) (comparison theorem (algebraic geometry)).

复空间  $X$  上的秩 1 解析向量丛 (也称复线丛, 或线丛 (line bundles)) 在复解析几何学中起着重要作用. 空间  $X$  上的每个除子 (divisor) 必定规定一个秩 1 解析丛, 两个除子决定同构的丛的充分必要条件是它们线性等价. 一个射影代数簇上的所有解析线丛都由某个除子决定. 一个复空间  $X$  到一个射影空间中的可嵌入性与  $X$  上的丰富线丛 (见丰富向量丛 (ample vector bundle)) 的存在性密切相关. 设  $\Gamma$  是复空间  $X$  的自同构群的一个离散子群, 则  $\Gamma$  的每个商群决定  $X/\Gamma$  上一个线丛, 以各自的自同构形式为它们的解析截面. 秩 1 的解析向量丛构成群  $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ , 此处  $\mathcal{O}_X^*$  是由结构层的可逆元构成的层. 每个丛到自己的第一陈 (省身) 类的对应产生同态

$$\gamma: H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}),$$

它的核是拓扑平凡的线丛的集合. 如果  $X$  是一个复流形, 则  $\text{Im } \gamma$  能够描述为可用  $(1, 1)$  型闭微分形式表示的上同调类的集合. 此外如果  $X$  是紧 Kähler 流形, 则  $\text{Ker } \gamma$  同构于流形  $X$  的 Picard 簇 (Picard variety), 因此是一个复环面 ([2]).

解析空间  $X$  上的每个秩  $n$  的解析向量丛, 对应  $V$  的解析截面的一个芽层, 它是  $X$  上一个秩  $n$ 、局部自由的解析层. 这个对应决定了  $X$  上解析向量丛的范畴与  $X$  上局部自由解析层的范畴之间一个等价关系. 将这一结构推广到任意凝聚解析层的企图, 导致解析向量丛概念的如下推广 ([3]): 一个满态射  $\pi: V \rightarrow X$  称为  $X$  上向量空间的解析族 (analytic family of vector spaces) (或  $X$  上的一个线性空间 (linear

space)), 如果它的纤维具有  $k$  上有限维向量空间的结构, 并且加法、乘以标量的乘法, 以及零截面的运算满足解析性的自然条件. 当  $k = \mathbb{C}$  时 (或  $k = \mathbb{R}$  并且  $X$  是凝聚的), 向量空间的解析族  $\pi: V \rightarrow X$  定义了  $X$  上的一个凝聚解析层 (coherent analytic sheaf)  $F$ : 对于  $U \subset X$ , 群  $F(U)$  是  $\pi^{-1}(U)$  上在每个纤维上线性的解析函数的空间. 用同样的方式, 可以定义向量空间解析族范畴与  $X$  上凝聚解析层范畴的对偶性.

#### 参考文献

- [1] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.
- [2] Chern, S. S., Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979.
- [3] Fischer, G., Linear Faserräume und kohärente Modulgarben über komplexen Räumen, Arch. Math. (Basel), 18 (1967), 609 – 617.
- [4] Forster, O. and Ramspott, K. J., Über die Anzahl der Erzeugenden von projektiven Steinschen Moduln, Arch. Math. (Basel), 19 (1968), 417 – 422.

A. Л. ОНИШИК 撰 段海豹 译 沈信耀 校

#### 向量演算 [vector calculus; векторное исчисление]

讨论向量运算性质这个数学分支的一个老式的名称 (见向量 (vector)). 向量演算包括向量代数和向量分析. 向量代数 (vector algebra) 是研究线性运算 (向量的加法及向量乘以数的乘法) 以及各种向量积 (标量积、伪标量积、向量积、混合积、二重与三重向量积). 向量分析 (vector analysis) 的主题是这样的向量, 它们是一个或多个标量自变量的函数.

在 19 世纪, 由于力学和物理学的需要产生了向量演算, 当时向量运算开始直接地进行, 无需预先变换为它们的坐标形式 ([1])、([2])、([3]). 数学和物理对象的关于坐标系的选择不变的性质的进一步研究, 导致了向量演算的推广——张量演算 (tensor calculus).

#### 参考文献

- [1] Wessel, C., Arch. for Math. og Naturvid, 18 (1896).
- [2] Hamilton, W. R., Elements of quaternions, Chelsea, reprint, 1969.
- [3] Gibbs, J. W. and Wilson, E. B., Vector analysis, Yale Univ. Press, 1913.
- [4] Кочин, Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965.
- [5] Дубнов, Я. С., Основы векторного исчисления, 4 изд., ч. 1 – 2, М.-Л., 1950 – 1952.

A. Б. ИВАНОВ 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Wills, A. P., Vector analysis with an introduction

to tensor analysis, Dover, reprint, 1958.

[A2] Spain, B., Tensor calculus, Oliver & Boyd, 1960.

蒋滋梅 译

### 向量场 [vector field; векторное поле]

此词通常理解为某空间  $X$  之点的函数, 其值为以某种方式定义在此空间中的向量 (vector).

在经典的向量演算 (vector calculus) 中, 以 Euclid 空间的一个子集为  $X$ , 而向量场则表示以此子集各点为起点的有向线段. 例如, 切于某一光滑曲线 (曲面) 或其法向的单位长向量之集合, 即为其上的向量场.

若  $X$  是一抽象地确定的微分流形, 向量场就理解为一个切向量场, 即一个函数, 它对  $X$  的每一点, 指定一个 (不变地构造的) 切于  $X$  的向量. 若  $X$  是有限维的, 向量场可以等价地定义为依赖于  $X$  之点的一族单价的反变张量.

在一般情况下, 向量场可解释为定义在  $X$  上的一函数, 它取值于一个以某种方式连结于  $X$  的向量空间 (vector space)  $P$ ; 它与任意向量函数的区别即在于  $P$  是对于  $X$  “内在地” 定义的, 而不是  $X$  的 “外加的构造”. 以  $X$  为基的向量丛 (vector bundle) 的截面也可看作是一个向量场. М. И. Войцеховский 撰

【补注】亦见流形上的向量场 (vector field on a manifold). 齐民友 译

### 流形 $M$ 上的向量场 [vector field on a manifold; векторное поле на многообразии]

切丛 (tangent bundle)  $\tau(M)$  的截面. 可微向量场的集合构成  $M$  上可微函数环  $F$  上的模.

例 1 对于流形  $M$  上的坐标卡  $U$  可以定义第  $i$  个基本向量场  $\partial/\partial x^i$  如下:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, p \in U,$$

$\partial/\partial x^i|_p$  是  $p$  点处  $M$  的第  $i$  个基本切向量. 任意向量场  $X$  可以唯一地表示为

$$X = \sum_i \xi^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p),$$

其中  $\xi^i(p)$  是  $X$  在  $U$  中的分量. 因为向量场可以看作环  $F$  的导子 (见例 2), 向量场的集合对于交换运算 (Lie 括弧) 成一 Lie 代数.

例 2 对于坐标卡  $U$  和  $f \in F$ , 函数  $Xf$  由下式定义

$$\begin{aligned} (Xf)(p) &= \sum_i \xi^i(p) D_i f((x^{-1}_U)) \Big|_{x_U(p)} \\ &= \sum_i \xi^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f), \end{aligned}$$

其中  $D_i$  是对于  $x^i$  的偏导数. 注意  $\xi^i(p) = (Xx^i)(p)$ ;  $Xf$  称为  $f$  在方向  $X$  上的导数.

例 3 对于坐标卡  $U$  和  $f \in F$ , 向量场

$$X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{和} \quad Y = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

的交换子 (Lie 括弧)  $[X, Y]$  定义为

$$([X, Y]f)(p) = (X(Yf))(p) - (Y(Xf))(p)$$

$$= \sum_{i,k} \left[ \xi^k \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k} - \eta^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \right] \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p.$$

它适合以下的关系式

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0;$$

特别是

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

每一个向量场  $X$  都在  $M$  上诱导出一个局部流——即在邻域  $U$  中的一族微分同胚

$$\Phi: (-\varepsilon, +\varepsilon) \times U \rightarrow M,$$

使得对于  $p \in U$  有  $\Phi(0, p) = p$  以及

$$\Phi(t, p) = \Phi_p(t): (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

是向量场  $X$  的过  $p$  的积分曲线, 即

$$\Phi^* \left[ \frac{\partial}{\partial t} \right] (t) = X(\Phi(t, p)),$$

其中  $\Phi^*(\partial/\partial t)(t)$  是  $M$  在  $\Phi_p(t)$  处的切向量  $d\Phi_p(t)$ . 反之, 对任意局部流  $\Phi(t, p) = \Phi_t(p)$  都相应有一向量场  $X$ , 而为映射  $\Phi_0(p)$  的变分; 这里

$$(Xf)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\Phi_t(p)) - f(p)}{t}.$$

每个向量场都定义了  $\lambda$  型张量场的 Lie 导子  $L_X$  ( $\lambda$  的无穷小变换), 其值在一向量空间中, 而相应于局部流  $\Phi(t, p)$ ; 其特例包括向量场在  $f \in F$  上的作用:

$$L_X f = Xf,$$

以及 Lie 括弧

$$L_X Y = [X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y - \Phi_t^* Y \Phi_{-t}}{t}.$$

一个无奇点的向量场在  $M$  上生成一个可积的一维微分方程组以及与之相联系的 Pfaff 方程组 (Pfaffian system).

流形上的向量场概念的推广有沿映射  $\varphi: N \rightarrow M$  的向量场 (vector field along a mapping), 即丛由  $\varphi$  诱



导的  $\tau_\varphi(N)$  的截面, 还有  $\lambda$  型的张量场, 即用函子  $\lambda$  作出的与  $\tau(M)$  相关的丛  $\lambda[\tau]$  之截面.

#### 参考文献

- [1] Godbillon, C., Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969.
- [2] Gromoll, D., Klingenberg, W. und Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.
- [3] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967.
- [4] Nomizu, K., Lie groups and differential geometry, Math. Soc. Japan, 1956.
- [5] Постников, М. М., Введение в теорию Морса, М., 1971.
- [6] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces, Acad. Press, 1962.

А. Ф. Щекутьев 撰

#### 【补注】

- [A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982 (译自德文). 齐民友 译

**向量场  $\mathbf{a}$  的源** [vector field, source of  $\mathbf{a}$ ; источник векторного поля]

向量场 (vector field)  $\mathbf{a}$  的具有下述性质的点: 通过任何包含该点的充分小的闭曲面  $\partial V$  的场的流是与该曲面无关, 而且是正的. 称流

$$Q = \iint_{\partial V} (\mathbf{n}, \mathbf{a}) ds$$

为源的势 (power of source), 其中  $\mathbf{n}$  是  $\partial V$  的单位外法线,  $s$  是  $\partial V$  的面积元. 如果  $Q$  是负的, 则称这点是一个汇 (sink). 如果源在所考虑的区域  $V$  上是连续地分布的, 则称极限

$$\lim_{\partial V \rightarrow M} \frac{\iint_{\partial V} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) ds}{V}$$

为源在点  $M$  处的密度 (density) (强度 (intensity)), 它等于  $\mathbf{a}$  在点  $M$  处的散度 (divergence).

А. Б. Иванов 撰

**【补注】** 流体动力流中的一个源和一个涡旋的组合产生了一个涡旋流 (swirl flow).

#### 参考文献

- [A1] Marsden, J. and Weinstein, A., Calculus, 3, Springer, 1988.
- [A2] Triebel, H., Analysis and mathematical physics, Reidel, 1986, Sect. 16. 沈纯理 译

**向量函数** [vector function; вектор-функция, векторная функция]

取值于某向量空间 (vector space)  $V$  的自变量  $t$

的函数  $\mathbf{r}(t)$ .

取值于某有限维 ( $m$  维) 向量空间  $V$  的向量函数, 完全决定于它关于  $V$  的某个基  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  的分量  $r_j(t)$ ,  $1 \leq j \leq m$ :

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{j=1}^m r_j(t) \mathbf{e}_j. \quad (1)$$

向量函数称为连续, 可微, 等等 (在一点或在一区域上), 如果所有的函数  $r_j(t)$  分别连续, 可微, 等等. 下面的公式对于一元向量函数都是成立的:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \\ &= \sum_{j=1}^m r'_j(t) \mathbf{e}_j, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{r}(t) dt = \sum_{j=1}^m \left( \int_{t_0}^{t_1} r_j(t) dt \right) \mathbf{e}_j, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(t_0) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \mathbf{r}^{(k)}(t_0) (t - t_0)^k + \\ &+ \frac{1}{N!} \int_{t_0}^t (t - \tau)^N \mathbf{r}^{(N+1)}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

(Taylor 公式).

向量  $\mathbf{r}(t)$  (从  $V$  中的零出发) 的集合称为向量函数的速端曲线 (hodograph). 一元向量函数的一阶导数  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  是  $V$  中的一个向量, 它在点  $\mathbf{r}(t)$  处与速端曲线相切. 如果  $t$  为时间,  $\mathbf{r}(t)$  表示某质点的运动, 那么  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  是质点在时间  $t$  的瞬时速度向量. 二阶导数  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$  是质点的加速度向量.

多元向量函数的偏导数和重积分由 (2) 与 (3) 的类似公式定义. 关于向量函数的向量分析概念见向量分析 (vector analysis), 梯度 (gradient), 散度 (divergence), 旋度 (curl).

在具有基的无限维赋范向量空间中, 向量函数的表达式 (1) 是无穷级数, 此时用坐标方式定义的数学分析运算, 会遇到级数是否收敛, 逐项求导与逐项积分的可能性等困难.

#### 参考文献

- [1] Кочин, Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965 (中译本: Н. Е. 柯钦, 向量计算与张量计算初步, 高等教育出版社, 1956).
- [2] Рашевский, П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956 (中译本: П. К. 拉舍夫斯基, 微分几何教程, 高等教育出版社, 1956).

Л. П. Кушцов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Courant, R. and John, F., Introduction to calculus

and analysis, 1, Wiley-Interscience, 1965 (中译本: R. 柯朗, F. 约翰, 微分方程和数学分析引论, 第一卷, 第一、二分册, 科学出版社, 1979-1982).

[A2] Marsden, J. E., and Tromba, A. J., Vector calculus, Freeman, 1981.

[A3] Dieudonné, J., Foundations of modern analysis, Acad. Press, 1960 (中译本: J. 迪厄多内, 现代分析基础, 第一、二卷, 科学出版社, 1982-1986).

[A4] Jeffrey, A., Mathematics for scientists and engineers, v. Nostrand Reinhold, 1989, p. 493 ff.

王斯雷 译

### 向量函数代数 [vector functions, algebra of; вектор-функций алгебра]

定义在拓扑空间  $T$  上, 在每点  $t \in T$  处取值于某代数  $A(t)$  (通常依赖于  $t$ ) 中的函数  $x = \{x(t)\}$  的一个任意集合  $A$ , 且对通常的运算构成一个代数. 设所有的代数  $A(t)$  是 Banach 代数, 则  $A$  称为向量函数的 Banach 代数, 如果对任一  $x = \{x(t)\} \in A$ , 函数  $t \rightarrow \|x(t)\|$  在  $T$  上连续. 向量函数代数中最重要的一般问题包括用代数  $A(t)$  中理想来描述  $A$  中理想和为函数  $x = \{x(t)\}$  属于代数  $A$  建立一个准则. 更经常考虑的情形是当  $A$  是对范数

$$\|x\| = \sup_{t \in T} \|x(t)\|_{A(t)}$$

的一个 Banach 代数 (Banach algebra), 而  $T$  是一个局部紧或仿紧空间. 特别有兴趣的是与一个  $C^*$  代数 ( $C^*$ -algebra) 的集合  $A(t)$  联系的向量函数代数; 在这特别情形, Stone-Weierstrass 定理 (Stone-Weierstrass theorem) 的非交换类似与关于  $C^*$  代数 (特别是具有连续迹的  $C^*$  代数) 以向量函数代数形式实现的某些定理已经知道. 同样地, 这些定理使得能够在某些情形下证明与对合代数的对称表示的算子交换的所有算子的交换性 (Schur 引理 (Schur lemma) 的连续类似).

А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Naimark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984 (译自俄文). 葛显良 译 吴绍平 校

### 向量群 [vector group; векторная группа]

可嵌入到全序群 (totally ordered group) 的完全直积中的偏序群 (partially ordered group). 群  $G$  是向量群, 当且仅当它的偏序是  $G$  上的一些全序的交. 偏序群是向量群, 当且仅当它的正元素的半群  $P$  满足以下条件: 对  $G$  的任意元素  $a_1, \dots, a_n$  的有限集,

$$\bigcap PS(a_1^{e_1} \cdots a_n^{e_n}, e) = P,$$

其中交集是取在符号  $\varepsilon_i = \pm 1$  的所有组合上,  $S(x, \dots, z)$  表示  $G$  的包含  $x, \dots, z$  的最小的不变子半群. 序群 (ordered group)  $G$  是向量群, 当且仅当对任意  $g, g_1, \dots, g_n \in G$ , 从  $gg_1^{-1}gg_1 \cdots g_n^{-1}gg_n \in P$  推出  $g \in P$ .

参考文献

[1] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов 撰  
石生明 译 王杰 校

### 向量格 [vector lattice; векторная решетка], $K$ 线性系 ( $K$ -lineal)

具有定义格 (lattice) 的序关系的偏序实向量空间 (vector space) (见半序空间 (semi-ordered space)).

卢景波 译

### 向量测度 [vector measure; векторная мера]

【补注】 一个有限加性集函数 (set function)  $F$ , 定义在集合  $\Omega$  的子集族形成的一个域  $\mathcal{S}$  上, 取值于一个 Banach 空间 (Banach space)  $X$  (或更一般地说, 取值于一个拓扑向量空间). 一个向量测度称为强加性的 (strongly additive), 如果对任一互不相交集列  $E_n \in \mathcal{S}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)$  在  $X$  中收敛; 而称为可数加性的 (countably additive), 如果当  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  属于  $\mathcal{S}$  时有  $\sum_{n=1}^{\infty} F(E_n) = F(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ . 若对任一  $x^* \in X^*$ ,  $x^*F$  是可数加性的, 则称  $F$  是弱可数加性的 (weakly countable additive). 定义在  $\sigma$  域上的一个弱可数加性向量测度是可数加性的 (Orlicz-Pettis 定理 (Orlicz-Pettis theorem)):  $F$  的变差 (variation)  $|F|$  是非负有限加性的广义实值集函数, 定义为

$$|F|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|F(A)\|, E \in \mathcal{S},$$

这里的上确界是对把  $E$  分解为  $\mathcal{S}$  的不相交元的一切有限划分而取的. 如果  $|F|(\Omega) < \infty$ , 那么称  $F$  具有有界变差 (bounded variation).  $|F|$  是可数加性的, 当且仅当  $F$  是可数加性的.  $F$  的半变差 (semi-variation)  $\|F\|$  定义为

$$\|F\|(E) = \sup \{ |x^*F|(E) : \|x^*\| \leq 1 \}, E \in \mathcal{S}.$$

$\|F\|$  是一个单调有限次加性集函数, 且若  $\|F\|(\Omega) < \infty$ , 则称  $F$  具有有界半变差 (bounded semi-variation). 因为等价地说, 这就意味着  $F$  的值域是模有界的. 这样的测度也称为有界的 (bounded). 有界变差的向量测度是强加性的, 而强加性的向量测度是有界的. 一个有界向量测度是强加性的, 当且仅当其值域是相对弱紧的. 特别是, 一个可数加性向量测度具有相对弱紧的值域.



设  $(F_n)$  是定义在  $\sigma$  域  $\Sigma$  上和  $X$  值的可数加性向量测度列, 且每个  $F_n$  是  $\mu$  连续的, 即  $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} F_n(E) = 0$ , 其中  $\mu$  是一个非负广义实值测度. 现在, 如果对每一个  $E \in \Sigma$ , 存在  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(E) = F(E)$ , 那么该  $\mu$  连续对  $n \in N$  是一致的, 即  $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} F_n(E) = 0$  对  $n$  一致. 因此  $F$  是  $\mu$  连续的. 特别是, 在  $\mu$  是有限时就导致  $F$  是可数加性的. 这就是 Vitali-Hahn-Saks 定理 (Vitali-Hahn-Saks theorem). 有关向量测度的另一个惊人的结果称为 Nikodym 有界性定理 (Nikodym boundedness theorem): 设有定义在  $\sigma$  域  $\Sigma$  上的有界向量测度族  $M$ , 如果对任一  $E \in \Sigma$ , 有  $\sup_{F \in M} \|F(E)\| < \infty$ , 那么  $M$  是一致有界的, 即  $\sup_{F \in M, E \in \Sigma} \|F(E)\| < \infty$ . 此外, 对著名的吉田-Hewitt 以及 Lebesgue 的分解定理 (decomposition theorems of Yosida-Hewitt and of Lebesgue) 的强加性向量测度, 也还有一些界说 (见 [A3]). 最后, 如果  $\dim X < \infty$ , 那么  $\sigma$  域上的非原子  $X$  值测度有紧凸域. 这就是 Ляпунов 定理 (Lyapunov theorem), 这在  $X$  是无穷维时结论不真.

向量测度的理论在其他泛函分析的领域有着重要的应用. 首先在算子理论里, 其中关于算子在某个函数空间上的表示问题, 可以说是研究向量测度最初的动力. 此后很久, 在 19 世纪 70 年代, 研究向量测度的微分问题, 使在 Banach 空间的几何里围绕所谓 Radon-Nikodym 性质 (Radon-Nikodym property) 获得一大批结果. 下面, 将对此后的发展, 简要地介绍向量测度在控制论中所起的作用.

设  $\Omega$  是一个紧 Hausdorff 空间,  $C(\Omega)$  表示  $\Omega$  上以上确界为其范数的连续函数空间,  $X$  是任一 Banach 空间. 若  $T: C(\Omega) \rightarrow X$  是一个有界线性算子, 则  $T$  可表示为定义在  $\Omega$  的 Borel 集族的  $\sigma$  域上, 取值于  $X^{**}$  的一个弱\*可数加性向量测度  $F$ , 这里  $X^{**}$  是  $X$  的重对偶 (见伴随空间 (adjoint space)). 当  $T$  是弱紧时, 这一表示是特别符合条件的, 因为此时  $F$  的值在  $X$  中, 且是可数加性的 (事实上, 这些性质中任一个均等价于  $T$  是弱紧的). 从而, 有  $Tf = \int_{\Omega} f dF (f \in C(\Omega))$ , 这里的积分多少有着明显的意义. 此表示公式的一个直接推论是,  $T$  把弱紧集变为模紧集 ( $C(\Omega)$  具有 Dunford-Pettis 性质 (Dunford-Pettis property)). 其他的算子类  $T: C(\Omega) \rightarrow X$ , 如核算子, 紧以及绝对求和算子, 借助于它们的表示测度 (见 [A3]), 容许有相同的良好特征.

现在, 设  $T$  是一个从  $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$  到 Banach 空间  $X$  的有界线性算子 ( $(\Omega, \Sigma, \mu)$  是有限测度空间 (measure space)), 就存在一个明显的伴随于  $T$  的向量测度  $F: F(E) = T(\chi_E), E \in \Sigma$ , 而且  $F$  是  $\mu$  连续的和有界变差的. 如果  $F$  有一个 Radon-Nikodym

导数 (Radon-Nikodym derivative), 即如果存在  $\Omega$  上的  $X$  值 Bochner 可积函数  $f$ , 使得  $F(E) = \int_E f d\mu$ , 那么  $T$  可表示为一个 Bochner 积分 (Bochner integral):  $Tg = \int_{\Omega} gf d\mu (g \in L_1(\mu))$ . 然而众所周知, 一般来说, 这样一个导数  $f$  是不存在的. 如果对一个特殊的  $X$  以及任意的测度空间  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ , 每一个  $\mu$  连续  $X$  值的有界变差测度有 Radon-Nikodym 导数, 那么  $X$  称为具有 Radon-Nikodym 性质 (Radon-Nikodym property) (RNP). 具有 RNP 的空间的例有: 可分对偶空间 (Dunford-Pettis 定理 (Dunford-Pettis theorem)) 和自反空间, 因此特别是 Hilbert 空间. 空间  $C_0$  (即零序列空间) 以及  $L_1[0, 1]$  没有 RNP. 对  $X$  来说, 已经证明 RNP 等价于  $X$  值鞅 ( $X$ -valued martingales) 的各种收敛性. 实际上, 这种鞅方法已导致具有 RNP 的空间各种纯几何特征 (详见 [A1]). 如下例:  $X$  具有 RNP, 当且仅当对任一有界闭凸子集  $B \subset X$  以及任一  $\varepsilon > 0$ , 存在  $X$  中的一个闭超平面  $H$ , 使得由  $H$  截  $B$  确定的半空间以及这些截面之一其直径  $< \varepsilon$  ( $X$  是可凹的 (dentable)). Krein-Milman 性质 (Krein-Milman property) 指出,  $X$  的任一有界闭凸集是其诸端点的模闭包. 如果一个 Banach 空间具备 RNP, 那么它就具有 Krein-Milman 性质 (J. Lindenstrauss). 关于对偶空间  $X^*$ , 这两种性质是等价的.

还可以提出问题: 哪一些  $\mu$  连续  $X$  值测度是 Pettis 积分 (Pettis integral) 而非 Bochner 积分, 这就导致所谓弱 Radon-Nikodym 性质 (weak Radon-Nikodym property) (WRNP) (见 [A6]).

#### 参考文献

- [A1] Bourgin, R. D., Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodym property, Lecture notes in math., 993, Springer, 1983.
- [A2] Dinculeanu, N., Vector measures, Pergamon, 1967.
- [A3] Diestel, J. and Uhl, J. J., Jr., Vector measures, Amer. Math. Soc., 1977.
- [A4] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, General theory, 1, Interscience, 1958.
- [A5] Kluvanek, I. and Knowles, G., Vector measures and control systems, North-Holland, 1975.
- [A6] Talagrand, M., Pettis integral and measure theory, Mem. Amer. Math. Soc., 307 (1984).
- [A7] Thomas, G. E. F., The Lebesgue-Nikodym theorem for vector valued Radon measures, Mem. Amer. Math. Soc., 139 (1974).

D. van Dulst 撰 周民强 译

**向量积** [vector product; векторное произведение],  $R^3$  中向量  $a$  乘以向量  $b$  的

向量  $c$ , 记为  $[a, b]$  或  $a \times b$ , 满足下列条件:

(1) 向量  $c$  的长度等于向量  $a$  与  $b$  的长度之积乘以二者夹角  $\varphi$  的正弦, 即

$$|c| = |[a, b]| = |a| \cdot |b| \sin \varphi;$$

(2) 向量  $c$  与向量  $a$  和  $b$  正交;

(3) 向量三元组  $a, b, c$  的定向, 与基向量 (标准) 三元组的定向相同. 见向量代数 (vector algebra).

A. Б. Иванов 撰

【补注】如果相对  $R^3$  中的规范正交基而言, 向量  $a, b$  具有坐标  $(a_1, a_2, a_3)$  和  $(b_1, b_2, b_3)$ , 则向量  $c = a \times b$  的坐标是  $(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ .

杜小杨 译

向量环 [vector ring; векторное кольцо]

一个偏序环  $R$  (见偏序集 (partially ordered set)), 它是若干个全序环  $R_\lambda$  (见全序集 (totally ordered set)) 的次直和. 向量环的每一个元素是其坐标在诸  $R_\lambda$  中的向量

$$a = \{\dots, a_\lambda, \dots\},$$

并且  $a \geq 0$ , 当且仅当每一个  $a_\lambda \geq 0$ . 如果偏序环  $R$  的偏序是若干个全序的交, 那么  $R$  是一个向量环, 并且若对  $R$  的偏序作各种各样的线性序扩张, 它们就可取作诸  $R_\lambda$ .

参考文献

[1] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

O. A. Иванова 撰 卢景波 译

向量空间 [vector space; векторное пространство], 线性空间 (linear space), 域  $K$  上的

一个 Abel 群 (Abelian group)  $E$ , 运算记作加法, 其中定义了元素与标量的乘法运算, 即映射

$$K \times E \rightarrow E: (\lambda, x) \rightarrow \lambda x,$$

它满足下列公理 ( $x, y \in E; \lambda, \mu, 1 \in K$ ):

- 1)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ;
- 2)  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ;
- 3)  $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ ;
- 4)  $1 \cdot x = x$ .

公理 1) - 4) 蕴涵下列重要的向量空间的性质 (properties of a vector space) ( $0 \in E$ ):

- 5)  $\lambda \cdot 0 = 0$ ;
- 6)  $0 \cdot x = 0$ ;
- 7)  $(-1)x = -x$ .

向量空间的元素称为它的点 (points) 或向量 (vectors);  $K$  的元素称为标量 (scalars).

在数学及其应用中最常用到的向量空间是复数域  $C$  上的向量空间和实数域  $R$  上的向量空间; 它们分别称为复向量空间 (complex vector space) 和实向量空间 (real vector space).

向量空间的公理表示了在分析学中经常遇到的多种对象的代数性质. 最基本的和最早的向量空间的例子是  $n$  维 Euclid 空间. 几乎同等重要的是许多函数空间: 连续函数空间, 可测函数空间, 可和函数空间, 解析函数空间和有界变差函数空间.

向量空间的概念是环上的模概念的一个特殊情形——向量空间是域上的一个幺模 (unitary module). 一个非交换除环上的幺模亦称为除环上的向量空间 (vector space over a skew field); 此类向量空间的理论要比域上向量空间的理论难得多.

与向量空间有关的一个重要的工作是向量空间的几何结构的研究, 即向量空间中的线、平坦集和凸集、向量子空间和基的研究.

向量空间  $E$  的一个向量子空间 (vector subspace), 或简称子空间 (subspace), 是一个子集  $F \subset E$ , 它关于加法运算及与标量的乘法运算是封闭的. 一个子空间, 在不考虑包容它的空间的情况下, 是基础域上的一个向量空间.

经过向量空间  $E$  的两个点  $x$  和  $y$  的直线 (straight line) 是  $E$  中形如  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$  的点  $z$  的集合,  $\lambda \in K$ . 一个集合  $G \subset E$  称为平坦集 (flat set), 如果对于  $G$  中任意两个点来说, 除这两点外,  $G$  还包含了经过这两个点的直线. 任何一个平坦集是由某一子空间经平行位移:  $G = x + F$  而得到的; 意指每一个点  $z \in G$  可以唯一表为  $z = x + y, y \in F$ , 该等式确定了  $F$  与  $G$  间的一一对应.

一个给定子空间  $F$  的所有位移  $F_x = x + F$  的总体构成  $K$  上的向量空间, 称为商空间 (quotient space)  $E/F$ , 其运算定义如下:

$$F_x + F_y = F_{x+y}; \lambda F_x = F_{\lambda x}, \lambda \in K.$$

令  $M = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  是  $E$  的向量的任意集合. 向量  $x_\alpha \in E$  的线性组合 (linear combination) 是一个向量  $x$ , 由表示式

$$x = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} x_{\alpha}, \lambda_{\alpha} \in K$$

来确定, 其中只有有限个系数不为零. 集合  $M$  的向量的所有线性组合的集合是包含  $M$  的最小子空间, 称为集合  $M$  的线性包络 (linear envelope of the set). 一个线性组合称为平凡的 (trivial), 如果所有系数  $\lambda_{\alpha}$  都是零. 集合  $M$  称为一个线性无关集 (linearly independent set), 如果  $M$  中向量的所有非平凡线性组合都是非零的.



任何一个线性无关集包含于某个极大线性无关集  $M_0$  中, 即包含于这样一个集合, 再添加  $E$  的任何一个向量到它里面后, 它就不再是一个线性无关集.

每一个向量  $x \in E$  可以唯一地表示为一个极大线性无关集的元素线性组合:

$$x = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} x_{\alpha}, x_{\alpha} \in M_0.$$

据此理由, 一个极大线性无关集称为向量空间的一个基 (basis) (代数基 (algebraic basis)). 一个给定的向量空间的所有基具有相同的基数, 它称为这个向量空间的维数 (dimension of the vector space). 如果这个基数是有限的, 则该向量空间称为有限维的 (finite-dimensional); 否则称为无限维向量空间 (infinite-dimensional vector space).

域  $K$  可以看作它自身的一维向量空间; 这个空间的基是单个元素, 它可以是任意一个非零元. 具有含  $n$  个元素的基的有限维向量空间称为  $n$  维空间 ( $n$ -dimensional space).

凸集理论在实的和复的向量空间理论中起着重要的作用 (亦见凸集 (convex set)). 实向量空间中的一个集合  $M$  称为一个凸集 (convex set), 如果对此集合中任意两个点  $x, y$  来说, 线段  $t(x) + (1-t)y$  ( $t \in [0, 1]$ ) 也属于  $M$ .

向量空间上线性泛函的理论及其相关的对偶理论是向量空间理论的重要部分. 令  $E$  是域  $K$  上的向量空间. 一个加性齐次映射  $f: E \rightarrow K$ , 即

$$f(x+y) = f(x) + f(y), f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

称为  $E$  上的一个线性泛函 (linear functional).  $E$  上所有线性泛函的集合  $E^*$  关于下列运算构成  $K$  上的一个向量空间:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$$x \in E, \lambda \in K, f_1, f_2, f \in E^*.$$

这个向量空间称为  $E$  的共轭空间 (conjugate space) 或对偶空间 (dual space). 一些几何学的概念与共轭空间概念有关. 令  $D \subset E$  (相应地,  $\Gamma \subset E^*$ ); 集合

$$D^{\perp} = \{f \in E^*: f(x) = 0, \text{ 对所有 } x \in D\},$$

或  $\Gamma_{\perp} = \{x \in E: f(x) = 0, \text{ 对所有 } f \in \Gamma\}$ , 称为  $D$  的 (相应地,  $\Gamma$  的) 零化子 (annihilator) 或正交补 (orthogonal complement); 这里  $D^{\perp}$  和  $\Gamma_{\perp}$  分别是  $E^*$  和  $E$  的子空间. 如果  $f$  是  $E^*$  的一个非零元, 则  $\{f\}_{\perp}$  是  $E$  的一个极大的真线性子空间, 有时称为超子空间 (hypersubspace); 该子空间的一个位移称为  $E$

的一个超平面 (hyperplane); 由此, 任何超平面都具有形式

$$\{x: f(x) = \lambda\}, f \neq 0, f \in E^*, \lambda \in K.$$

如果  $F$  是向量空间  $E$  的一个子空间, 则存在  $F^*$  与  $E^*/F^{\perp}$  之间的自然同构和  $(E/F)^*$  与  $F^{\perp}$  之间的自然同构.

一个子集  $\Gamma \subset E^*$  称为  $E$  上的一个全子集 (total subset), 如果它的零化子只含有零元素,  $\Gamma_{\perp} = \{0\}$ .

每一个线性无关集  $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in A} \subset E$  可以对应于一个共轭集 (conjugate set)  $\{f_{\alpha}\}_{\alpha \in A} \subset E^*$ , 即对应于一个集合, 使得对所有的  $\alpha, \beta \in A$ , 有  $f_{\alpha}(x_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta}$  (Kronecker 符号 (Kronecker symbol)). 偶  $\{x_{\alpha}, f_{\alpha}\}$  的集合称为一个双正交系 (biorthogonal system). 若集合  $\{x_{\alpha}\}$  是  $E$  的一个基, 则  $\{f_{\alpha}\}$  是  $E$  上的全子集.

向量空间理论中重要的一章是这些空间的线性变换 (linear transformations) 的理论. 令  $E_1, E_2$  是同一个域  $K$  上的两个向量空间, 那么  $E_1$  到  $E_2$  内的一个加性齐次映射  $T$ , 即

$$T(x+y) = T(x) + T(y); T(\lambda x) = \lambda T(x);$$

$$x, y \in E_1,$$

称为一个把  $E_1$  映射到  $E_2$  内 (或由  $E_1$  到  $E_2$  内) 的线性映射 (linear mapping) 或线性算子 (linear operator). 这个概念的一个特例是一个线性泛函 (linear functional), 或一个由  $E$  到  $K$  的线性算子. 由  $E$  到商空间  $E/F$  的自然映射是线性映射的一个例子, 它建立了每个元素  $x \in E$  和平坦集  $F_x \in E/F$  之间的一个对应. 全体线性算子  $T: E_1 \rightarrow E_2$  的集合  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$  关于下列运算构成一个向量空间

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x; (\lambda T)x = \lambda Tx;$$

$$x \in E_1; \lambda \in K; T_1, T_2, T \in \mathcal{L}(E_1, E_2).$$

两个向量空间  $E_1$  和  $E_2$  称为同构的 (isomorphic), 如果存在一个线性算子 (一个“同构”), 它确定了两个空间的元素之间的一个一一对应.  $E_1$  和  $E_2$  是同构的, 当且仅当它们的基具有相等的基数.

令  $T$  是一个由  $E_1$  到  $E_2$  内的线性算子.  $T$  的共轭线性算子 (conjugate linear operator) 或对偶线性算子 (dual linear operator) 是由  $E_2^*$  到  $E_1^*$  内的线性算子  $T^*$ , 由等式

$$(T^* \varphi)(x) = \varphi(Tx), \text{ 对所有 } x \in E_1, \varphi \in E_2^*$$

所定义. 关系式  $T^{*-1}(0) = [T(E_1)]^{\perp}$ ,  $T^*(E_2^*) = [T^{-1}(0)]^{\perp}$  成立, 由此可推出  $T^*$  是一个同构, 当且

仅当  $T$  是一个同构.

向量空间的双线性映射和多重线性映射的理论与向量空间的线性映射的理论是密切相关的(见双线性映射(bilinear mapping); 多重线性映射(multilinear mapping)).

线性映射扩张的问题是向量空间理论中一组重要的题目. 令  $F$  是向量空间  $E_1$  的一个子空间,  $E_2$  是与  $E_1$  在同一个域上的一个线性空间,  $T_0$  是由  $F$  到  $E_2$  内的一个线性映射; 这时需要求出  $T_0$  的一个扩张  $T$ , 它是定义在整个  $E_1$  上的由  $E_1$  到  $E_2$  内的一个线性映射. 这样的扩张总是存在的, 但是由于对函数施加额外的限制条件, 这个问题可能成为不可解决的(这关系到向量空间附加的结构, 例如关系到拓扑结构或一个序关系). 扩张问题的解法的例子是 **Hahn-Banach 定理** (Hahn-Banach theorem), 以及在带有锥的空间中正泛函的扩张定理.

向量空间理论的一个重要分支是向量空间上的运算理论, 即由给定的向量空间构造新向量空间的方法. 取一个子空间且利用它构造商空间的众所周知的方法是这种运算的例子. 其他重要的运算包括构造向量空间的直和、直积及张量积.

设  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$  是域  $K$  上的一族向量空间. 集合  $E$  是  $E_\alpha$  的积, 通过引进下列运算它可以构成  $K$  上的向量空间:

$$(x_\alpha) + (y_\alpha) = (x_\alpha + y_\alpha); \lambda(x_\alpha) = (\lambda x_\alpha);$$

$$\lambda \in K; x_\alpha, y_\alpha \in E_\alpha, \alpha \in I.$$

所得的向量空间  $E$  称为向量空间  $E_\alpha$  的直积 (direct product), 记作  $\prod_{\alpha \in I} E_\alpha$ . 向量空间  $E$  的这个子空间, 它包括所有满足条件:  $\{\alpha: x_\alpha \neq 0\}$  为有限集的序列  $(x_\alpha)$ , 称为向量空间  $E_\alpha$  的直和 (direct sum), 记作  $\sum_\alpha E_\alpha$  或  $\oplus_\alpha E_\alpha$ . 当项数有限时, 这两个概念是一致的. 此时采用记号:

$$E_1 + \cdots + E_n, E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$$

或

$$E_1 \times \cdots \times E_n.$$

设  $E_1$  和  $E_2$  是同一个域  $K$  上的向量空间;  $E'_1, E'_2$  各是向量空间  $E_1^*, E_2^*$  的全子空间,  $E_1 \square E_2$  是以空间  $E_1 \times E_2$  的全体元素的集合作为基的向量空间. 每个元素  $x \square y \in E_1 \square E_2$  可以对应于  $E'_1 \times E'_2$  上的一个双线性函数  $b = T(x, y)$ , 这里利用公式  $b(f, g) = f(x)g(y)$ ,  $f \in E'_1, g \in E'_2$ . 这个在一切基向量  $x \square y \in E_1 \square E_2$  上的映射可以扩张为由向量空间  $E_1 \square E_2$  到  $E'_1 \times E'_2$  上的所有双线性泛函的向量空间内的一个线性映射  $T$ . 令  $E_0 = T^{-1}(0)$ .  $E_1$  和  $E_2$  的张量积 (tensor product) 是商空间  $E_1 \otimes E_2 = (E_1 \square E_2) / E_0$ ;

元素  $x \square y$  的象记作  $x \otimes y$ . 向量空间  $E_1 \otimes E_2$  同构于  $E'_1 \times E'_2$  上的双线性泛函的向量空间 (见向量空间的张量积 (tensor product)).

向量空间理论中最有趣的部分是有限维向量空间理论. 然而, 无限维向量空间的概念也已经显得富有成果, 并且得到了有意义的应用, 尤其是在拓扑向量空间 (topological vector spaces) 即带有以某种方法适合其代数结构的拓扑结构的向量空间的理论中.

#### 参考文献

- [1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Algebra: Algebraic structures, Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974. Chapt. 1; 2 (译自法文).
- [2] Райков, Д. А., Векторные пространства, М., 1962 (英译本: Raikov, D. A., Vector spaces, Noordhoff, 1965).
- [3] Day, M. M., Normed linear spaces, Springer, 1958.
- [4] Edwards, R. E., Functional analysis: theory and applications, Holt, Rinehardt, Winston, 1965.
- [5] Halmos, P. R., Finite-dimensional vector spaces, v. Nostrand, 1958.
- [6] Глазман, И. М., Любич, Ю. И., Конечномерный линейный анализ в задачах, М., 1969 (英译本: Glazman, I. M. and Lyubich, Y. I., Finite-dimensional linear analysis: a systematic presentation in problem form, M. I. T., 1974).

М. И. Кадец 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Strang, G., Linear algebra and its applications, Harcourt, Brace, Jovanovich, 1988.
- [A2] Noble, B. and Daniel, J. W., Applied linear algebra, Prentice Hall, 1977.
- [A3] Noll, W., Finite dimensional spaces, M. Nijhoff, 1987.

蒋滋梅 译

#### 向量管 [vector tube; векторная трубка]

空间  $\Omega$  中的一个闭的点集  $\Phi$ , 在  $\Omega$  中已指定了一个向量场 (vector field)  $\mathbf{a}(M)$ , 使得在边界曲面  $S$  上法向量  $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{a}$  处处正交. 向量管  $\Phi$  是由场  $\mathbf{a}$  的向量线 (vector lines)  $\Gamma$  所构成, 这里向量线是指  $\Omega$  中的曲线, 使得在其每点上的切向与  $\mathbf{a}$  的方向重合. 如果  $\Gamma$  上一点包含在  $\Phi$  中, 则整条线  $\Gamma$  完全包含在  $\Phi$  中. 如果  $\mathbf{a}$  是一个定常液体流的速度场, 则  $\Gamma$  是液体质点的轨线, 而  $\Phi$  是在  $\Omega$  中由一定量的液体粒子的运动所扫过的部分.

向量管  $\Phi$  在横截面  $S'$  中的强度 (intensity)  $I$  是  $\mathbf{a}$  通过  $S'$  的流量 (见向量分析 (vector analysis)):

$$I(S') = \iint_{S'} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma,$$



其中  $\mathbf{n}$  是  $S'$  的单位法向量. 如果场  $\mathbf{a}$  是螺线的 ( $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ ), 则向量管强度的守恒律成立:

$$I(S') = I(S'').$$

设  $a_1(x, y, z)$ ,  $a_2(x, y, z)$ ,  $a_3(x, y, z)$  是向量  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$  的 Descartes 直角坐标,  $x, y, z$  是点  $M$  的坐标, 那么  $\Phi$  的边界可局部地由方程

$$F(x, y, z) = \text{常数}$$

来定义, 其中  $F(x, y, z)$  满足偏微分方程

$$(\mathbf{a}, \nabla F) = a_1(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial x} + a_2(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial y} + a_3(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Ю. П. Пытьев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Wills, A. P., Vector analysis with an introduction to tensor analysis, Dover, reprint, 1958, Sec. 45.

沈纯理 译

**Векуа 法** [Vekua method; Векуа метод], 无穷小形变理论中的

当某些能刻画具有正 Gauss 曲率  $K$  的曲面形变的量在共轭等温参数化下是广义解析函数 (generalized analytic function) 时所用的一种方法. 这种方法可将研究  $K > 0$  的曲面的形变问题化为研究  $K = \text{常数} > 0$  的曲面的问题, 其无穷小形变 (infinitesimal deformation) 可由通常的解析函数来描述. 因此, 在 Gauss 曲率为正变量和正常量的曲面的形变性质之间建立了一种广泛的类比.

М. И. Войцеховский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [1] Vekua, I. N., Generalized analytic functions, Pergamon, 1962 (译自俄文).

沈纯理 译

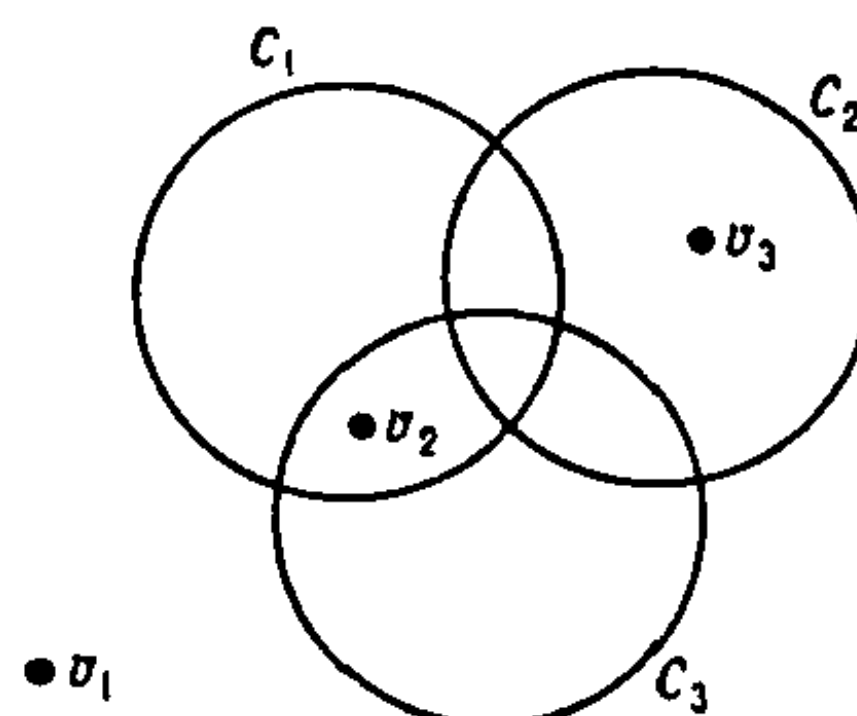
**Venn 图** [Venn diagram; Венна диаграмма]

数理逻辑公式, 主要是命题演算 (propositional calculus) 公式的一种图形表示. 在经典命题逻辑中,  $n$  个变元  $a_1, \dots, a_n$  的 Venn 图是把平面划分为  $2^n$  个区域的闭轮廓线  $C_1, \dots, C_n$  (同胚于圆周) 的一个选择, 它们所划分的某些区域 (记作  $v_1, \dots, v_k$ ,  $0 \leq k \leq 2^n$ ) 被标记. 每个标记的区域  $v_i$ ,  $0 < i \leq k$ , 对应于公式  $B_i = b_1 \& \dots \& b_n$ , 这里如果  $v_i$  在闭轮廓线  $C_j$  的内部, 则  $b_j$  ( $0 < j \leq n$ ) 是  $a_j$ , 否则  $b_j$  是  $\neg a_j$ . 做为一个整体来看, 对应于图的公式是  $B_1 \vee \dots \vee B_k$ . 于是, 下图中的 Venn 图对应的公式就是

$$(\neg a_1 \& \neg a_2 \& \neg a_3) \vee (a_1 \& \neg a_2 \& a_3) \vee$$

$$\vee (\neg a_1 \& a_2 \& \neg a_3).$$

如果没有一个区域被标注 ( $k = 0$ ), 则这个图对应于恒假公式, 例如  $a_1 \& \neg a_1$ . 在命题逻辑中, Venn 图被用来解决判定问题, 即在给定的逻辑前题下可以推出的彼此不等价的所有逻辑推论的问题. 可以把命题逻辑构造为对应于逻辑运算的 Venn 图上的运算.



用图来作注解的方法是 Venn 在解决类的逻辑问题 ([1]) 时提出的. 这种方法还被用于经典的多元谓词演算. Venn 图还被用于数理逻辑和自动机理论, 特别是用来解决神经网络问题.

#### 参考文献

- [1] Venn, J. Symbolic logic, London, 1894.  
[2] Кузичев, А. С., Диаграммы Венна, М., 1968.

А. С. Кузичев 撰

【补注】 Venn 图的思想可以追溯到 L. Euler, 因此有时也把它称为 Euler 图 (Euler diagram).

#### 参考文献

- [A1] Suppes, P., Introduction to logic, v. Nostrand, 1957, § 9.8.  
[A2] Birkhoff, G. and MacLane, S., A survey of modern algebra, Macmillan, 1953, 336 ff.  
[A3] Rosser, B., Logic for mathematicians, McGraw-Hill, 1953, 227 - 228; 237ff.

何青译 罗里波校

**字合同** [verbal congruence; вербальная конгруэнция]

一个代数  $A$  上的合同, 它可以表示成  $A$  上一切这样的合同的交, 这些合同的商代数属于某一固定的  $\Omega$  代数簇. 一个任意代数系统  $A = \langle A, \Omega \rangle$  上的合同  $\theta$  称为字合同 (verbal congruence), 如果存在一个  $\Omega$  系统簇  $\mathfrak{M}$ , 使得典范映射  $A \rightarrow A/\theta$  在  $A$  到  $\mathfrak{M}$  内代数的态射中具有泛性. 一个字合同是一个全特征合同 (fully-characteristic congruence). 如果  $F$  是某一簇  $\mathfrak{B}$  内一个自由  $\Omega$  系统, 则换言之,  $F$  内任意全特征合同  $\eta$  对于由商系统  $F/\eta$  所生成的簇  $\mathfrak{M}$  而言是字合同.

#### 参考文献

- [1] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973).

Д. М. Смирнов 撰

【补注】 亦见泛性质 (universal property); 合同 (代

数学中的) (congruence (in algebra)). 郝钢新 译

字积 [verbal product; вербальное произведение], 群  $G_i$  的,  $i \in I$

商群  $F/(V(F) \cap C)$ , 这里  $F$  是群  $G_i (i \in I)$  的自由积 (见群的自由积 (free product of groups)),  $V$  是字的某集合,  $V(F)$  是  $F$  的字  $V$  子群 (见字子群 (verbal subgroup)), 而  $C$  是 Descartes 子群 (Cartesian subgroup) (即  $F$  到这些群的直积上的自然满同态的核). 作为群类上的运算, 字积是结合的, 在对应的群簇上还是自由的.

О. Н. Головин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combinatorial group theory, Interscience, 1966, p. 412.

石生明 译 王杰 校

字子群 [verbal subgroup; вербальная подгруппа]

群  $G$  的由某个字集  $V = \{f_v(x_1, \dots, x_n): v \in I\}$  的所有字 (word) 的全部可能的值所生成的子群  $V(G)$ , 这时  $x_1, x_2, \dots$  互相独立地遍及  $G$ . 字子群是正规子群; 群上由字子群定义的同余是字同余 (verbal congruence) (亦见代数系统簇 (algebraic systems, variety of)).

字子群的例子: 1) 群  $G$  的由字  $[x, y] = x^{-1}y^{-1} \cdot xy$  所确定的换位子群  $G'$ ; 2) 第  $n$  个换位子群  $G^{(n)} = (G^{(n-1)})'$ ; 3) 下中心列

$$\Gamma_1(G) = G \supseteq \Gamma_2(G) \supseteq \dots \supseteq \Gamma_n(G) \supseteq \dots$$

的项, 其中  $\Gamma_n(G)$  是由换位子

$$[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$$

所定义的字子群; 4) 群  $G$  的由字  $x^n$  定义的幂子群  $G^n$ .

等式  $V(G)\varphi = V(G\varphi)$  对任何同态  $\varphi$  都成立. 特别地每个字子群皆是  $G$  的全特征子群 (fully-characteristic subgroup). 对自由群, 其逆也真, 一般地则不然: 两个字子群的交可以不是字子群.

可数秩的自由群  $X$  的字子群是特别重要的. 它们构成其所有子群的格的 (模) 子格. 字子群是“单调”的: 若  $R \triangleleft X, S \triangleleft X$  (这里  $R \triangleleft X$  表示  $R$  是  $X$  的正规子群) 且  $R \subset S$  则  $V(R) \subset V(S)$ .

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд, М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987; 下册, 1982).

[2] Neumann, H., Varieties of groups, Springer, 1967.

О. Н. Головин 撰 石生明 译 王杰 校

验证 [verification; верификация]

确立一个命题 (proposition) 的真实性的过程. 较狭义地说, 是指确立某种逻辑数学语言中特殊形式的公式的真实性的过程.

А. Г. Драгалли 撰 杜小杨 译

Veronese 映射 [Veronese mapping; Веронезе отображение]

以 G. Veronese 命名的射影空间 (projective space) 的一种特殊正则映射. 设  $n, m$  是正整数,  $v_{nm} = \binom{n+m}{n} - 1$ ,  $\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^{v_{nm}}$  是任意域 (或整数环) 上的射影空间, 且被看成概形. 设  $u_0, \dots, u_n$  是  $\mathbf{P}^n$  内射影坐标,  $v_{i_0 \dots i_n} (i_0 + \dots + i_n = m)$  是  $\mathbf{P}^{v_{nm}}$  内射影坐标. Veronese 映射 (Veronese mapping) 是由公式  $v_{i_0 \dots i_n} = u_0^{i_0} \dots u_n^{i_n} (i_0 + \dots + i_n = m)$  给出的态射

$$v_m: \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^{v_{nm}}.$$

也可用不变术语把 Veronese 映射定义为用完全线性系  $|mH|$  给出的正则映射, 这里  $H$  是  $\mathbf{P}^n$  里的超平面截面. Veronese 映射是闭嵌入, 它的象  $v_m(\mathbf{P}^n)$  称为 Veronese 簇 (Veronese variety), 它的定义方程为

$$v_{i_0 \dots i_n} v_{j_0 \dots j_n} = v_{k_0 \dots k_n} v_{r_0 \dots r_n},$$

这里  $i_0 + j_0 = k_0 + r_0, \dots, i_n + j_n = k_n + r_n$ . 例如  $v_2(\mathbf{P}^1)$  是  $\mathbf{P}^2$  中由方程  $x_0 x_1 = x_2^2$  表示的曲线. Veronese 簇的次数是  $m^n$ . 对于  $\mathbf{P}^n$  内任意超曲面

$$F = \sum_{i_0 + \dots + i_n = m} a_{i_0 \dots i_n} u_0^{i_0} \dots u_n^{i_n} = 0$$

它在 Veronese 映射  $v_m$  下的象是 Veronese 簇  $v_m(\mathbf{P}^n)$  与超平面

$$\sum_{i_0 + \dots + i_n = m} a_{i_0 \dots i_n} v_{i_0 \dots i_n} = 0$$

的交集. 由于这个事实, Veronese 映射可以用来把某些有关超曲面的问题约化到超平面截面的情形.

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

И. В. Долгачев 撰

【补注】  $\mathbf{P}^2$  在 Veronese 嵌入 ( $n=2, m=2$ ) 下于  $\mathbf{P}^5$  内的象称为 Veronese 曲面 (Veronese surface).

参考文献

[A1] Griffiths, Ph. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley-Interscience, 1978, p. 178, 674, 179, 349, 525, 532, 535, 632, 743.

[A2] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977,



**直角旋转仿射量 [versor; верзор]**

使向量旋转一个直角的仿射量 (affinor).

**指标转移张量 [vector; вектор]**

实现张量的指标转移的向量空间上的张量 (tensor on a vector space).

**Viète 定理 [Viète theorem; Виета теорема], 关于根的**

确定多项式 (polynomial) 的根与系数之间的关系的一个定理. 设  $f(x)$  是一个  $n$  次多项式, 其系数取自某一个域, 首项系数为 1. 多项式  $f(x)$  在包含  $f(x)$  的所有根的域 (例如  $f(x)$  的分裂域, 见多项式的分裂域 (splitting field of a polynomial)) 上分裂为线性因子:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = \\ &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n), \end{aligned}$$

其中  $\alpha_i$  是  $f(x)$  的根,  $i = 1, \cdots, n$ . Viète 定理断言: 下列关系式 (Viète 公式 (Viète formulas)) 成立:

$$a_0 = (-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n,$$

$$a_1 = (-1)^{n-1} (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} + \alpha_1 \cdots \alpha_{n-2} \alpha_n + \cdots + \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n),$$

$$a_{n-2} = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} \alpha_n,$$

$$a_{n-1} = -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n).$$

F. Viète ([1]) 对于一切  $n$  (但是只对正根) 证明了这些关系; 在一般形式下, Viète 定理是由 A. Girard ([2]) 证明的.

**参考文献**

[1] Viète, F., Opera mathematica, Leiden, 1646.

[2] Girard, A., Invention nouvelle en l'algèbre, Bierens de Haan, Leiden, 1884, Reprint.

В. Н. Ремесленников 撰

【补注】首项系数为 1 的多项式称为首一多项式 (monic polynomial). Viète 定理中的  $a_i$  的表达式 (除了正负号), 现在称为 ( $n$  元初等) 对称多项式 (见对称多项式 (symmetric polynomial)).

Viète 有时拼写为 Viëta: Viëta 定理 (Viëta theorem).

**参考文献**

[A1] Waerden, B. L., van der, Algebra, 1, Springer, 1967 (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学 1, 科

**Victoris 同调 [Victoris homology; Вьеториса гомологии]**

最早针对非多面体的情形定义的同调论 (homology theory) 之一. L. E. J. Brouwer 于 1911 年首先考虑了平面的情形, 其后由 L. Vietoris 于 1927 年推广到 Euclid (甚至度量) 空间的任意子集.

设  $A$  为度量空间  $X$  的子集.  $A$  的一个  $n$  维 (有序)  $\varepsilon$  单形 ( $\varepsilon$ -simplex)  $t^n$  定义为  $A$  中满足  $\text{diam} \{e_0, \cdots, e_n\} < \varepsilon$  的一个有序子集  $(e_0, \cdots, e_n)$ . 给定系数群  $G$ ,  $A$  的  $\varepsilon$  链 ( $\varepsilon$ -chain) 是指以  $g_i \in G$  为系数的  $\varepsilon$  单形  $t_i^n$  的形式化的有限线性组合  $\sum g_i t_i^n$ .  $\varepsilon$  单形  $t^n = (e_0, \cdots, e_n)$  的边缘 (boundary of an  $\varepsilon$ -simplex) 定义为  $\varepsilon$  链:  $\Delta t^n = \sum_i (-1)^i (e_0, \cdots, \hat{e}_i, \cdots, e_n)$ . 由线性性质, 可以定义任意  $\varepsilon$  链的边缘, 边缘为零的  $\varepsilon$  链称为  $\varepsilon$  闭链 ( $\varepsilon$ -cycle). 一个集合的  $\varepsilon$  链  $x^n$  称为在  $A$  中  $\eta$  同调于零 (记作  $x^n \sim 0$ ), 如果存在  $A$  中的某个  $\eta$  链  $y^{n+1}$  使得  $\Delta y^{n+1} = x^n$ .

集合  $A$  的真闭链 (true cycle) 是指序列  $z^n = (z_1^n, \cdots, z_k^n, \cdots)$ , 其中  $z_k^n$  为  $A$  中的  $\varepsilon_k$  闭链,  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). 真闭链构成一个群  $Z^n(A, G)$ . 如果对任意  $\varepsilon > 0$ , 均存在一个  $N$ , 使得  $z_k^n$  对所有的  $k \geq N$  均在  $A$  中  $\varepsilon$  同调于零, 则称真闭链  $z$  在  $A$  中同调于零. 以  $\Delta^n(A, G)$  记群  $Z^n(A, G)$  除以子群  $H^n(A, G)$  得到的商群, 其中  $H^n(A, G)$  为由同调于零的闭链构成的子群.

真闭链  $z$  称为收敛的 (convergent), 如果对任意  $\varepsilon > 0$ , 均存在一个  $N$ , 使得当  $k, m \geq N$  时, 闭链  $z_k^n, z_m^n$  在  $A$  中相互  $\varepsilon$  同调. 以  $Z_c^n(A, G)$  记由收敛的闭链构成的群, 并设  $\Delta_c^n(A, G) = Z_c^n(A, G) / H_c^n(A, G)$  为相应的商群.

若存在一个紧集合  $F \subseteq A$ , 使得所有闭链  $z_k^n$  中的所有单形的顶点均包含在  $F$  内, 则称真闭链  $z$  具有紧支集  $F$ . 通过要求所有用于实现同调的链均包含在一个紧集合中, 可以类似地修正一个闭链同调于零的概念, 进而导致具有紧支集的收敛闭链的定义. 以下标  $k$  表示考虑具有紧子集的闭链以及同调, 则相应可得到群  $\Delta_k^n(A, G)$  和  $\Delta_{ck}^n(A, G)$ . 后者即为 Vietoris 同调群 (Vietoris homology group). 若多面体是有限的, 则 Vietoris 同调群与标准的同调群相同.

通过模去一个子集  $B \subseteq A$ , 还可以定义相对同调群  $\Delta^n(A, B, G)$ ,  $\Delta_c^n(A, B, G)$ ,  $\Delta_k^n(A, B, G)$  和  $\Delta_{ck}^n(A, B, G)$ . 集合  $A$  中一个模  $B$   $\varepsilon$  闭链是  $A$  中任意一个满足  $\Delta x^n \subseteq B$  的  $\varepsilon$  链  $x^n$ . 类似地, 一个模  $B$   $\varepsilon$  闭链  $x^n$  在  $A$  中模  $B$   $\eta$  同调于零, 如果  $x^n =$

$\Delta y^{n+1} + w^n$ , 其中  $y^{n+1}$  和  $w^n$  为  $A$  中的  $\eta$  链,  $w^n$  包含在  $B$  中.

#### 参考文献

- [1] Александров, П. С., Введение в гомологическую теорию разтерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975. А. А. Мальцев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Hocking, J. G. and Young, G. S., Topology, Addison-Wesley, 1961. 李贵松 译 潘建中 校

### Виноградов估计 [Vinogradov estimates; Виноградова оценки]

И. М. Виноградов 的若干个定理的名字. 下面是几个熟知的结果.

1) 关于特征标和的 Виноградов 估计 (见 Dirichlet 特征标 (Dirichlet character)). 如果  $\chi$  为模  $D$  之非主特征, 那么, 对  $N > 0$  及  $M \geq 1$  有

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+M} \chi(n) \right| \leq \sqrt{D} \log D.$$

2) 关于 Weyl 和的 Виноградов 估计 (见 Weyl 和 (Weyl sum)). 设  $n \geq 12$  为常数, 并令  $v = 1/n$ . 又设  $n$  维空间的点被分成两类——第 1 类和第 2 类. 第 1 类中的点是

$$\left( \frac{a_n}{q_n} + z_n, \dots, \frac{a_1}{q_1} + z_1 \right),$$

其中第一个被加项是分母为正数的不可约有理分数, 诸分母之最小公倍数  $Q$  不大于  $p^v$ , 而第二个被加项满足条件

$$|z_s| \leq p^{-s+v}.$$

第 2 类的点即为不属于第 1 类的点. 对第 2 类的点, 令

$$\rho = \frac{1}{8n^2(\log n + 0.5 \log \log n + 1.3)},$$

如果  $m \leq P^{2\rho}$ , 则有

$$|T_m| = \left| \sum_{1 \leq x \leq P} e^{2\pi i m(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)} \right| \ll P^{1-\rho}.$$

另一方面, 若令

$$\delta_s = z_s p^s, \delta_0 = \max(|\delta_n|, \dots, |\delta_1|),$$

如果  $m \leq P^{4v^2}$ , 那么对第 1 类的点就有

$$|T_m| \ll P(m, Q)^v Q^{-v+\varepsilon},$$

甚至还可以有

$$|T_m| \ll P Q^{-v+\varepsilon} \delta_0^{-v}$$

(如果  $\delta_0 \geq 1$  的话).

3) 关于素数三角和的 Виноградов 估计. 设  $\varepsilon \leq 0.001$ . 又按照 2) 中之记号, 设  $n$  维空间中的点如下进行分类.

第 1a 类由满足条件

$$Q \leq e^{u^{\varepsilon}}, \delta_0 \leq e^{u^{\varepsilon}} \quad (u = \log P)$$

的那些点组成. 第 1b 类由不在 1a 类及满足条件

$$Q \leq P^{0.2v}, \delta \leq P^v$$

的点组成. 最后, 所有其余的点属于第 2 类.

对 1a 类中的点, 令

$$\Delta = u^{9\varepsilon} Q^{-0.5v+\varepsilon}, \mu = (m, Q)^{0.5v},$$

或者甚至令

$$\Delta = u^{9\varepsilon} \delta_0^{-0.5v}, \mu = m^{-0.5v}$$

(如果  $\delta_0 \geq 1$  的话). 对 1b 类的点, 令  $\varepsilon = 2\varepsilon'$ , 定义

$$\Delta = Q^{-0.5+\varepsilon_3}, \mu = (m, Q)^{0.5v} \quad (\text{若 } Q > e^{u^{\varepsilon}}),$$

$$\Delta = Q^{-0.5v+\varepsilon_3} \delta_0^{-0.5v+\varepsilon_3}, \mu = 1 \quad (\text{若 } \delta_0 > e^{u^{\varepsilon}})$$

(如果  $Q > e^{u^{\varepsilon}}, \delta_0 > e^{u^{\varepsilon}}$ , 那么取上面  $\Delta$  和  $\mu$  的任一对值都可以). 最后, 对第 2 类中的点, 令

$$\Delta = P^{-\rho_1}, \rho_1 = \frac{1}{17n^2(2\log n + \log \log n + 2.9)},$$

$$\mu = 1.$$

那么, 如果  $m \leq \Delta^{-2}$ , 就有

$$\left| \sum_{p \leq P} e^{2\pi i m(\alpha_n p^n + \dots + \alpha_1 p)} \right| \ll \frac{P}{u} \Delta \mu.$$

#### 参考文献

- [1] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (中译本: 伊·马·维诺格拉多夫, 数论中的三角和方法, 数学进展, 1 (1955), 3-106).
- [2] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, Teubner, 1959. Heft 13, Teil 1 (中译本: 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963).

А. А. Карацуба 撰

#### 【译注】

#### 参考文献

- [B1] 潘承洞、潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 1990 年, 第十三章, 第十九章, 第二十二章.

张明尧 译 戚鸣皋 校



**Виноградов - Goldbach 定理** [Vinogradov - Goldbach theorem; Виноградова - Гольдбаха теорема]

关于把所有足够大的奇数表示为三个素数之和的一个定理. 它是关于素数方程

$$p_1 + p_2 + p_3 = N$$

的解的个数  $I(N)$  的渐近公式的一个推论, 为 И. М. Виноградов 于 1937 年所证明:

$$I(N) = \frac{N^2}{2r^3} S(N) + O\left[\frac{N^2}{r^{3.5-\varepsilon}}\right],$$

其中  $N$  是奇数,  $r = \log N$ , 和

$$S(N) = \prod_p \left[1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right] \prod_{p|N} \left[1 - \frac{1}{p^2-3p+3}\right] > 0.6.$$

见 **Виноградов 法** (Vinogradov method); **Goldbach 问题** (Goldbach problem).

**参考文献**

- [1] Виноградов, И. М., Избранные труды, М., 1952 (英译本: Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985).
- [2] Hua, L. - K., (华罗庚), Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, 1959. Heft 13, Teil 1. A. A. Карацуба 撰 杜小杨 译

**Виноградов 假设** [Vinogradov hypotheses; Виноградова гипотезы]

由 И. М. Виноградов ([1], [2]) 在各个不同时期提出的若干与解析数论 (analytic number theory) 中一些中心问题有关的假设.

关于幂剩余及非剩余分布的假设. 其中最悠久、最著名的假设是: 相邻二次非剩余 mod  $p$  之间的距离有  $p^{\varepsilon}$  的阶, 见 **幂剩余** (power residue) 与 **二次剩余** (quadratic residue).

关于三角和估计的假设. 其中一个假设是

$$\left| \sum_{x=1}^p e^{2\pi i f(x)} \right| \ll P^{1-\rho(n)},$$

其中  $f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x$ ,  $\alpha_r = a/q + \theta/q^2$ ,  $(a, q) = 1$ ,  $|\theta| \leq 1$ ,  $P^{0.25} < q < P^{r-0.25}$ ,  $r$  是数  $2, \dots, n$  中之一, 而  $\rho(n)$  的阶为  $n^{-1-\varepsilon}$ . 见 **三角和法** (trigonometric sums, method of) 及 **Виноградов 法** (Vinogradov method).

关于 **Diophantus 方程** 解数的假设. 一个这样的假设是说, 方程组

$$x_1^{n_1} + \cdots + x_r^{n_r} = y_1^{n_1} + \cdots + y_r^{n_1},$$

...

$$x_1^{n_m} + \cdots + x_r^{n_m} = y_1^{n_m} + \cdots + y_r^{n_m}$$

$$1 \leq x_i, y_i < P, i = 1, \dots, r, 1 \leq n_1 < \cdots < n_m = n$$

( $n$  为常数) 的解数的阶是  $P^{2r-k}$ , 这里对所有  $r \geq r_0$  有  $k = n_1 + \cdots + n_m$ ,  $r_0$  的阶为  $k^{1+\varepsilon}$ . 见 **Diophantus 方程** (Diophantine equations).

关于平面及空间区域中整点个数的假设. 一个这样的假设是说: 球  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  内整点个数可用公式

$$\frac{4}{3} \pi R^3 + O(R^{1+\varepsilon})$$

表出. 见 **整点的分布** (integral points, distribution of).

**参考文献**

- [1] Виноградов, И. М., Некоторые проблемы аналитической теории чисел, в книге: Труды третьего Всесоюзного математического съезда, т. 3, Москва, 1958, с. 3 - 13.
- [2] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (中译本: 伊·马·维诺格拉多夫, 数论中的三角和方法, 越民义译, 数学进展, 1 (1955), 3 - 106).
- [3] Виноградов, И. М., Избранные труды, М., 1952 (英译本: Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985).

A. A. Карацуба 撰 张明尧 译 戚鸣皋 校

**Виноградов 积分** [Vinogradov integral; Виноградова интеграл]

形如

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S|^{2k} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n$$

的一个重积分, 其中

$$S = \sum_{1 \leq x \leq P} e^{2\pi i (\alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n)}.$$

这一积分是一个三角和 (trigonometric sum) 的模的  $2k$  次均值. Виноградов 关于此积分值之定理 (均值定理) 构成 Weyl 和估计之基础. 见 **Виноградов 法** (Vinogradov method); **Виноградов 平均值定理** (Vinogradov theorem about the average).

A. A. Карацуба 撰 张明尧 译 戚鸣皋 校

**Виноградов 法** [Vinogradov method; Виноградова метод]

估计三角和的一种新方法, 见 **三角和法** (trigonometric sums, method of). 用 Виноградов 法可对范

围很广的一类三角和得到很精确的估计, 其中求和变数取过一系列整数或素数等. 用此法可以解决解析数论 (analytic number theory) 中许多经典问题 (如: 很广泛的一类函数的分数部分之分布, 自然数列中的素数分布, 象 Waring 及 Goldbach 问题这样的堆垒问题等等).

Виноградов 法分成两部分: 估计 Weyl 和 (Weyl sum) 的方法及估计素数三角和的方法. 两者都要用到 Виноградов 的基本思想, 即使二重三角和光滑化. 二重三角和可叙述于下.

给定和

$$W = \sum_u \sum_v \psi_1(u) \psi_2(v) e^{2\pi i \alpha u v},$$

其中求和变量  $u$  与  $v$  相应地取过集合  $U$  与  $V$  中 (不一定连续) 的整数值,  $A < u < 2A$ . 设  $\psi_1(u)$  与  $\psi_2(v)$  为任意的复值函数. 那么

$$|W|^2 \leq B \sum_{A < u \leq 2A} \left| \sum_v \psi_2(v) e^{2\pi i \alpha u v} \right|^2,$$

其中  $u$  取遍区间  $(A, 2A]$  中的相连整数 (光滑化), 而

$$B = \sum_n |\psi_1(u)|^2.$$

估计 Weyl 和的 Виноградов 法. 要估计的和是

$$S = \sum_{1 \leq x \leq P} e^{2\pi i f(x)},$$

其中  $f(x) = \alpha_{n+1} x^{n+1} + \dots + \alpha_1 x$ ;  $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_1$  为实数. 对  $Y = [P^{1-n^2/4}]$  有

$$\begin{aligned} S &= Y^{-1} \sum_{1 \leq x \leq P} \sum_{1 \leq y \leq Y} e^{2\pi i f(x+y)} + 2\theta Y \\ &= Y^{-1} \sum_{1 \leq x \leq P} \sum_{1 \leq y \leq Y} e^{2\pi i \alpha x y} + 2\theta Y = Y^{-1} W + 2\theta Y, \end{aligned}$$

其中  $\alpha = \alpha_{n+1} x^{n+1} + A_n(y) x^n + \dots + A_1(y) x + A_0(y)$ , 字母  $W$  表示过  $x$  及  $y$  的二重和, 而  $|\theta| \leq 1$ . 此外, 用  $\mathfrak{B}$  记表达式

$$\alpha_{n+1} x^{n+1} + (A_n(y) + B_n) x^n + \dots + (A_1(y) + B_1) x,$$

那么对区域

$$\begin{aligned} |B_n| &\leq L_n = P^{-n-n^2/4}, \\ |B_{n-1}| &\leq L_{n-1} = P^{-n+1-n^2/4}, \\ &\dots \dots \dots \\ |B_1| &\leq L_1 = P^{-1-n^2/4} \end{aligned}$$

中任意的  $B_n, \dots, B_1$  皆有

$$|W| \leq \sum_{1 \leq y \leq Y} \left| \sum_{1 \leq x \leq P} e^{2\pi i \mathfrak{B}} \right| + Y_n P^{1-n^2/4}.$$

对任何整数  $k \geq 1$  有

$$|W|^{2k} \leq 2^k Y^{2k-1} \sum_{1 \leq y \leq Y}$$

$$\begin{aligned} &\int_{|B_n| \leq L_n} \dots \int_{|B_1| \leq L_1} \left| \sum_{1 \leq x \leq P} e^{2\pi i \mathfrak{B}} \right| dB_n \dots dB_1 + \\ &\quad + 2^k (Y_n P^{1-n^2/4})^{2k} \leq \\ &\leq 2^k Y^{2k-1} G(Y) \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{1 \leq x \leq P} e^{2\pi i \mathfrak{B}} \right|^{2k} d\gamma_n \dots d\gamma_1 \\ &\quad + 2^k (Y_n P^{1-n^2/4})^{2k}, \end{aligned}$$

其中  $\mathfrak{B} = \alpha_{n+1} x^{n+1} + \gamma_n x^n + \dots + \gamma_1 x$ ,  $G(Y)$  表示与坐标为

$$\{A_n(y) + B_n\}, \{A_{n-1}(y) + B_{n-1}\}, \dots, \{A_1(y) + B_1\}$$

的点相重合的点的最大个数. 这里的大括号表示括号内数的分数部分,  $y$  在 1 与  $Y$  之间变动, 且

$$|B_n| \leq L_n, |B_{n-1}| \leq L_{n-1}, \dots, |B_1| \leq L_1.$$

若多项式  $f(x)$  的系数  $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_2$  有某种算术性质, 则可能得到估计  $G(Y) \leq Y^{0.9}$ . 此外, 上面最后那个积分不超过方程组

$$\begin{cases} x_1^n + \dots + x_k^n = y_1^n + \dots + y_k^n, \\ x_1^{n-1} + \dots + x_k^{n-1} = y_1^{n-1} + \dots + y_k^{n-1}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_1 + \dots + x_k = y_1 + \dots + y_k, \\ 1 \leq x_1, \dots, x_k \leq P. \end{cases}$$

的解数. 这个方程组的解数可以用 Виноградов 均值定理 (Vinogradov theorem about the average) 来进行估计, 这一定理是估计 Weyl 和的 Виноградов 方法中的基本定理, 见 Виноградов 估计 (Vinogradov estimates).

估计素数三角和的 Виноградов 法. 要估计的和是

$$S' = \sum_{p \leq P} e^{2\pi i f(p)},$$

其中  $f(p) = \alpha_n p^n + \dots + \alpha_1 p$ , 而  $\alpha_n, \dots, \alpha_1$  均为实数. 设  $D = \prod_{p \leq H} p$ , 其中  $H \leq P^{0.25}$ . 利用 Möbius 函数的熟知的性质,  $S'$  被转化成为数不多的 (不多于  $\ln P / \ln H$  个) 形如

$$\begin{aligned} W_s &= \sum_{d_1 | D} \dots \sum_{d_s | D} \sum_{m_1 > 0} \dots \sum_{m_s > 0} \mu(d_1) \dots \\ &\quad \dots \mu(d_s) e^{2\pi i f(m_1 \dots m_s d_1 \dots d_s)} \end{aligned}$$

的和, 其中  $m_1 \dots m_s d_1 \dots d_s \leq P$ . 在多重和  $W_s$  中, 变量  $m_1, \dots, m_s$  取遍整个求和区间. 其中至少有一个变量  $m$  的求和区间是长的那种和  $W_s$  用估计 Weyl 和的 Виноградов 法来估计. 反之, 至少过某个求和变量  $d (d | D)$  的求和区间是长的. 在此情形下, 我们要用到 Виноградов 的下述引理, 这一引理和他使二重和光滑化的思想一起构成估计素数三角和



的 Виноградов 法之基础.

引理. 设  $0 \leq \sigma \leq 1/3$ ,  $D$  是不大于  $x^\sigma$  的所有素数的乘积, 则  $D$  的所有不大于  $x$  的因子  $d$  分布在具有下列性质的少于  $x^\varepsilon$  个集合中:

1) 属于这些集合中一个集合的诸数  $d$  有同样个数的 ( $\beta$  个) 素因子, 因此  $\mu(d) = (-1)^\beta$  的值皆相同;

2) 这些集合中的一个 (所谓的最简集) 由一个数  $d = 1$  组成. 对其余的每个集合, 都有一个数  $\varphi$ , 使这个集合中所有的数都满足关系式

$$\varphi < d \leq \varphi^{1+\varepsilon_1}, \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon);$$

3) 对于数  $d$  的每个异于最简集的集合, 对任何  $U (0 \leq U \leq \varphi)$  存在两个由数  $d'$  及  $d''$  组成的集合, 相应地有满足关系式

$$U < \varphi' \leq Ux^\sigma, \varphi' \varphi'' = \varphi$$

的数  $\varphi'$  及  $\varphi''$ , 使得对每个自然数  $B$ , 可以  $B$  次得到所取集合中的每一个数, 如果我们仅从乘积  $d' d''$  中选取那些满足关系式  $(d', d'') = 1$  的乘积.

选取一个适合的  $U$  的值, 应用引理中第 3) 点即得到

$$W_s = \sum_u \sum_v \psi_1(u) \psi_2(v) e^{2\pi i f(uv)},$$

其中变量  $u$  与  $v$  取过长的求和区间. 由此引理可以导出 Виноградов 关于素数三角和的估计式, 见 Виноградов 估计 (Vinogradov estimates).

若  $F(x)$  (在某种意义下) 可用多项式适当地予以逼近, 那么 Виноградов 方法可以用来估计形如

$$S = \sum_{1 \leq x \leq P} e^{2\pi i F(x)}, S' = \sum_{p \leq P} e^{2\pi i F(p)}$$

的和 (见 [2], [4]). 形如

$$\sum_{p \leq P} \chi(p+a), \sum_{1 \leq n \leq N} \mu(n) \chi(n+a)$$

的及其他类型的和也可以用此法估计. 用这种方法可以解决幂剩余及原根等在形如  $p+a$  的数列中的分布问题, 其中  $a > 0$  为一给定整数, 而  $p$  取过连续的素数 (见 [3], [5]). 有关 Виноградов 法在解析数论中的应用, 见 [1], [2], [4], [5], [6].

#### 参考文献

- [1] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (中译本: 伊·马·维诺格拉多夫, 数论中的三角和方法, 越民义译, 数学进展, 1 (1955), 3 - 106).
- [2] Виноградов, И. М., Избранные труды, М., 1952 (英译本: Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985).
- [3] Виноградов, И. М., «Изв АН СССР, Сер. матем.», 30 (1966), 3, 481 - 496.

[4A] Карацуба, А. А., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 112 (1971), 241 - 255.

[4B] Карацуба, А. А., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 132 (1973), 257 - 261.

[5] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, 1959. Heft 13, Teil 1 (中译本: 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963).

[6] Chandrasekharan, K., Arithmetical functions, Springer, 1970. A. A. Карацуба 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Vaughan, R. C., The Hardy-Littlewood method, Cambridge Univ. Press, 1981.

#### 【译注】

#### 参考文献

[B1] 潘承洞与潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 1990年. 张明尧 译 戚鸣皋 校

Виноградов 均值定理 [Vinogradov theorem about the average; Виноградова теорема о среднем]

关于 Виноградов 积分 (Vinogradov integral)

$$J_b = J_{b,n}(P) =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i (\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)} \right|^{2b} d\alpha_n \cdots d\alpha_1$$

的值的上界之定理, 其中  $J_b$  是三角和之平均值. 它可以表述如下. 若对非负整数  $t$  令

$$D_t = (20n)^{n(n+1)t/2}, b_t = nt + \left[ \frac{n(n+1)}{4} + 1 \right],$$

那么, 如果  $l > 0$ , 对整数  $b \geq b_l$  就有

$$J_b = J_{b,n}(P) < D_l P^{2b - (1 - (1 - 1/n)^l) n(n+1)/2}.$$

由 Виноградов 定理给出的  $J_b$  之估计是渐近精确的. 此定理是估计 Weyl 和 (Weyl sum) 的 Виноградов 法 (Vinogradov method) 之基本点. 此外, 在数论的一些经典问题中 (见 Waring 问题 (Waring problem); Hilbert-Kamke 问题 (Hilbert-Kamke problem); 多项式的模 1 分布 (distribution modulo one)), 它得到了一些几乎是最优的结果.

#### 参考文献

- [1] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (中译本: 伊·马·维诺格拉多夫, 数论中的三角和方法, 越民义译, 数学进展, 1 (1955), 3 - 106).
- [2] Hua, L.-K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklop-

ademie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, Teubner, 1959. Heft 13, Teil 1 (中译本: 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963). A. A. Карацуба 撰

【译注】

参考文献

[B1] 潘承洞与潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 1990年, 第二十二章. 张明尧 译 戚鸣皋 校

**Virasoro 代数** [Virasoro algebra; Вирасоро алгебра]

【补注】  $C$  上的 Lie 代数, 记为  $\text{Vir}$ , 带有基  $L_n (n \in \mathbb{Z})$ ,  $c$  和下述交换关系 ( $m, n \in \mathbb{Z}$ ):

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \delta_{m, -n} \frac{m^3 - m}{12} c, \\ [c, L_n] = 0.$$

由于  $C \setminus \{0\}$  上的向量场  $d_n = -z^{n+1}(d/dz)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) 满足关系  $[d_m, d_n] = (m - n)d_{m+n}$ , 所以 Lie 代数  $\text{Vir}$  是具有有限 Laurent 级数的有孔复平面上全纯向量场的 Lie 代数的中心扩张 (事实上是泛的). 由于这一原因, Virasoro 代数在共形场论中起关键作用.

另一方面, 令  $z = \exp i\theta$ , 这里  $\theta$  是单位圆周  $S^1$  上的参数, 得到  $d_n = ie^{in\theta}(d/d\theta)$ . 因而带有限 Fourier 级数的  $S^1$  上向量场的 Lie 代数是由在反线性对合  $L_n \rightarrow L_{-n}$ ,  $c \mapsto c$  下不动的元素组成的 Lie 代数  $\text{Vir}/C$  的实型. 因此, Virasoro 代数与  $S^1$  的微分同胚群的表示理论, 么拟群的表示理论及仿射 Kac-Moody 代数 (Kac-Moody algebra) 密切相关.

Virasoro 代数的表示论在数学和理论物理学中有大量应用. 最有趣的是  $\text{Vir}$  在复向量空间的正能量表示 (positive-energy representations), 由  $c$  的作用为纯量来定义, 记作同一字母  $c$  (称为中心电荷 (central charge)), 而  $L_0$  (能量算子 (energy operator)) 可对角化, 本征空间维数有限, 实数谱有下界:

$$V = \bigoplus_{j \geq j_0} V_j.$$

这样一个表示的特征标是 (形式) 级数

$$\text{ch } V = \sum_j (\dim V_j) q^j.$$

$\text{Vir}$  的第一个正能量表示无疑是由 M. A. Virasoro ([A1]) 在 1970 年构造的, 应用了行理论框架中 Sugawara 结构的 Abel 形式 (见 Kac-Moody 代数 (Kac-Moody algebra)). 由此, 特别由于非幻定理 (no-ghost theorem) 的证明 ([A2]), Virasoro 代数的表示论成了行理论的关键组成部分 (见 [A3]). Virasoro 中心扩张本身首先由数学家发现 ([A4], [A5]); 在含有中心项校正公式的物理文献中, 论文 [A2] 是最早的一篇.

$\text{Vir}$  在向量空间  $V$  上的不可约正能量表示容许一

个非零向量  $v_h \in V$ , 这里  $h \in \mathbb{R}$ , 使得

$$L_n(v_h) = \delta_{n,0} h v_h \text{ 对 } n \geq 0, c(v_h) = c v_h, \quad (\text{A1})$$

因而有

$$V = \sum_{0 < j_1 \leq j_2 \leq \dots} C L_{-j_s} \cdots L_{-j_1} v_h \quad (\text{A2})$$

这个由两个实常数  $c$  (中心电荷) 和  $h$  (共形维数) 唯一确定的表示, 记为  $L^{c,h}$ . 若 (A2) 不是直和分解, 则表示称为退化的 (degenerate).

$\text{Vir}$  表示论的第一个基本结果 [A6] (证明参见 [A7]) 说明  $L^{c,h}$  是退化的, 当且仅当  $c = c(m)$ ,  $h = h(m)$ , 对某个  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  及某些  $r, s = 1, 2, \dots$ , 这里

$$c(m) = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \\ h_{r,s}(m) = \frac{((m+1)r - ms)^2 - 1}{4m(m+1)}.$$

共形场论的基础工作 ([A8]) 的基本思想是利用  $\text{Vir}$  的退化表示写出相关函数的微分方程. 关于“最高退化”表示, 称为极小级数表示的最完全的结果已经由 [A9] 得到. 它们对应于  $m = (p')/(p - p')$ , 这里  $p$  和  $p'$  是互素的正整数,  $r < p' - 1$ ,  $s \leq p - 1$  ([A8]).

[A10] 算出特征标  $\text{ch } L^{c,h}$ . 这推出令  $q = e^{2\pi i\tau}$ , 对某个  $a \in \mathbb{R}$ , 函数  $q^a \text{ch } L^{c,h}$  成为  $\tau$  在上半平面的模函数, 当且仅当  $L^{c,h}$  是一个极小级数表示 (因而  $a = -c(m)/24$ ) ([A11]).

表示  $L^{c,h}$  带有唯一的 Hermite 型, 使得  $v_h$  的范数为 1, 而算子  $L_n$  和  $L_{-n}$  伴随. 另一类重要的表示  $L^{c,h}$  是酉表示, 即它的 Hermite 型是正定的. 酉表示已被完全列出 (见 [12], [A13], [A7]):

- $c \geq 1, h \geq 0$ ;
- $m = 2, 3, \dots$  的极小级数.

极小级数表示 (特别是酉表示) 与统计格模型有密切关系 (见 [A14]). 例如,  $m = 3$  的情形等同于 Ising 模型 (Ising model),  $m = 4$  的情形等同于 Potts 模型 (Potts model), 等等.

Virasoro 代数的另一应用涉及曲线的模空间理论 (见 [A15] - [A18]).

参考文献

- Virasoro, M. M., Subsidiary conditions and ghosts in dual resonance models, *Phys. Rev.*, D1 (1970), 2933 - 2936.
- Goddard, P. and Thorn, C. B., Compatibility of the dual Pomeron with unitarity and the absence of ghosts in the dual resonance model, *Phys. Lett.*, 4 (1972), 235 - 238.
- Green, M. B., Schwarz, J. H. and Witten, E.,



Superstring theory, Cambridge Univ. Press, 1987.

- [A4] Block, R. E., On the Mills-seligman axioms for Lie algebras of classical type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **121** (1966), 378 - 392.
- [A5] Gel'fand, I. M. and Fuks, D. B., The cohomology of the Lie algebra of vector fields in a circle, *Funct. Anal. Appl.*, **2** (1968), 342 - 343. (*Funkts. Anal. i Prilozh.*, **2** (1968), 4, 92 - 93)
- [A6] Kac, V. G., Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras, in *Proc. Internat. Congress Mathemat. Helsinki, 1978, Vol. 1, Acad. Sci. Fennica, 1980, 299 - 304.*
- [A7] Kac, V. G. and Raina, A. K., *Bombay lectures on highest weight representations*, World Sci., 1987.
- [A8] Belavin, A. A., Polyakov, A. M. and Zamolodchikov, A. B., Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nuclear Phys.*, **B241** (1984), 333 - 380.
- [A9] Felder, G., BRST approach to minimal models, *Nuclear Phys.*, **B317** (1989), 215 - 236.
- [A10] Feigin, B. L. and Fuchs, D. B. [D. B. Fuks], Verma models over the Virasoro algebra, in L. D. Faddeev and A. A. Mal'tsev (eds.), *Topology, Proc. Internat. Topol. Cont. Leningrad 1982, Lecture notes in math.*, Vol. 1060, Springer, 1984, 230 - 245.
- [A11] Kac, V. G. and Wakimoto, M., Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **85** (1988), 4956 - 4960.
- [A12] Friedan, D., Qui, Z. and Shenker, S., Conformal invariance, unitary and two dimensional critical exponents, *Publ. MSRI*, **3** (1985), 419 - 449.
- [A13] Goddard, P., Kent, A. and Olive, D., Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras, *Comm. Math. Phys.*, **103** (1986), 105 - 119.
- [A14] Itzykson, C. and Dronfree, J.-M., *Statistical field theory*, Cambridge Univ. Press, 1989.
- [A15] Arbarello, E., Concini, C. De, Kac, V. G. and Processi, C., Moduli spaces of curves and representation theory, *Comm. Math. Phys.*, **117** (1988), 1 - 36.
- [A16] Kontzevich, M. L., Virasoro algebra and Teichmüller spaces, *Funct. Anal. Appl.*, **21** (1987), 2, 156 - 157. (*Funkts. Anal. i Prilozh.*, **21** (1987), 2, 78 - 79)
- [A17] Beilinson, A. A. and Schechtman, V. V., Determinant bundles and Virasoro algebras, *Comm. Math. Phys.*, **118** (1988), 651 - 701.
- [A18] Kawamoto, N., Namikawa, Y., Tsuchiya, A. and Yamada, Y., Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces, *Comm. Math. Phys.*,

**116** (1988), 247 - 308.

Victor Kac 撰 蔡传仁 译

位力分解 [virial decomposition; вириальное разложение], 位力展开 (virial expansion), 位力级数 (virial series)

气体物态方程右端的级数展开

$$\frac{pv}{kT} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{i+1}(T)}{v^i},$$

其中  $p$  是压强,  $T$  是温度,  $v$  是一个分子所占平均体积 (数密度的倒数), 而  $k$  是 Boltzmann 常数. 级数中含第  $l$  位力系数  $B_l$  的项描述归因于  $l$  分子集团相互作用所引起的对理想气体行为的偏差.  $B_l$  可用集团积分  $b_j$  或不可约集团积分  $\beta_{l-1}$  表达为

$$B_l = -\frac{l-1}{l} \beta_{l-1} = -\frac{l-1}{l} \sum \frac{(l-2-\sum n_j)!}{(l-1)!} (-1)^{\sum n_j} \prod_j \frac{(j b_j)^{n_j}}{n_j!},$$

对受下列条件

$$\sum_{2 \leq j \leq l} (j-1)n_j = l-1$$

限制的所有自然数  $n_j$  ( $j \geq 2$ ) 求和. 特别是

$$B_2 = -\frac{1}{2} \beta_1 = -b_2, B_3 = -\frac{2}{3} \beta_2 = 4b_2^2 - 2b_3;$$

$$b_2 = \frac{1}{2!V} \iint f_{12} d^3 q_1 d^3 q_2,$$

$$b_3 = \frac{1}{3!V} \iiint (f_{12}f_{13} + f_{12}f_{23} + f_{13}f_{23} + f_{12}f_{13}f_{23}) d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 q_3,$$

其中

$$f_{ij} = \exp \left[ -\frac{\varphi(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|)}{kT} \right] - 1$$

是 Mayer 函数,  $V$  是气体体积, 积分扩展至气体所占据的整个体积, 而  $\varphi(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|)$  是二体相互作用势. 有一般规则可将任一  $l$  的  $B_l$  通过  $f_{ij}$  写出. 经简化后得到  $B_3$  的表达式为

$$B_3 = -\frac{1}{3} \iiint f_{12}f_{13}f_{23} d^3 q_1 d^3 q_2.$$

实际上, 仅能计算出前几个位力系数.

系数用  $b_l$  表达的  $v^{-1}$  的幂级数可用来描述  $s$  个粒子的平衡关联函数; 这个事实的一个推论是, 可以用简单方式获得物态方程.

关于位力展开存在量子统计的类似结果.

#### 参考文献

- [1] Mayer, J. E. and Geppert-Mayer, M. G., *Statistical mechanics*, Wiley, 1940.
- [2] Feynman, R., *Statistical mechanics*, M. I. T., 1972.

[3] Боголюбов, Н. Н., Избранные труды, т. 2, Киев, 1970 (英译本: Bogolyubov, N. N., Problems of a dynamical theory in statistical physics, North-Holland, 1962).

[4] Uhlenbeck, G. E. and Ford, G. V., Lectures in statistical mechanics, Amer. Math. Soc., 1963.

И. П. Павлоцкий 撰

【译注】1. 正确条目名应为位力展开 (virial expansion), 而英译名 virial decomposition (位力分解) 是不恰当的.

2. 关于量子系统的位力展开可参考 [B3], [B4].

#### 参考文献

[B1] Mason, E. A. and Spurling, T. H., The virial equation of state, Pergamon, Oxford, 1969.

[B2] Hirschfelder, J. O., Curtiss, C. F. and Bird, R. B., Molecular theory of gases and liquids, Wiley, New York, 1954.

[B3] Grandy, W. T. Jr., Foundations of statistical mechanics, Vol. I: Equilibrium theory, Reidel, Dordrecht, 1987.

[B4] 彭桓武, 徐锡申, 理论物理基础, 北京大学出版社, 1998. 徐锡申 译

#### 位力定理 [virial theorem; вирнала теорема]

一个定理: 一个力学系统的动能在无限长时间上的平均值  $\overline{T}$  等于力的位力在该段时间上的平均值, 即

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overline{\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}, \quad (1)$$

其中  $N$  为系统的质点的数目,  $\mathbf{F}_i$  为作用于系统  $i$  点上的力,  $\mathbf{r}_i$  即为该点的矢径. 符号上方的横道表示取相应函数在无限长时间上的平均值.

位力定理是 R. Clausius 于 1870 年证明的, 它是力学系统运动方程的一个结论, 假定该系统的运动限于空间的有限区域, 且其各点的速度 (的模值) 是有界的. 如果作用于系统各点的力是有势的, 则式 (1) 有如下形式:

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overline{(\mathbf{r}_i \cdot \nabla_i) U}. \quad (2)$$

如果施加上一个条件, 即如果势能在质点坐标系中的均匀度为  $\nu$ , 则从式 (2) 可得到系统动能和势能平均值之间的一个关系:

$$\overline{T} = \frac{\nu}{2} \overline{U}, \quad (3)$$

这个式子有很重要的实用价值. 例如, 对于一个谐振器 ( $U \sim r^2$ ,  $\nu = 2$ ), 有  $\overline{T} = \overline{U}$ , 而对于一个在 Newton 重力场中运动的点 ( $U \sim 1/r$ ,  $\nu = -1$ ), 有  $\overline{T} = -\overline{U}/2$ .

位力定理应用于力学、统计力学、天文学和原子物理 (如推导状态方程, 确定分子间的交互作用常数). 以 (2) 式和 (3) 式表示的位力定理 (对于平均

运算以及在 (2) 式和 (3) 式中使用的其他概念作适当的推广之后) 也可用于量子力学.

#### 参考文献

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Механика, 3 изд., М., 1973 (英译本: Landau, L. D. and Lifshits, E. M., Mechanics, Pergamon, 1965).

[2] Давыдов, А. С. Квантовая механика, М., 1963 (英译本: Davydov, A. S., Quantum mechanics, Pergamon, 1965).

[3] Hirschfelder, J. O., Curtiss, C. F. and Bird, B. R., Molecular theory of gases and liquids, Wiley, 1954.

[4] Ольховский, И. И., Курс теоретической механики для физиков, 2 изд., М., 1974.

И. И. Ольховский 撰 王克仁 译 诸德超 校

虚位移原理 [virtual displacements, principle of; возможных перемещений принцип], 虚速度原理 (principle of virtual velocities), 虚功原理 (principle of virtual work)

一种微分形式的经典力学变分原理 (variational principles of classical mechanics), 表示由理想约束联结起来的力学系统之平衡的最一般的条件.

根据这个原理, 一系统在某位置上处于平衡, 当且仅当在任何时刻, 主动力在所有离自该位置的虚位移上所做的功等于或小于零:

$$\sum_v \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v \leq 0, \quad (*)$$

所谓虚位移, 乃是与施加在系统上的约束相容的一个无限小位移  $\delta \mathbf{r}_v$ .

如果约束是保持形式的 (双面的), 则虚位移是可逆的, 条件 (\*) 必须用等号; 如果约束是非保持的 (单面的), 虚位移就可能是不可逆的. 如系统在主动力作用下发生位移, 其约束将通过反作用力  $\mathbf{R}_v$  (被动力) 作用在系统的某些点上; 反作用力的确定则基于下述假定, 即约束对于系统的力学上的作用在用其所产生的反作用力来代替约束的意义下已经全部考虑进去了 (释放公理). 如果反作用力所作的元功的和  $\sum_v \mathbf{R}_v \cdot \delta \mathbf{r}_v \geq 0$ , 那么这些约束就称之为理想约束; 在上面的式子中, 对于可逆虚位移用等号, 对于不可逆位移用等号和大于号. 系统的平衡状态可用  $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(t_0)$  来表示, 如果系统处于平衡状态时的初始速度  $\mathbf{v}_v(t_0) = 0$ , 那么, 系统将继续保持在这个平衡状态上; 这里所作的假定是: 在任何时刻  $t$ ,  $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(t_0)$  和  $\mathbf{v}_v = 0$  满足约束方程.

条件 (\*) 包含着理想约束系统的所有方程和平衡定律; 因此完全有理由说, 全部静力学可以归结为 (\*) 这一个普遍的公式.



以虚位移原理所表示的平衡定律, 首先是由 G. Ubaldi 对杠杆和动滑轮或滑车组提出的. G. Galileo 针对于斜面的情况建立了这个定律. 并把它看作是简单机械平衡的共同特性. J. Wallis 把它作为静力学的一个基本定律, 并由此导出机械的平衡理论. R. Des-cartes 把全部静力学归结为一条原理, 其在实质上与 G. Galileo 的原理相同. J. Bernoulli 首先认识到这个原理的普遍性和其在求解静力学问题中的用处. J. L. Lagrange ([1]) 把这个原理表示成一般形式, 也就是把静力学归结为一个普遍公式, 并对处于保持 (双面) 约束下的系统作出了一个不完全严格的证明. Lagrange 把这个静力学的普遍公式系统地用于任意力系的平衡问题, 他使用自己的方法应用这些公式, 证明了物系的一些普遍的性质, 解决了静力学的各种各样问题, 包括不可压缩的、可压缩的和弹性的液体的平衡问题. Lagrange 认为这个原理是整个力学的基本原理. 虚功原理的严格证明是 J. Fourier ([2]) 和 М. В. Остроградский ([3]) 给出的, 他们并将之推广到单面 (非保持) 约束的情况.

## 参考文献

- [1] Lagrange, J. L., *Mécanique analytique*, A. Blanchard, reprint, 1965.  
 [2] Fourier, J.: *J. École Polytechnique* II (1798), 20.  
 [3] Остроградский, М. В., *Лекции по аналитической механике*, Собр. соч. т. 1, ч. 2, М.-Л., 1946.

В. В. Румянцев 撰

【补注】 如果虚位移不是均匀地分布在整个系统上, 则 (\*) 式应该用如下对整个系统的积分来代替:

$$\int_V \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} V \leq 0$$

## 参考文献

- [A1] Szabo, J., *Geschichte der mechanischen Prinzipien*, Birkhauser, 1977.  
 [A2] Szabo, J., *Höhere technische Mechanik*, Springer, 1958.  
 [A3] Rosenberg, R. M.: *Analytical dynamics of discrete systems*, Plenum, 1977.

王克仁 译 诸德超 校

### 虚渐近网 [virtually-asymptotic net; виртуально-асимптотическая сеть]

Euclid 空间中曲面  $V_2$  上的一个网 (微分几何学中的) (net (in differential geometry)), 它在形变 ( $f: V_2 \rightarrow V_2^*$ ) 下变为曲面  $V_2^*$  的渐近网 (asymptotic net). Voss 曲面 (Voss surface) 就是以存在共轭虚渐近网而著称的曲面.

## 参考文献

- [1] Шуликовский, В. И., *Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении*, М.,

1963.

В. Т. Базылев 撰 沈纯理 译

## 粘性 [viscosity]

【补注】 由分子间的力引起的阻碍流动的流体和气体的性质. 在“流线型流动”中流体可以看作一些以不同速度运动即单纯剪切运动 (simple shearing motion) 的内含的平行层. 由粘性力引起的阻力给出反抗层之间速度差的切向力. Newton 粘性定律 (Newton law of viscosity) 表明, 单位面积的该力正比于速度梯度. 显现这种性质的流体称为 Newton 流体 (Newton fluids).

## 参考文献

- [A1] Batchelor, G. K., *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1974. 李维新 译

## 粘性解 [viscosity solutions]

【补注】 形如  $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$  的二阶完全非线性偏微分方程的解的一个概念, 其中  $u$  是定义在集合  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  上的实值函数,  $F: \Omega \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbf{R}$  是连续的 ( $\mathcal{S}^n$  是实对称  $(n \times n)$  矩阵空间). 这个概念当  $F$  满足

$$F(x, r, p, X) \geq F(x, s, p, Y), \quad (\text{A1})$$

每当  $r \geq s$  且  $X \leq Y$

(具有通常的关于对称矩阵的次序关系) 时是适当的. 对  $X$  的反单调性是十分弱的椭圆性条件, 特别地, 它为一阶方程所满足. 例子包括经典的 Hamilton-Jacobi 方程, 最优控制中的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程, 微分对策中的 Isaacs 方程, 可能退化的线性椭圆型和抛物型方程, 微分几何的各种方程 (Monge-Ampère, 极小曲面), 等等.

一个上 (对应地, 下) 半连续函数  $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  是  $F = 0$  在  $\Omega$  中的粘性下解 (对应地, 粘性上解), 如果对每一个  $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^n)$  和  $\Omega$  中  $u - \varphi$  的局部极大 (对应地, 极小) 点  $z$ , 有  $F(z, u(z), D\varphi(z), D^2\varphi(z)) \leq 0$  (对应地,  $F(z, u(z), D\varphi(z), D^2\varphi(z)) \geq 0$ ). 连续函数  $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  是  $F = 0$  在  $\Omega$  中的粘性解, 如果它同时是  $F = 0$  在  $\Omega$  中的粘性下解和粘性上解. 定义粘性下解和粘性上解的不等式, 当  $u$  是  $F \leq 0$  或  $F \geq 0$  在一开集中的古典解时, 它们是结构条件 (A1) 和对极值的必要条件的推论, 这个事实表明粘性解的概念和二阶椭圆型方程的经典极值原理之间的联系.

这个概念的重要性在于下列事实: 相当一般的唯一性定理和存在性定理对粘性解成立. 一个典型例子是唯一有界的和一致连续的函数  $u(x)$ ,  $x = (t, y) \in [0, T] \times \mathbf{R}^n$  的存在性和唯一性, 它是  $u_t + G(D_y u,$

$D_y^2 u = 0$  在  $(0, T] \times \mathbf{R}^m$  (当  $T > 0$ ) 上的粘性解, 且对  $y \in \mathbf{R}^m$  满足  $u(0, y) = \psi(y)$ , 其中  $G(q, Z)$  是在  $(q, Z) \in \mathbf{R}^m \times \mathcal{S}^m$  中连续且在  $Z$  中是反单调的,  $\psi$  在  $\mathbf{R}^m$  上有界且一致连续. 事实上, 存在性本质上是唯一性证明的一个推论, 在此证明中还建立了解对  $\psi$  的单调性和连续依赖性, 还可以用改造过的 Perron 法 (Perron method) 来证明.

除了许多存在性、唯一性和比较性的结果外, 粘性解理论现在还包括处理其他一些基本问题, 例如, 包括经典 Dirichlet, Neumann 和斜微商条件在内的各种边界条件的正确提法; 数值近似的收敛性; 解的正则性和其他定性性质的研究; 包括大变差和均匀化问题的许多渐近问题的分析; 拓广到间断数据; 以弱方式过渡到极限; 和拓广到某些积分 - 微分算子.

粘性解的最初的应用是在对确定性发展和随机性发展的最优控制和微分对策的理论中. 特别地, 相关的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程和 Isaacs 方程的唯一定义的粘性解都是对应值的函数, 且这个事实提供了动态规划论证的一个完全数学的理由.

该理论的拓广包括在无限维空间中对一阶和二阶方程问题的研究, 目的之一是对利用偏微分方程的最优控制的动态规划方式提供一个理论基础.

参考文献提供了关于该理论的某些基本信息, 且包含了许多上面所描述的各种论题的参考文献.

#### 参考文献

- [A1] Barles, G. and Perthame, B., Exit time problems in optimal control and the vanishing viscosity method, *SIAM J. Control Optim.*, **26** (1988), 1133 - 1148.
- [A2] Barles, G. and Perthame, B., Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems, *Modél. Math. et Anal. Num.*, **21** (1987), 557 - 579.
- [A3] Crandall, M. G., Semidifferentials, quadratic forms and fully nonlinear elliptic equations of second order, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Lin.*, **6** (1989), 419 - 435.
- [A4] Crandall, M. G., Evans, L. C. and Lions, P. L., Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **282** (1984), 487 - 502.
- [A5A] Crandall, M. G. and Lions, P. L., Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. Part I. Uniqueness of viscosity solutions, *J. Funct. Anal.*, **62** (1985), 379 - 396.
- [A5B] Crandall, M. G. and Lions, P. L., Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. Part II. Existence of viscosity solutions, *J. Funct. Anal.*, **65** (1986), 368 - 405.
- [A5C] Crandall, M. G. and Lions, P. L., Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions, Part III, *J. Funct. Anal.*, **68** (1986), 214 - 247.

- [A5D] Crandall, M. G. and Lions, P. L., Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. Part IV. Hamiltonians with unbounded linear terms, *J. Funct. Anal.*, **90** (1990), 237 - 283.
- [A6] Evans, L. C. and Souganidis, P. E., A PDE approach to geometric optics for certain reaction diffusion equations, *Ind. U. Math. J.*, **38** (1989), 141 - 172.
- [A7] Ishii, H., Perron's method for Hamilton-Jacobi equations, *Duke Math. J.*, **55** (1987), 369 - 384.
- [A8] Ishii, H. and Lions, P. L., Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations, *J. Diff. Equations*, **83** (1990), 28 - 78.
- [A9A] Lions, P. L., Viscosity solutions of fully nonlinear second-order equations and optimal stochastic control in infinite dimensions. Part I: The case of bounded stochastic evolutions, *Acta Math.*, **161** (1988), 243 - 278.
- [A9B] Lions, P. L., Viscosity solutions of fully nonlinear second-order equations and optimal stochastic control in infinite dimensions. Part II: Optimal control of Zakai's equation, in *Proc. Internat. Conf. Infinite Dimensional Stochastic Differential Equations (Trento)*, Lecture notes in math., Vol. **1390**, Springer, 1989.
- [A9C] Lions, P. L., Viscosity solutions of fully nonlinear second-order equations and optimal stochastic control in infinite dimensions. Part III. Uniqueness of viscosity solutions of general second order equations, *J. Funct. Anal.*, **86** (1989), 1 - 18.
- [A10] Jensen, R., The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **101** (1988), 1 - 27.

P. L. Lions, M. G. Crandall 撰 孙和生 译 陆柱家 校

#### Vitali 定理 [Vitali theorem; Витали теорема]

1) Vitali 覆盖定理 (Vitali covering theorem). 如果闭集族  $\{F\}$  为集合  $A \subset \mathbf{R}^n$  的 Vitali 覆盖 (见下), 那么从  $\{F\}$  中可以取出至多可数个互不相交的集合序列  $\{F_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , 使得

$$m_e[A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i] = 0,$$

其中  $m_e$  是  $\mathbf{R}^n$  中的外 Lebesgue 测度 (Lebesgue measure).

集合  $A \subset \mathbf{R}^n$  的 Vitali 覆盖 (Vitali covering) 是  $\mathbf{R}^n$  中具有以下性质的一些子集所组成的集族  $\{E\}$ : 对任意  $x \in A$ , 在  $\{E\}$  中存在一列  $\{E_n\}$ , 满足条件

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n; \quad (1)$$

$$\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \delta_n = \delta(E_n) \rightarrow 0, \quad (2)$$

其中  $\delta(E_n)$  表示  $E_n$  的直径; 并且



$$\inf_n \left[ \sup \frac{m_e E_n}{m I} \right] = \alpha > 0, \quad (3)$$

这里的  $\sup$  是关于所有 (面平行于坐标平面且含有集合  $E_n$  的方体)  $I$  而取的; 这个上确界称为  $E_n$  的正则参数.

当  $\{F\}$  是由面平行于坐标平面的方体组成时, 这个定理是 G. Vitali ([1]) 证明的. 如果  $\{F\}$  为集合  $A$  的 Vitali 覆盖, 而不是通常意义下的覆盖, 那么前面叙述的 Vitali 定理仍然成立. 注意, 后面的条件是不可少的, 即使  $\{F\}$  是由线段组成, 且对任意  $x \in A$ , 在  $\{F\}$  中有一列  $\{F_n\}$ , 使得  $F_n$  以  $x$  为心, 且其直径趋于 0.

#### 参考文献

- [1] Vitali, G., Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali, *Atti Accad. Sci. Torino*, **43** (1908), 75 - 92.
- [2] Saks, S., *Theory of the integral*, Hafner, 1952 (译自波兰文). И. А. Виноградова 撰
- 【补注】当  $n = 1$  时, Vitali 覆盖定理是证明单调函数几乎处处存在有限导数的 Lebesgue 定理 (Lebesgue theorem) 的主要工具 ([A2]).

还有其他定理, 称为 Vitali 收敛定理 (Vitali convergence theorem). 假设  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  为一测度空间 (measure space),  $1 \leq p < \infty$ ,  $(f_n)_{n=1}^\infty$  为  $L_p(X)$  中的一列函数,  $f$  为  $\mu$  几乎处处有限的  $\mathcal{A}$  可测函数, 而  $f_n \rightarrow f$   $\mu$  几乎处处成立, 那么  $f \in L_p(X)$  且  $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$ , 当且仅当: 1) 对任意正数  $\varepsilon > 0$ , 存在集合  $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$  且  $\mu(A_\varepsilon) < \infty$  使得  $\int_{A_\varepsilon} |f_n|^p d\mu < \varepsilon$  对一切  $n \in \mathbb{N}$  成立; 2)  $\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \int_E |f_n|^p d\mu = 0$  关于  $n$  一致成立, 见 [A2].

至少还有两个冠以 Vitali 的名字的常用定理. 一个是推广 Lebesgue 控制收敛定理的所谓等度可积或一致可积函数族的 Vitali 定理. 另一个是 Vitali-Hahn-Saks 定理 (Vitali-Hahn-Saks theorem), 这个定理说, 在  $\sigma$  域上一列 ( $\sigma$  可加) 测度的逐点极限, 仍为 ( $\sigma$  可加) 测度.

#### 参考文献

- [A1] Royden, H. L., *Real analysis*, Macmillan, 1963, Chapt. 5.
- [A2] Hewitt, E. and Stromberg, K., *Real and abstract analysis*, Springer, 1965.
- [A3] Dunford, N. and Schwartz, J. T., *Linear operators*, 1, Interscience, 1958.
- [A4] Federer, H., *Geometric measure theory*, Springer, 1969.

2) 关于全纯函数列一致收敛的 Vitali 定理 (Vitali theorem on the uniform convergence of a sequence of holomorphic functions). 设复  $z$  平面的区域  $D$

上的全纯函数列  $\{f_n(z)\}$  一致有界 (见一致有界性 (uniform boundedness)) 且  $\{f_n(z)\}$  在  $E$  上收敛, 其中  $E$  有一极限点在  $D$  内; 那么  $\{f_n(z)\}$  在  $D$  内部一致收敛于某个全纯函数, 即在每个紧集  $K \subset D$  上一致收敛. 这定理由 G. Vitali ([1]) 得到.

利用紧性原理 (compactness principle), 上述 Vitali 定理可以作如下改进, 把  $D$  上一致有界性条件换成在每个紧集  $K \subset D$  上的一致有界性. 此外, 还有有关亚纯函数的正规族 (normal family) 的 Vitali 定理、拟解析函数族以及多复变全纯函数族的 Vitali 定理; 在最后的情形, 还必须对集合  $E \subset D \subset \mathbb{C}^n$  加些限制, 例如  $E$  在  $\mathbb{C}^n$  中必须含有内点 ([3], [4]).

#### 参考文献

- [1A] Vitali, G., *Rend. R. Istor. Lombardo* (2), **36** (1903), 772 - 774.
- [1B] Vitali, G., *Ann. Mat. Pura Appl.* (3), **10** (1904), 73.
- [2] Маркушевич, А. И., *Теория аналитических функций*, т. 1, 2 изд., М., 1967, 第 4 章 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957).
- [3] Montel, P., *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Gauthier-Villars, 1927.
- [4] Gunning, R. C. and Rossi, H., *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hill, 1965.

Е. Д. Соломенцев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Carathéodory, C., *Theory of functions of a complex variable*, 1, Chelsea, reprint, 1978 (译自德文).
- [A2] Conway, J. B., *Functions of one complex variable*, Springer, 1973 (中译本: J. B. 康威, 复变函数, 上海科学技术出版社, 1985).
- [A3] Remmert, R., *Funktionentheorie*, II, Springer, 1991. 王斯雷 译

#### Vitali 变差 [Vitali variation; Витали вариация]

多元函数的一种数字特征. 它可以看成一元函数的变差 (variation of a function) 在多维情形下的类比. 设函数  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , 定义在  $n$  维平行多面体  $D_n = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  上. 引进记号如下:

$$\Delta_{h_k}(f; x) = f(x_1, \dots, x_k + h_k, \dots, x_n) + \\ - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\Delta_{h_1 \dots h_k}(f; x) = \Delta_{h_k}(\Delta_{h_1 \dots h_{k-1}} f; x), \quad k = 2, \dots, n.$$

设  $\Pi$  是用超平面

1987 - 1991).

杜小杨 译

$$x_s = x_s^{(r_s)}, x_s^{(r_s)} < x_s^{(r_s+1)}, x_s^{(r_s+1)} - x_s^{(r_s)} = h_s^{(r_s)},$$

$$x_s^{(0)} = a_s, x_s^{(l_s)} = b_s, r_s = 0, 1, \dots, l_s, s = 1, 2, \dots, n$$

将  $D_n$  分成若干个  $n$  维平行多面体的任意剖分. 记  $V(f)$  为对应于一切可能剖分的和

$$\sum_{r_1=0}^{l_1-1} \dots \sum_{r_n=0}^{l_n-1} |\Delta_{h_1 \dots h_n}^{(r_1) \dots (r_n)}(f; x_1^{(r_1)}, \dots, x_n^{(r_n)})| \quad (*)$$

的上确界. 如果  $V(f) < \infty$ , 则称  $f$  在  $D_n$  上有界 (限) Vitali 变差 (bounded (finite) Vitali variation), 而记所有这样的函数所成的类为  $V(D_n)$  或简记为  $V$ . 这类函数由 G. Vitali ([1]) 定义. H. Lebesgue ([2]) 以及 M. Fréchet ([3]) 后来也相继提出过同样的变差定义. 定义在  $D_n$  上的实值函数  $f$  属于  $V(D_n)$ , 当且仅当它能表成  $f = f_1 - f_2$  的形式, 这里的  $f_1$  和  $f_2$  都有这样的性质, 使去掉绝对值号后形如 (\*) 的和是非负的 ([4]) (一元有界变差函数的 Jordan 分解 (Jordan decomposition) 的类比). 函数类  $V(D_n)$  可以用来引入多维 Stieltjes 积分 (Stieltjes integral). 特别是, 对于  $D_n$  上任意连续函数  $g$  以及  $V(D_n)$  中的任意函数  $f$ , 积分  $\int_{D_n} g(x) df(x)$  存在 ([3]).

#### 参考文献

- [1] Vitali, G., Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali, *Atti Accad. Sci. Torino*, **43** (1908), 75 - 92.
- [2] Lebesgue, H., Sur l'intégration des fonctions discontinues, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, (3), **27** (1910), 361 - 450.
- [3] Fréchet, M., Extension au cas d'intégrales multiples d'une définition de l'intégrale due à Stieltjes, *Nouv. Ann. Math. ser. 4*, **10** (1910), 241 - 256.
- [4] Hahn, H., *Theorie der reellen Funktionen*, 1, Springer, 1921.
- [5] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, B., *Functional analysis*, F. Ungar, 1955 (译自法文) (中译本: F. 黎茨, B. 塞克佛尔维-纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷, 1963; 第二卷, 1980).

Б. И. Голубов 撰 王斯雷 译

#### Viviani 曲线 [Viviani curve; Вивьяни кривая]

半径为  $R$  的球面与其一母线通过球心、半径为  $R/2$  的某个圆柱面的交线. 处于圆柱面内部的球体部分称为 Viviani 体 (Viviani solid). 这一曲线因 V. Viviani (17 世纪) 而得名.

Е. В. Шикин 撰

【补注】 Viviani 窗 (Viviani window) 是  $E^3$  中由  $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq x\}$  给出的点的集合.

#### 参考文献

- [A1] Berger, M., *Geometry*, II, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一 - 五卷, 科学出版社,

#### Владимиров 法 [Vladimirov method; Владимиров метод]

基于沿特征线积分的、求解中子在核反应堆中迁移动力学方程的最精确的数值方法之一. 1952 年 B. C. Владимиров 在解球面对称反应堆情况中的积分-微分动力学方程时提出了这个方法. 这个方法的原理可以用带中子源的次临界反应堆作例子来说明. 对一个一维球对称几何单速问题, 中子通量  $\varphi(r, \mu)$  (其中  $r$  是半径,  $0 \leq r \leq R$ ,  $\mu$  是中子速度向量和半径夹角的余弦) 方程有下列形式

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \Sigma(r) \varphi = \frac{\Sigma_s(r)}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(r, \mu') d\mu' + f(r), \quad (1)$$

其边界条件为

$$\varphi(R, \mu) = 0, \text{ 当 } \mu \leq 0 \text{ 时}, \quad (2)$$

这个条件是指没有从系统的外边界  $r = R$  外面侵入的中子;  $\Sigma(r)$ ,  $\Sigma_s(r)$  和  $f(r)$  是给定的  $r$  的分段连续函数. 运用代换

$$x = r\mu; y = r\sqrt{1 - \mu^2} \quad (3)$$

后得到方程

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \Sigma \psi(x, y) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi d\mu + f, \quad (4)$$

其中  $\psi(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}, x/\sqrt{x^2 + y^2})$ , 这个方程作为一阶常微分方程可以很容易求解, 而且

$$\psi(x, y) = \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^x \left[ \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi d\mu + f \right] e^{-\int_x^{x'} \Sigma dx''} dx'. \quad (5)$$

对动力学方程 (1) 的微分部分的每根特征线  $y = y_i$ , 我们选择一组特殊的结点  $x_{ki} = \sqrt{r_k^2 - y_i^2}$ , 其中  $r_k$  是所选网格的半径. 方程 (5) 可以用逐次逼近 (见逐次逼近法 (sequential approximation, method of)) 求解, 从函数的初始逼近开始:

$$Q(r) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi d\mu + f. \quad (6)$$

其中

$$\varphi(r_k, \mu_{ki}) = \psi(x_{ki}, y_i),$$

(其中  $\mu_{ki} = x_{ki}/r_k$ ), 在用求和代替 (5) 中的积分, 得到特征线上两个相邻点上互相有关的  $\varphi$  和  $Q$  值的表达式后, 在所有网格结点上, 很容易用 (5) 求得



$\varphi(r_k, \mu_{k_i})$ . 为了得到后面逼近中的  $Q(r)$  值, 必须计算  $\int_{-1}^{+1} \varphi d\mu$ , 这可以用圆  $x^2 + y^2 = r_k^2$  上点的求积公式得到. 逐次逼近的收敛速度由反应堆的物理特性和规模决定.

本征值问题 (确定反应堆的临界参数) 可以用类似的方法求解.

Владимиров 法可以推广到几种速度和多维问题, 可以很容易编制计算机程序. 和 Carlson 法 (Carlson method) 不同, Владимиров 法使用不同  $r$  的  $\mu$ -变量网格, 这样, 与  $r=0$  附近的区域相比较, 提高了在反应堆-真空边界 (靠近  $r=R$ ) 上的计算精度, 其中中子通量是几乎各向同性的.

#### 参考文献

- [1] Марчук, Г. И., Методы расчета ядерных реакторов, М., 1961.

В. А. Чуянов 撰 袁国兴 张宝琳 译

#### Владимиров 变分原理 [Vladimirov variational principle; Владимирова вариационный принцип]

对平稳单速齐次输运方程 (见输运方程, 数值方法 (transport equation, numerical method))

$$(\bar{\Omega}, \nabla \psi) + \Sigma(x) \psi = \lambda \int_{|\bar{\Omega}'|=1} \theta(x, \mu_0) \psi(\bar{\Omega}', x) d\bar{\Omega}', \quad (1)$$

$$\mu_0 = (\bar{\Omega}', \bar{\Omega}),$$

带边界条件

$$\psi|_{x \in \Gamma} = 0, (\bar{\Omega}, \bar{n}) < 0 \quad (2)$$

的一个变分原理, 这里  $\Gamma$  是凸有界区域  $G$  的边界. 如果散射指标  $\theta(x, \mu_0)$  是  $\mu_0$  的偶函数, 则转换到新的未知函数

$$u = \frac{[\psi(\bar{\Omega}, x) + \psi(-\bar{\Omega}, x)]}{2}$$

把问题 (1), (2) 简化成自伴形式. 在这样得出的问题中, 对最小本征值  $\lambda_1$  的 Владимиров 变分原理说明  $\lambda_1$  是泛函

$$\int_{|\bar{\Omega}|=1} \int_{|\bar{\Omega}'|=1} |(\bar{\Omega}, \bar{n})| u^2(\bar{\Omega}, x) d\bar{\Omega} ds_x +$$

$$+ \int_{|\bar{\Omega}|=1} \int_G \frac{1}{\Sigma(x)} (\bar{\Omega}, \nabla u)^2 dx d\bar{\Omega} +$$

$$+ \int_{|\bar{\Omega}|=1} \int_G \Sigma(x) u^2(\bar{\Omega}, x) dx d\bar{\Omega}$$

在满足条件

$$\int_{|\bar{\Omega}|=1} \int_{|\bar{\Omega}'|=1} \theta(x, \mu_0) u(\bar{\Omega}', x) dx d\bar{\Omega}' d\bar{\Omega} = 1$$

的函数  $u(\bar{\Omega}, x)$  的集合上的极小值. 其对应的 (非负) 本征函数实现了该泛函的极小值 ([3]). 在这变

分原理中相应的边界条件是自然的. 对较高本征值和对非齐次问题的变分原理用类似方式表述.

该原理首先由 В. С. Владимиров ([1]) 得到, 而且它引出了球面调和函数法 (spherical harmonics, method of) 中的最优边界条件. Владимиров 变分原理与有限差分法相结合, 广泛地应用于中子物理学的数值计算中.

#### 参考文献

- [1] Владимиров, В. С., Математические задачи односкоростной теории переноса частиц, М., 1961.

- [2] Марчук, Г. И., Методы расчета ядерных реакторов, М., 1961.

- [3] Davison, B., Neutron transport theory, Oxford Univ. Press, 1957.

Ю. Н. Дрожжинов 撰

【补注】亦见 Владимиров 法 (Vladimirov method).

葛显良 译 鲁世杰 校

#### Власов 动理学方程 [Vlasov kinetic equation; Власова кинетическое уравнение]

关于带电粒子的动理学方程, 其中粒子之间的相互作用通过自治电磁场予以描述. 方程具有形式 (见 [1], [2])

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}_\mathbf{r} f_\alpha +$$

$$+ \frac{e_\alpha}{m_\alpha} [\mathbf{E} + [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]] \cdot \text{grad}_\mathbf{v} f_\alpha = 0, \quad (1)$$

其中  $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  是粒子分布函数, 而指标  $\alpha$  指示粒子种类. 自治电磁场  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  根据 Maxwell 方程组 (Maxwell equations)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

得出, 其中  $\varepsilon_0$  和  $\mu_0$  为真空电容率和真空磁导率, 而体电荷密度  $\rho$  和体电流密度  $\mathbf{j}$  则与粒子分布函数  $f_\alpha$  通过

$$\left. \begin{aligned} \rho(t, \mathbf{r}) &= \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}, \\ \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) &= \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mathbf{v} d^3 \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

相联系. 如果忽略粒子间相互作用或者假定多粒子分布函数是单粒子分布函数的乘积, 则 Власов 动理学方程可由给定种类  $\alpha$  的全部粒子的分布函数的 Liouville 方程 (Liouville equation) 获得 (见 [3], [4]).

А. А. Власов 所提出的方程组 (1), (2), (3), 被广泛应用于等离子体物理学. 以方程组 (1), (2), (3) 的线性化为基础的线性理论是得到最充分发展的理论. 它被用于研究等离子体的小振荡

和稳定性 ([5])。拟线性理论, 它使非线性效应的研究成为可能, 正处于全力发展中。

#### 参考文献

- [1] Власов, А. А., «ЖЭТФ», 8 (1938), 291.
  - [2] Власов, А. А., Теория многих частиц, М.-Л., 1950 (英译本: Vlasov, A. A., Many-particle theory and its application to plasmas, Gordon & Breach, 1961).
  - [3] Боголюбов, Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М.-Л., 1946 (英译本: Bogolyubov, N. N., Problems of a dynamic theory in statistical physics, North-Holland, 1962).
  - [4] Силин, В. П., Введение в кинетическую теорию газов, М., 1971.
  - [5] Силин, В. П., Рухадзе, А. А., Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., 1961.
- Д. П. Костомаров 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Ecker, G., Theory of fully ionized plasmas, Acad. Press, 1972.

#### 【译注】

#### 参考文献

- [B1] R. Balescu, Transport processes in plasmas, Vol. 1, Classical transport, North-Holland, Amsterdam, 1988 (中译本: R. Balescu, 等离子体中的输运过程, 第一卷, 经典输运理论, 首都师范大学出版社, 1995).
  - [B2] R. Balescu, Transport processes in plasmas, Vol. 2, Neoclassical transport, North-Holland, Amsterdam, 1988 (中译本: R. Balescu, 等离子体中的输运过程, 第二卷, 新经典输运理论, 首都师范大学出版社, 1996).
- 徐锡申 译

**Volterra 方程** [Volterra equation; Вольтерра уравнение]

形如

$$\int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (1)$$

(第一类线性 Volterra 积分方程 (linear Volterra integral equation of the first kind)) 或形如

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (2)$$

(第二类线性 Volterra 积分方程 (linear Volterra integral equation of the second kind)) 的一种积分方程 (integral equation)。这里  $x, s, a$  是实数,  $\lambda$  是 (一般是复的) 参数,  $\varphi(s)$  是未知函数,  $f(x), K(x, s)$  是给定的函数, 分别在  $[a, b]$  上和区域  $a \leq x \leq b, a \leq s \leq x$  中平方可积。函数  $f(x)$  称为自由项 (free term), 而函数  $K(x, s)$  称为核 (kernel)。

Volterra 方程可以看成 Fredholm 方程 (Fredholm equation) 的特殊情形, 其核  $K(x, s)$  定义在正方形  $a \leq x \leq b, a \leq s \leq b$  上而在三角形  $a \leq x < s \leq b$  中为零。无自由项的第二类 Volterra 方程称为齐次 Volterra 方程 (homogeneous Volterra equation)。表达式

$$\int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds$$

定义一个作用在  $L_2$  上的积分算子; 它称为 Volterra 算子 (Volterra operator)。

(2) 型方程首先由 V. Volterra ([1], [2]) 作了系统的研究。Volterra 方程 (1) 的一种特殊情况, Abel 积分方程 (Abel integral equation), 首先由 N. H. Abel 作了研究。第二类 Volterra 方程理论的主要结果可描述如下。对每一个复数  $\lambda \neq \infty$ , 第二类 Volterra 方程存在平方可积的解且解是唯一的。这个解可以由逐次逼近得到 (见序列逼近法 (sequential approximation, method of)), 即作为均方收敛序列:

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi_n(s) ds + f(x) \quad (3)$$

的极限, 其中  $\varphi_0$  是一个任意的平方可积函数。在连续核  $K(x, s)$  和  $f \in C([a, b])$  的情况, 此序列在  $[a, b]$  上一致收敛到唯一的连续解。

以下的几个定理适用于第一类 Volterra 方程。如果  $f(s)$  和  $K(x, s)$  是可微的,  $K(x, x) \neq 0, x \in [a, b]$ , 且设  $K(x, x)$  和  $K'_x(x, s)$  分别在  $[a, b]$  上和  $a \leq x \leq b, a \leq s \leq b$  上平方可和, 则第一类 Volterra 方程等价于由微分第一类 Volterra 方程得到的且具有形式

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x, s)}{K(x, x)} \varphi(s) ds = \frac{f'(x)}{K(x, x)}$$

的第二类 Volterra 方程。如果至少在一点  $K(x, x) = 0$ , 则第一类 Volterra 方程的求解必须更仔细周到地研究。另一方面, 如果  $K(x, x) \equiv 0$ , 在某些条件下, 微分运算可以重复。如果微分不可能或者其结果不是第二类 Volterra 方程, 则这个第一类方程可以求解, 例如用正则化 (regularization) 算法。

在第二类 Volterra 方程的实际应用中, 很重要的是其解至少可近似地找到, 例如用逐次逼近法。然而, 其他一些方法通常是更方便, 将这样的方法之一描述如下。设  $f$  和  $K$  是连续函数。借助于分点  $x_i$ , 和  $x_0 = a, x_N = b$  把区间  $[a, b]$  细分成  $N$  个相等部分。为求  $\varphi(x_i)$  的近似值, 此区间上的积分用求积和代替, 例如用具有结点  $x_0, \dots, x_{i-1}$  的矩形公式:

$$\int_a^{x_i} K(x_i, s) \varphi(s) ds \approx \sum_{j=0}^{i-1} K(x_i, x_j) \varphi(x_j) \frac{b-a}{N}$$



于是  $\varphi(x_i)$  的近似值利用关系式

$$\varphi(x_i) = \lambda \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{i-1} K(x_i, x_j) \varphi(x_j) + f(x_i),$$

$$\varphi(x_0) = f(a) \quad (4)$$

得到. 该近似解在  $[a, b]$  上位于划分点之间点上的值可以求得, 例如, 由关系式

$$\varphi(x) \approx \lambda \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^{i-1} K(x, x_j) \varphi(x_j) + f(x),$$

$$x_{j-1} < x \leq x_j. \quad (5)$$

当  $N \rightarrow \infty$  这近似解一致收敛于第二类 Volterra 方程的精确解.

以上方法的很多修改是可能的.

上面所述的一切也适用于其核  $K(x, s)$  为  $r \times r$  维矩阵而  $\varphi$  和  $f$  为  $r$  维向量函数的 Volterra 方程.

Volterra 方程或广义 Volterra 方程 (generalized Volterra equation) 这名称也给予更一般的形如

$$\varphi(P) - \lambda \int_{D(P)} K(P, Q) \varphi(Q) dQ = f(P) \quad (6)$$

的方程, 如果像 (3) 这样的逐次逼近在函数  $\varphi$  和  $f$  的定义区域上对所有的  $\lambda \neq \infty$  在某种意义下收敛 (例如一致地或平均地). 这里  $P$  和  $Q$  是  $n$  维 Euclid 空间的点,  $D(P)$  是积分区域, 它通常依赖于点  $P$ , 对任意的  $P, D(P) \subset D$ , 以下方程可作为一个例子:

$$\varphi(x, y) - \lambda \int_a^x \int_a^b K(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta =$$

$$= f(x, y).$$

如果函数  $K(x, y, \xi, \eta)$  对  $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b, a \leq \xi \leq b, a \leq \eta \leq b$  平方可积, 而  $f(x, y)$  对  $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$  平方可积, 则序列 (3) 对  $\lambda \neq \infty$  是均方收敛的. 第一类广义 Volterra 方程通常不能化成第二类 Volterra 方程, 虽然在特殊情形这是可能的.

(2) 和 (6) 型的 Volterra 方程的一种进一步的推广是线性算子方程 (linear operator equation):

$$\varphi - \lambda A \varphi = f, \quad (7)$$

其中  $\varphi$  和  $f$  是一个 Banach 空间  $E$  的元素,  $\lambda$  是一个复参数而  $A$  是完全连续的线性算子 (见完全连续算子 (completely-continuous operator)). 这方程称为 Volterra 算子方程 (Volterra operator equation), 而算子  $A$  称为 Volterra 算子 (Volterra operator), 或抽象 Volterra 算子 (abstract Volterra operator), 如果算子  $(I - \lambda A)$  对所有的  $\lambda \neq \infty$  在  $E$  中是可逆的. 在这种情况下以下类型的序列:  $\varphi_0 \in E$  任意,  $\varphi_{n+1} = \lambda A \varphi_n + f$ , 按  $E$  的范数收敛到方程 (7) 的

一个解. 在 Volterra 算子和 Volterra 方程的现代理论中, 在抽象的和普通的 Volterra 算子之间已建立了深刻的关系.

非线性 Volterra 方程 (non-linear Volterra equation) 有时是给予这样一些 Volterra 方程的名称, 其中乘积  $K(x, s) \varphi(s)$  已换成某一关于  $\varphi(s)$  是非线性的函数  $K(x, s, \varphi(s))$ . 这种类型的方程在理论和应用的研究中经常遇到. 例如, 一个常微分方程的 Cauchy 问题 (Cauchy problem) 可以无困难地化成解非线性 Volterra 方程的问题. 应用位势论到抛物型方程的边值问题就化这样的问题到一个广义 Volterra 方程. 在非线性的 Volterra 方程的情况可以证明, 如果关于  $K(x, s, \varphi(s))$  作某些假设, 则类型 (3) 的逐次逼近在一区间  $[a, a + \Delta a]$  上收敛, 这里  $\Delta a$  充分小. 非线性 Volterra 方程的近似解可用递推关系 (4) 求得; 只要把  $K(x_i, x_j) \varphi(x_j)$  换成  $K(x_i, x_j, \varphi(x_j))$ . 如果  $K(x, s, \varphi(s))$  不依赖于  $x$ , 则这方法与 Euler 法 (Euler method) 是一样的.

#### 参考文献

- [1] Volterra, V., Sulla inversione degli integrali definiti, *Rend. Accad. Lincei*, 5 (1896), 177 - 185; 289 - 300.
  - [2] Volterra, V., Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti, *Ann. di Math.* (2), 25 (1897), 139 - 187.
  - [3] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 4, 5 изд., М., 1958 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷第一、二分册, 人民教育出版社, 1958).
  - [4] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, М., 1967 (英译本: Vladimirov, V. S., *Equations of mathematical physics*, Mir, 1984).
  - [5] Петровский, И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基, 积分方程论讲义, 高等教育出版社, 1954).
  - [6] Тихонов, А. Н., «Бюллетень Моск. ун-та» (А), 1 (1938), 8, 1 - 25. А. Б. Бакушинский 撰
- 【补注】上面给出的数值方法是 Nyström 法 (Nyström method) 对 Volterra 方程的特殊情形. 而对一般的 Fredholm 方程, (4) 是一个要求解的线性组, 这方程组在这里有递推关系的形式. 另外的数值方法, 见 [A1]. 第一类 Volterra 方程一般是不适定的 (见不适定问题 (ill-posed problems)). 如果用微分法化成第二类方程, 则其不适定性包含于  $f$  的微分中.

#### 参考文献

- [A1] Baker, C. T. H., *The numerical treatment of integral equations*, Clarendon Press, 1977.
- [A2] Burton, T. A., *Volterra integral and differential equations*, Acad. Press, 1983.

- [A3] Miller, R. K., Nonlinear Volterra integral equations, Benjamin, 1971.
- [A4] Corduneanu, C., Integral equations and applications, Cambridge Univ. Press, 1991.
- [A5] Gohberg, I. C. and Goldberg, S., Basic operator theory, Birkhäuser, 1981.
- [A6] Gohberg, I. C., Goldberg, S. and Kaashoek, M. A., Classes of linear operators, 1, Birkhäuser, 1990.
- [A7] Gohberg, I. C. and Kreĭn, M. G., Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space, Amer. Math. Soc., 1965 (译自俄文).
- [A8] Jörgens, K., Lineare Integraloperatoren, Teubner, 1970.
- [A9] Zabrejko, P. P., et al., Integral equations - a reference text, Noordhoff, 1975 (译自俄文).
- [A10] Taylor, A. E. and Lay, D. C., Introduction to functional analysis, Wiley, 1980.

葛显良 译 吴绍平 校

### Volterra 核 [Volterra kernel; Вольтерра ядро]

两个实变量  $s, t$  的 (矩阵) 函数  $K(s, t)$  使得或者当  $a \leq s < t \leq b$  时  $K(s, t) \equiv 0$ , 或者当  $a \leq t < s \leq b$  时  $K(s, t) \equiv 0$ . 如果这样一个函数是作用在空间  $L_2(a, b)$  上的线性积分算子的核, 且它本身在它不为零的三角形上平方可积, 则由它生成的算子称为 Volterra 积分算子 (见 Volterra 算子 (Volterra operator)).

A. Б. Бакушинский 撰

【补注】亦见 Volterra 方程 (Volterra equation).

葛显良 译 吴绍平 校

### Volterra 算子 [Volterra operator; Вольтерра оператор]

作用在 Banach 空间上, 其谱仅由点零组成的一个完全连续的线性算子  $V$  (见完全连续算子 (completely-continuous operator)).  $[a, b]$  上平方可和函数的空间上一个线性 Volterra 积分算子 (linear Volterra integral operator) 的例子是

$$V\varphi(x) = \int_a^x K(x, s)\varphi(s)ds.$$

一个非线性 Volterra 积分算子 (non-linear Volterra integral operator) 是形如

$$V\varphi(x) = \int_a^x K(x, s, \varphi(s))ds$$

的算子. 按 V. Volterra 的名字而命名, 他研究了对应于这样的算子的 Volterra 积分方程 (见 Volterra 方程 (Volterra equation)).

A. Б. Бакушинский 撰

【补注】Hilbert 空间上 Volterra 算子的谱理论 (不变子空间, 典范模型, 西不变量) 是非自伴算子理论中的一个重要课题. 由于这个谱仅由一个点所组成, 来

自自伴算子理论的经典谱方法不能应用于 Volterra 算子, 而新的工具用于研究这样的算子, 其中有特征算子函数理论. 更多的信息见 [A1], [A2]. Volterra 算子也用来对人口动力学问题提供数学模型 ([A3]). 对 Volterra 积分和泛函方程的一般理论见 [A4].

### 参考文献

- [A1] Gohberg, I. C. and Kreĭn, M. G., Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space, Amer. Math. Soc., 1970 (译自俄文).
- [A2] Brodskii, M. S., Triangular and Jordan representations of linear operators, Amer. Math. Soc., 1971 (译自俄文).
- [A3] Metz, J. A. J. and Diekmann, O. (eds.), The dynamics of physiologically structured populations, Lecture notes in biomath., 68, Springer, 1986.
- [A4] Gripenberg, G., Londen, S.-O. and Staffans, O., Volterra integral and functional equations, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [A5] Moiseiwitsch, B. L., Integral equations, Longman, 1977.
- [A6] Jerri, A. J., Introduction to integral equations with applications, M. Dekker, 1985.

葛显良 译 吴绍平 校

### Volterra 级数 [Volterra series; ряд Вольтерры], 积分幂级数 (integro-power series)

一个级数, 其各项含有积分, 而积分号下含有未知函数的幂. 设  $K(s, t_1, \dots, t_k)$  是立方体  $[a, b]^{k+1}$  内各自变量的连续函数,  $U(s)$  是  $[a, b]$  上任一连续函数. 表达式

$$U^{\alpha_0}(s) \int_a^b \cdots \int_a^b K(s, t_1, \dots, t_k) U^{\alpha_1}(t_1) \cdots U^{\alpha_k}(t_k) dt_1 \cdots dt_k$$

称为  $U$  的  $m$  次 Volterra 项 (Volterra term), 其中  $\alpha_0, \dots, \alpha_k$  是非负整数, 且  $\alpha_0 + \dots + \alpha_k = m$ . 称两个  $m$  次 Volterra 项属于同一类型, 如果它们的表达式中只有核  $K$  不同.  $m$  次 (各种类型的) Volterra 项的有限和称为函数  $U$  的  $m$  次 Volterra 形式 (Volterra form), 记作

$$W_m \left( \begin{matrix} s \\ U \end{matrix} \right).$$

以

$$|W|_m \left( \begin{matrix} s \\ U \end{matrix} \right)$$

记核  $K$  代之以  $|K|$  的 Volterra 形式, 并令

$$\tilde{U} = \max_{[a, b]} |U(s)|, \quad \tilde{W}_m = \max_{[a, b]} |W|_m \left( \begin{matrix} s \\ U \end{matrix} \right),$$

则有



$$\left| W_m \left( \begin{smallmatrix} s \\ U \end{smallmatrix} \right) \right| \leq \tilde{W}_m \tilde{U}^m.$$

表达式

$$W_0 \left( \begin{smallmatrix} s \\ U \end{smallmatrix} \right) + W_1 \left( \begin{smallmatrix} s \\ U \end{smallmatrix} \right) + W_2 \left( \begin{smallmatrix} s \\ U \end{smallmatrix} \right) + \cdots$$

称为 Volterra 级数 (Volterra series). 如果数项级数  $\tilde{W}_0 + \tilde{W}_1 \tilde{U} + \tilde{W}_2 \tilde{U}^2 + \cdots$  收敛, 则称所给 Volterra 级数是正则收敛的 (regularly convergent). 此时所给 Volterra 级数在  $[a, b]$  上绝对并一致收敛且其和连续.

类似地可引进多个函数变元的 Volterra 级数以及用有限维 Euclid 空间中某个闭有界集代替区间  $[a, b]$  的 Volterra 级数. Volterra 级数是抽象幂级数 (power series) 这一更一般概念的一种特殊情形.

#### 参考文献

- [1] Ляпунов, А. М., О фигурах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидов вращающейся однородной массы жидкости, Собр. соч. т. 4, М., 1959.
- [2] Schmidt, E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, III, *Math. Ann.*, **65** (1908), 370 - 399.
- [3] Вайнберг, М. М., Треногин, В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969 (英译本: Vainberg, M. M., Trenogin, V. A., Theory of branching of solutions of non-linear equations, Noordhoff, 1974). В. А. Треногин 撰
- 【补注】一个输入为  $u$ , 输出为  $y$  的非线性输入-输出动力系统引出形如

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) u(t - \tau_1) d\tau_1 + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \cdots + \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n) u(t - \tau_1) \cdots \\ & \cdots u(t - \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n + \cdots \end{aligned}$$

的 Volterra 级数, 其中  $h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n) = 0$ , 如果对某个  $j$  有  $\tau_j < 0$ . 这种级数由 V. Volterra 首次导入 ([A1]), N. Wiener 首次把它应用于系统论问题并导致 Wiener 积分 ([A2]). 关于系统论中 Volterra 级数的广泛讨论, 见 [A3].

#### 参考文献

- [A1] Volterra, V., Theory of functionals and of integral and integro-differential equations, Dover, reprint, 1959 (译自法文).
- [A2] Wiener, N., Nonlinear problems in random theory, M. I. T., 1958.

- [A3] Schetzen, M., The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems, Wiley, 1980. 沈永欢 译

#### 体积 [volume; объем трехмерного тела]

a) 三维物体的体积 (volume of a three-dimensional body) 是该物体的一个数字特征; 在物体可分解为有限个单位方体 (即边长为 1 的方体) 这种最简单的情形, 它的体积等于这些单位方体的个数. 对于可以定义体积的三维物体 (即三维 Euclid 空间的点集), 其体积具有类似于平面图形面积 (area) 的一些性质: 1) 体积是非负的; 2) 体积是可加的: 若两个无公共内点的物体  $P$  和  $Q$  分别有体积  $v(P)$  和  $v(Q)$ , 则它们的并的体积等于其各个体积的和,  $v(P \cup Q) = v(P) + v(Q)$ ; 3) 体积关于位移是不变的: 若物体  $P$  和  $Q$  均可定义体积, 且它们是全等的, 那么  $v(P) = v(Q)$ ; 以及 4) 单位方体的体积等于 1. 这些性质意味着体积是单调的: 若物体  $P$  和  $Q$  都可定义体积  $v(P)$  和  $v(Q)$ , 且  $P \subset Q$ , 则  $v(P) \leq v(Q)$ ; 以及, 两相似物体的体积与它们相应的相似系数的立方成正比.

此外, 在所有多面体所成的集合上, 存在着唯一的非负函数满足性质 1) - 4). 然而, 在平面上, 任何两个相等 (即面积相等) 的多边形有相同的形状, 即它们中的任何一个可以分解成一些多边形, 使它们拼起来成为另一个多边形, 而这条性质在三维空间中不再成立: 存在着两个相等 (体积相等的) 多面体, 它们不是等一分解的 (见等容与等部件的图形 (equal content and equal shape, figures of)).

通过从多面体集合的极限过程, 可以将体积概念推广到更广的一类物体, 而仍保持性质 1) - 4), 例如, 边界为逐片光滑的物体, 特别是, 球, 球壳, 球截形, 球心角体, 圆柱体, 锥体等. 如果有界物体  $G$  的边界是光滑曲面, 那么体积  $v(G)$  可以定义如下. 考虑含在  $G$  内的所有多面体  $P$ , 以及包含  $G$  的所有多面体  $Q: P \subset G \subset Q$ . 那么下面的等式成立:

$$\sup_{P \subset G} v(P) = \inf_{Q \supset G} v(Q).$$

这个公共值称为  $G$  的体积 (volume)  $v(G)$ . 与计算平面图形面积的情形类似, 物体体积也可以用以下方法计算: 将它分解成几个其体积为已知或容易计算的若干部分. 在这方面, Cavalieri 原理 (Cavalieri principle) 对体积是正确的: 用平行于某给定平面的任何平面, 去截可以定义体积的两个物体, 假如每一截面所截得的两平面图形的面积相等, 那么两物体有相同的体积. 积分学提供了计算体积的一般方法, 把它归结成相应重积分的计算. 用积分学也可以证明 Cavalieri 原理.

b) 体积概念到三维 Euclid 空间中更广的子集类上的扩张, 导致 Jordan 容度 (Jordan content) 以及可方体化集的概念 (见 Jordan 测度 (Jordan measure)). 上面提到的物体都是可方体化集, 所以它们的 Jordan 容度是可以定义的.

如果  $M^3$  是三维连续可微流形, 具有 Riemann 度量

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j,$$

而  $g = \det \|g_{ij}\|$ , 那么  $M^3$  内集合  $E$  的体积 (volume of a set) 由积分值

$$\iiint_E |g| dx^1 dx^2 dx^3$$

定义. 这样定义的体积, 与给定流形上局部坐标的选取无关.

c) 三维物体体积的概念可以推广到任意  $n$  维 Euclid 空间  $\mathbf{R}^n$  的子集中去;  $n$  维体积 ( $n$ -dimensional volume) 或容度 (content) 是满足条件 1) - 4) 的集函数, 而立方体应理解为  $n$  维立方体.  $n$  维空间中集合体积的计算, 归结为  $n$  重积分的计算.

设  $E$  为  $n$  维平行多面体, 由向量  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  张成, 则

$$v(E) = \sqrt{|\det \|\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\||}$$

(根号内表达式是向量  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  的 Gram 行列式 (Gram determinant)).

以

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j$$

为度量的  $n$  维 Riemann 流形的子集  $E$  的体积是积分

$$\int_E \dots \int |g| dx^1 \dots dx^n,$$

其中  $g = \det \|g_{ij}\|$ .

d) 体积概念不仅可以在 Euclid 空间中考虑, 而且可以在仿射空间中考虑. 假设  $E$  为  $n$  维仿射空间  $\mathbf{R}^n$  的子集, 而  $(x^1, \dots, x^n)$  为  $\mathbf{R}^n$  的一个给定的仿射坐标系. 设

$$V_x(E) = \int_E \dots \int dx^1 \dots dx^n.$$

如果  $(y^1, \dots, y^n)$  为另一坐标系且  $y^i = a_j^i x^j + b^i$ , 则

$$V_y(E) = |\det \|a_j^i\|| V_x(E),$$

也就是说, 积分  $V_x(E)$  是关于权  $-1$  的定号的相对不变量. 相对不变量  $V_x(E)$  是集合  $E$  的仿射体积 (affine volume). 仿射体积在平行位移下不变, 且若  $E = E_1 \cup E_2$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  以及  $V_x(E_1)$ ,  $V_x(E_2)$  都有定义, 那么  $V_x(E) = V_x(E_1) + V_x(E_2)$ . 在坐标的仿射变换下, 仿射体积不变; 仿射体积还有以下性质:  $\alpha$ ) 两物体若在同一坐标下有相同的体积, 那么它

们在另外的坐标系下也是相等的;  $\beta$ ) 若在同一坐标内, 某集合的体积等于另外两集合的体积之和, 那么在其他坐标下, 这也是对的; 以及  $\gamma$ ) 两集合体积之比在坐标的仿射变换下不变.

设  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  为  $\mathbf{R}^n$  中坐标系  $x_1, \dots, x_n$  的坐标向量, 又设原点为某固定点  $0 \in \mathbf{R}^n$ . 假设  $\mathbf{a}_i = a_j^i \mathbf{e}_j$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 为原点在  $0$  的向量系, 而  $E$  是由  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  张成的  $n$  维平行多面体, 那么

$$V_x(E) = |\det \|a_j^i\||.$$

量  $\det \|a_j^i\|$  称为  $E$  关于所选基  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  的有向体积 (oriented volume).

#### 参考文献

- [1] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1 - 2, М., 1975 (中译本: С. М. 尼科尔斯基, 数学分析教程, 第一卷, 一、二分册, 人民教育出版社, 1980 - 1981, 第二卷, 高等教育出版社, 1992).
- [2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本: А. Н. 柯尔莫果洛夫, С. В. 佛明, 函数论与泛函分析初步, 上、下册, 高等教育出版社, 1992).
- [3] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967 (中译本: П. К. 洛萨夫斯基, 黎曼几何与张量解析, 高等教育出版社, 1955).
- [4] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1971 (英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1 - 2, Mir, 1982).

Л. Д. Кудрявцев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Eves, H., A survey of geometry, 1 - 2, Allyn and Bacon, 1963. 王斯雷 译

体积形式 [volume form; объема форма], 体积元 (volume element)

【补注】令  $V$  是一个具有已给定向 (orientation) 和一个内积 (inner product) 的  $n$  维向量空间. 相应的体积形式或称体积元素即  $V$  上的  $n$  形式 (见外形式 (exterior form)) 空间中唯一的对具有给定定向的规范正交基 (相对于已给内积) 使得  $\omega(v_1, \dots, v_n) = 1$  的元素  $\omega \in \wedge^n(V)$ . 回忆一下,  $\wedge^n(V)$  是一维的. 若  $V = \mathbf{R}^n$  且有标准内积和定向, 则对  $n$  个向量  $v_1, \dots, v_n$  所成的组,  $\omega(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n)$  (这里  $v_1, \dots, v_n$  要对标准基写出, 来计算行列式), 而  $|\det(v_1, \dots, v_n)|$  是由零点起到  $v_1, \dots, v_n$  作出的线段所



成的平行多面体的体积.

若  $M$  是一有定向的 Riemann 流形, 则在定义  $M$  上的体积形式  $\omega \in \wedge^n M$  时, 要求  $\omega(x): T_x M \times \cdots \times T_x M \rightarrow \mathbf{R}$  对每点  $x \in M$  都恰好是由  $T_x M$  的内积与定向所确定的  $T_x M$  上的唯一体积元素. 时常用  $dV$  来表示  $M$  上的体积形式, 虽然在  $M$  上可能并没有一个  $(n-1)$  形式  $V$  使体积形式恰为其外导数.

在已给局部坐标  $x_1, \dots, x_n$  下, 令  $g(x)$  为决定  $T$  上内积的 2 形式 (或矩阵) (相对于基  $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$ , 见切向量 (tangent vector)), 则在此局部坐标下

$$dV = \varepsilon \det(g)^{1/2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

$\varepsilon = \pm 1$  视  $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$  之定向与  $\mathbf{R}^n$  上的标准定向是否符合而定 (在已给的坐标卡下).

在 Riemann 流形  $M$  上, 积分函数  $f$  是在流形上的积分 (integration on manifolds) 意义下在  $M$  上积分  $n$  形式  $f dV$ .

令  $*$  表示 Hodge 的星算子 (见 Laplace 算子 (Laplace operator)). 则局部地由  $\psi = \sum \psi^j (\partial/\partial x_j)$  给出的向量场的散度 (divergence of a vector field) 由函数

$$\operatorname{div}(\psi) = \sum_j \det(g)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\det(g)^{1/2} \psi^j)$$

来定义. 于是有

$$d(*\psi) = \operatorname{div}(\psi) dV,$$

且在  $M$  上的一个  $n$  链上积分, 应用 Stokes 公式即得高维散度定理 (higher-dimensional divergence theorem), 当  $M$  是  $\mathbf{R}^3$  中的有边的三维子流形时, 即得通常的散度定理为其特例.

#### 参考文献

- [A1] Spivak, M., Calculus on manifolds, Benjamin, 1965, (中译本: M. 斯皮瓦克, 流形上的微积分, 科学出版社, 1980).
- [A2] Hazewinkel, M., A tutorial to differentiable manifolds and calculus on manifolds, in W. Schiehlen and W. Wedig (eds.), Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems, Springer, Wien, 1988, 316 - 340.
- [A3] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C. and Dillard-Bleick, M., Analysis, manifolds and physics, North-Holland, 1977. 齐民友 译

**von Neumann 代数** [von Neumann algebra; Неймана алгебра]

Hilbert 空间  $H$  上有界线性算子的代数  $\mathcal{B}(H)$  的一个子代数  $A$ , 它是自伴的 (即对其中每一算子  $T$  同时包含其伴随算子  $T^*$ ) 且与其双交换子一致 (即

它包含所有这样的算子  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $T$  与  $A$  中一切算子可交换的每一算子可交换). 这些代数是由 J. von Neumann ([1]) 引入的. 根据 von Neumann 定理 (theorem of von Neumann), 一个自伴子代数  $A \subset \mathcal{B}(H)$  是 von Neumann 代数, 当且仅当  $A$  (或其单位球) 按弱、强、超弱或超强算子拓扑 (operator topology) 是闭的 (按一致算子拓扑闭是不充分的). 一个给定的对称 Banach 代数 (Banach algebra)  $B$  (亦见对称代数 (symmetric algebra)) 等距同构于某个 von Neumann 代数, 当且仅当它是一个等距于某个对偶空间的  $C^*$  代数 ( $C^*$ -algebra); 满足  $E^* = B$  的 Banach 空间  $E$  是在等距同构意义下唯一确定的且可认为等同于等距同构于  $B$  的 von Neumann 代数上超弱连续线性型的空间; 此空间用  $B_*$  表示且称为  $B$  的前对偶 (pre-dual). 这样的对称 Banach 代数称为  $W^*$  代数 ( $W^*$ -algebra). 设  $A$  是 Hilbert 空间  $H$  上的一个 von Neumann 代数,  $A'$  是它的交换子,  $Z = A \cap A'$  是它的中心,  $P$  是属于  $A$  的一个投影, 且  $P'$  是属于  $A'$  的一个投影. 子空间  $P'H$  在  $A$  下是不变的, 且从  $A$  限制到  $P'H$  的算子族构成  $P'H$  中一个 von Neumann 代数, 它用  $A_P$  表示且称为诱导代数 (induced algebra), 而映射  $T \rightarrow T|_{P'H}$  称为  $A$  到  $A_P$  上的诱导映射 (induced mapping); 在子空间  $PH$  上形如  $P' T P$ ,  $T \in A$  的有界算子族构成  $PH$  中的一个 von Neumann 代数  $A_P$ , 它称为约化的 (reduced). 如果  $P = P' \in Z$ , 则约化的和诱导的 von Neumann 代数是同一个. von Neumann 代数的一个等距同构称为是代数的 (algebraic); Hilbert 空间  $H$  上的一个 von Neumann 代数称为空间同构 (spatially isomorphic) 于空间  $K$  上 von Neumann 代数  $B$ , 如果存在一个映射  $H$  到  $K$  上的酉算子 (unitary operator)  $U$  且使得  $B = U A U^{-1}$ . 在给定 Hilbert 空间上的任意一族 von Neumann 代数的交是一 von Neumann 代数; 包含一个给定集合  $M$  的最小的 von Neumann 代数称为由集合  $M$  生成的 von Neumann 代数. 设  $H_i, i \in I$  是 Hilbert 空间,  $H = \sum^{\oplus} H_i$  是它们的直和,  $A_i$  是  $H_i$  上一个 von Neumann 代数,  $T$  是  $\mathcal{B}(H)$  中的这样一些算子, 每一个  $H_i$  在  $T$  作用下不变且  $T$  到  $H_i$  的限制在  $A_i$  中,  $A$  是由这些  $T$  生成的  $H$  上 von Neumann 代数; 这个 von Neumann 代数称为  $A_i$  的直积 (direct product), 且表示成  $A = \times_{i \in I} A_i$ . 构成张量积的运算, 包括有限和无限两者, 也可对 von Neumann 代数定义. 一个 von Neumann 代数称为一个因子 (factor), 如果它的中心由单位元素的乘子组成.

设  $A$  是一个 von Neumann 代数而  $A^+$  是其正算子的集合.  $A$  上的一个权 (weight) 是从  $A^+$  到  $[0, \infty]$  中的一个加性映射  $\phi$  且在用正数相乘下是齐性

的. 一个权  $\varphi$  称为迹 (trace), 如果对所有的  $T \in A^+$  和  $A$  中所有的酉算子  $U$ ,  $\varphi(UTU^{-1}) = \varphi(T)$ . 一个迹称为有限的 (finite), 如果对所有的  $T \in A$ ,  $\varphi(T) < \infty$ ; 迹称为半有限的 (semi-finite), 如果对任何  $S \in A^+$ , 量  $\varphi(S)$  是形如  $\varphi(T)$  的数的最小上界, 其中  $\varphi(T) < \infty$  且  $0 \leq T \leq S$ ; 迹称为正合的 (exact), 如果  $\varphi(T) = 0$ ,  $T \in A^+$  蕴涵  $T = 0$ ; 迹称为正规的 (normal), 如果对任何具有最小上界  $T$  的  $A^+$  中递增元素族  $T_\alpha$ , 量  $\varphi(T)$  是数  $\varphi(T_\alpha)$  的最小上界. 一个 von Neumann 代数  $A$  称为有限的, 如果存在  $A$  上一族正规有限迹分离  $A$  的点;  $A$  称为真无限的 (properly infinite), 如果不存在  $A$  上非零有限迹;  $A$  称为半有限的, 如果存在一个  $A$  上正合正规半有限迹;  $A$  称为纯无限的 (purely infinite), 或 III 型代数 (algebra of type III), 如果不存在  $A$  上非零正规半有限迹. 一个 von Neumann 代数称为离散的 (discrete), 或 I 型的 (algebra of type I), 如果它代数地同构于一个具有可交换的交换子的 von Neumann 代数; 这样的代数是半有限的. 一个 von Neumann 代数称为连续的 (continuous), 如果对任何非零中心投影  $P$ , von Neumann 代数  $A$  不是离散的. 一个连续的半有限代数称为 II 型的 (algebra of type II). 一个有限 II 型代数称为  $II_1$  型的 (algebra of type  $II_1$ ); 真无限 II 型代数称为  $II_\infty$  型的 (algebra of type  $II_\infty$ ). 一个 von Neumann 代数是否属于一个确定类型等价于其交换子属于同样类型这一事实, 但是一个有限 von Neumann 代数的交换子不必是有限 von Neumann 代数.

设  $A$  是一个 von Neumann 代数,  $P$  和  $Q$  是属于  $A$  的投影. 则  $P$  和  $Q$  称为等价的,  $P \sim Q$ , 如果存在元素  $U \in A$  使得  $P = U^*U$  且  $Q = UU^*$ . 如果存在一个投影  $P_1 \in A$  使得  $P \sim P_1$  且  $P_1 \leq Q$ , 则记作  $P \leq Q$ ; 关系  $\leq$  是偏序关系. von Neumann 代数按照型的分类可借助于这个关系来实行; 特别地: 一个投影  $P \in A$  称为有限的, 如果  $P_1 \in A$ ,  $P_1 \sim P$ ,  $P_1 \leq P$  蕴涵  $P_1 = P$ ; 一个 von Neumann 代数  $A$  是有限的, 当且仅当其恒等投影是有限的;  $A$  是半有限的, 当且仅当其有限投影族的最小上界是恒等投影.

一个 von Neumann 代数  $A$  是半有限的, 当且仅当它可以被当作某一 Hilbert 代数 (Hilbert algebra) 的左 von Neumann 代数; 相应的 Hilbert 代数的元素是使得  $\varphi(x^*x) < \infty$  的那些  $x \in A$ , 其中  $\varphi$  是  $A$  上一个正合正规半有限迹. 对 III 型代数相对应的实现可借助于广义 Hilbert 代数和 von Neumann 代数上的权得到.

设  $H_p$  是维数为  $p$  的固定的 Hilbert 空间,  $p = 1, \dots, \aleph_0$ , 设  $Z$  是一个 Borel 空间, 设  $\mu$  是  $Z$  上的

一个正测度, 设  $Z = \bigcup_{p=1}^{\aleph_0} Z_p$  是分成不相交可测子集的一个划分, 设  $L_2(Z_p, \mu, H_p)$  是  $Z_p$  到  $H_p$  中平方可和  $\mu$  可测映射的 Hilbert 空间, 设

$$H = \bigoplus_{p=1}^{\infty} L_2(Z_p, \mu, H_p),$$

又设  $H(\zeta) = H_p$  对  $\zeta \in Z_p$ . 如果  $f \in H$ , 则  $f = \sum_p f_p$ , 其中  $f_p \in L_2(Z_p, \mu, H_p)$ . 设对  $\zeta \in Z_p$ ,  $f(\zeta) = f_p(\zeta)$ . 当  $T(\zeta)$  是 Hilbert 空间  $H(\zeta)$  上的一个连续线性算子, 映射  $\zeta \mapsto T(\zeta)$  称为算子的可测域 (measurable field of operators), 如果对任何  $f \in H$  函数  $\zeta \mapsto T(\zeta)f(\zeta)$  在每一集合  $Z_p$  上是可测的. 如果  $\zeta \mapsto T(\zeta)$  是算子的可测域且函数  $\zeta \mapsto \|T(\zeta)\|$  在  $Z$  上本质有界, 则对每一个  $f \in H$  存在一个单位向量  $g \in H$  使得  $\mu$  几乎处处  $g(\zeta) = T(\zeta)f(\zeta)$ . 由  $Tf = g$  (对所有的  $f \in H$ ) 定义的映射  $T: H \rightarrow H$  是  $H$  上有界线性算子, 且

$$\|T\| = \text{ess sup}_{\zeta \in Z} \|T(\zeta)\|.$$

$H$  上这样一个算子  $T$  称为可分解的 (decomposable). 假设对任意  $\zeta \in Z$  一个 von Neumann 代数  $A(\zeta)$  定义在  $H(\zeta)$  上; 映射  $\zeta \mapsto A(\zeta)$  称为 von Neumann 代数的可测域, 如果存在算子可测域的序列  $\{\zeta \mapsto T_n(\zeta)\}$ , 使得对任一个  $\zeta \in Z$ , 相应的 von Neumann 代数  $A(\zeta)$  由算子  $T_n(\zeta)$  生成. 对每个  $\zeta \in Z$  使得  $T(\zeta) \in A(\zeta)$  的  $H$  上所有可分解算子的集合是  $H$  中一个 von Neumann 代数. 它表示成

$$A = \int^{\oplus} A(\zeta) d\mu(\zeta),$$

且称为该 von Neumann 代数  $A(\zeta)$  在  $\mu$  上的直接积分 (direct integral). 可分 Hilbert 空间上的每一个 von Neumann 代数同构于因子的直接积分. 任一 von Neumann 代数有一个代数的分解, 这就是为什么因子理论对 von Neumann 代数的一般理论是有价值的原因.

von Neumann 代数在与 Hilbert 空间算子相联系的问题中自然地出现, 且在算子理论本身和在群与代数的表示理论中, 也在动力系统理论、统计物理学和量子场论中有很多应用.

#### 参考文献

- [1A] Murray, F. J. and Neumann, J. von, On rings of operators, *Ann. of Math.* (2), **37** (1936), 116 – 229.
- [1B] Murray, F. J. and Neumann, J. von, On rings of operators II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 208 – 248.
- [2] Murray, F. J. and Neumann, J. von, On rings of operators, IV, *Ann. of Math.* (2), **44** (1943), 713 – 808.



- [3] Dixmier, J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien: algèbres de von Neumann, Gauthier-Villars, 1957.
- [4] Dixmier, J.,  $C^*$  algebras, North-Holland, 1977 (译自法文).
- [5] Sakai, S.,  $C^*$ -algebras and  $W^*$ -algebras, Springer, 1971.
- [6A] Neumann, J. von, On infinite direct products, *Compos. Math.*, 6 (1938), 1 - 77.
- [6B] Neumann, J. von, On rings of operators III, *Ann. of Math.* (2), 41 (1940), 94 - 161.
- [7] Guichardet, A., Produits tensoriels infinis et représentations des relations d'anticommutation, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 83 (1966), 1 - 52.
- [8] Takesaki, M., Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture notes in math., 128, Springer, 1970.
- [9] Zsidó, L., Topological decompositions of operator algebras, in A. Salam (ed.): Global Analysis and Its Applications (Trieste, 1972), Vol. 3, Internat. Atom. Energy Agency, 1974, 305 - 308.
- [10] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本: Naimark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984). A. И. Штерн 撰

【补注】借助于上面定义的优化关系  $\prec$ , von Neumann 代数的型可表述如下. von Neumann 代数  $A$  是 I 型的, 如果  $A$  中每一非零中心投影优于一个非零 Abel 投影. (一个 Abel 投影 (Abelian projection) 是一投影  $e$  使得  $eAe$  是 Abel 的.) 如果  $A$  中不存在非零有限投影, 即  $A$  是纯无限的 (purely infinite), 则它是 III 型的. 如果  $A$  没有非零 Abel 投影且  $A$  中每一非零中心投影优于  $A$  的一个非零有限投影, 则  $A$  是 II 型的. 如果  $A$  是有限的且是 II 型的, 则它是  $II_1$  型的. 如果  $A$  是 II 型的且没有非零中心有限投影, 则  $A$  是  $II_\infty$  型的. 每一个 von Neumann 代数是唯一地可分解成 I,  $II_1$ ,  $II_\infty$ , III 型 von Neumann 代数的直和, 且因而一个因子属于这些型之一.

一个 I 型因子同构于对某个 Hilbert 空间  $H$  的  $\mathcal{B}(H)$ . 一个  $I_n$  型因子是  $\mathbb{C}$  上  $(n \times n)$  矩阵的代数.

一个 von Neumann 代数或因子是超有限的 (hyperfinite), 如果它由有限因子 (finite factors) 即矩阵代数的一个上升序列生成. 恰好存在一个超有限  $II_1$  型因子和一个超有限  $II_\infty$  型因子 (精确到同构), ([A7]). 关于型和因子的更详细情况, 例如  $III_0$ ,  $III_1$ ,  $III_\lambda$  型和更精细的分类结果, 见 [A1], [A4], [A5], [A7] - [A9].

纽结理论最近的突破性进展的一部分来自关于子因子分类的工作; 见纽结理论 (knot theory) 的补注及那里给出的参考文献, 亦见 [A3], [A6].

## 参考文献

- [A1] Bratteli, O. and Robinson, D. W., Operator algebras and quantum statistical mechanics, I - II, Springer, 1979.
- [A2] Kadison, R. V. and Ringrose, J. R., Fundamentals of the theory of operator algebras, I - II, Acad. Press, 1986.
- [A3] Jones, V. F. R., A new knot polynomial and von Neumann algebras, *Notices Amer. Math. Soc.*, 33 (1986), 219 - 225.
- [A4] Jones, V. F. R., Subfactors and related topics, in D. E. Evans and M. Takesaki (eds.): Operator Algebras and Appl., Vol. 2, Cambridge Univ. Press; 1988, 103 - 118.
- [A5] Ocneanu, A., Quantized groups, strong algebras, and Galois theory for algebras, in D. E. Evans and Masamichi Takesaki (eds.), Operator Algebras and Appl., Vol. 2, Cambridge Univ. Press, 1988, 119 - 172.
- [A6] de la Harpe, P., Kervaire, M. and Weber, C., On the Jones polynomial, *Enseignement Math.*, 32 (1986), 271 - 335.
- [A7] Connes, A., Classification of injective factors, *Ann. of Math.*, 104 (1976), 73 - 115.
- [A8] Connes, A. and Takesaki, M., The flow of weights on factors on type III, *Tohoku Math. J.*, 29 (1977), 473 - 573.
- [A9] Connes, A., Une Classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 6 (1973), 133 - 252. 葛显良 译 鲁世杰 校

## von Neumann 遍历定理 [von Neumann ergodic theorem; Неймана теорема эргодическая]

对 Hilbert 空间  $H$  上任一等距算子  $U$  以及任一  $h \in H$ , 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k h = \bar{h}$$

(按  $H$  的范数收敛意义下) 存在. 对  $H$  上酉变换的一个连续单参数群  $\{U_t\}$  以及任一  $h \in H$ , 极限

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_t h dt = \bar{h}$$

(在同一意义下) 存在. 这里  $\bar{h}$  是  $h$  到  $H$  的  $U$  (或  $\{U_t\}$ ) 不变元的空间上的正交投影.

J. von Neumann 在 [1] 中首次以此命题在遍历论中应用的下述形式陈述并证明了这一定理: 在测度空间 (measure space)  $(X, \mu)$  中给定了一个自同态  $T$  (或可测流 (measurable flow)  $\{T_t\}$ ),  $H = L_2(X, \mu)$ , 而  $U$  是位移算子:

$$Uh(x) = h(Tx) \text{ 或 } U_t h(x) = h(T_t(x)).$$

此时 von Neumann 定理表明,  $h(x)$  的时间平均即

$h(T^k x)$  在时间区间  $0 \leq k < n$  或  $h(T_t x)$  在时间区间  $0 \leq t < T$  上的平均值当区间增长时关于  $x$  均方收敛于  $\bar{h}(x)$  (此点常用术语平均遍历定理 (mean ergodic theorem) 加以强调). 特别是, 对充分长的区间,  $h(x)$  的平均时间均值对大多数  $x$  接近于  $\bar{h}(x)$ . 因此, von Neumann 定理 (及其推广) 常被 (尤其当应用于一种给定情形时) 称为统计遍历定理 (statistical ergodic theorem), 以与个体遍历定理 (individual ergodic theorem) 即 Birkhoff 遍历定理 (Birkhoff ergodic theorem) (及其推广) 相对照. 在所述情形下, 从后者 (以及当  $\mu(x) = \infty$  时从其证明所用的论证) 可推出 von Neumann 遍历定理. 然而, 一般地说, 当  $H$  不实现为  $L_2(X, \mu)$  且算子  $U$  或  $U_t$  不同  $X$  中任一变换相联结时, 不能从 Birkhoff 定理推出 von Neumann 定理.

von Neumann 原先的证明基于酉算子的谱分解. 后来发表了一些别的证明 (最简单的属于 F. Riesz, 见 [2]), 并被推广到 Banach 空间上更广的算子群或半群类 (见 [3], [4]).

von Neumann 定理及其推广属于算子遍历定理 (operator ergodic theorem).

#### 参考文献

- [1] Neumann, J. von, Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **18** (1932), 70 - 82.
- [2] Halmos, P. R., *Lectures on ergodic theory*, Math. Soc. of Japan, 1956.
- [3] Вершик, А. М., Юзвинский, С. А., 载于 Итоги науки. Математический анализ, 1967, М., 1969, 133 - 187.
- [4] Каток, А. Б., Синай, Я. Г., Степин, А. М., 载于 Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, 129 - 262.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 关于比较广泛的各种遍历定理, 见 [A1].

#### 参考文献

- [A1] Krengel, U., *Ergodic theorems*, de Gruyter, 1985.

沈永欢 译

#### Вороной 格型 [Voronoi lattice types; Вороного типы решеток]

$n$  维 Euclid 空间  $E^n$  中点格 (lattice of points) 的型, 由 Г. Ф. Вороной 于 1908 年在关于平行多面体一个问题的背景下提出 ([1]).

$E^n$  中的一个点集  $\varepsilon$  称为一个  $(r, R)$  系统 ( $(r, R)$ -system), 如果其中任意两点间的距离不小于给定的  $r > 0$ , 而任意一个半径大于某个给定的  $R$  的球至少包含  $\varepsilon$  的一个点. 设  $D$  是  $\varepsilon$  中一点的 Dirichlet 区域 (Dirichlet domain) (或 Dirichlet 胞腔 (Dirichlet

cell) 的凸多面体, 即空间中如下点的区域, 这些点离该点不比离系统中其他任何点远. 一个  $(r, R)$  系统  $\varepsilon$  的这些点的 Dirichlet 区域两两无公共内点, 覆盖整个空间 (即构成一个分块 (partitioning)), 且所有面都是公共的 (即构成一个正规分块 (normal partitioning)). 系统  $\varepsilon$  可联系分为 (内接于球面的) 多面体  $L$ , 对偶于  $\{D\}$  的另一个正规分块  $\{L\}$ , 其中的每一个是系统  $\varepsilon$  的某些点的凸包, 而这些点是对应于相会于分块  $\{D\}$  的一个顶点的所有的  $D$ .

两个  $n$  维点格具有相同的 Вороной 型 (Voronoi type), 如果它们的分块是彼此仿射的. 如果一个标架满足: 在度量参数 (它的向量的标量平方  $a_{ii}$  和标量积  $a_{ik} (i \neq k)$ ) 充分小变化下, 用相同于把原标架变换为新标架的仿射变换, 由原标架构造的格分块  $\{L\}$  得到新标架构造的格分块, 则这个标架称为本原的 (primitive) 或一般的 (general). 对此一个充分必要条件是原标架的分块  $\{L\}$  是单纯的. 对应于这样一个标架的参数  $a_{ik}$  的空间  $E^N$  中的点  $M$  也称为一般的 (general), 这里  $N = n(n+1)/2$ . 包含一个一般点的完全线性连通域  $\Delta$ , 其中所有点的分块  $\{L\}$  是由对应于点  $M$  的标架上构造的格的分块  $\{L\}$ , 通过与将原标架变为对应的其他点的标架相同的仿射变换得到, 称为点  $M$  的型域 (type domain of the point). Вороной 证明了  $E^N$  中的域  $\Delta$  具有顶点在坐标原点的、有限个面的凸多面角的形式, 且对任意给定的  $n$ , 只存在有限数  $\psi$  个不等价域  $\Delta$ . 他还提出了找出这些数的一个算法 ([1]). 对  $n = 1, 2, 3, 4$ ,  $\psi$  分别为 1, 1, 1, 3, Вороной 还证明了将  $E^n$  分为相同的凸平行多面体, 使得顶点处有  $n+1$  个平行多面体相交 (本原平行多面体) 的最一般 (即不一定是 Dirichlet 型) 的正规分块, 是格的分块  $\{D\}$  的一个仿射象. 因此, 他就将这样的平行多面体的研究归结为二次型理论. 对本原的平行多面体 (即某些顶点处有多于  $n+1$  个平行多面体相交), 其到格的域  $D$  中的仿射变换的可能性 (对任意  $n$ ) 尚未解决. 仅知道对  $n = 2, 3, 4$  答案是肯定的.

二维格的本原域  $D$  是内接于圆且具有一个对称中心的凸六边形, 并且反之亦然. 在三维格的情形, 它是一个 14 边形, 组合地类似一个具有 8 个六边形和 6 个四边形面的立方八面体; 每一个这样的面有一个对称中心, 使得从它的中心发出到这些面的中心的线段垂直于这些面, 并且反之亦然.  $n = 2$  时非本原域  $D$  是一个矩形. 对  $n = 3$ , 它或是一个具有 4 个六边形和 8 个平行四边形面的 12 面体, 或是一个平行四边形的 12 面体, 或是以本原 2 维  $D$  为底的垂直六面棱柱, 或是一个长方平行六面体. 对  $n = 4$ , 存在 3 个不同 Вороной 格型的本原  $D$ , 和 49 个非本原



的. 过渡到  $n = 5$  有一个很大的跳跃, 有 221 个不同的本原  $D([4])$ . 这个结果是由引进新概念  $C$  型格 ( $C$ -type lattice) 而得到的: 分块  $\{L\}$  的一维骨架而不是分块本身彼此仿射的格称为有相同的  $C$  型.

#### 参考文献

- [1] Вороной, Г. Ф., Собр. соч., т. 2, К., 1952, 239 – 368.
- [2] Делоне, Б. Н., «Изв. АН СССР, 7 сер., Отд. физ.-матем. наук», 1929, No. 1, 79 – 110; No. 2, 147 – 164.
- [3] Делоне, Б. Н., «Успехи матем. наук», 1937, в. 3, 16 – 62; 1938, в. 4, 102 – 164;
- [4] Ryshkov, S. S. and Baranovskii, E. P.,  $C$ -types of  $n$ -dimensional lattices and 5-dimensional primitive parallehedra (with an application to the theory of coverings), *Proc. Steklov Inst. Math.*, 137 (1975) (*Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 137 (1975)).

В. Н. Делоне 撰

【补注】人们也用下述一些短语代替“Dirichlet 胞腔”: “Вороной区域”(Voronoi region), “第一 Brillouin 带”(first Brillouin zone), “Dirichlet-Вороной区域”(Dirichlet-Voronoi region), “Wabenzelle”, “蜂巢形”(honeycomb), “ $z$  作用域”(domain of action of  $z$ ). 按 Dirichlet-Вороной 区域铺砌或分块称为 Dirichlet-Вороной 铺砌 (Dirichlet-Voronoi tiling), 或 Dirichlet 铺砌 (Dirichlet tiling), 或 Вороной 铺砌 (Voronoi tiling): Вороной 问题 (Voronoi problem) 是: 是否每一个平行多面体是一个格的 Dirichlet-Вороной 区域的仿射象. 对  $n \leq 4$  答案是肯定的 ([2A]), 进一步的结果见 [A3], p. 170 及其以下.

#### 参考文献

- [A1] Conway, J. H. and Sloane, N. J. A., *Sphere packings, lattices and groups*, Springer, 1988.
- [A2] Erdős, P., Gruber, P. M. and Hammer, J., *Lattice Points*, Longman, 1989.
- [A3] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., *Geometry of numbers*, North-Holland, 1987.
- [A4] Grünbaum, B. and Shephard, G. C., *Tilings and patterns*, Freeman, 1987.
- [A5] Delone, B. N., Galivlin, R. V. and Shtogrin, N. I., The types of Bravais lattices, *J. Soviet Math.*, 4 (1975), 1, 79 – 156. (*Sovrem. probl. Mat.*, 2 (1973), 119 – 257).

刘振宏 译

#### Вороной 求和法 [Voronoi summation method; Вороного метод суммирования]

序列的一种矩阵求和法 (matrix summation method). 它是由数值序列  $\{p_n\}$  定义的, 并记作  $(W, p_n)$ . 序列  $\{s_n\}$  依方法  $(W, p_n)$  可和于数  $S$ , 如果

$$\frac{s_0 p_n + s_1 p_{n-1} + \cdots + s_n p_0}{p_0 + \cdots + p_n} \rightarrow S.$$

特别地, 若  $p_0 = 1, p_k = 0 (k \geq 1)$ , 序列依  $(W, p_n)$  方法可和于数  $S$ , 意即序列收敛于  $S$ . 若  $p_k = 1 (k \geq 0)$ , 得到 Cesàro 求和法 (Cesàro summation methods). 若  $p_0 > 0, p_k \geq 1 (k \geq 1)$ ,  $(W, p_n)$  方法是正则的 (见正则求和法 (regular summation methods)), 当且仅当  $p_n / (p_0 + \cdots + p_n) \rightarrow 0$ . 任何两个正则方法  $(W, p_n)$  与  $(W, p'_n)$  相容 (见求和法的相容性 (compatibility of summation methods)).

Вороной 求和法首先由 Г. Ф. Вороной 引进 ([1]), 1919 年 N. E. Nörlund 也发现了. 所以这个方法在西方文献中有时称之为 Nörlund 法 (Nörlund method), 并使用记号  $(N, p_n)$  或  $N(p_n)$ .

#### 参考文献

- [1] Вороной, Г. Ф., в кн.: *Дневник одиннадцатого съезда русских естествоиспытателей и врачей*, СПб, 1902, 60 – 61.
- [2] Hardy, G. H., *Divergent series*, Clarendon, 1949.

Ф. И. Харшиладзе 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Moore, C. N., *Summable series and convergence factors*, Dover, reprint, 1966.

罗嵩龄 译

#### 涡环 [vortical ring; вихревое кольцо]

一种具有小横截面圆环形状的涡线. 由涡决定液体质点速度的一般公式使得有可能将无限液体中由涡环产生的流动之速度势  $\varphi(z, r)$  和 Stokes 流函数  $\psi(z, r)$  表示为含零阶和一阶的 Bessel 函数的积分:

$$\varphi(z, r) = \frac{1}{2} a \kappa \int_0^\infty e^{-kz} J_0(kr) J_1(ka) dk,$$

$$\psi(z, r) = -\frac{1}{2} a \kappa r \int_0^\infty e^{-kz} J_1(kr) J_1(ka) dk.$$

在这些对  $z > 0$  适用的公式中,  $a$  是环的半径,  $\kappa$  是涡环的强度. 坐标  $z$  是从运动中的环的平面算起. 在速度的影响下, 该影响本身是在液体中产生的, 环在  $z$  轴方向上按下列近似公式给出的常速  $c$  运动:

$$c = \frac{\kappa}{4\pi\varepsilon} \left[ \ln \frac{8\varepsilon}{a} - \frac{1}{4} \right],$$

其中  $\varepsilon$  是涡环截面的半径. 对于几个涡环, 函数  $\varphi$  和  $\psi$  则表示为每个环的相应函数之和.

#### 参考文献

- [1] Milne-Thomson, L. M., *Theoretical hydrodynamics*, MacMillan, 1950.

Л. Н. Сретенский 撰 李维新 译

#### Voss 网 [Voss net; Фосса сеть]

一个共轭的测地网 (geodesic net). 带有 Voss 网

的曲面称为 Voss 曲面 (Voss surface). 在极小曲面 (minimal surface) 上, Voss 网是迷向的. 二维曲面上的每个 Voss 网是此曲面形变的一组主基. 仅在螺旋面上才有无穷多个 Voss 网. 是否存在带有 Voss 网的曲面的问题是由 A. Voss 在 [1] 中提出的.

#### 参考文献

- [1] Voss, A., Sitzungsber, *Bayrischen Akad. Wiss. Mün-*

*chen Math. Naturwiss. Kl*, 18 (1888), 95 – 102.

- [2] Фиников, С. П., Изгибание на главном основании. М.-Л., 1937.

В. Т. Базылев 撰 沈纯理 译

**Voss 曲面 [Voss surface; Фосса поверхность]**

支撑一个 Voss 网 (Voss net) 的曲面.



# W

**W 分布** [ *W-distribution*; *W-распределение* ]

见 **Wishart 分布** (Wishart distribution).

**Wald 恒等式** [ *Wald identity*; *Вальда тождество* ]

序贯分析 (sequential analysis) 中的恒等式, 表明随机数  $\tau$  个独立同分布随机变量  $X_1, X_2, \dots$  之和  $S_\tau = X_1 + \dots + X_\tau$  的数学期望, 等于数学期望  $E X_1$  与  $E \tau$  之积:

$$E(X_1 + \dots + X_\tau) = E X_1 \cdot E \tau.$$

Wald 恒等式成立的充分条件是, 数学期望  $E|X_1|$  和  $E \tau$  存在, 且  $\tau$  是 Марков 时间 (即对于任意  $n = 1, 2, \dots$ , 事件  $\{\tau = n\}$  决定于随机变量  $X_1, \dots, X_n$  的值, 或者说事件  $\{\tau = n\}$  属于由随机变量  $X_1, \dots, X_n$  产生的  $\sigma$  代数). Wald 恒等式是序贯分析基本定理的特殊情形. 该定理断定, 对于一切使  $\varphi(\lambda) = E e^{i\lambda X_1}$  存在且  $|\varphi(\lambda)| \geq 1$  的复  $\lambda$ , 有

$$E[e^{i\lambda S_\tau} (\varphi(\lambda))^{-\tau}] = 1. \quad (*)$$

此结果是 A. Wald ([1]) 得到的.

## 参考文献

[1] Wald, A., Sequential analysis, Wiley, 1952.

[2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley, 1957, Chapt. 14 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 上册, 科学出版社, 1964). A. H. Ширяев 撰

【补注】一般结果 (\*) 亦称为 Wald 公式 (Wald formula).

[A1] Skorohod, A. V. [A. V. Skorokhod], Random processes with independent increments, Kluwer, 1991, p. 23 (译自俄文). 周概容 译

**Wall 群** [ *Wall group*; *Уолла группа* ]

一个与环有关的 Abel 群, 这种环具有一个反同构的对合. 特别地, 对任何群环  $Z[\pi_1(X)]$ , 它被定义, 其中  $\pi_1(X)$  是一个空间的基本群. 如果  $X$  是一个 Poincaré 复形 (Poincaré complex), 则对  $\Omega_*(x, v)$  中的下配边 (bordism) 类  $\alpha$ , 在该群中对  $\alpha$  中的单同伦等价的存在有一个阻碍 (obstruction), 这个阻碍称为 Wall 不变量 (Wall invariant), 见 [1].

设  $R$  是一个具有反同构 (即  $\overline{ab} = \overline{ba}$ ) 对合  $R \rightarrow R$  的环, 如果  $P$  是一个左  $R$  模, 则  $\text{Hom}_R(P, R)$  是一个关系到作用  $(af)(x) = f(x)\overline{a}$  的左  $R$  模,  $f \in \text{Hom}_R(P, R)$ ,  $a \in R$ ,  $x \in P$ . 这个模用  $P^*$  表示. 对有限生成的投影  $R$  模  $P$ , 存在同构  $P \rightarrow P^{**}: x \mapsto (f \mapsto \overline{f(x)})$ . 可用该同构将  $P$  和  $P^{**}$  视为等同.

具有对合的环  $R$  上的一个二次  $(-1)^k$  形式 (quadratic  $(-1)^k$ -form) 是一个对  $(P, \varphi)$ , 其中  $P$  是一个有限生成投影  $R$  模,  $\varphi: P \rightarrow P^*$  是同态使得  $\varphi = (-1)^k \varphi^*$ . 形式的一个态射  $f: (P, \varphi) \rightarrow (Q, \psi)$  是一个同态  $f: P \rightarrow Q$ , 使得  $f^* \psi f = \varphi$ . 如果  $\varphi$  是一个同构, 那么形式  $(P, \varphi)$  称为非退化的 (non-degenerate). 非退化形式的一个 Lagrange 平面 (Lagrange plane) 是一个直接被加数  $L \subset P$ , 对此,  $L = \text{Ann } \varphi(L)$ . 如果  $L \subset P$  是一个直接被加数使得  $L \subset \text{Ann } \varphi(L)$ , 则  $L$  称为子 Lagrange 平面 (subLagrange plane). 一个形式  $(P, \varphi)$  的两个 Lagrange 平面  $L, G$  称为互补的 (complementary), 如果  $L + G = P$  及  $L \cap G = \{0\}$ .

设  $L$  是一个投影  $R$  模. 则非退化  $(-1)^k$  形式

$$H_{(-1)^k}(L) = \left( L \oplus L^*, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix} \right)$$

称为 Hamilton 的 (Hamiltonian),  $L, L^* \subset L \oplus L^*$  称为它的补 Lagrange 平面. 如果  $L$  是形式  $(P, \varphi)$  的一个 Lagrange 平面, 那么这个形式同构于 Hamilton 形式  $H_{(-1)^k}(L)$ . 补于  $L$  的 Lagrange 平面的选择等价于同构  $(P, \varphi) \rightarrow H_{(-1)^k}(L)$  的选择, 且这补平面可与  $L^*$  相叠合.

设  $U_{2k}(R)$  是由非退化二次  $(-1)^k$  形式  $(P, \varphi)$  (在同构下) 的等价类生成的 Abel 群, 具有关系: 1)  $[(P, \varphi)] + [(Q, \psi)] = [(P \oplus Q, \varphi \oplus \psi)]$ ; 2) 如果  $P$  有 Lagrange 平面, 则  $[(P, \varphi)] = 0$ . 由非退化  $(-1)^k$  形式  $H$  和一对 Lagrange 平面所组成的三元组  $(H; F, L)$  称为  $(-1)^k$  构造 ( $(-1)^k$ -formation). 如果  $F$  和  $L$  是互补的, 则构造称为平凡的 (trivial), 如果存在  $H$  的一个 Lagrange 平面, 它与  $F$  和  $L$  两者互补, 则构造称为初等的 (elementary). 平凡的构造  $(H_{(-1)^k}(G); G, G)$  称为 Hamilton 的 (Hamiltonian). 通过构造的同构 (isomorphism of formation)  $f: (H; F, L) \rightarrow (H_1; F_1, L_1)$ , 可以理解形式的同构  $f: H \rightarrow H_1$ , 对于它,  $f(F) = F_1, f(L) = L_1$ . 每个平凡构造都同构于一个 Hamilton 构造.

设  $U_{2k+1}(R)$  为由  $(-1)^k$  构造 (在同构下) 的等价类生成的 Abel 群, 它具有下列关系: a)  $[(H; F, L)] \oplus [(H_1; F_1, L_1)] = [(H \oplus H_1; F \oplus F_1, L \oplus L_1)]$ ; b) 如果构造是初等的或平凡的, 则  $[(H; F, L)] = 0$ .

群  $U_n(R)$  称为环  $R$  的 Wall 群 (Wall group).

#### 参考文献

- [1] Wall, C. T. C., Surgery on compact manifolds, Acad. Press, 1970.  
[2] Ranicki, A. A., The algebraic theory of surgery I, Proc. London Math. Soc., 40 (1980), 1, 87 - 192.

A. B. Шокупов 撰

【补注】在  $R = \mathbb{Z}[\pi_1(X)]$  和 Wall 割补术阻碍不变量 (Wall surgery obstruction invariant) 的情形中,  $R$  上的对合由  $g \mapsto W(g)g^{-1}$  给出,  $g \in \pi_1(X)$ , 其中群同态  $w: \pi_1(X) \rightarrow \{1, -1\}$  由在下配边类  $\Omega_*(X, v)$  中的丛  $v$  的第一 Stiefel-Whitney 类给出.

Wall 群  $U_n(R)$  更经常被称为  $L$  群 ( $L$ -groups) 且用  $L_n(R)$  表示; 它们的理论涉及到  $L$  理论 ( $L$ -theory), 它与  $K$  理论 ( $K$ -theory) 密切相关. (事实上, 一些作者论及形式的  $K$  理论, [A2].)  $L$  群是 4 循环的, 即  $L_n(R) \simeq L_{n+4}(R)$ .  $L$  群可在更一般的意义下定义, 且存在一些与  $L$  群有点不同的变化. 例如见 [A1], [A2].

#### 参考文献

- [A1] Ranicki, A., Lower  $K$ - and  $L$ -theory, Cambridge Univ. Press, 1992.

[A2] Bak, A.,  $K$ -theory of forms, Princeton Univ. Press, 1981. 薛春华 译

#### Wall 不变量 [Wall invariant; Уолла инвариант]

表示单同伦等价的下配边 (bordism) 的割补术的阻碍 (obstruction) 的 Wall 群 (Wall group) 的一个元素.

设  $X$  是一个有限 Poincaré 复形 (Poincaré complex),  $v$  是  $X$  上的纤维丛而  $x = [(M, \varphi, F)] \in \Omega(X, v)$  是一个下配边类, 其中  $m$  是  $X$  的形式维数,  $\varphi: M \rightarrow X$  有度 1. 这个映射总可由一个用割补术的有限序列得到的  $[m/2]$  连通的映射表示. 设  $\Lambda = \mathbb{Z}[\pi_1(X)]$  是一个群环, 且设  $-$  是  $\Lambda$  上由公式  $\sum_g n(g)g = \sum w(g)n(g)g^{-1}$  给出的对合, 其中  $w: \pi_1(X) \rightarrow \{1, -1\}$  是由  $v$  的第一 Stiefel-Whitney 类 (Stiefel-Whitney class) 定义的. 令

$$K^*(M) = \text{coker}(\varphi^*: H^*(X) \rightarrow H^*(M)),$$

$$K_*(M) = \ker(\varphi_*: H_*(M) \rightarrow H_*(X))$$

(系数在  $\Lambda$  中). 对合是一个反同构且定义 Wall 群  $U_n(\Lambda) = L_n(\pi_1(X), w)$ .

现假定  $m = 2k \geq 4$ , 则在稳定自由  $\Lambda$  模  $G = K_k(M) = \pi_{k+1}(\varphi)$  中, 可以选取一个基, 且 Poincaré 对偶性 (Poincaré duality) 诱导了单同构  $\lambda: G \rightarrow G^* = K^k(M)$ , 其中  $(G, \lambda)$  是  $(-1)^k$  形式. 因此得到类  $\Theta_{2k}(x) = [(G, \lambda)] \in L_{2k}(\pi_1(X), w)$ .

其次假定  $m = 2k + 1 \geq 5$ . 可以在  $\pi_{k+1}(\varphi) = K_k(M; \Lambda)$  中选取生成元以便它们表示嵌入  $f_i: S^k \times D^{k+1} \rightarrow M$ , 它具有不交象, 且这些象通过道路与基点相连通. 设  $U = \bigcup_i \text{Im } f_i$ ,  $M_0 = M \setminus \text{Int } U$ . 因为  $\varphi \circ f_i \sim 0$ , 故可用同伦代替  $\varphi$  和假设  $\varphi(u) = *$ . 因为  $X$  是一个 Poincaré 复形, 故可用具有唯一的  $m$  胞腔的复形代替  $X$ , 即有 Poincaré 对  $(X_0, S^{m+1})$  和  $X = X_0 \cup e^m$ . 通过选择一个适当的胞腔逼近得到度 1 的 Poincaré 三元组的一个映射:  $\varphi: (M; M_0, U) \rightarrow (X; X_0, e^m)$ . 随之, 有正合序列的图表:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_{k+1}(M, M_0) = K_{k+1}(U, \partial U) & \longrightarrow & K_k(M_0) & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow & \uparrow & & \uparrow & \searrow & \\ & & K_{k+1}(M) & & K_k(\partial U) & & K_k(M) \\ & \swarrow & \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ 0 & \longrightarrow & K_{k+1}(M, U) = K_{k+1}(M_0, \partial U) & \longrightarrow & K_k(U) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

进一步, 有非退化对  $\lambda: K_k(\partial U) \times K_k(\partial U) \rightarrow \Lambda$ , 其中  $H = (K_k(\partial U), \lambda)$  是一个二次  $(-1)^k$  形式, 而  $K_{k+1}(U, \partial U)$  和  $K_{k+1}(M_0, \partial U)$  定义了它的 Lagrange 平面  $L$  和  $P$ , 因此

$$\Theta_{2k+1}(x) = [(H; L, P)] \in U_{2k+1}(\Lambda) =$$



$$= L_{2k+1}(\pi_1(x), w).$$

上面所定义的元素  $\Theta_m(x) \in L_m(\pi_1(x), w)$  就称为 Wall 不变量 (Wall invariant). 一个重要的性质是  $\Theta(x)$  对结构选择的独立性和等式  $\Theta(x) = 0$  相对于作为单同伦等价的类的可表示性的等价性, 见 [1].

#### 参考文献

- [1] Wall, C. T. C., *Surgery on compact manifolds*, Acad. Press, 1970.  
 [2] Ranicki, A. A., *The algebraic theory of surgery I*, *Proc. London Math. Soc.*, **40** (1980), 1, 87 – 192.  
 [3] Новиков, С. П., «Иzv. AN СССР, Сер. матем.», **34** (1970), No. 2, 253 – 288, No. 3, 475 – 500. А. В. Шокуров 撰 薛春华 译

#### Wallis 公式 [Wallis formula; Валлиса формула]

把数  $\pi/2$  表示为无穷积 (infinite product) 的一个公式:

$$\frac{\pi}{2} = \left[ \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right] \left[ \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right] \cdots \left[ \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right] \cdots = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}. \quad (1)$$

存在这个公式的另外一些形式, 例如

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m!)^2 \cdot 2^{2m}}{(2m)! \sqrt{m}}. \quad (2)$$

J. Wallis ([1]) 首先利用公式 (1) 计算圆盘的面积; 它是最早出现的无穷积之一.

#### 参考文献

- [1] Wallis, J., *Arithmetica infinitorum*, Oxford, 1656. Т. Ю. Попова 撰

【补注】公式 (1) 是 Euler 积公式 (Euler product formula)

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right]$$

(当  $z = \pi/2$  时) 的一个直接推论.

把  $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx$  和  $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx$  通过  $m$  来表示, 并且证明

$$\frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx} \rightarrow 1 \quad (m \rightarrow \infty),$$

也可得到公式 (1).

公式 (2) 可由公式 (1) 推出: 只需把

$$\prod_{k=1}^m \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

的分子和分母乘以  $2^2 \cdot 4^2 \cdots (2m)^2$ .

#### 参考文献

- [A1] Apostol, T. M., *Calculus*, 2, Blaisdell, 1964.  
 [A2] Edwards, C. H. jr., *The historical development of the calculus*, Springer, 1979 (中译本: C. H. 爱德华, 微积分发展史, 北京出版社, 1987).  
 [A3] Lax, P., Burnstein, S. and Lax, A., *Calculus with applications and computing*, 1, Springer, 1976.  
 [A4] Struik, D. J. (ed.), *A source book in mathematics: 1200 – 1800*, Harvard Univ. Press, 1986.

杜小杨 张鸿林 译

Wallman 紧化 [Wallman compactification; Уолмена би-компактное расширение], 满足  $T_1$  公理 (见分离公理 (separation axiom)) 的拓扑空间  $X$  的 Wallman-Shanin 紧化 (Wallman-Shanin compactification)  $\omega X$ .

一个空间, 它的全部点是  $X$  中的极大有心闭集族  $\xi = \{F_\alpha\}$  (见有心集族 (centred family of sets)).  $\omega X$  中的拓扑由闭基  $\{\Phi_F\}$  给出, 其中  $F$  遍取  $X$  的所有闭集, 且  $\Phi_F$  严格地由使  $F = F_\alpha$  (某  $\alpha$ ) 的那些  $\xi = \{F_\alpha\}$  组成.

这种紧化是 H. Wallman ([1]) 描述的.

Wallman 紧化总是紧  $T_1$  空间; 对于正规空间, 它与 Stone-Čech 紧化 (Stone-Čech compactification) 一致.

如果定义扩张  $\omega X$  时, 不选所有的闭集, 而仅选取被某个固定闭集所包含的那些闭集, 就得到所谓 Wallman 型的紧化. Тихонов 空间 (Tikhonov space) 的 Hausdorff 紧化并不都是 Wallman 型紧化.

#### 参考文献

- [1] Wallman, H., *Lattices and topological spaces*, *Ann. of Math.*, **39** (1938), 112 – 126.

П. С. Александров 撰

【补注】非 Wallman 型紧化的紧化, 是 B. M. Уль-янов ([A1]) 构造的.

#### 参考文献

- [A1] Ul'yanov, V. M., *Solution of a basic problem on compactifications of Wallman type*, *Soviet Math. Dokl.*, **18** (1977), 567 – 571 (*Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **233** (1977), 6, 1056 – 1059).  
 [A2] Alo, R. A. and Shapiro, H. L., *Normal bases and compactifications*, *Math. Ann.*, **175** (1968), 337 – 340.  
 [A3] Frink, O., *Compactifications and semi-normal spaces*, *Amer. J. Math.*, **86** (1964), 602 – 607.  
 [A4] Walker, R. C., *The Stone-Čech compactification*, Springer, 1974. 罗嵩龄 译

Walsh 函数系 [Walsh system; Уолша система], 区间

$[0, 1]$  上的

函数系  $\{W_n\}$ :  $W_0(x) \equiv 1$ ,  $W_n(x) = r_{v_1}(x) \cdots r_{v_n}(x)$ ,  $n \geq 1$ , 其中的  $r_k(x) = \text{sign} \sin 2^{k+1} \pi x$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) 是 Rademacher 函数 (Rademacher functions) (见 Rademacher 函数系 (Rademacher system)),  $n = 2^{v_1} + \dots + 2^{v_m}$  ( $v_1 > \dots > v_m$ ) 是数  $n \geq 1$  的二进制表示. 这一函数系由 J. L. Walsh ([1]) 定义并研究, 但在 1900 年, 在与电子在开的导曲线弧上的分布有关的问题中, J. A. Barrett 已经研究了这一函数系. 在该理论中, 更喜欢采用的是 Walsh 函数系的另外一种定义. 即令

$$W_0^*(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1), \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty), \end{cases}$$

$W_n(x)$  由下面的递推公式定义:

$$W_{2^j+p}^*(x) = W_j^*(2x) + (-1)^{j+p} W_j^*(2x-1), \\ p = 0, 1; j = 0, 1, \dots,$$

函数系  $\{W_n\}$  与  $\{W_n^*\}$  之间的差别仅仅在于在范围  $2^m \leq n \leq 2^{m+1} - 1$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) 内的函数的排列顺序. 例如:  $W_{2^m}^* = W_{2^m-1}$ ,  $W_{2^{m+1}-1}^* = W_{2^m}$ ,  $W_{2^{m+1}-2}^* = W_{2^m+1}$ ,  $\dots$ . 函数  $W_k^*$  中的脚标  $k$  相应于这一函数在区间  $(0, 1)$  中的符号改变的次数, 即, 它类似于加倍正弦函数的频率. Walsh 函数系是区间  $[0, 1]$  上的完全规范正交系, 并可视作 Rademacher 函数系 (Rademacher system) 的自然的全化.

Walsh 函数系构成一个交换乘法群, 其中的单位元素是函数  $W_0$ , 同时每一个  $W_k$  都是其本身的逆元素.

#### 参考文献

- [1] Walsh, J. L., A closed set of normal orthogonal functions, *Amer. J. Math.*, **45** (1923), 5 - 24.
- [2] Fowle, F. F., *Trans. AJEE*, **23** (1905), 659 - 687.
- [3] Fine, N. J., On the Walsh functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 372 - 414.
- [4] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., *Theorie der Orthogonalreihen*, Chelsea, reprint, 1951.
- [5] Harmut, H. F., *Transmission of information by orthogonal functions*, Springer, 1972. A. B. Ефимов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Golubov, B., Efimov, A. and Skvortsov, V., *Walsh series and transforms*, Kluwer, 1987 (译自俄文). 朱学贤 译

#### 游荡点 [wandering point; блуждающая точка]

动力系统 (dynamical system)  $f(p, t)$  的相空间  $R$  中的点  $q$ , 它具有一个邻域  $U(q)$ , 使得对于  $U(q)$  存在一个时刻  $T$  而  $f(U(q), t)$  对一切  $t \geq T$  都与

$U(q)$  没有公共点 (即  $U(q)$  之一切点到某时刻  $T$  以后, 都会离开该邻域  $U(q)$ ). 没有这种邻域的点  $q$  称为非游荡的 (non-wandering). 一个点是游荡的或非游荡的, 这个性质在时间上是双向的: 如果  $f(U(q), t)$  与  $U(q)$  没有公共点, 则  $U(q)$  与  $f(U(q), -t)$  也没有公共点. 一个游荡点当空间  $R$  扩张后可能成为非游荡的. 例如, 若  $R$  是一个圆且有一个静止点  $r$ , 则  $R \setminus r$  的一切点都是游荡点. 如果某个没有静止点的螺线从圆内侧或外侧绕此圆绕行, 把这些点都加到  $R$  上去以后,  $R \setminus r$  的点就成为非游荡的. К. С. Сибирский 撰

【补注】 集合  $A \subset R$  对于集合  $B \subset R$  称为正递归的 (positively recursive), 如果对一切  $T$  当  $t > T$  时均有  $f(B, t) \cap A \neq \emptyset$ . 负递归的 (negatively recursive) 的定义类似. 于是点  $x$  是非游荡的, 如果它的每一个邻域均对于其自身是正递归的 (自正递归的 (self-positively recursive)). 点  $x$  称为正 Poisson 稳定的 (positively Poisson stable) (负 Poisson 稳定的 (negatively Poisson stable)) 如果它的每一个邻域对于  $\{x\}$  都是正递归的 (负递归的). 如果一点既是正 Poisson 稳定的, 又是负 Poisson 稳定的, 就称之为 Poisson 稳定的 (Poisson stable). 如果  $P \subset R$  使得每一点  $x \in P$  均为正或负 Poisson 稳定的, 则  $\bar{P}$  的各点均为非游荡的. 亦见游荡集 (wandering set).

#### 参考文献

- [A1] Bhatia, N. P. and Szegő, G. P., *Stability theory of dynamical systems*, Springer, 1970, 30 - 36.

齐民友 译

#### 游荡集 [wandering set; блуждающее множество]

某动力系统 (dynamical system)  $f(p, t)$  的所有游荡点 (wandering point) 的集合  $W$ . 因为对  $W$  中的每个点  $q$ , 集合  $W$  包含其某个邻域  $U(q)$  的一切点, 所以  $W$  是相空间  $R$  的开集合. 依此, 一切非游荡点的集合  $M = R \setminus W$  是闭的. 集合  $W$  与  $M$  都是不变的 (invariant), 即若包含点  $q$ , 亦必包含对于任意  $t$  的  $f(q, t)$ . 在一紧空间  $R$  中, 每个游荡点  $f(q, t)$  当  $t \rightarrow \infty$  和  $t \rightarrow -\infty$  时均趋于  $M$ .

#### 参考文献

- [1] Birkhoff, G. D., *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc. 1927.
- [2] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., *Качественная теория дифференциальных уравнений*, 2 изд., М.-Л., 1949 (中译本: В. В. 涅梅茨基, В. В. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性理论, 科学出版社, 1956).
- [3] Сибирский, К. С., *Введение в топологическую динамику*, кишнев, 1970 (英译本: Sibirskii, K. S., *Introduction to topological dynamics*, Noordhoff, 1975).

К. С. Сибирский 撰

#### 【补注】



## 参考文献

- [A1] Smale, S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 747 - 817.  
 [A2] Bhatia, N. P. and Szegő, G. P., Stability theory of dynamical systems, Springer, 1970, 30 - 36.

齐民友 译

**Ward 定理 [Ward theorem; Варда теорема]**, 关于加性区间函数微分的

设  $F$  为实值加性区间函数,  $\underline{F}(x)(\bar{F}(x))$  为数列  $F(G_n)/|G_n|$  的极限的下(上)确界, 其中  $|G_n|$  为  $G_n$  的 Lebesgue 测度, 并且  $\{G_n\}$  取遍所有收缩趋于点  $x$  的正则区间列. 于是等式  $\bar{F}(x) = \underline{F}(x)$  在集合  $\{x: \underline{F}(x) > -\infty \text{ 或 } \bar{F}(x) < \infty\}$  上(依 Lebesgue 测度)几乎处处成立. 区间列  $G_n$  是正则的, 如果存在数  $\alpha > 0$  以及两个球列  $S'_n$  和  $S''_n$ , 使得对一切  $n$ , 成立

$$\text{diam } S'_n > \alpha \text{diam } S''_n$$

和

$$S'_n \subset G_n \subset S''_n.$$

假如去掉上述正则性条件, 就得到 Ward 第二定理. 这些定理推广了关于一元函数的 Denjoy 定理(关于导数的)(Denjoy theorem on derivatives), 这些定理是由 A. J. Ward ([1]) 建立的.

## 参考文献

- [1A] Ward, A. J., On the differentiation of additive functions of rectangles, *Fund. Math.*, 28 (1936), 167 - 182.  
 [1B] Ward, A. J., On the derivation of additive functions of intervals in  $m$ -dimensional space, *Fund. Math.*, 28 (1937), 265 - 279. Л. Д. Иванов 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文). 王斯雷 译

**Waring 问题 [Waring problem; Варинга проблема]**

数论中的一个问题, 1770 年由 E. Waring 以下述形式提出: 任何自然数均为四个平方数之和, 均为九个立方数之和, 均为十九个四方数之和. 换言之, 对所有  $n \geq 2$  存在一个仅与  $n$  有关的数  $k = k(n)$ , 使每个自然数都是  $k$  个非负整数的  $n$  次幂之和. 1909 年 D. Hilbert 首先给出 Waring 问题的一般解, 并把  $k$  表成  $n$  的函数而得到  $k$  的一个很粗略的估计值. 故而这个问题有时也称为 Hilbert-Waring 问题 (Hilbert-Waring problem). 设  $J_{k,n}(N)$  为方程

$$x_1^n + \cdots + x_k^n = N \quad (1)$$

的非负整数解数. Hilbert 定理提出: 存在一个  $K = k(n)$ , 对任何  $N \geq 1$  有  $J_{K,n}(N) \geq 1$ . G. H. Hardy 与 J. E. Littlewood 把圆法 (circle method) 用于 Waring 问题, 他们于 1928 年证明了: 对  $k \geq (n-2)2^{n-1} + 5$ ,  $J_{k,n}(N)$  的值由形如

$$J_{k,n}(N) = AN^{k/n-1} + O(N^{k/n-1-\gamma}) \quad (2)$$

的渐近公式给出, 其中  $A = A(N) \geq c_0 > 0$ ,  $c_0$  与  $\gamma > 0$  均为常数. 从而, 只要  $N \geq N_0(n)$ , 方程 (1) 就有解. 这一结果提出了三个问题: 确定满足下述条件的取最小整数的三个量  $G(n)$ ,  $g(n)$  与  $k_0(n)$  的阶: a) 使方程 (1) 对  $k \geq G(n)$  及  $N \geq N_0(n)$  有解; b) 使方程 (1) 对  $k \geq g(n)$  及  $N \geq 1$  有解; c) 当  $k \geq k_0(n)$  时  $J_{k,n}(N)$  有渐近公式 (2).

a) 已知  $G(n) \geq n+1$ . 1934 年 И. М. Виноградов 用他自己的方法证明了

$$G(n) \leq 3n(\ln n + 9).$$

此外, 对小的  $n$  有许多关于  $G(n)$  的结果:  $G(4) = 16$  (H. Davenport, 1939);  $G(3) \leq 7$  (Ю. В. Линник, 1942).

b) 1936 年 L. Dickson 与 S. Pillai 同样用 Виноградов 法 (Vinogradov method) 证明了, 对满足条件

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] + 3\right\}$$

的所有  $n > 6$  皆有

$$g(n) = 2^n + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] - 2.$$

1957 年 K. Mahler 证明了, 对所有充分大的  $n$  上述条件是成立的.

c) 最好的结果应归功于 Виноградов, 他证明了

$$k_0(n) \leq 4n^2 \ln n.$$

1942 年 Ю. В. Линник 给出 Waring 问题的一个初等证明. Waring 问题有许多不同的推广 (例如变数取自然数的某个子集;  $N$  用多项式  $f_1(x_1), \dots, f_k(x_k)$  表出, 而不是用单项式  $x_1^n, \dots, x_k^n$  表出; 方程 (1) 换成同余式等等).

Waring 问题的重要性在于: 为了求解这一问题, 创造了解析数论 (analytic number theory) 中一些强有力的方法.

## 参考文献

- [1] Виноградов, И. М., Избранные труды, М., 1952 (英译本: Vinogradov, I. M., Selected works, Sprin-

ger, 1985).

- [2] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (英译本: Vinogradov, I. M., The method of trigonometric sums in the theory of numbers, Interscience, 1954).
- [3] Hua, L. - K., Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, in Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, 1959. Heft 13, Teil 1 (中译本: 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963).
- [4] Делоне, Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М.-Л., 1947.
- [5] Хинчин, А. Я., Три жемчужины теории чисел, 2 изд., М.-Л., 1948 (英译本: Khinchin, A. Ya., Three pearls of number theory, Graylock, 1952).

А. А. Карацуба 撰

【补注】已知  $g(2) = 4$  (J. L. Lagrange, 1770),  $g(3) = 9$  (A. Wieferich, A. Kempner, 1912),  $g(4) = 19$  (R. Balasubramanian, J. Deshouillers, F. Dress, 1986),  $g(5) = 37$  (陈景润, 1964). 亦见圆法 (circle method) 及 [A1] - [A3].

#### 参考文献

- [A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979.
- [A2] Vaughan, R. C., The Hardy-Littlewood method, Cambridge Univ. Press, 1981.
- [A3] Shanks, D., Solved and unsolved problems in number theory, Chelsea, reprint, 1978.

#### 【译注】

(1)  $g(n) \geq 2^n + \left[ \left( \frac{3}{2} \right)^n \right] - 2$  (L. Euler, 1772).

(2)  $g(6) = 73$  (S. Pillai, 1940).

(3) 关于不等式

$$\left( \frac{3}{2} \right)^n - \left[ \left( \frac{3}{2} \right)^n \right] \leq 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \left\{ \left[ \left( \frac{3}{2} \right)^n \right] + 3 \right\} \quad (2)$$

的验证, 至今 (1996) 尚未完全解决. K. Mahler 于 1957 年证明了: 存在绝对常数  $N_0$ , 当  $n \geq N_0$  时 (2) 成立, 但  $N_0$  是非实效的. 目前关于 (2) 式数值验证的最好结果属于 J. M. Kubina 与 M. C. Wunderlich, 他们于 1989 年验证了 (2) 式对  $2 \leq n \leq 471, 600, 000$  成立 (见 B1).

(4) 1992 年 J. M. Deshouillers 与 F. Dress 证明了: 每个大于  $10^{367}$  的整数均可表为十九个四方数之和. 1993 年他们又证明了: 每个小于  $10^{448}$  的正整数均可表为十九个四方数之和. 有关  $g(4) = 19$  的文献及上述两个结果, 见 B2 - B4.

(5)  $n$  较大时  $G(n)$  上界的已知最好的估计属于 A. A. Карацуба ([B5]), 他于 1985 年用  $p$  进形式的 Виноградов 方法得到, 对  $n \geq 4000$  有

$$G(n) < 2n(\ln n + \ln \ln n + 6).$$

$n$  较小时  $G(n)$  上界估计之结果见 B6 - B8. 此外, 1990 年 J. Brüdern ([B9]) 得到  $G(5) \leq 18$ , 1993 年 R. C. Vaughan 与 T. D. Wooley ([B10]) 得到  $G(8) \leq 42$ .

(6) 关于渐近公式 (2), 1938 年华罗庚证得对  $k \geq 2^n + 1$  有 (2) 成立; 后来, И. М. Виноградов 又改进为: 对  $k \geq 2n^2(2 \ln n + \ln \ln n + 5)$  及  $n \geq 4$  有 (2) 成立. 这是目前已知最好的结果. 在 1956 年召开的全苏第三次数学大会上, И. М. Виноградов 曾问及下述问题: 能否证明 (2) 式对  $k \geq k_0(n)$  成立, 而  $k_0(n)$  的阶为  $n^{1+\epsilon}$ ? 根据 Hardy 与 Littlewood 的一个猜想容易推出: (2) 式对  $k \geq 2n + 1$  成立. 参见 [1] (英文版) p. 245 - 256 及 p. 167; [3] (中译本) p. 59 - 61. 目前的方法与结果离这些猜想还很遥远.

关于渐近公式 (2) 当  $n = 3$  的情形, 由 Hardy 与 Littlewood 的结果知, (2) 式对  $k \geq 9$  成立. 他们猜想  $n = 3$  时 (2) 式对  $4 \leq k \leq 8$  也成立. 1986 年 R. C. Vaughan (MR 87j:11103) 证明了  $k = 8, n = 3$  时 (2) 式成立, 并证明了

$$J_{7,3}(N) \gg N^{\frac{142}{115}} (\log N)^{-5}.$$

1989 年他 (MR 90c:11073) 进一步证明了

$$J_{7,3}(N) \gg N^{\frac{4}{3}},$$

这离  $k = 7, n = 3$  的渐近公式仅差一步之遥. 此外, 他 (MR 87j:11104) 还研究了  $k = 2^n (n \geq 4)$  的情形, 得到类似 (2) 的渐近式, 但误差项估计要换成

$$O(N^{\frac{k}{n}-1} (\log N)^{\epsilon - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)}).$$

(7) 关于  $G(n)$  的精确值, 目前知之甚少. 由 Hardy 与 Littlewood 的一个猜想可推出如下猜测:

① 对  $n = 2^m$  及  $m \geq 2$  有  $G(n) = 4n$ ;

② 对其他情形皆有  $G(n) \leq 2n + 1$ .

除个别情形外, 这些猜想至今仍未解决.

#### 参考文献

- [B1] Kubina, J. M. and Wunderlich, M. C., Extending Waring's conjecture to 471, 600, 000, *Math. Comp.*, 55 (1990), 192, 815 - 820 (MR 91b:11101).
- [B2] Balasubramanian, R., Deshouillers, J.-M. and Dress, F., Problème de Waring pour les bicarrés. I. Schéma de la solution, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 303 (1986), 4, 85 - 88; II. Résultats



auxiliaires pour le théorème asymptotique, *ibid.* Sér. I *Math.*, **303** (1986), 5, 161 – 163 (MR 87m: 11099, MR 88e: 11095).

- [B3] Deshouillers, J.-M. and Dress, F., Sums of 19 biquadrates: on the representation of large integers, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **19** (1992), 1, 113 – 153 (MR 94g: 11079).
- [B4] Deshouillers, J.-M. and Dress, F., Numerical results for sums of five and seven biquadrates and consequences for sums of 19 biquadrates, *Math. Comp.*, **61** (1993), 203, 195 – 207 (MR 94C: 11096).
- [B5] Карацуба, А. А., О функции  $G(n)$  в проблеме Варинга, *ИАН СССР, Сер. мат.*, **49** (1985), 5, 935 – 947 (MR 87C: 11092).
- [B6] Vaughan, R. C., Homogeneous additive equations and Waring's problem, *Acta Arith.*, **33** (1977), 231 – 253.
- [B7] Balasubramanian, R. and Mozzochi, C. J., An improved upper bound for  $G(k)$  in Waring's problem for relatively small  $k$ , *Acta Arith.*, **43** (1984), 283 – 285.
- [B8] Vaughan, R. C., A new iterative method in Waring's problem, *Acta Math.*, **162** (1989), 1 – 2, 1 – 71 (MR 90C: 11072).
- [B9] Brüdern, J., On Waring's problem for fifth powers and some related topics, *Proc. London Math. Soc.* (3), **61** (1990), 3, 457 – 479 (MR 91h: 11101).
- [B10] Vaughan, R. C. and Wooley, T. D., Further improvement in Waring's problem, III. Eighth powers, *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, **345** (1993), 1676, 385 – 396 (MR 94m: 11118).

张明尧 译 戚鸣皋 校

#### Watson 引理 [Watson lemma; Ватсона лемма]

【补注】 一个联系函数在 0 附近的渐近性态与其 Laplace 变换 (Laplace transform) 在  $\infty$  附近的渐近性态的结果. 令  $f(t)$  有渐近展开

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{\lambda_n}, \quad t \rightarrow 0,$$

$-1 < \operatorname{Re}(\lambda_1) < \operatorname{Re}(\lambda_2) < \cdots$ , 并令  $F$  是  $f$  的 Laplace 变换,

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

则  $F$  有相应的渐近展式

$$F(p) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda_n!}{p^{\lambda_n+1}}, \quad |p| \rightarrow \infty,$$

$$-\pi/2 < \arg(p) < \pi/2.$$

#### 参考文献

- [A1] Davies, B., *Integral transforms and their applications*, Springer, 1978, § 1.3. 王仁宏、檀结庆 译

#### Watson 变换 [Watson transform; Ватсона преобразование]

函数  $f \in L_2(0, \infty)$  的一种变换  $g$ , 定义如下:

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \tilde{\omega}(xu) f(u) \frac{du}{u}. \quad (1)$$

这里  $x$  是实变量, 核  $\tilde{\omega}(x)$  具有形式

$$\tilde{\omega}(x) = \frac{x}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\Omega\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\frac{1}{2} - it} x^{-(t+\frac{1}{2})} dt \quad (2)$$

(l.i.m 表示  $L_2$  中平均极限) 且函数  $\Omega\left(it + \frac{1}{2}\right)$  满足条件

$$\Omega(s)\Omega(1-s) = 1.$$

以下条件对核  $\tilde{\omega}(x)$  的存在性和包含关系  $\tilde{\omega}(x)/x \in L_2(0, \infty)$  是充分的:

$$\Omega\left(\frac{1}{2} - it\right) = \Omega\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

且

$$\frac{\Omega\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\frac{1}{2} - it} \in L_2(-\infty, \infty).$$

对函数  $f \in L_2(0, \infty)$ , 公式 (1) 几乎处处定义函数  $g \in L_2(0, \infty)$ . Watson 变换 (1) 的反演公式具有形式

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \tilde{\omega}(xu) g(u) \frac{du}{u}.$$

G. N. Watson ([1]) 首先研究这种变换, 因而以他的名字命名.

#### 参考文献

- [1] Watson, G. N., General transforms, *Proc. London Math. Soc.* (2), **35** (1933), 156 – 199.

А. П. Прудников 撰

【补注】 十分一般地, 令  $\psi$  是  $\mathbf{R}_{>0}$  上的 Lebesgue 可测函数且令

$$\varphi = \int_0^x \psi(t) dt.$$

核  $\psi$  (或  $\varphi$ ) 称为广义核 (generalized kernel), 或广义变换的核 (kernel of a generalized transform), 如果

- $\psi(x)$  在  $\mathbf{R}_{>0}$  上是实值的;
- $x^{-1} \varphi(x) \in L_2(\mathbf{R}_{>0})$ ;
- $\int_0^{\infty} \varphi(xu) \varphi(yu) u^{-2} du = \min(x, y)$ .  
在  $L_2(\mathbf{R}_{>0})$  上由

$$\Phi(f)(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{\varphi(xt)f(t)}{t} dt$$

定义的算子  $\Phi$  称为广义变换 (generalized transform) 或 Watson 变换 (Watson transform)。

#### 参考文献

- [A1] Okikiolu, G. O., Aspects of the theory of bounded operators in  $L^p$ -spaces, Acad. Press, 1971, § 6.7.  
葛显良 译 吴绍平 校

#### 波动方程 [wave equation; волновое уравнение]

描述各种振动过程和波的传播过程的形如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

的方程。对于波动方程 (它是双曲型方程), 通常研究两个问题: **Cauchy 问题** (Cauchy problem) 和 **混合问题** (mixed problem)。

Cauchy 问题的经典解是描述  $n$  维 Euclid 空间  $E^n$  中波的传播的函数  $u(x, t)$ , 它在  $n+1$  维空间  $\{x \in E^n, t \geq 0\}$  中连续可微, 在半空间  $\{x \in E^n, t > 0\}$  中二阶连续可微, 满足波动方程且满足初始条件

$$u(x, +0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, +0) = \psi(x),$$

其中  $\varphi(x), \psi(x)$  是给定的函数。

混合问题的经典解是描述有界区域  $G \subset E^n$  中的振动的函数  $u(x, t)$ , 它在闭圆柱  $\{x \in \bar{G}, t \geq 0\}$  上连续可微, 在开圆柱  $\{x \in G, t > 0\}$  中二阶连续可微且满足波动方程, 并对  $x \in G$  满足初始条件

$$u(x, +0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, +0) = \psi(x).$$

此外, 在所给圆柱的“侧面”上, 它满足某些边界条件。

对于充分光滑的  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$ , Cauchy 问题的经典解由所谓 **Poisson 公式** (Poisson formula) 给出, 此公式当  $n=1$  时就是 **d'Alembert 公式** (d'Alembert formula)。如果波动方程的右端不是零而是某个给定的函数  $f(x, t)$ , 则此方程称为 **非齐次的** (non-homogeneous), 而其解由所谓 **Kirchhoff 公式** (Kirchhoff formula) 给出。波动方程的混合问题可用 Fourier 法、有限差分法或 Laplace 变换法求解。

以经典方式表述的上述问题的研究已推广到研究 Cauchy 问题和混合问题较弱意义下的经典解 ([4]) 和广义解 ([2], [3]) 的存在性和唯一性。

#### 参考文献

- [1] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966 (中译本: А. Н. 吉洪诺夫, А. А. 萨马尔斯基, 数学物理方程, 上、下册, 高等教育出版社, 1956)。

- [2] Соболев, С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966 (中译本: С. Л. 索伯列夫, 数学物理方程, 高等教育出版社, 1954)。  
[3] Ладыженская, О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953。  
[4] Ильин, В. А., «Успехи матем. наук», 15 (1960), в. 2 (92), 97 – 154。  
[5] Соболев, С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиби., 1962 (С. Л. 索伯列夫, 泛函分析在数学物理中的应用, 科学出版社, 1959)。

Ш. А. Алимов 撰

【补注】 波动方程的更一般的形式是

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0,$$

其中  $c$  (可为  $x, t$  的函数) 是波的传播速度。

[A1] 中讨论了波动方程的许多经典论题。[A2] 中提供了一般的现代观点。

#### 参考文献

- [A1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, 2. Partial differential equations, Interscience, 1965 (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, II, 科学出版社, 1977)。  
[A2] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 3, Springer, 1985, Chaps. 23 – 24。  
[A3] Hadamard, J., Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Dover, reprint, 1952。  
[A4] John, F., Partial differential equations, Springer, 1978 (中译本: F. 约翰, 偏微分方程, 科学出版社, 1986)。  
[A5] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1964。  
[A6] Schwartz, L., Théorie des distributions, Hermann, 1966。  
[A7] Schwartz, L., Mathematics for the physical sciences, Hermann, 1966。  
[A8] Baker, B. B., Copson, E. T., The mathematical theory of Huygen's principle, Clarendon Press, 1950。  
[A9] Hellwig, G., Partial differential equations, Blaisdell, 1964。  
沈永欢 译

**波前集** [wave front 或 wave front set; фронт волновой], 亦称“波阵面”, 广义函数 (分布) 或超函数的

在其上给定所考虑广义函数或超函数的流形的余切丛中的一个锥形集, 它刻画其奇性特征。超函数 (hyperfunction) 是全纯函数的形式边界值之和。两个这样的和认为是等同的, 如果它们在由一个与 Боголюбов “楔边” 定理类似的定理 (见 Боголюбов 定理 (Bogolyubov theorem)) 给出的等价意义下是等价的, 然而其中没有在任何意义下假设所考虑的全纯函数有极限。



超函数的波前集通常也称为解析波前集 (analytic wave front set) 或奇异支集 (singular support) (最后这术语更经常地在一种完全不同的意义下使用, 此时它表示该广义函数在此流形本身上而不是在其余切丛中的某种正则性集合的补集). 波前集的概念是微局部分析的基础, 后者是一些方法和想法的综合, 利用波前集和其他有关的概念和技术 (特别是拟微分算子和 Fourier 积分算子) 去研究偏微分方程 (主要是线性方程).

设  $X$  是  $\mathbf{R}^n$  中一个区域且设  $u \in D'(X)$ , 即  $u$  是  $X$  上的一个广义函数. 则  $u$  的波前集  $\text{WF}(u)$  是  $T^*X \setminus 0 = X \times (\mathbf{R}^n \setminus 0)$  的闭锥形子集, 定义如下: 如果  $(x_0, \xi_0) \in X \times (\mathbf{R}^n \setminus 0)$ , 则  $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}(u)$  是指存在函数  $\varphi \in C_0^\infty(X)$ , 在  $x_0$  的某邻域中等于 1, 且在  $\mathbf{R}^n \setminus 0$  中有  $\xi_0$  的锥形邻域  $\Gamma$ , 使得对每一个  $N > 0$ ,

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma,$$

其中

$$C_N > 0, \quad \widehat{\varphi u}(\xi) = \langle u(x), \varphi(x)e^{-ix \cdot \xi} \rangle,$$

即  $\widehat{\varphi u}$  是  $\varphi u$  的 Fourier 变换.

如果  $X$  是一流形且  $u$  是  $X$  上的广义函数 (或更一般地, 光滑向量丛的广义截面), 则  $\text{WF}(u)$  按上述同样方式定义 (在转移到局部坐标后). 在这种情况下  $\text{WF}(u)$  可证明是  $T^*X \setminus 0$  的一个有确切定义的锥形子集 (余切丛没有零截面).

引入典范投影  $\pi: T^*X \setminus 0 \rightarrow X$ , 则

$$\pi(\text{WF}(u)) = \text{sing supp } u, \quad (1)$$

其中  $\text{sing supp } u$  是在其上  $u$  与一无穷次可微函数重合的  $X$  的最大开子集的补集. 这关系式表明  $\text{WF}(u)$  确实是比  $\text{sing supp } u$  更精细的刻画  $u$  的奇异性的一个特征.

设  $A$  是  $X$  上具有主象征  $a_m(x, \xi)$  的  $m$  阶伪微分算子 (pseudo-differential operator), 且设  $\text{char } A$  是它的特征方向的集合, 即

$$\text{char } A = \{(x, \xi) \in T^*X \setminus 0: a_m(x, \xi) = 0\}.$$

这时

$$\text{WF}(Au) \subset \text{WF}(u) \subset \text{WF}(Au) \cup \text{char } A. \quad (2)$$

这里第一个包含关系刻画了  $A$  的拟局部性, 而第二个包含式是关于具有光滑系数的椭圆型方程解的光滑性定理的一个深远的推广.

如果  $A$  的主象征  $a_m(x, \xi)$  是实值的, 则关于奇点传播的以下定理成立: 如果给定了一个次特征 (即

$T^*X \setminus 0$  上具有 Hamilton 函数  $a_m$  的 Hamilton 向量域的一个轨道) 的连通片  $\gamma$ , 与  $\text{WF}(Au)$  不相交, 则或者  $\gamma \subset \text{WF}(u)$  或者  $\gamma \cap \text{WF}(u) = \emptyset$ .

这定理表明一个具有光滑右端  $f$  的方程  $Au = f$  的解的奇点 (即它们的波前集) 沿着  $A$  的主象征  $a_m$  的次特征传播 (见 [3], [4], [8], [11], [12], [16]).

对广义函数  $u \in D'(X)$  的解析波前集  $\text{WF}_a(u)$  可按以下三个等价方式之一来定义 (见 [13]) (这里为简单起见,  $X$  是  $\mathbf{R}^n$  中区域):

1)  $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}_a(u)$ , 如果存在  $x_0$  的邻域  $\omega$ ,  $\mathbf{R}^n$  中开的真凸锥  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  和在  $\omega + i\Gamma_j$  中全纯的函数  $f_j$ , 使得  $\xi_0 \notin \Gamma_j^0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , 且  $u = \sum_{j=1}^N b(f_j)$ , 其中  $\Gamma_j^0$  是对偶于  $\Gamma_j$  的锥且  $b(f_j)$  是全纯函数  $f_j(x + iy)$  当  $y \rightarrow 0$ ,  $y \in \Gamma_j$  时的边界值, 在广义函数弱收敛意义下. 这定义也适用于超函数, 如果边界值作不同的解释.

2) 设

$$F_u(\xi, \lambda; x) = \int \exp[-iy \cdot \xi - \lambda|y - x|^2] u(y) dy$$

(一种广义 Fourier 变换); 则  $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}(u)$ , 当且仅当对任何在  $x_0$  的某邻域中解析的函数  $\chi \in C_0^\infty(X)$  存在  $\xi_0$  的锥形邻域  $\Gamma$  和正常数  $\alpha, \gamma, C_N$  使得

$$F_{\chi u}(\xi, \lambda; x_0) \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N} e^{-\lambda \alpha},$$

$$\xi \in \Gamma, \quad 0 < \lambda < \gamma|\xi|.$$

3)  $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}(u)$ , 当且仅当存在  $x_0$  在  $X$  中的邻域  $\omega$ , 具有紧支集的广义函数的有界序列  $u_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 和常数  $C > 0$ , 使得在  $\omega$  中  $u_k = u$  且

$$|\widehat{u}_k(\xi)| \leq C^{k+1} k! |\xi|^{-k}, \quad \xi \in \Gamma.$$

对解析波前有性质 (1) 的类似:

$$\pi(\text{WF}_a(u)) = \text{sing supp}_a u,$$

这里  $\text{sing supp}_a u$  是  $u$  在其上实解析的最大集合的补集. 有性质 (2) 的类似, 这里可取具有实解析系数的微分算子或解析拟微分算子作为  $A$  (见 [6], [9], [11], [15], [16]). 对这种具有实主象征的算子  $A$ , 一个类似于上述对通常波前集的, 关于解析波前集的传播的定理成立 (见 [11]).

#### 参考文献

- [1] Sato, M., Hyperfunctions and partial differential equations, in Proc. 2nd Conf. Functional Anal. Related Topics, Tokyo Univ. Press, 1969, 91 - 94.
- [2] Hörmander, L., Fourier integral operators I, Acta Math., 127 (1971), 79 - 183.
- [3] Duistermaat, J. J. and Hörmander, L., Fourier integral operators II, Acta Math., 128 (1972), 183 -

269.

- [4] Duistermaat, J. J., Fourier integral operators, Courant Inst. Math., 1973.
- [5] Шубин, М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978 (英译本: Shubin, M. A., Pseudo-differential operators and spectral theory, Springer, 1983).
- [6] Trèves, F., Introduction to pseudo-differential and Fourier integral operators, 1-2, Plenum, 1980.
- [7] Taylor, M., Pseudo-differential operators, Princeton Univ. Press, 1981.
- [8] Nirenberg, L., Lectures on linear partial differential equations, Amer. Math. Soc., 1972.
- [9] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M., Microfunctions and pseudo-differential equations, in Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, Lecture notes in math., Vol. 287, Springer, 1973, 265-529.
- [10] Schapira, P., Théorie des hyperfonctions, Springer, 1970.
- [11] Sjöstrand, J., Singularités analytiques microlocales, Univ. Paris-Sud, 1982 (Prepublication.)
- [12] Lascar, R., Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles à caractéristiques de multiplicités variables, Springer, 1981.
- [13] Bony, J., Equivalence des diverses notions de spectre singulier analytique, Sémin. Goulaouic-Schwartz III (1976-1977).
- [14A] Bros, J. and Iagolnitzer, D., Tuboïdes et structure analytique des distributions I. Tuboïdes et généralisation d'un théorème de Grauert, Sémin. Goulaouic-Lions-Schwartz, 16 (1974).
- [14B] Bros, J. and Iagolnitzer, D., Tuboïdes et structure analytique des distributions II. Support essentiel et structure analytique des distributions, Sémin. Goulaouic-Lions-Schwartz, 18 (1975).
- [15] Hörmander, L., On the singularities of solutions of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 329-358.
- [16] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential equations, I-IV, Springer, 1983-1985.

М. А. Шубин 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Guillemin, V. and Sternberg, S., Geometric asymptotics, Amer. Math. Soc., 1977.
- [A2] Arnol'd, V. I., Singularities of caustics and wave fronts, Kluwer, 1990. 葛显良译 鲁世杰校

波向量 [wave vector; волновой вектор]

在表达式

$$a \exp \left( i \sum_{j=1}^m k_j x_j - i \omega t \right) \quad (*)$$

中的向量  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$ , 其中  $a$  和  $\omega$  都是常数,  $t$  表示时间.

(\*) 的通常的物理解释是: 频率为  $\omega$  的一个平面波, 在向量  $\mathbf{k}$  的方向上传播, 其波长为  $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ , 其中  $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_m^2}$ . 许多偏微分方程的线性齐次方程和方程组 (包括数学物理的更重要的方程, 如 Maxwell 方程 (Maxwell equation) 和波动方程 (wave equation)) 都有 (\*) 形式的解. В. М. Бабич 撰

【补注】

参考文献

- [A1] John, F., Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Interscience, 1955.
- [A2] Gel'fand, I. M. and Shilov, G. E., Generalized functions, I. Properties and operations, Acad. Press, 1964 (译自俄文). 孙和生译 陆柱家校

小波分析 [wavelet analysis; небольшой волны анализ]

【补注】粗浅地说, 小波是一个在时间和频率两方面都充分局域化的 (波形) 函数. 熟知的例子有墨西哥帽小波 (Mexican hat wavelet):

$$g(x) = (1-x^2)e^{-x^2/2} \quad (A1)$$

及 Morlet 小波 (Morlet wavelet):

$$g(x) = \pi^{-1/4} (e^{-i\xi_0 x} - e^{-\xi_0^2/2}) e^{-x^2/2}. \quad (A2)$$

在小波分析中, 对基小波 (basic wavelet) 作展缩和平移, 用于信号分析和图象处理.  $s(t)$  的连续小波变换 (wavelet transform) 是实变量  $a > 0$  和  $b$  的二元函数

$$S(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \bar{g}_{a,b} s(t) dt, \quad (A3)$$

其中的

$$g_{a,b}(t) = g\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

以及  $\bar{g}$  是  $g$  的复共轭. 使用  $g$  的 Fourier 变换  $\hat{g}$ , 则有

$$S(a, b) = \sqrt{a} \int \bar{\hat{g}}(a\omega) e^{ib\omega} \hat{s}(\omega) d\omega. \quad (A4)$$

在基小波  $g$  上附加容许性条件

$$c_g = 2\pi \int |\hat{g}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega|} < \infty \quad (A5)$$

(这意指, 如果  $\hat{g}(\omega)$  可微, 则  $\hat{g}(0) = 0$  即  $\int g(t) dt = 0$ ). 如果 (A5) 成立, 则有反演公式

$$s(t) = c_g^{-1} \int \left[ \int S(a, b) g_{a,b}(t) db \right] \frac{da}{a^2}. \quad (A6)$$

小波变换与小波群 (wavelet group)  $\{T_{ab}: a > 0, b \in \mathbf{R}\}$  ( $T_{ab}(x) = ax + b$ ) 及其子群  $\{T_{ab}: a = 2^k, k, b \in \mathbf{Z}\}$  之间的联系, 非常类似于 Fourier 变换与群



$\mathbf{R}$  及  $\mathbf{Z}$  之间的联系. 为小波理论早期的蓬勃发展作出重要贡献的有 J. Morlet, A. Grossmann, Y. Meyer, I. Daubechies 以及他们的学生和合作者. 激发这一理论的一个源泉是 D. Gabor 的窗口 Fourier 分析 ([A1]).

规范正交小波基 (wavelet basis) 是  $L_2(\mathbf{R})$  的形式为

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), j, k \in \mathbf{Z}$$

的一组基. 不可微小波基的一个例子是 Haar 函数系 (Haar system). Daubechies 构造了由紧支集的  $r$  阶可微的  $\psi$  组成的规范正交基, 称为 Daubechies 基 (Daubechies bases). 可微阶数越高 (即  $r$  越大), 则这些基的支集将越大.

小波似乎特别适合用于分析和发现信号、函数和图象的各种性质, 例如间断性及分形结构. 它被誉为数学显微镜. 另外, 小波作为一个统一的概念, 连结了跨越繁多领域的技术和概念, 例如: 子带编码、相干态及重正规化、Calderon-Zygmund 算子、数值分析中的嵌套组、多解分析以及图象处理中的角锥编码等.

#### 参考文献

- [A1] Gabor, D., Theory of communication, *J. Inst. Electr. Eng.*, **93** (1946), 429 - 457.
- [A2] Meyer, Y., Les ondelettes, A. Colin, 1992.
- [A3] Meyer, Y., Ondelettes et opérateurs, I. Ondelettes, Hermann, 1990 (中译本: Y. 迈耶, 小波与算子, 世界图书出版公司, 1995).
- [A4] Daubechies, I., Ten lectures on wavelets, SIAM, 1992.
- [A5] Chui, C. K., An introduction to wavelets, Acad. Press, 1992 (中译本: 崔锦泰, 小波分析导论, 西安交通大学出版社, 1995).
- [A6] Chui, C. K. (ed.), Wavelets: a tutorial in theory and applications, Acad. Press, 1992.
- [A7] Ruskai, M. B., et al. (eds.), Wavelets and their applications, Jones & Bartlett, 1992.
- [A8] Combes, J. M., Grossmann, A. and Tchamitchian, Ph. (eds.), Wavelets. Time-frequency methods and phase space, Springer, 1989.
- [A9] Lemarié, P. G. (ed.), Les ondelettes en 1989, Springer, 1990.
- [A10] Argorel, F., Arnéodo, A., Elezgaray, J. and Grassseau, G., Wavelet transform of fractal aggregates, *Physics Letters A*, **135** (1989), 327 - 336.
- [A11] Holschneider, M., On the wavelet transformation of fractal objects, *J. Stat. Phys.*, **50** (1988), 963 - 993.
- [A12] Holschneider, M. and Tchamitchian, Ph., Pointwise analysis of Riemann's nondifferentiable function, *Invent. Math.*, **105** (1991), 157 - 176.

[A13] Antonini, M., Barlaud, M., Daubechies, I. and Mathieu, P., Image coding using vector quantization in the wavelet transform domain, in *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, IEEE, 1991, 2273 - 2276.

[A14] Beylkin, G., Coifman, R. and Rokhlin, V., Fast wavelet transforms and numerical algorithms, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44** (1991), 141 - 183.

[A15] Mallat, S. G., A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **11** (1989), 674 - 693. 朱学贤 译 刘和平 译

波 [waves; волны], 液体表面上的

液体表面相对于平衡状态的偏离, 这偏离在趋于恢复该状态的力的作用下传播着. 依据这些力的性质——表面张力或重力——液体表面上的波分为张力波和重力波.

对液体的有势运动特别是对平面平行运动已很好地发展了重力波 (gravitational waves) 理论; 作用于液体质点的体积力是重力. 决定波运动的速度势要求在特殊形式的边界条件下对 Laplace 方程 (Laplace equation)  $\Delta \varphi = 0$  求积分. 沿整个液体表面压力是常数, 表面的方程  $\xi = f(x, y, t)$  可在问题被求解后求得. 由此, 根据熟知的流体力学方程的积分, 得到了第一个边界条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 - g z = \text{常数}, \quad (1)$$

它应在  $z = \xi$  时得到满足. 根据在整个运动期间液体表面是由同一些质点组成的事实, 得到第二个边界条件, 即在  $z = \xi$  时:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (2)$$

此外, 须满足的其他要求是, 对液体中的固体流动是与之相切的. 与边界条件一起同时还须满足如下初始条件: 在  $t = 0$  时液体质点应具有规定的初始速度, 而液体表面须有给定的形状. 这等价于给定  $t = 0$  时的作为  $x, y, z$  函数的速度势和给定  $t = 0$  时的函数  $f(x, y, t)$ .

问题的主要困难在于所有上述条件必须在表面  $\xi = f(x, y, t)$  上满足, 而此表面的方程只在问题本身被求解之后才能求得. 在这方面波理论中的问题与旋转液体的射流及平衡态形状的理论中的问题有许多共同之处.

由于在上述边界条件下严格求解波理论的问题实际上不可能, 于是发展了无限小波的理论. 该理论假定, 液体质点的速度和液体表面相对水平平衡面的偏离都是小量. 在这假设下, 边界条件 (1) 和 (2) 取

如下形式:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\xi = \text{常数}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0.$$

与此同时, 允许在速度势的偏导数中将变量  $z = \xi$  换为零. 在这样的假设下函数  $\varphi$  的边界条件取形式:

$$\left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=0} = 0,$$

而波面的方程则取形式:

$$\xi = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{z=0}.$$

在无限小波理论中所获得的主要结果使有可能处理地球物理学的许多重要问题和阐明例如海洋中潮汐波的传播规律. 无限小波理论给出了由航行的船舶产生的波形成问题的解并使得可能建立波浪中船只摇摆的流体力学理论. 复变函数理论诸方法的广泛应用使有可能求解关于不同深度水库中波的传播以及波在漂浮物体上的绕射及反射一系列非常复杂的问题.

有限振幅波的理论是由 A. И. Некрасов ([3]) 发展的, 他通过严格求解具有边界条件 (1) 和 (2) 的平面问题得到了周期波的形状. 相应速度势的确定被化为求找将单波占据的区域变换为圆或圆环区的保角映象的表达函数, 该函数由求解某非线性积分方程而得到.

随着非线性边值问题和积分方程理论的发展, 有限振幅波的理论也充实了新成果. 特别是, 证明了存在单波和其剖面上有角点的极限 Stokes 波. 在有限振幅驻波的即液体表面周期性固有振动的理论中, 只存在建立在应用 Lagrange 变量基础上的近似解.

三维流动表面上的驻波和行波的确定, 甚至在求其近似解时也是一个难题.

#### 参考文献

- [1] Lamb, H., Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, 1906.
- [2] Milne-Thomson, L. M., Theoretical hydrodynamics, MacMillan, 1950.
- [3] Некрасов, А. И., Сбор. соч., т. 1, М., 1961, 358 - 439.
- [4] Stoker, J. J., Water waves, Interscience, 1957.
- [5] Теория поверхностных волн, сб. переводов, М., 1959. Л. Н. Сретенский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Philips, O. M., The dynamics of the upper ocean, Cambridge Univ. Press, 1977.
- [A2] Whitham, G. B., Linear and nonlinear waves, Wiley, 1964. 李维新 译

概率测度的弱收敛 [weak convergence of probability measures; слабая сходимость вероятностной меры]

【补注】 概率测度弱收敛的一般背景是在完全可度量空间 (metric space)  $(X, \rho)$  (亦见完全空间 (complete space); 可分空间 (separable space)) 上讨论的,  $\rho$  是距离, 具有定义在  $X$  的 Borel 子集上的概率测度  $\mu_n, n = 0, 1, \dots$ . 如果对定义在  $X$  上的每个有界连续函数  $f$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时, 有  $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu_0$ , 则称  $\mu_n$  弱收敛到  $\mu_0$ . 如果在  $X$  中取值的随机变量  $\xi_n$  的分布是  $\mu_n, n = 0, 1, \dots$ , 如果  $\mu_n$  弱收敛到  $\mu_0$  就写作  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi_0$ , 并且称  $\xi_n$  依分布收敛到  $\xi_0$  (亦见依分布收敛 (convergence in distribution)).

在概率论中使用最普通的距离空间是  $k$  维 Euclidean 空间  $\mathbf{R}^k$ ,  $[0, 1]$  上连续函数空间  $C[0, 1]$  以及在  $[0, 1]$  上右连续具有左极限的函数空间  $D[0, 1]$ .

更为丰富的距离空间中的弱收敛比在 Euclidean 空间中的用处大得多. 这是因为在  $\mathbf{R}^1$  中依分布收敛的各种各样的结果可由它借助于连续映射定理 (continuous mapping theorem) 导出. 该定理说, 如果在  $(X, \rho)$  中  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi_0$  且映射  $h: X \rightarrow \mathbf{R}$  是连续的 (或至少是可测的, 且  $P(\xi_0 \in D_h) = 0$ , 其中  $D_h$  是  $h$  的不连续点集), 则  $h(\xi_n) \xrightarrow{d} h(\xi_0)$ . 在许多应用中极限随机元是 Brown 运动 (Brownian motion), 它以概率 1 具有连续轨道.

最基本的弱收敛结果之一是关于和  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1$ , 的 Donsker 定理 (Donsker theorem), 其中  $X_i$  是具有  $E X_i = 0, E X_i^2 = 1, i = 1, 2, \dots$  的独立同分布随机变量. 可以这样来陈述其轮廓: 在  $C[0, 1]$  中, 令  $S_0 = 0, S_n(t) = n^{-1/2} \{S_{[nt]} + (nt - [nt]) \cdot X_{[nt]+1}\}, 0 \leq t \leq 1$ , 其中  $[x]$  表示  $x$  的整数部分, 则 Donsker 定理断言  $S_n(t) \xrightarrow{d} W(t)$ , 其中  $W(t)$  是标准 Brown 运动. 应用连续映射定理很容易提供对诸如  $\max_{1 \leq k \leq n} S_k, \max_{1 \leq k \leq n} k^{-1/2} |S_k|, \sum_{k=1}^n I(S_k \geq a)$  和  $\sum_{k=1}^n \gamma(S_k, S_{k+1})$  等函数的依分布收敛结果, 其中  $I$  是示性函数而  $\gamma(a, b) = 1$ , 如  $ab < 0$ ;  $= 0$ , 其他.

#### 参考文献

- [A1] Billingsley, P., Convergence of probability measures, Wiley, 1968.
- C. C. Heyde 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

弱导数 [weak derivative; слабая производная]

同 Gâteaux 导数 (Gâteaux derivative).

弱极值 [weak extremum; слабый экстремум]

由泛函  $J(y)$  在曲线  $\tilde{y}(x) (x_1 \leq x \leq x_2)$  上达到的一个极小值或极大值  $J(\tilde{y})$ , 其中对所有满足以下条件的比较曲线  $y(x)$ , 以下不等式之一成立:

$$J(\tilde{y}) \leq J(y) \text{ 或 } J(\tilde{y}) \geq J(y),$$



这些  $y(x)$  位于关于  $y$  及其导数都是  $\varepsilon$  邻近的  $\tilde{y}(x)$  的一个邻域中:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \varepsilon, |y'(x) - \tilde{y}'(x)| \leq \varepsilon.$$

曲线  $\tilde{y}(x)$ ,  $y(x)$  必须满足给定的边界条件.

由于  $J(y)$  的极大化等价于  $-J(y)$  的极小化, 因而常常谈论弱极小以代替弱极值. 术语“弱”强调了这样一个事实, 即比较曲线  $y(x)$  不但满足在纵坐标上的  $\varepsilon$  邻近条件且其导数也满足  $\varepsilon$  邻近性条件 (相对于强极值 (strong extremum) 情形, 这时  $y(x)$  和  $\tilde{y}(x)$  的  $\varepsilon$  邻近性仅对纵坐标而言).

由定义, 弱极值是弱相对极值 (weak relative minimum), 因为后者在使  $J(y)$  有意义的容许比较曲线  $y(x)$  的整个类的一个子集的成员中给出一个极小值. 然而为简便起见, 术语“弱极值”用于两者的情形.

#### 参考文献

- [1] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М. - Л., 1950 (中译本: М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).
- [2] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷第一、二分册, 人民教育出版社, 1958).

И. Б. Вапнярский 撰 葛显良 译 吴绍平 校

#### 弱同调 [weak homology; слабая гомология]

闭链间的一种等价关系, 用于定义谱同调 (spectral homology) 群  $\check{H}_p(C; G)$ . 紧空间的 Steenrod-Ситников 同调群  $H_p(C; G)$  满态射地映满  $\check{H}_p(C; G)$ , 而这一满态射的核  $K$  同构于空间  $C$  的相应于开覆盖  $\alpha$  的神经的同调群  $H_p(\alpha; G)$  的逆向极限的第一个导出函子  $\varprojlim^1$ . 群  $H_p$  最初是通过 Vietoris 闭链定义的. 用于给出子群  $K \subset H_p(C; G)$  的元素的闭链被称为弱同调于零的 (weakly homologous to zero). 另一方面, 在群  $\check{H}_p$  的以上定义中同调于零的 Vietoris 闭链有时被称为强同调于零的 (strongly homologous to zero) (相应的等价关系则称为强同调 (strong homology)). 当  $G$  为紧群或域时, 核  $K$  为零, 此时强同调和弱同调等价.

#### 参考文献

- [1] Александров, П. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 54 (1959), 3 - 136.
- [2] Massey, W., Notes on homology and cohomology theory, Yale Univ. Press, 1964.

Е. Г. Складенко 撰 李贵松 译 潘建中 校

#### 弱相对极小值 [weak relative minimum; слабый от-

#### носительный минимум]

由泛函  $J(y)$  在曲线  $\tilde{y}(x)$  ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ) 上达到的一个极小值  $J(\tilde{y})$ , 使得对在整个区间  $[x_1, x_2]$  上满足一阶  $\varepsilon$  邻近性条件

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \varepsilon, |y'(x) - \tilde{y}'(x)| \leq \varepsilon \quad (1)$$

的所有比较曲线  $y(x)$ ,  $J(\tilde{y}) \leq J(y)$ . 假设曲线  $\tilde{y}(x)$ ,  $y(x)$  满足给定的边界条件.

如果忽视 (1) 中在导数上的  $\varepsilon$  邻近性条件, 则这导致零阶  $\varepsilon$  邻近性条件. 泛函  $J(y)$  在零阶  $\varepsilon$  邻域中的极小值称为强相对极小值 (strong relative minimum). 因为零阶  $\varepsilon$  邻近性条件比一阶  $\varepsilon$  邻近性条件划分出更广的一类曲线, 每个强极值也是一个弱极值, 反之不然.

为了一条曲线  $\tilde{y}(x)$  给出弱相对极值, 在其上 Legendre 条件 (Legendre condition) 必须成立. 对强相对极值, 更一般的 Weierstrass 条件 (对变分极值的) (Weierstrass condition (for a variational extremum)) 必须成立. 按照最优控制理论的术语, 这些必要条件之间的区分在于对弱 (强) 相对极小值, 在极值曲线的点上, Hamilton 函数 (Hamilton function) 必须关于控制有一局部极大值 (绝对极大值) (与 Понтрягин 最大值原理 (Pontryagin maximum principle) 一致).

关于弱相对极小值的充分条件仅在极值曲线  $\tilde{y}(x)$  上加一定的要求, 而对强极小值的情形, 要求意义上类似的条件不但在  $\tilde{y}(x)$  上成立, 而且在它的某一个零阶  $\varepsilon$  邻域内也成立. 一条极值曲线成为弱相对极值, 如果沿着它强 Legendre 和强 Jacobi 条件成立. 一条极值曲线成为强相对极值, 如果它可以嵌入于一个极值曲线场中而在该场的所有点 Weierstrass 函数是非负的.

#### 参考文献

- [1] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М. - Л., 1950 (中译本: М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).
- [2] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957 (В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第四卷第一、二分册, 人民教育出版社, 1958).

И. Б. Вапнярский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Luenberger, D. G., Optimization by vector space methods, Wiley, 1969.
- [A2] Cesari, L., Optimization - Theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.

葛显良 译 吴绍平 校

弱奇异性 [weak singularity; слабая особенность], 极奇异性 (polar singularity)

当乘积  $M(x, s) = |x - s|^\alpha K(x, s)$  ( $(x, s) \in \Omega \times \Omega$ ) 有界时积分核  $K(x, s)$  的无界性 (见积分算子的核 (kernel of an integral operator)). 这里  $\Omega$  是空间  $\mathbf{R}^n$  中的一个集合,  $|x - s|$  是两点  $x$  和  $s$  之间的距离且  $0 < \alpha = \text{常数} < n$ . 由这样的一个核生成的积分算子

$$K\varphi(t) = \int_{\Omega} \frac{M(x, s)}{|x - s|^\alpha} \varphi(s) ds \quad (1)$$

称为具有弱奇异性 (或具有极奇异性) 的积分算子 (integral operator with a weak singularity (with a polar singularity)). 设  $\Omega$  是  $\mathbf{R}^n$  的一个紧子集. 如果  $M(x, s)$  在  $\Omega \times \Omega$  上连续, 则算子 (1) 是连续函数空间  $C(\Omega)$  上的完全连续算子 (completely-continuous operator), 又如果  $M$  是有界的, 则算子 (1) 在空间  $L_2(\Omega)$  上是完全连续的.

核

$$(K_1 \otimes K_2)(x, s) = \int_{\Omega} K_1(x, t) K_2(t, s) dt \quad (2)$$

称为核  $K_1$  和  $K_2$  的卷积 (convolution of the kernels). 设  $K_1, K_2$  有弱奇异性, 且

$$|K_i(x, s)| \leq \frac{\text{常数}}{|x - s|^{\alpha_i}}, \quad \alpha_i = \text{常数} < n, i = 1, 2;$$

则它们的卷积 (2) 有界或有弱奇异性, 且

$$|K_1 \otimes K_2(x, s)| \leq \begin{cases} c & \text{如 } \alpha_1 + \alpha_2 < n, \\ c |\ln |x - s|| & \text{如 } \alpha_1 + \alpha_2 = n, \\ c |x - s|^{n - \alpha_1 - \alpha_2} & \text{如 } \alpha_1 + \alpha_2 > n, \end{cases}$$

其中  $c$  是一个常数.

如果一个核有弱奇异性, 则从某一叠代以后它的所有叠核都是有界的.

参考文献

- [1] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第五卷第一、二分册, 人民教育出版社, 1963, 1964 第 2 版).
- [2] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 3 изд. М., 1976 (英译本: Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984).
- [3] Красносельский, М. А. [и др.], Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966 (英译本: Krasnosel'skii, M. A., et al., Integral operators in spaces of summable functions, Noordhoff, 1976). Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】在解椭圆型方程的边界积分方程法 (boundary integral equation method) 中弱奇异性核经常出现 (见 [A1]). 另一个重要的具有弱奇异性核的积分方

程是 Abel 积分方程 (Abel integral equation) ([A2]).

参考文献

- [A1] Colton, D. and Kress, R., Integral equation methods in scattering theory, Wiley, 1983.
- [A2] Gorenflo, R. and Vessella, S., Abel integral equations in analysis and applications, Springer, 1991.
- [A3] Zabreyko, P. P., et al., Integral equations - a reference text, Noordhoff, 1975, Sects. 1.1.2; 11.6.
- [A4] Hochstadt, H., Integral equations, Wiley, (Interscience), 1975, Sect. 11.4. 葛显良 译 吴绍平 校

弱解 [weak solution; слабое решение]

微分方程

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f \quad (*)$$

在区域  $D$  的弱解是一局部可积函数  $u$ , 它对在  $D$  中具有紧支集的所有光滑函数  $\varphi$  (比如,  $C^\infty$  类函数) 满足等式

$$\int_D u L^* \varphi dx = \int_D f \varphi dx.$$

这里, (\*) 中的系数  $a_\alpha(x)$  假定是充分光滑的, 而  $L^*$  是  $L$  的形式的 Lagrange 伴随算子:

$$L^* \varphi = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi).$$

例如, 广义导数  $f = D^\alpha u$  可以定义为局部可积函数  $f$ , 使得  $u$  是方程  $D^\alpha u = f$  的一个弱解.

在考虑 (\*) 的弱解时, 产生下面的问题: 在什么条件下它们是强解 (见强解 (strong solution))? 例如, 在椭圆型方程情形下, 每一个弱解都是强解.

参考文献

- [1] Бицадзе А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981.

А. П. Солдатов 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Agmon, S., Lectures on elliptic boundary value problems, v. Nostrand, 1965.
- [A2] Gilbarg, D. and Trüdinger, N. S., Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1983 (中译本: D. 吉耳巴格, N. S. 塔丁格著, 二阶椭圆型偏微分方程, 上海科学技术出版社, 1981).

孙和生 译 陆柱家 校

弱拓扑 [weak topology; слабая топология]

向量空间  $X$  上由半范数 (semi-norm) 族  $p(x) = |f(x)|$  生成的局部凸拓扑 (locally convex topology), 这里  $f$  跑遍 (代数的) 对偶空间 (dual space)  $X^*$  的某个子集  $F$ .



## 参考文献

- [1] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Краткий курс функционального анализа, М., 1982 (中译本: Л. А. 刘斯特尔尼克, В. И. 索伯列夫, 泛函分析概要, 第二版, 科学出版社, 1985).

- [2] Schaeffer, H., Topological vector spaces, Springer, 1971. М. И. Войцеховский 撰

【补注】上面引入的弱拓扑常常记为  $\sigma(X, F)$ . 它是 Hausdorff 拓扑, 当且仅当  $F$  分离  $X$  的点.

亦见强拓扑 (strong topology).

## 参考文献

- [A1] Jarchow, H., Locally convex spaces, Teubner, 1981 (译自德文). 葛显良 译 鲁世杰 校

## 弱无穷维空间 [weakly infinite-dimensional space; слабо бесконечномерное пространство]

一个拓扑空间 (topological space)  $X$ , 使得对其闭子集偶对的任意无穷系  $(A_i, B_i)$ ,

$$A_i \cap B_i = \emptyset, \quad i = 1, 2, \dots,$$

存在  $(A_i$  与  $B_i$  之间的) 分划 (partition)  $C_i$ , 满足  $\bigcap C_i = \emptyset$ . 不是弱无穷维的无穷维空间称为强无穷维 (strongly infinite dimensional) 空间. 弱无穷维空间也称为  $A$  弱无穷维 ( $A$ -weakly infinite dimensional) 空间. 若在上述定义中, 进一步要求  $C_i$  的某有限子族有空的交集, 就得出  $S$  弱无穷维空间 ( $S$ -weakly infinite-dimensional space) 的概念.

## 参考文献

- [1] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】除上述外,  $A$  弱就是 Александров 弱 (Aleksandrov weakly),  $S$  弱就是 Смирнов 弱 (Smirnov weakly). 还有一种已经弃之不用的概念 Hurewicz 弱无穷维空间 (Hurewicz - weakly infinite-dimensional space), 见综述 [A1].

为避免“无穷维空间”这个词的混乱, 空间  $X$  要求可度量化, 见 [A2].

## 参考文献

- [A1] Aleksandrov, P. S., Some results in the theory of topological spaces, obtained within the last twenty-five years, *Russian Math. Surveys*, 15 (1960), 2, 23 - 83 (*Uspekhi Mat. Nauk.*, 15 (1960), 2, 25 - 95).

- [A2] Mill, J. van., Infinite-dimensional topology, North-Holland, 1989.

- [A3] Engelking, R. and Pol. E., Countable-dimensional spaces: a survey, *Diss. Math.*, 216 (1983), 5 - 41.

罗嵩龄 译

## 弱游荡集 [weakly-wandering set; слабо блуждающее

множество], 对可测空间  $(X, \mathfrak{B})$  的一个可逆可测变换  $T$  的

一个可测子集  $A \subset X$ , 存在无穷正整数列  $\{n_i\}$ , 使得集列  $\{T^{n_i} A\}$  互不相交 (这里,  $T$  的可逆性是指存在可测的  $T^{-1}$ ). 如果  $T$  有一个  $\sigma$  有限的拟不变测度 (quasi-invariant measure)  $\mu$  (定义在  $\mathfrak{B}$  上), 那么  $T$  有一个有限不变测度 (invariant measure) 的必要充分条件是: 它等价于  $\mu$  对任一弱游荡集  $A$  有  $\mu A = 0$ .

注意, 在拓扑动力学 (topological dynamics) 中, 有一个弱非游荡点 (weakly non-wandering point, 见 [3]) 的概念, 它与上述概念无关.

## 参考文献

- [1] Hajian, A. B. and Kakytani, S., Weakly wandering sets and invariant measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 110 (1964), 1, 136 - 151.

- [2] Hajian, A. and Itô, Y., Weakly wandering sets and invariant measures for a group of transformations, *J. Math. Mech.*, 18 (1969), 12, 1203 - 1216.

- [3] Anosov, D. V. and Bronshtein, I. V., Topological dynamics, in *Dynamical Systems I*, *Encyclopaedia of math. sciences*, Vol. 1, Springer, 1988, 197 - 219 (译自俄文). Д. В. Аносов 撰 周民强 译

## 罗 [web; сеть]

【补注】关于“罗”一词的不同意义 (并非不相似), 可参见罗的几何学 (webs, geometry of) 与球面罗 (web of spheres). 罗和网这两个词有时互相替换. 亦见网 (微分几何学中的) (net (in differential geometry)). 沈纯理 译

## 罗微分 [web differentiation; дифференцирование по сети]

集函数  $\psi$  的一种特殊微分. 罗 (web)  $N$  是指带测度  $\mu$  的基础空间  $X$  的  $\{A_j^i\}$  剖分的总体, 使得

$$\bigcup_j A_j^i = X,$$

$$A_{j_1}^i \cap A_{j_2}^i = \emptyset, \quad j_1 \neq j_2, \quad i = 1, 2, \dots,$$

且对每个  $A_{j_1}^{i+1}$ , 可以找到包含它的集合  $A_{j_2}^i$ . 一切  $A_j^i$  都是可测的, 且其总体在一定意义下 ([1]) 可逼近所有的可测集. 如果  $i$  固定, 那么称  $A_j^i$  为秩  $i$  的集族 (sets of rank  $i$ ). 对每个点  $x_0$  和任意的  $n$ , 恰有一个包含  $x_0$  的秩为  $n$  的集合  $A_n(x_0)$ .

如果下式的极限存在, 则称

$$D_N(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi[A_n(x_0)]}{\mu[A_n(x_0)]}$$

为在点  $x_0$  处函数  $\psi$  沿罗  $N$  的导数 (derivative of the

function  $\psi$  along the web  $N$ ), 也还可定义沿罗  $N$  的各种导数概念.

罗微分的最简单例子, 是由形如  $(j/2^i, (j+1)/2^i)$  的有理二进区间引出的单变量函数的增量的微分.

可数加性集函数  $\psi$  的罗导数是几乎处处存在的, 且等同于  $\psi$  的绝对连续分量的密度. 在  $n$  维空间中人们经常研究的是, 当秩增大时其直径趋于零的半开区间套的罗微分.

网以及罗微分的概念还可推广到无测度的抽象空间的情形.

#### 参考文献

- [1] Шилов, Г. Е., Гуревич, Б. Л., Интеграл, мера и производная, 2 изд., М., 1967 (英译本: Shilov, G. E. and Gurevich, B. L., Integral, measure and derivative: a unified approach, Dover, 1977).
- [2] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).
- [3] Kenyon, H. and Morse, A. P., Web derivatives, Mem. Amer. Math. Soc., 132 (1973).

В. А. Сковорцов 撰

【补注】在 [1] 中, “罗微分”已被译为“沿一个罗的微分”(第 10.2 节). 在该书的第 10.3 节, 还将其推广于 Vitali 系统 (Vitali systems).

关于测度的罗微分概念的提出似乎属于 Ch. J. de la Vallée-Poussin ([A1]). 今日, 它可以看作是一个关于鞅 (martingale) 收敛定理的特殊情形, 且是证明 Radon-Nikodym 定理 (Radon-Nikodym theorem) 的最佳方法之一.

#### 参考文献

- [A1] de la Vallée-Poussin, Ch. J., Intégrales de Lebesgue Fonctions d'ensembles. Classe de Baire, Gauthier-Villars, 1936. 周民强 译

#### 球面罗 [web of spheres; сеть сфер]

对一给定点 (罗的中心 (centre of the web) 或根心 (radical centre)), 有给定的势  $p$  (罗的势 (power of the web)) 的所有球面的集合. 存在三类球面罗:

1) 双曲罗 (hyperbolic web) ( $p > 0$ ), 它由正交于一个给定球面的所有球面构成;

2) 椭圆罗 (elliptic web) ( $p > 0$ ), 它由与一个给定球面相交于其大圆的所有球面构成;

3) 抛物罗 (parabolic web) ( $p = 0$ ), 它由通过一给定点的所有球面构成.

两个罗所共有的所有球面的集合称为球面网 (net). 中心不在一条直线上的三个罗的所有公共球面的集合称为球面束 (pencil of spheres).

А. Б. Иванов 撰

【补注】也用术语“球面丛”和“球面网”来代替“球面罗”. 见线性系 (linear system); 子簇系 (system of subvarieties) 的补注.

#### 参考文献

- [A1] Todd, J. A., Projective and analytical geometry, Pitman, 1947, Chapt. VI. 沈纯理 译

#### Weber 方程 [Weber equation; Вебера уравнение]

二阶线性常微分方程

$$y'' + \left( v + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} \right) y = 0, \quad v = \text{常数}, \quad (*)$$

而点  $x = \infty$  是强奇点 (singular point). 这类方程由 H. Weber 首次在位势论中联系抛物柱面加以研究 ([1]); 此方程可由抛物坐标写出的 Laplace 方程 (Laplace equation) 经分离变量得出. 代换  $y = x^{-1/2} w$ ,  $z = x^2/2$  把 Weber 方程变换为 Whittaker 方程 (Whittaker equation), 它是汇合型超几何方程 (confluent hypergeometric equation) 的特殊情形. 代换  $y = u \exp(-x^2/4)$  把 Weber 方程变换为

$$u'' - xu' + vu = 0.$$

方程 (\*) 的解称为抛物柱面函数 (parabolic cylinder functions) 或 Weber-Hermite 函数 (Weber-Hermite functions). 特别当  $v$  为非负整数时, 函数

$$y = \exp(-x^2/4) H_v(x)$$

满足方程 (\*), 这里  $H_v(x)$  是 Hermite 多项式 (Hermite polynomials), 见 [2], [3], [4].

#### 参考文献

- [1] Weber, H. F., Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + k^2 u = 0$ , Math. Ann., 1 (1869), 1 - 36.
- [2] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.
- [3] Bateman, H., Erdélyi, A., Higher transcendental functions. Bessel functions, 2, McGraw-Hill, 1953 (中译本: A. 爱尔台里, 高级超越函数, 上海科学技术出版社, 1957 - 1958).
- [4] Jahnke, E., Emde, F., Tables of functions with formulae and curves, Dover, reprint, 1945 (译自德文).

Н. X. Розов 撰 沈永欢 译

#### Weber 函数 [Weber function; Вебера функция]

函数

$$E_v(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(v\theta - z \sin \theta) d\theta,$$

其中  $z$  是复数,  $v$  是实数. 这个函数满足非齐次 Bes-



sel 方程 (Bessel equation)

$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - \nu^2) y = \\ = -\frac{1}{\pi} [(z + \nu) + (z - \nu) \cos \nu \pi].$$

对于非整数  $\nu$ , 下列展开式成立:

$$E_\nu(z) = \frac{1 - \cos \nu \pi}{\nu \pi} \left[ 1 - \frac{z^2}{2^2 - \nu^2} + \right. \\ \left. + \frac{z^4}{(2^2 - \nu^2)(4^2 - \nu^2)} - \dots \right] + \\ - \frac{1 + \cos \nu \pi}{\pi} \left[ \frac{z}{1^2 - \nu^2} - \frac{z^3}{(1^2 - \nu^2)(3^2 - \nu^2)} + \right. \\ \left. + \frac{z^5}{(1^2 - \nu^2)(3^2 - \nu^2)(5^2 - \nu^2)} - \dots \right].$$

如果  $|z| \rightarrow \infty$  和  $|\arg z| < \pi/2$ , 则下列渐近展开式成立:

$$E_\nu(z) \approx -N_\nu(z) - \frac{1 + \cos \nu \pi}{\pi z} \left[ 1 - \frac{1^2 - \nu^2}{z^2} + \right. \\ \left. + \frac{(1 - \nu^2)(3 - \nu^2)}{z^4} - \dots \right] - \frac{1 - \cos \nu \pi}{\pi z} \left[ \frac{\nu}{z} - \right. \\ \left. - \frac{\nu(2^2 - \nu^2)}{z^3} + \frac{\nu(2^2 - \nu^2)(4^2 - \nu^2)}{z^5} - \dots \right],$$

其中  $N_\nu$  是 **Neumann 函数** (Neumann function). 如果  $\nu$  不是整数, 则 **Weber 函数** 与 **Anger 函数** (Anger function)  $J_\nu(z)$  之间存在下列等式:

$$\sin \nu \pi \cdot J_\nu(z) = \cos \nu \pi E_\nu(z) - E_{-\nu}(z),$$

$$\sin \nu \pi \cdot E_\nu(z) = J_{-\nu}(z) - \cos \nu \pi \cdot J_\nu(z).$$

Weber 函数最先为 H. Weber 所研究 ([1]).

#### 参考文献

- [1] Weber, H. F., *Zurich Vierteljahresschrift*, 24 (1879), 33 - 76.
- [2] Watson, G. N., *A treatise on the theory of Bessel functions*, 1, Cambridge Univ. Press, 1952.

А. П. Прудников 撰 杜小杨 译

#### 罗的几何学 [webs, geometry of; тканей геометрия]

微分几何学中研究曲线和曲面族——所谓 (平坦的, 空间的或多维的) 罗的那部分课题.

平坦  $p$  罗 (flat  $p$ -web) (平面  $p$  罗 (planar  $p$ -web)) 是平面中的一个区域, 它有充分光滑的  $p$  (通常  $p \geq 3$ ) 族曲线满足: 1) 对区域中任一点, 每一族中恰有一条曲线通过这点; 2) 取自不同族的曲线至多只有一个公共点. 例如: 平行于一等边三角形各边所

得到的三族直线形成一个 3 罗 (正则罗 (regular web)).

在罗的几何学中, 研究的基本对象是在微分-拓扑变换下不变的性质. 存在 (局部或整体) 微分同胚的两个罗称为等价的. 对  $p=2$ , 一个罗微分同胚于由两组平行线所形成的罗 (这种罗称为网, 见网 (微分几何学中的) (net (in differential geometry))). 当  $p=3$  时, 一般来说, 罗既不微分同胚于三组平行线 (即它不是六角线罗 (hexagonal web)), 甚至也不微分同胚与三组直线 (即它不是可求长罗 (rectifiable web)). 在几何形式上, 罗的六角性是一闭包条件 (closure condition). 可求长性的条件不能用明显的形式来描述; 它常与图算法问题一起来研究.

空间曲线罗 (spatial curvilinear web) 由空间中  $p$  族曲线构成, 使得对区域中每一点, 每一族曲线中有一条曲线通过此点. 即使对  $p=2$ , 这些罗也不全是微分同胚的. 四边形罗具有特殊的兴趣, 它的线形成单参数族的曲面上的网.

空间曲面罗 (spatial surface web) 由  $p$  族曲面构成, 使得对区域中每一点, 每一曲面族中有一个曲面通过此点, 且不同曲面族中的三个曲面至多只有一个公共点. 关于这类罗, 以及它们的多维类似, 也可导入可求长性的概念 (即微分同胚于由平面 (超平面) 族形成的罗). 一个 4 罗称为八面体罗 (octahedral web), 如果由任意三个曲面族与第四个曲面族中一个曲面的交形成的 3 罗是六角形的.

多维罗 (multi-dimensional web) 由多维空间中的  $p$  族子流形构成. 例如,  $2r$  维空间中的三族  $r$  维子流形形成一个 3 罗, 如果对任一点, 每一族中有一个子流形通过此点, 且两个不同族中的子流形至多只有一个公共点.

罗的几何学也考虑罗的射影微分性质, 仿射微分性质和与带有罗的流形的几何学相联系的罗的其他性质. 人们也考虑那些由测地线 (geodesic line), 与 **Darboux 张量** (Darboux tensor) 相联系的线, 等等组成的罗.

(在平坦 3 罗的情形) 藉助于其他两族曲线, 第三族中曲线的定义可以看成拟群型的一种代数运算. 因而出现了抽象罗或代数网的概念 (见拟群 (quasi-group)).

#### 参考文献

- [1] Blaschke, W., *Einführung in die Geometrie der Weben*, Birkhäuser, 1955.
- [2] Рыжков, В. В., Белоусов, В. Д., в сб.: *Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия*, 1971, М., 1972, 159 - 188.
- [3] Шуликовский, В. И., *Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении*, М.,

1963.

B. B. РЫЖКОВ 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Blaschke, W. and Bol, G., *Geometrie der Gewebe*, Springer, 1938.
- [A2] Goldberg, V. V., *Theory of multcodimensional  $(n+1)$ -webs*, Kluwer, 1988.
- [A3] Chern, S. S. and Griffiths, P. A., *Abel's theorem and webs*, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, **80** (1978), 13 – 110. (Addenda et corrigenda: **83** (1981), pp. 78 – 83.)
- [A4] Chern, S. S., *Web geometry*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **6** (1982), 1 – 8.
- [A5] Akivis, M. A. and Shelekhov, A. M., *Geometry and algebra of multidimensional three webs*, Kluwer, 1992 (译自俄文). 沈纯理 译

**Wedderburn - Artin 定理 [Wedderburn - Artin theorem; Веддерберна - Артина теорема]**

完整描述不含幂零理想的结合 Artin 环 (Artinian ring) 结构的定理. 一个结合环  $R$  (见结合环与代数 (associative rings and algebras)) 对右理想有极小条件而没有幂零理想, 当且仅当  $R$  是有限个理想的直和, 其中每个理想同构于相应的除环上的有限阶全矩阵环, 除了各项的顺序外, 这一直和分解是唯一的. J. Wedderburn 首先对域上的有限维代数得到这一定理, 而 E. Artin 证明了它的最终形式.

## 参考文献

- [1] Artin, E., *The influence of J. H. M. Wedderburn on the development of modern algebra*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 65 – 72. К. А. Жевлаков 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Wedderburn, J. H. M., *Lectures on matrices*, Dover, reprint, 1964.
- [A2] Faith, C., *Algebra I: rings, modules, and categories*, Springer, 1973, p. 369, 380.
- [A3] Cohn, P. M., *Algebra*, 2, Wiley, 1989, p. 174 ff. 蔡传仁 译

**Wedderburn - Мальцев 定理 [Wedderburn - Mal'tsev theorem; Веддерберна - Мальцева теорема]**

设  $A$  是域  $F$  上的有限维结合代数 (见结合环与结合代数 (associative rings and algebras)), 根为  $N$ , 设商代数  $A/N$  是可分代数 (separable algebra) (这对于特征为零的域上的代数, 总是为真). 则  $A$  (作为线性空间) 可分解为根  $N$  和某个半单子代数  $S$  的直和:

$$A = N \oplus S,$$

并且若存在另一个分解  $A = N \oplus S_1$ , 这里  $S_1$  是一个半单子代数, 则存在代数  $A$  的一个自同构  $\varphi$ , 将  $S$  映到  $S_1$  上 (这个自同构  $\varphi$  是内的 (inner), 即存在元素  $a, a' \in A$ , 使得  $a \cdot a' = a' \cdot a = 0$ , 而对所有  $x \in A$ ,  $x\varphi = a \cdot x \cdot a'$ , 这里  $x \cdot y = x + y + xy$ ). J. H. M. Wedderburn ([1]) 证明了这个分解的存在性, A. И. Мальцев ([2]) 证明了分解精确到半单项自同构的唯一性. 这个定理连同刻画半单代数结构的 Wedderburn 定理 (见结合环与结合代数 (associative rings and algebras)) 构成了有限维代数经典理论的核心部分.

## 参考文献

- [1] Wedderburn, J. H. M., *On hypercomplex numbers*, *Proc. London. Math. Soc.* (2), **6** (1908), 77 – 118.
- [2] Мальцев, А. И., *«Докл. АН СССР»*, **36** (1942), 1, 42 – 45.
- [3] Albert, A. A., *Structure of algebras*, Amer. Math. Soc., 1939.
- [4] Curtis, C. W. and Reiner, I., *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience, 1962. Л. А. Бокунь 撰

【补注】 Lie 代数的类似定理成立, 设  $\mathfrak{g}$  是特征为零的域上的一个有限维 Lie 代数, 根为  $\mathfrak{r}$ , 则存在  $\mathfrak{g}$  的半单子代数  $\mathfrak{h}$ , 使得  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}$ . 这样一个分解称为 Levi 分解 (Levi decomposition), 而  $\mathfrak{h}$  称为 Levi 因子 (Levi factor) 或 Levi 子代数 (Levi subalgebra). 唯一性精确到内自同构.

## 参考文献

- [A1] Jacobson, N., *Lie algebras*, Dover, reprint, 1962, p. 91 ff (中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科技出版社, 1964). 蔡传仁 译

**楔 (向量空间中的) [wedge (in a vector space); клин], 凸锥 (convex cone)**

序域上向量空间中的一个凸集, 它关于变换  $x \mapsto \lambda x$ ,  $\lambda \geq 0$ , 是不变的, 即是这样的一种集合  $K$ , 如果  $x, y \in K$  且  $\lambda, \mu \geq 0$ , 则  $\lambda x + \mu y \in K$ . 凸锥  $K$  称为真 (凸) 锥 (proper (convex) cone), 如果满足条件: 若  $x, -x \in K$  则  $x = 0$ . 每一个真锥在向量空间中诱导出一个拟序:  $x \geq y$  当  $x - y \in K$  时. 空间  $X$  中真锥  $K$  称为再生的 (reproducing) (或正性区域 (domain of positivity)), 如果  $K - K = X$ .

Б. З. Вулик 撰

【补注】 像上面一样, 对开集  $K$ , 如要求满足  $x \in K$  蕴涵对一切  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda x \in K$ , 且  $x, y \in K$  蕴涵  $x + y \in K$ , 则通常称之为 (开) 锥.

设  $K$  是实拓扑向量空间  $k$  中的一个开锥, 设  $V$  是  $K$  和一个中心在  $0 \in k$  的有界开球之交, 且设  $U \neq \emptyset$  是  $k$  中一个开集. 令



$$W^+ = U + iV, W^- = U - iV$$

是  $k$  的复化中的集合 ( $i^2 = -1$ ), 则  $W^+$  和  $W^-$  称为楔 (且  $U + i0$  是它们的“边”). 关于楔在解析延拓理论中的一个应用见 **Боголюбов 定理** (Bogolyubov theorem). 葛显良 译 鲁世杰 校

**Weibull 分布** [Weibull distribution; Вейбулла распределение]

随机变量  $X_w$  的一种专门的概率分布 (probability distribution), 其分布函数为

$$F_w(t; p, \sigma, \mu) = \begin{cases} 1 - \exp \left\{ - \left( \frac{t - \mu}{\sigma} \right)^p \right\}, & \text{若 } t > \mu, \\ 0, & \text{若 } t \leq \mu, \end{cases} \quad (*)$$

其中  $p$  是分布曲线的形状参数,  $\sigma$  是尺度参数, 而  $\mu$  是移位参数. 分布族 (\*) 以 [1] 的作者 W. Weibull 的姓命名. W. Weibull 首先用此分布逼近钢抗拉强度疲劳试验的极值数据, 并且提出估计 (\*) 中分布参数的方法. Weibull 分布, 是顺序统计量序列的第三类极值分布, 它广泛用于描绘诸如滚珠轴承、真空设备、电气元件故障的规律性. 指数分布 (exponential distribution) ( $p = 1$ ) 和 **Rayleigh 分布** (Reyleigh distribution) ( $p = 2$ ) 是 Weibull 分布的特殊情形. 分布函数 (\*) 的曲线不属于 Pearson 分布族. 编有计算 Weibull 分布函数的辅助表 (见 [2]). 在  $\mu = 0$  的情形下, 水平  $q$  分位数等于  $\sigma[-\ln(1-q)]^{1/p}$ ,

$$E X_w^k = \sigma^k \Gamma \left( 1 + \frac{k}{p} \right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$D X_w = \sigma^2 \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{2}{p} \right) - \Gamma^2 \left( 1 + \frac{1}{p} \right) \right],$$

其中  $\Gamma(x)$  是  $\Gamma$  函数 (gamma-function); 变异系数、偏斜度和超越系数 (excess coefficient) 都与  $\sigma$  无关, 这使得容易编制其数值表和求参数估计值的辅助表. 当  $p \geq 1$  时, Weibull 分布是单峰的, 其众数等于  $\sigma(p-1)^{1/p}$ , 而故障的风险函数  $\lambda(t) = p t^{p-1} / \sigma^p$  是不减的. 当  $p < 1$  时, 函数  $\lambda(t)$  单调减小. 可以绘制所谓 Weibull 概率纸 (Weibull probability paper; [3]). 在此概率纸上,  $F_w(t; p, \sigma, 0)$  的图形是一条直线; 当  $\mu > 0$  时  $F_w(t; p, \sigma, \mu)$  的图象是凹的, 当  $\mu < 0$  时是凸的. 用分位数法估计 Weibull 分布的参数, 所得方程本质上比用最大似然法更为简单. 利用水平 0.24 和 0.93 分位数, (当  $\mu = 0$  时) 由分位数法求的参数  $p$  和  $\sigma$  估计量之联合渐近效率最高 (等于 0.64). 用对数正态分布函数

$$\Phi \left[ \frac{\ln(t-b)-a}{c} \right]$$

( $\Phi(x)$  是标准正态分布函数,  $-\infty < b < \infty$ ,  $-\infty < a < \infty$ ,  $c > 0$ ) 可以很好地逼近分布函数 (\*):

$$\inf_{p,a,b,c} \sup_t \left| F_w(t; p, \sigma, 0) - \Phi \left( \frac{\ln t - a}{c} \right) \right| = \\ = \inf_{a,c} \sup_t \left| F(t; 1, 1, 0) - \Phi \left( \frac{\ln t - a}{c} \right) \right| = 0.038.$$

#### 参考文献

- [1] Weibull, W., A statistical theory of the strength of materials, Stockholm, 1939.
- [2] Гнеденко, Б. В., Беляев, Ю. К., Соловьев, А. Д., Математические методы в теории надежности, М., 1965 (英译本: Gnedenko, B. V., Belyaev, Yu. K. and Solov'ev, A. D., Mathematical methods of reliability theory, Acad. Press, 1969).
- [3] Johnson, L., The statistical treatment of fatigue experiments, Amsterdam, 1964.
- [4] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).

Ю. К. Беляев, Е. В. Чепурин 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Johnson, N. L. and Kotz, S., Distribution in statistics, Continuous univariate distribution, Wiley, 1970.
- [A2] Galambos, J., The theory of extreme order statistics, Wiley, 1987.

周概容 译

**Weierstrass  $\sigma$  函数** [Weierstrass  $\sigma$ -function; Вейерштрасса  $\sigma$ -функция]

见 Weierstrass 椭圆函数 (Weierstrass elliptic functions).

**Weierstrass  $\zeta$  函数** [Weierstrass  $\zeta$ -function; Вейерштрасса  $\zeta$ -функция]

见 Weierstrass 椭圆函数 (Weierstrass elliptic functions).

**Weierstrass 条件 (对变分极值的)** [Weierstrass conditions (for a variational extremum; Вейерштрасса условия экстремума)]

经典变分法中对强极值的必要和 (部分地) 充分条件 (见变分学 (variational calculus)). 由 K. Weierstrass 于 1879 年提出.

Weierstrass 必要条件 (Weierstrass necessary condition): 为使泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

$$L: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R},$$

在极值曲线  $x_0(t)$  上达到一个强局部极小值, 其必要条件是

$$\mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \xi) \geq 0$$

对所有的  $t, t_0 \leq t \leq t_1$  和所有的  $\xi \in \mathbf{C}^n$  都满足, 其中  $\mathcal{E}$  是 Weierstrass  $\mathcal{E}$  函数 (Weierstrass  $\mathcal{E}$ -function). 这条件可借助于函数

$$\Pi(t, x, p, u) = (p, u) - L(t, x, u)$$

来表示 (见 Понтрягин 最大值原理 (Pontryagin maximum principle)). Weierstrass 条件 (在极值曲线  $x_0(t)$  上  $\mathcal{E} \geq 0$ ) 等价于函数  $\Pi(t, x_0(t), p_0(t), u)$  当  $u = \dot{x}_0(t)$  在  $u$  上达到极大值, 其中  $p_0(t) = L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))$ . 这样, Weierstrass 必要条件是 Понтрягин 最大值原理的特殊情形.

Weierstrass 充分条件 (Weierstrass sufficient condition): 为了泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

$$L: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

在向量函数  $x_0(t)$  上达到一个强局部极小值, 其充分条件是在曲线  $x_0(t)$  的一个邻域  $G$  中存在一个向量值场斜率函数  $U(t, x)$  (测地斜率) (见 Hilbert 不变积分 (Hilbert invariant integral)), 使得

$$\dot{x}_0(t) = U(t, x_0(t))$$

和

$$\mathcal{E}(t, x, U(t, x), \xi) \geq 0$$

对所有  $(t, x) \in G$  和任何向量  $\xi \in \mathbf{R}^n$  成立.

#### 参考文献

- [1] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).
- [2] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.
- [3] Понтрягин, Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969 (英译本: Pontryagin, L. S. et al., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1962).

В. М. Тихомиров 撰

【补注】对在极值曲线的隅角的必要条件, 亦见 Weierstrass-Erdmann 隅角条件 (Weierstrass-Erdmann corner conditions).

#### 参考文献

- [A1] Gel'fand, I. M. and Fomin, S. V., Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963 (译自俄文).
- [A2] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.

葛显良 译 吴绍平 校

#### Weierstrass 坐标 [Weierstrass coordinates; Вейерштрасса координаты]

椭圆空间中坐标的一种类型. 令  $M^n$  是粘合  $(n+1)$  维 Euclid 空间中的单位球面  $S^n$  的对径点得到的椭圆空间.  $M^n$  中一点的 Weierstrass 坐标  $(x_0, \dots, x_n)$  是它在  $S^n$  中对应点的正交 Descartes 坐标. 由于  $M^n$  到  $S^n$  中的等距映射不是单值的, Weierstrass 坐标定义到相差一个符号.  $M^n$  中的一个超平面由齐次线性方程

$$a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$$

给出. 由于 1872 年 K. Weierstrass 在他的 Лобачевский 几何学教程中用到这种坐标, 故以他的名字命名.

Е. В. Шикин 撰

【补注】椭圆空间的这些坐标可以正规化, 使得

$$x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

对于双曲空间, 类似的 Weierstrass 坐标满足

$$x_0^2 - \dots - x_n^2 = 1,$$

对于超平面, 有相同的方程  $\sum a_v x_v = 0$ .

#### 参考文献

- [A1] Liebmann, H., Nichteuclidische Geometrie, Göschen, 1912, 114-119.
- [A2] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1965, p. 121, 281.

林向岩 译 陆珊年 校

#### Weierstrass 准则 [Weierstrass criterion; Вейерштрасса критерий], 极小曲面的

为使  $n$  维 Euclid 空间  $E^n (n \geq 3)$  中的一个带有  $C^2$  类等温坐标 (isothermal coordinates)  $u, v$  的 2 维曲面是极小的 (见极小曲面 (minimal surface)), 其必要充分条件为它的位置向量的分量是  $(u, v)$  的调和函数.

И. Х. Сабитов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Nitsche, J. C. C., Vorlesungen über Minimalflächen, Springer, 1975.



[A2] Weierstrass, K., Math. Werke, 3, G. Olms, reprint, 1967. 沈纯理 译

**Weierstrass 准则 (关于一致收敛的)** [Weierstrass criterion (for uniform convergence); Вейерштрасса признак (равномерной сходимости)]

这是将函数级数 (series) 或序列与适当的数值级数和序列对照所给出的关于一致收敛 (uniform convergence) 充分条件的一个定理; 它是 K. Weierstrass 建立的 ([1]). 若对定义在某集合  $E$  上的实值或复值函数的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

存在非负数的收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

使得

$$|u_n(x)| \leq a_n, n = 1, 2, \dots.$$

则原来级数在集合  $E$  中一致收敛且绝对收敛 (见绝对收敛级数 (absolutely convergent series)). 例如, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

在整个实数轴上一致且绝对收敛, 因为

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

收敛.

若集合  $E$  上的实值或复值函数序列  $f_n (n = 1, 2, \dots)$  收敛于函数  $f$ , 且存在数列  $\alpha_n (\alpha_n > 0)$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时  $\alpha_n \rightarrow 0$ , 使得  $|f(x) - f_n(x)| \leq \alpha_n (x \in E, n = 1, 2, \dots)$ , 则序列在  $E$  上一致收敛. 例如序列

$$f_n(x) = 1 - \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$$

在整个实数轴上一致收敛于函数  $f(x) = 1$ , 因为

$$|1 - f_n(x)| < \frac{1}{n} \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

关于一致收敛的 Weierstrass 准则也可以应用于在赋范线性空间中取值的函数.

#### 参考文献

[1A] Weierstrass, K., Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Springer, 1866.

[1B] Weierstrass, K., Math. Werke, 1-7, G. Olms & Johnson, reprint, 1927. Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

#### 参考文献

[A1] Apostol, T. M., Mathematical analysis, Addison Wesley, 1974.

[A2] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964 (英译本: Blackie, 1951).

[A3] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1974. 罗嵩龄 译

**Weierstrass  $\mathcal{E}$  函数** [Weierstrass  $\mathcal{E}$ -function; Вейерштрасса  $\mathcal{E}$ -функция], 经典变分法中的

当极值曲线变化时, 借助于在该极值曲线固定点其导数的给定值的局部 (针形的) 变分分离出泛函增量主要部分的函数. 在泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt, L: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

的情形,  $\mathcal{E}$  函数有形式

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, x, \dot{x}, x') &= \\ &= L(t, x, x') - L(t, x, \dot{x}) + \\ &\quad - (x' - \dot{x}, L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})). \end{aligned} \quad (1)$$

如果引进函数

$$\Pi(t, x, p, x') = (p, x') - L(t, x, x')$$

(见 Legendre 变换 (Legendre transform); Понтрягин 最大值原理 (Pontryagin maximum principle)), 则  $\mathcal{E}$  函数取形式

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, x') = \Pi(t, x, p, \dot{x}) - \Pi(t, x, p, x'),$$

其中  $p = L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})$ . 类似于  $\mathcal{E}$  函数 (1) 的函数的一般构造如下. 设  $f$  是定义在 Banach 空间  $X$  上的可微或凸函数, 又设  $X^*$  是对偶空间. 如果函数  $\Pi: X^* \times X \rightarrow \mathbf{R}$  是由方程

$$\Pi(x^*, x') = \langle x^*, x' \rangle - f(x')$$

定义, 其中  $x^*$  是  $f$  在  $x$  的导数  $f'(x)$  (或次微分元素, 如果  $f$  是凸的), 则函数

$$\mathcal{E}(x, x', x^*) = \Pi(x^*, x) - \Pi(x^*, x')$$

是由  $f$  构造的  $\mathcal{E}$  函数. 如果  $f$  是可微的,

$$\mathcal{E}(x, x') = f(x') - f(x) - \langle x' - x, f'(x) \rangle, \quad (2)$$

即  $\mathcal{E}$  函数是在  $x'$  点处函数  $f$  与在  $x$  处与  $f$  相切的线性函数之间的差. 比较 (1) 和 (2) 两式显示经典变分法中  $\mathcal{E}$  函数是由对与导数有关变量的构造 (2)

得到, 而变量  $t, x$  起参数的作用.

多维变分问题中在泛函

$$\int_T L(t, x, \dot{x}) dt, \quad t = (t_1, \dots, t_n), \quad T \subset \mathbf{R}^m,$$

$$L: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}, \quad \dot{x} = \left[ \frac{\partial x}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial t_m} \right]$$

的情形,  $\mathcal{E}$  函数有以下形式:

$$\mathcal{E}(t, x, z, z') = L(t, x, z') - L(t, x, z) + (z' - z, L_z(t, x, z)).$$

在具有边界条件  $\varphi_i(t, x, \dot{x}) = 0$  和 **Lagrange 乘子** (Lagrange multipliers)  $\lambda_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , 的 **Lagrange 问题** (Lagrange problem) 的情形,  $\mathcal{E}$  函数有形式 (1), 其中已经用

$$\tilde{L} = L + \sum_{i=1}^s \lambda_i \varphi_i$$

代替  $L$ .

$\mathcal{E}$  函数, 首先由 K. Weierstrass 于 1879 年引入 ([1]), 是变分法理论的基础 (见变分学 (variational calculus)). 它是用以表示极值的必要和 (部分地) 充分条件 (见 **Weierstrass 条件** (对变分极值的) (Weierstrass condition (for a variational extremum))), 且以有限积分形式表示泛函  $J$  在一条极值曲线上的增量 (见 **Weierstrass 公式** (Weierstrass formula)).

在变分学中起特别重要作用的是这样一些光滑泛函, 它们满足在一个给定的参数范围内, 对所有  $\dot{x}, x', \mathcal{E}(\cdot, \dot{x}, x') \geq 0$ , 或者更强的, 对所有  $\dot{x} \neq x', \mathcal{E}(\cdot, \dot{x}, x') > 0$ . 它们分别地称为 **拟正则的** (quasi-regular) 和 **正则的** (或 **椭圆的** (elliptic)). 对这样一些泛函, **Legendre 条件** (Legendre condition) 和必要的 **Weierstrass 条件** (对变分极值的) 总是有效的, 存在性和正则性定理也正确 ([7]).

#### 参考文献

- [1] Weierstrass, K., Vorlesungen über Variationsrechnung, in Math. Werke, Vol. 7, Akademie Verlag, 1927.
- [2] Carathéodory, C., Calculus of variations and partial differential equations of the first order, 1-2, Holden-Day, 1965-1967 (译自德文).
- [3] Bolza, O., Lecture on the calculus of variations, Chelsea, reprint, 1960 (译自德文).
- [4] Ахиезер, Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955 (英译本: Akhiezer, N. I., The calculus of variations, Blaisdell, 1962).
- [5] Понтрягин, Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969 (英译本: Pontryagin, L. S. et al., The mathema-

tical theory of optimal processes, Wiley, 1962).

- [6] Hestenes, M. R., Calculus of variations and optimal control theory, Wiley, 1966.
- [7] Hilbert problems, Bull. Amer. Math. Soc., 8 (1902), 437-479.
- [8] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.

В. М. Тихомиров 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.
- [A2] Ewing, G. M., Calculus of variations with applications, Dover, reprint, 1985.
- [A3] Lee, E. B. and Marcus, L., Foundations of optimal control theory, Wiley, 1967.

葛显良 译 吴绍平 校

#### Weierstrass 椭圆函数 [Weierstrass elliptic functions; Вейерштрасса эллиптические функции]

作为 K. Weierstrass 椭圆函数 (elliptic function) 一般理论的基础, 由他于 1862 年在柏林大学的讲授中陈述的函数 ([1], [2]). 与较早由 A. Legendre, N. H. Abel 和 C. G. Jacobi 开发的椭圆函数论——它基于在周期平行四边形中具有两个单极点的二阶椭圆函数——不同, Weierstrass 椭圆函数在周期平行四边形中具有一个二阶极点. 从理论角度看, Weierstrass 的理论更加简单, 因为作为其基础的函数  $\wp(z)$  及其导数是生成具有给定原始周期的椭圆函数代数域的椭圆函数.

对于给定的原始周期  $2\omega_1, 2\omega_3$  ( $\text{Im}(\omega_3/\omega_1) > 0$ ) 的 Weierstrass  $\wp$  函数 (Weierstrass  $\wp$ -function) ( $\wp$  是 Weierstrass 用的记号) 定义为级数

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \wp(z; 2\omega_1, 2\omega_3) = \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{m_1, m_3 = -\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{(z - 2\Omega_{m_1, m_3})^2} - \frac{1}{(2\Omega_{m_1, m_3})^2} \right] = \\ &= \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\Omega_{m_1, m_3} = m_1 \omega_1 + m_3 \omega_3$ ,  $m_1, m_3$  取遍除  $m_1 = m_3 = 0$  外的所有整数. 函数  $\wp(z)$  是二阶偶椭圆函数, 在每个周期平行四边形中有唯一的残数为零的二阶极点.  $\wp(z)$  的导数  $\wp'(z)$  是具有相同原始周期的三阶奇椭圆函数;  $\wp'(z)$  在同余于  $\omega_1, \omega_2 = \omega_1 + \omega_3, \omega_3$  的点处具有单零点. 函数  $\wp(z)$  最重要的性质是任一具有给定原始周期  $2\omega_1, 2\omega_3$  的椭圆函数可表示为



$\wp(z)$  和  $\wp'(z)$  的有理函数, 即  $\wp(z)$  和  $\wp'(z)$  生成具有给定周期的椭圆函数的代数域. 单周期三角函数中起类似于函数  $\wp(z)$  作用的是  $1/\sin^2 z$ .

函数  $\wp(z)$  满足微分方程

$$\begin{aligned}\wp'^2(z) &= 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 \equiv \\ &\equiv 4[\wp(z) - e_1][\wp(z) - e_2][\wp(z) - e_3], \\ e_1 + e_2 + e_3 &= 0,\end{aligned}\quad (2)$$

其中模形式 (modular form)

$$\begin{aligned}g_2 &= 20c_2 = 60 \sum'_{m_1, m_3 = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\Omega_{m_1, m_3})^4}, \\ g_3 &= 28c_4 = 140 \sum'_{m_1, m_3 = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\Omega_{m_1, m_3})^6}\end{aligned}$$

称为  $\wp(z)$  的相对不变量 (relative invariant), 而  $e_1 = \wp(\omega_1)$ ,  $e_2 = \wp(\omega_2)$ ,  $e_3 = \wp(\omega_3)$  称为  $\wp(z)$  的无理不变量 (irrational invariant).  $\wp(z)$  的绝对不变量 (absolute invariant) 是  $j = g_2^3/g_3^2$  或  $J = g_2^3/\Delta$  的任一有理函数, 其中  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$  是判别式 (discriminant); 这里的不变性是关于模变换 (见模函数 (modular function)) 的. 在应用中,  $g_2, g_3$  通常是实数; 如果加之还有  $\Delta > 0$ , 则  $e_1, e_2, e_3$  也是实的. 方程 (2) 表明  $\wp(z)$  可定义为第一类 Weierstrass 标准型椭圆积分 (elliptic integral)

$$u = - \int_{(z, w)}^{\infty} \frac{dz}{w}, \quad w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$$

的逆. 函数  $\wp(z)$  是周期平行四边形到亏格为 1, 具有分支点  $e_1, e_2, e_3, \infty$  的典型分割双叶紧 Riemann 曲面  $F$  上的一个一一共形映射; 有时称  $F$  为椭圆象 (elliptic image). 上面的第一类积分在主覆盖曲面  $F$  上是单值的, 且是  $F$  上的单值化变量.

具有给定周期  $2\omega_1, 2\omega_3$  的椭圆函数域的第二类椭圆积分, 作为上述单值化的结果, 变成 Weierstrass  $\zeta$  函数 (Weierstrass zeta-function)  $\zeta(z)$ , 它由级数

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \frac{1}{z} + \sum'_{m_1, m_3 = -\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{z - 2\Omega_{m_1, m_3}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\Omega_{m_1, m_3}} + \frac{z}{(2\Omega_{m_1, m_3})^2} \right]\end{aligned}\quad (3)$$

定义. 函数  $\zeta(z)$  是奇亚纯函数, 与  $\wp(z)$  以关系  $\zeta'(z) = -\wp(z)$  相联系. 它不是周期函数; 当它的自变量加以周期时, 它按  $\zeta(z \pm 2\omega_i) = \zeta(z) \pm 2\eta_i$  变换, 其中  $\eta_i = \zeta(\omega_i)$ .  $\omega_1, \omega_3, \eta_1, \eta_3$  之间成立 Le-

gendre 关系 (Legendre relation):

$$\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2},$$

它等价于完全椭圆积分之间的关系:

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

任一具有给定周期  $2\omega_1, 2\omega_3$  的椭圆函数  $f(z)$  可由  $\zeta(z)$  通过下述 Hermite 公式 (formula of Hermite) 表示:

$$\begin{aligned}f(z) &= \\ &C + \sum_{k=1}^s \left[ B_1^k \zeta(z - b_k) - B_2^k \zeta'(z - b_k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_3^k}{2!} \zeta''(z - b_k) - \cdots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{v_k-1} \frac{B_{v_k}^k}{(v_k-1)!} \zeta^{(v_k-1)}(z - b_k) \right],\end{aligned}\quad (4)$$

其中  $C$  是常数,  $b_1, \dots, b_s$  是  $f(z)$  的极点的完全系, 而数  $B_1^k, \dots, B_{v_k}^k$  是  $f(z)$  在  $b_k$  邻域内 Laurent 展开式主部的系数. 展开式 (4) 类似于任意有理函数展为部分分式的展开式. 三角函数中类似于函数  $\zeta(z)$  的是  $\cotan z$ .

Weierstrass  $\sigma$  函数 (Weierstrass sigma-function)  $\sigma(z)$  定义为无穷积 (infinite product)

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= z \prod'_{m_1, m_3 = -\infty}^{+\infty} \left( 1 - \frac{z}{2\Omega_{m_1, m_3}} \right) \times \\ &\quad \times e^{z/(2\Omega_{m_1, m_3}) + z^2/(8\Omega_{m_1, m_3}^2)}.\end{aligned}$$

函数  $\sigma(z)$  是具有零点  $2\Omega_{m_1, m_3}$  的奇整函数, 并由关系

$$\frac{d^2 \ln \sigma(z)}{dz^2} = -\wp(z), \quad \frac{d \ln \sigma(z)}{dz} = \zeta(z)$$

与函数  $\wp(z), \zeta(z)$  相联系. 它不是双周期函数; 它满足恒等式

$$\sigma(z + 2\Omega_{mn}) = (-1)^{m+n+m^2n} \sigma(z) e^{H_{mn}(z + \Omega_{mn})},$$

其中

$$H_{mn} = 2m\eta_1 + 2n\eta_3, \quad \eta_i = \zeta(\omega_i) = \frac{\sigma'(\omega_i)}{\sigma(\omega_i)}.$$

任一具有周期  $2\omega_1, 2\omega_3$  的椭圆函数  $f(z)$  可由  $\sigma(z)$  表示为

$$f(z) = C \frac{\sigma(z - a_1) \cdots \sigma(z - a_s)}{\sigma(z - b_1) \cdots \sigma(z - b_s)},$$

其中  $C$  是常数,  $a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_s$  分别是  $f(z)$  的零点和极点的完全系. 三角函数中类似于  $\sigma(z)$  的

是  $\sin z$ .

下述加标  $\sigma$  函数 (indexed sigma-functions) 在 Weierstrass 理论中也是重要的:

$$\sigma_i(z) = \frac{\sigma(z + \omega_i)}{\sigma(\omega_i)} e^{-\eta_i z}, i = 1, 2, 3.$$

函数  $\sigma(z)$ ,  $\sigma_1(z)$ ,  $\sigma_2(z)$ ,  $\sigma_3(z)$  可通过  $\theta$  函数 (theta-function)  $\theta_0(v)$ ,  $\theta_1(v)$ ,  $\theta_2(v)$ ,  $\theta_3(v)$  表示 (见 Jacobi 椭圆函数 (Jacobi elliptic functions)), 而函数  $\wp(z)$  可通过  $\sigma(z)$ ,  $\sigma_1(z)$ ,  $\sigma_2(z)$ ,  $\sigma_3(z)$  表示. 后者构成 Weierstrass 函数计算的基础. 也能用 Jacobi 椭圆函数来显式表示 Weierstrass 椭圆函数, 例如下述形式:

$$\wp(z + \omega_3) - e_1 = (e_3 - e_1) \operatorname{dn}^2(z \sqrt{e_1 - e_3}),$$

$$\wp(z + \omega_3) - e_2 = (e_3 - e_2) \operatorname{cn}^2(z \sqrt{e_1 - e_3}),$$

$$\wp(z + \omega_3) - e_3 = (e_2 - e_3) \operatorname{sn}^2(z \sqrt{e_1 - e_3}).$$

在应用问题中, 相对不变量  $g_2, g_3$  通常是给定的. 原始周期  $2\omega_1, 2\omega_3$  通常借助绝对不变量  $J = g_2^3/\Delta$  来计算,  $J$  是周期之比  $\tau = \omega_3/\omega_1$  的模函数 (modular function).

#### 参考文献

- [1] Weierstrass, K., Math. Werke, I - 2, Mayer & Müller, 1894 - 1895.
- [2] Schwarz, H. A., Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, Berlin, 1893.
- [3] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 2, Springer, 1964, Chapt. 8.
- [4] Whittaker, E. J. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.
- [5] Ахиезер, Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970 (中译本: Н. И. 阿希泽尔, 椭圆函数论纲要, 商务印书馆, 1959).

Е. Д. Соломенцев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Tannery, J., Molk, J., Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, 1 - 2, Chelsea, reprint, 1972.
- [A2] Lang, S., Elliptic functions, Addison-Wesley, 1973.
- [A3] Lawden, D. F., Elliptic functions and applications, Springer, 1989.
- [A4] Weil, A., Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Springer, 1976. 沈永欢 译

**Weierstrass-Erdmann 隅角条件 [Weierstrass-Erdmann corner conditions; Вейерштрасса-Эрдмана угловые условия]**

补充到 Euler 方程 (Euler equation) 上的极值的

必要条件, 给定在极值曲线有隅角的点上. 设

$$J(x) = \int L(t, x, \dot{x}) dt$$

是经典变分法的一个泛函 (见变分学 (variational calculus)), 又设极值曲线 (extremal)  $x_0(t)$  在点  $\tau$  的一个领域中除了点  $\tau$  本身以外连续可微, 而在  $\tau$  有一隅角. 在这情形下, 为了  $x_0(t)$  至少是泛函  $J(x)$  的一个弱局部极值, 其必要条件是方程

$$p(\tau - 0) = p(\tau + 0),$$

$$H(\tau - 0) = H(\tau + 0)$$

在隅角点  $\tau$  被满足, 其中

$$p(t) = \frac{\partial L(t, x_0(t), \dot{x}_0(t))}{\partial \dot{x}}$$

和

$$H(t) = (\dot{x}_0(t), p(t)) - L(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)).$$

这些方程称为 K. Weierstrass (1865) 和 G. Erdmann (1877) 的隅角条件 (corner conditions) ([1]).

Weierstrass-Erdmann 隅角条件的意义是典则变量和 Hamilton 函数在极值曲线的隅角点是连续的; 它们在经典力学中的意义是动量和能量在隅角点上的连续性.

在正则问题中, 当  $L$  是  $\dot{x}$  的严格凸函数时, 极值曲线不能有隅角点. 如果  $L(t, x, \dot{x})$  以及由此引起的 Weierstrass  $\mathcal{E}$  函数 (Weierstrass  $\mathcal{E}$ -function) 包含  $\dot{x}$  的线段, 则出现隅角点. 对带有条件  $\varphi_i(t, x, \dot{x}) = 0$  和 Lagrange 乘子 (Lagrange multipliers)  $\lambda_i(t)$  的 Lagrange 问题, Weierstrass-Erdmann 隅角条件中的  $L$  用  $\tilde{L} = L + \sum_i \lambda_i \varphi_i$  代替.

#### 参考文献

- [1] Erdmann, G., Ueber die unstetige Lösungen in der Variationsrechnung, J. Reine Angew. Math., 82 (1877), 21 - 30.
- [2] Bolza, O., Lectures on the calculus of variations, Chelsea, reprint, 1960 (译自德文).

В. М. Тихомиров 撰

**【补注】** 亦见 Weierstrass 条件 (对变分极值) (Weierstrass conditions (for a variational extremum)).

#### 参考文献

- [A1] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.
- [A2] Ewing, G. M., Calculus of variations with applications, Dover, reprint, 1985.
- [A3] Petrov, Yu. P., Variational methods in optimum control theory, Acad. Press, 1968.

葛显良 译 吴绍平 校



**Weierstrass 公式** [Weierstrass formula; Вейерштрасса формула], 对泛函的增量的

经典变分法中的一个公式 (见变分学 (variational calculus)), 以 **Weierstrass  $\mathcal{E}$  函数** (Weierstrass  $\mathcal{E}$ -function) 的曲线积分形式确定泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt,$$

$$L: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

的值. 设向量函数  $x_0(t)$  是泛函  $J(x)$  的一条极值曲线 (extremal), 又设它包含于这样一个极值曲线场中, 该场具有对应于它的向量值场斜率函数  $U(t, x)$  和作用  $S(t, x)$  (见 **Hilbert 不变积分** (Hilbert invariant integral)). Weierstrass 公式

$$J(x) = S(t_1, x(t_1)) - S(t_0, x(t_0)) + \int_{\gamma} \mathcal{E}(t, x, U(t, x), \dot{x}) dt \quad (1)$$

适用于被该场覆盖的区域中的任何曲线  $\gamma = x(t)$ . 特别地, 如果曲线  $\gamma = x(t)$  和  $\gamma_0 = x_0(t)$  的边界条件是相同的, 即如果  $x(t_i) = x_0(t_i)$ ,  $i = 0, 1$ , 则得到对泛函增量的 Weierstrass 公式:

$$\Delta J = J(x) - J(x_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x(t), U(t, x(t)), \dot{x}(t)) dt \quad (2)$$

公式 (1) 和 (2) 有时被称为 **Weierstrass 基本定理** (Weierstrass fundamental theorem).

#### 参考文献

- [1] Carathéodory, C., Calculus of variations and partial differential equations of the first order, 1-2, Holden-Day, 1965-1967 (译自德文).
- [2] Young, L., Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, Saunders, Philadelphia, 1969.
- [3] Ахиезер, Н. И. Лекции по вариационному исчислению, М., 1955 (英译本: Akhiezer, N. I., The calculus of variations, Blaisdell, 1962).

В. М. Тихомиров 撰 葛显良 译 吴绍平 校

**Weierstrass  $\mathcal{K}$  函数** [Weierstrass  $\mathcal{K}$ -function; Вейерштрасса  $\mathcal{K}$ -функция]

见 **Weierstrass 椭圆函数** (Weierstrass elliptic functions).

**Weierstrass 点** [Weierstrass point; Вейерштрасса точка]

亏格  $g$  的代数曲线 (algebraic curve) (或 **Riemann 曲面** (Riemann surface))  $X$  上的点, 在这个点上以下条件被满足: 存在  $X$  上不是常数的有理函数, 它在这个点上有一个不超过  $g$  阶的极, 而在  $X$  的其他点上没有奇点.  $X$  上只可能存在有限多个 Weierstrass 点, 而且如果  $g$  是 0 或 1, 则根本没有这样的点, 如果  $g \geq 2$ , 则 Weierstrass 点必定存在. 这些结果是 K. Weierstrass 对于 Riemann 曲面得到的. 对于亏格  $g \geq 2$  的代数曲线, 总是存在至少  $2g + 2$  个 Weierstrass 点, 而且只有亏格  $g$  的超椭圆曲线恰有  $2g + 2$  个 Weierstrass 点. Weierstrass 点的个数的上界是  $(g-1)g(g+1)$ . 亏格  $g \geq 2$  的代数曲线  $X$  上的 Weierstrass 点的出现保证了从曲线  $X$  到射影直线  $P^1$  上的次数不超过  $g$  的态射的存在性.

#### 参考文献

- [1] Чеботарев, Н. Г., Теория алгебраических функций, М.-Л., 1948.
- [2] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957. В. Е. Воскресенский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Griffiths, P. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley (Interscience), 1978.
- [A2] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. A. and Harris, J., Geometry of algebraic curves, 1, Springer, 1985.
- [A3] Gunning, R. C., Lectures on Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1966. 陈志杰 译

**Weierstrass 环** [Weierstrass ring; Вейерштрасса кольцо]

满足下述条件的 Hensel 伪几何环 (见几何环 (geometric ring); **Hensel 环** (Hensel ring)): 它对于每个素理想的商环都是正则局部环 (local ring) (亦见正则环 (交换代数中的) (regular ring (in commutative algebra))) 的有限扩张. Weierstrass 环是解析不可约的. Weierstrass 环的任一有限扩张是 Weierstrass 环. 完全域上的解析环 (收敛幂级数环, 见解析环 (analytic ring)) 是 Weierstrass 环的例子, 对于这样的环 Weierstrass 预备定理 (见 **Weierstrass 定理** (Weierstrass theorem)) 是可以应用的.

#### 参考文献

- [1] Nagata, M., Local rings, Interscience, 1962.
- [2] Seydi, H., Sur la théorie des anneaux de Weierstrass 1, Bull. Soc. Math. France, 95 (1971), 227-235. В. И. Данилов 撰 赵春来 译

**Weierstrass 定理** [Weierstrass theorem; Вейерштрасса теорема]

1) Weierstrass 无穷积定理 (Weierstrass infinite

product theorem) ([1]): 对复平面  $C$  中每个给定的点列

$$0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \quad (1)$$

$$0 < |\alpha_k| \leq |\alpha_{k+1}|, k = 1, 2, \dots; \lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_k| = \infty,$$

存在以且只以这一序列中的点  $\alpha_k$  为零点的整函数. 这一函数可以构造为典型积 (canonical product)

$$W(z) = z^\lambda \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{P_k(z)}, \quad (2)$$

其中  $\lambda$  是序列 (1) 中零的重数, 而

$$P_k(z) = \frac{z}{\alpha_k} + \frac{z^2}{2\alpha_k^2} + \dots + \frac{z^{m_k}}{m_k \alpha_k^{m_k}}.$$

乘子

$$W\left(\frac{z}{\alpha_k}; m_k\right) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{P_k(z)}$$

称为 Weierstrass 素乘子 (Weierstrass prime multiplier) 或 Weierstrass 初等因子 (Weierstrass elementary factor). 指数  $m_k$  要选得足以保证积 (2) 的收敛性; 例如, 选取  $m_k = k$  可保证对任何形如 (1) 的序列 (2) 均收敛.

从这一定理还能得到, 任一以 (1) 为其零点序列的整函数具有

$$f(z) = e^{g(z)} W(z)$$

的形式, 其中  $W(z)$  是典型积 (2),  $g(z)$  是整函数 (亦见关于整函数的 Hadamard 定理 (Hadamard theorem)).

Weierstrass 无穷积定理可以推广到任意区域  $D \subset C$  的情形: 对任一在  $D$  中没有极限点的点列  $\{\alpha_k\} \subset D$ , 存在  $D$  中的全纯函数  $f$ , 它以且只以所给诸点  $\alpha_k$  为零点.

上述定理中涉及具有任意指定零点的整函数存在性的部分可以如下地推广到多复变函数的情形: 设复空间  $C^n (n \geq 1)$  的每个点  $\alpha$  都对应于该点的一个邻域  $U_\alpha$  和在  $U_\alpha$  中全纯的一个函数  $f_\alpha$ , 且假定这一对应满足: 如果点  $\alpha, \beta \in C^n$  所对应的邻域之交  $U_\alpha \cap U_\beta$  非空, 则商  $f_\alpha / f_\beta \neq 0$  是  $U_\alpha \cap U_\beta$  中的全纯函数. 在这些条件下, 存在  $C^n$  中的整函数  $f$ , 使得商  $f/f_\alpha$  在每个点  $\alpha \in C^n$  处是全纯函数. 这一定理称为 Cousin 第二定理 (Cousin second theorem) (亦见 Cousin 问题 (Cousin problems)).

#### 参考文献

- [1] Weierstrass, K., Mathem. Werke, Mayer & Müller, Vol. 2, 1895.
- [2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, т. 2, 2 изд., М., 1968 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 第七

章).

- [3] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1 - 2, 2 изд., М., 1976 (第二卷英译本: Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part II Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992).

Е. Д. Соломенцев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Remmert, R., Funktionentheorie, II, Springer, 1991.

2) 关于函数逼近的 Weierstrass 定理: 对区间  $[a, b]$  上的任一连续实值函数  $f(x)$ , 存在在  $[a, b]$  上一致收敛于所给函数  $f(x)$  的代数多项式序列  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ ; 此定理系 K. Weierstrass 所建立 ([1]).

类似结果对所有空间  $L_p[a, b]$  均成立. Jackson 定理 (Jackson theorem) 是这一定理的加强.

所述定理对周期为  $2\pi$  的实值连续函数与三角多项式也成立; 同样对在  $m$  维空间的有界闭域上连续的实值函数和  $m$  元多项式成立. 关于此定理的推广, 见 Stone-Weierstrass 定理 (Stone-Weierstrass theorem). 关于用多项式逼近复变函数, 见 [3].

#### 参考文献

- [1A] Weierstrass, K., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente, Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1885, 633 - 639; 789 - 805.
- [1B] Weierstrass, K., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente, 载于其 Werke, Vol. 3, Preuss. Akad. Wiss., 1903.
- [2] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965 (中译本: Н. И. 阿赫叶惹尔, 逼近论讲义, 科学出版社, 1957).
- [3] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1 - 2, 2 изд., М., 1976 (第二卷英译本: Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part II Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992).

Ю. Н. Субботин 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Gaier, D., Vorlesungen über Approximation im Komplexen, Birkhäuser, 1980 (中译本: D. 加意耳, 复变函数逼近论, 湖南教育出版社, 1985).
- [A2] Werner, J., Banach algebras and several complex variables, Springer, 1976.

#### 【译注】

#### 参考文献

- [B1] 沈燮昌, 复变函数逼近论, 科学出版社, 1992.

3) 关于一致收敛解析函数项级数的 Weierstrass 定理 ([1]): 如果在复平面  $C$  的区域  $D$  内的任一紧



统上一致收敛的级数

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z) \quad (*)$$

的各项是  $D$  内的解析函数, 则此级数的和  $s(z)$  是  $D$  内的解析函数. 加之还有, 对任一  $m$ , 由级数  $(*)$  逐项  $m$  次微分所得的级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(m)}(z)$$

在  $D$  内的任一紧统上也一致收敛于级数  $(*)$  之和的  $m$  阶导数  $s^{(m)}(z)$ . 这一定理已推广到在复空间  $\mathbb{C}^n$  ( $n \geq 1$ ) 的区域  $D$  内的任一紧统上一致收敛的多复变量解析函数项级数; 而且由级数  $(*)$  各项某一固定阶偏导数所成的级数在  $D$  内的任一紧统上一致收敛于所给级数的和的对应阶偏导数:

$$\frac{\partial^m s(z)}{\partial z_1^{m_1} \cdots \partial z_n^{m_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^m u_k(z)}{\partial z_1^{m_1} \cdots \partial z_n^{m_n}},$$

$$z = (z_1, \cdots, z_n), m = m_1 + \cdots + m_n.$$

Е. Д. Соломенцев 撰

4) 关于在区域边界上的一致收敛性的 Weierstrass 定理 ([1]): 如果级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$$

的各项在复平面  $\mathbb{C}$  的有界闭域  $\bar{D}$  上连续, 在  $D$  内解析, 则此级数在所给区域边界上的一致收敛性蕴涵它在闭域  $\bar{D}$  上的一致收敛性.

解析函数项级数的这一性质也适用于定义在复空间  $\mathbb{C}^n$  ( $n \geq 1$ ) 的区域中的解析函数或 Euclid 空间  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) 的区域中的调和函数. 在适用最大模原理 (maximum-modulus principle) 的所有情形下此性质作为一个一般规则均成立.

#### 参考文献

- [1A] Weierstrass, K., Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Springer, 1866.
- [1B] Weierstrass, K., Mathem. Werke, Mayer & Müller, Vol. 2, 1895.
- [2] Whittaker, E. T., Watson, G. N., A course of modern analysis, 1, Cambridge Univ. Press, 1952, Chapt. 3.
- [3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 3, т. 2, М., 1968, гл. 7 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957, 第 3, 7 章).

Е. Д. Соломенцев 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Remmert, R., Theory of complex functions, 1, Springer, 1990 (译自德文).

#### 5) Weierstrass 预备定理 (Weierstrass preparation

theorem). 由 K. Weierstrass 于 1860 年 ([1]) 得到并最早表述的一条预备引理, 用于证明由方程  $f(z, w) = 0$  所定义的复变量隐函数的存在性和解析性, 此方程的左端是两个复变量的全纯函数. 这一定理把单复变量全纯函数的下述重要性质推广到多复变量情形: 如果  $f(z)$  是坐标原点的一个邻域内的全纯函数且  $f(0) = 0, f(z) \neq 0$ , 则它可表示为  $f(z) = z^s g(z)$  的形式, 其中  $s (\geq 1)$  是  $f(z)$  在原点处零点的重数, 而全纯函数  $g(z)$  在原点的某个邻域内恒不等于零.

对于  $n$  ( $n \geq 1$ ) 个复变量函数的 Weierstrass 预备定理的表述. 设

$$f(z) = f(z_1, \cdots, z_n)$$

是  $z = (z_1, \cdots, z_n)$  的在多圆柱

$$U = \{z: |z_i| < a_i, i = 1, \cdots, n\}$$

内的全纯函数, 且

$$f(0) = 0, f(0, \cdots, 0, z_n) \neq 0,$$

则在某个多圆柱

$$V = \{z: |z_i| < b_i \leq a_i, i = 1, \cdots, n\}$$

中, 函数  $f(z)$  可表示为

$$f(z) = [z_n^s + f_1(z_1, \cdots, z_{n-1})z_n^{s-1} + \cdots + f_s(z_1, \cdots, z_{n-1})]g(z)$$

的形式, 其中  $s$  是函数

$$f(z_n) = f(0, \cdots, 0, z_n)$$

在坐标原点处零点的重数,  $s \geq 1$ ; 函数  $f_j(z_1, \cdots, z_{n-1})$  在多圆柱

$$V' = \{(z_1, \cdots, z_{n-1}): |z_i| < b_i, i = 1, \cdots, n-1\}$$

内全纯, 且

$$f_j(0, \cdots, 0) = 0, j = 1, \cdots, s;$$

函数  $g(z)$  在  $V$  内全纯且恒不等于零. 函数  $f_j(z_1, \cdots, z_{n-1})$  ( $j = 1, \cdots, s$ ) 和  $g(z)$  由定理的条件唯一确定.

如果适当修改上面的表述, 则坐标原点就可代之以复空间  $\mathbb{C}^n$  中任何点  $a = (a_1, \cdots, a_n)$ . 由 Weierstrass 预备定理得知, 当  $n > 1$  时, 与单复变量情形不同, 全纯函数的零点的每个邻域含有该函数的其他零点的一个无穷集合.

Weierstrass 预备定理是一条纯代数性质的定理, 因而可对形式幂级数 (formal power series) 加以表述. 设  $\mathbb{C}[[z_1, \cdots, z_n]]$  是变量  $z_1, \cdots, z_n$  的系数取自复数域  $\mathbb{C}$  的形式幂级数环,  $f$  是此环中的一个级

Е. Д. Соломенцев 撰

数, 其各项具有最低可能次数  $s \geq 1$ , 且假定存在形如  $cz_n^s (c \neq 0)$  的一个项, 则级数  $f$  可表示为

$$f = (z_n^s + f_1 z_n^{s-1} + \cdots + f_s)g,$$

其中  $f_1, \dots, f_s$  是  $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_{n-1}]]$  中的级数, 其常数项为零,  $g$  是  $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$  中具有非零常数项的级数. 形式幂级数  $f_1, \dots, f_s$  和  $g$  由  $f$  唯一确定.

有时也把下述除法定理 (division theorem) 称为 Weierstrass 预备定理: 设级数

$$f \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$$

满足上面开列的条件, 并设  $g$  是  $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$  中任一级数, 则存在级数

$$h \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$$

和  $s$  个级数

$$a_j \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_{n-1}]], a_j(0, \dots, 0) = 0,$$

$$j = 0, \dots, s-1,$$

满足下述方程

$$g = hf + a_0 + a_1 z_n + \cdots + a_{s-1} z_n^{s-1}.$$

Weierstrass 预备定理也可应用于形式有界级数 (formally bounded series) 的环. 它提供了例如从  $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_{n-1}]]$  到  $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$  的一种归纳转移方法. 通过这一途径就有可能建立环  $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  和  $\mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$  的某些性质, 诸如它是 Noether 环或具有唯一因子分解性质等. 也存在这一定理到可微函数的推广 ([6]).

#### 参考文献

- [1A] Weierstrass, K., Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Springer, 1866.
- [1B] Weierstrass, K., Mathem. Werke, Mayer & Müller, Vol. 2, 1895.
- [2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1-2, 2 изд., М., 1976 (第二卷英译本: Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part II Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992).
- [3] Bochner, S., Martin, W. T., Several complex variables, Princeton Univ. Press, 1948.
- [4] Gunning, R. C., Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.
- [5] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972, гл. 2 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977, Chapt. 2).
- [6] Malgrange, B., Ideals of differentiable functions, Tata Inst. Fundam. Res., 1966.

【补注】 Weierstrass 预备定理中出现的多项式

$$z_n^s + f_1(z_1, \dots, z_{n-1})z_n^{s-1} + \cdots + f_s(z_1, \dots, z_{n-1}),$$

称为  $z_n$  的  $s$  次 Weierstrass 多项式 (Weierstrass polynomial).

Weierstrass 预备定理对于可微函数的推广有多种名称, 它称为可微预备定理 (differentiable preparation theorem), 或 Malgrange 预备定理 (Malgrange preparation theorem), 或 Malgrange-Mather 预备定理 (Malgrange-Mather preparation theorem). 设  $F$  是  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  中  $0$  的某个邻域上的光滑实值函数, 且  $F(t, 0) = g(t)t^k$ , 其中  $g(0) \neq 0$  且  $g$  在  $\mathbb{R}$  中  $0$  的邻域内光滑. 此时 Malgrange 预备定理 (Malgrange preparation theorem) 断言, 存在  $0$  的邻域中的光滑函数  $q$ , 使对适当的光滑函数  $\lambda_i$ , 有  $(qF)(t, x) = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(x)t^i$ ; 而 Mather 除法定理 (Mather division theorem) 断言, 对每个在  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  中  $0$  的邻近光滑的函数  $G$ , 存在  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  中  $0$  的邻近光滑的函数  $q$  和  $r$ , 使得  $G = qF + r$ , 且  $r(t, x) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i(x)t^i$ . 关于可微预备定理 (differentiable preparation theorem) 和可微除法定理 (differentiable division theorem) 的更加复杂的陈述, 见 [A2] - [A4].

上述定理的一个重要应用是可微对称函数定理 (differentiable symmetric function theorem) (可微 Newton 定理 (differentiable Newton theorem)), 它断言  $x_1, \dots, x_n$  的对称可微函数在  $0$  处的芽  $f$  可写为初等对称函数 (elementary symmetric function)  $\sigma_1 = x_1 + \cdots + x_n, \dots, \sigma_n = x_1 \cdots x_n$  的可微函数的芽 ([A7], [A8]).

上述预备定理和除法定理也有  $p$  进推广. 设  $k$  是完全非 Archimedes 赋范域 (见域上的范数 (norm on a field)),  $T_n(k) = k\langle z_1, \dots, z_n \rangle$  是满足下述条件的幂级数  $\sum a_\alpha z^\alpha (\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n})$  构成的代数: 当  $|\alpha| \rightarrow \infty (|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$  时, 有  $|a_\alpha| \rightarrow 0$ .  $T_n(k)$  上的范数由  $\|\sum a_\alpha z^\alpha\| = \max_\alpha |a_\alpha|$  定义. 设子环  $A_n(k)$  由满足  $\|f\| \leq 1$  的所有  $f \in T_n(k)$  组成, 而  $m_n(k)$  是满足  $\|f\| < 1$  的所有  $f \in A_n(k)$  构成的理想. 设  $\bar{T}_n(k)$  是剩余环  $A_n(k)/m_n(k)$ , 而  $f \mapsto \bar{f}$  是商映射. 于是有  $\bar{T}_n(k) = \bar{k}[z_1, \dots, z_n]$ , 其中  $\bar{k}$  是  $k$  的剩余域. 满足  $\|f\| = 1$  的元素  $f \in T_n(k)$  称为对  $z_n$  为  $d$  次正则的 (regular of degree  $d$ ), 如果  $\bar{f}$  具有形式  $\bar{f} = \lambda z_n^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i z_n^i$ , 其中  $c_i \in \bar{k}[z_1, \dots, z_{n-1}]$ , 且  $0 \neq \lambda \in \bar{k}$ . 注意  $T_{n-1}(k)[z_n] = k\langle z_1, \dots, z_{n-1} \rangle [z_n]$  自然是  $T_n(k)$  的一个子代数.  $p$  进 Weierstrass 预备定理 ( $p$ -



adic Weierstrass preparation theorem) 和  $p$  进除法定理 ( $p$ -adic division theorem) 断言: i) (除法定理) 设  $F \in T_n(k)$  对  $z_n$  为  $d$  次正则的,  $G \in T_n(k)$ , 则存在唯一的元素  $q \in T_n(k)$  和  $r_i \in T_{n-1}(k)$  ( $i = 0, \dots, d-1$ ), 使得  $G = qF + \sum_{i=0}^{d-1} r_i z_n^i$ , 而且  $\|G\| = \max(\|F\|, \|r\|)$ , 其中  $r = \sum_{i=0}^{d-1} r_i z_n^i$ ; ii) (预备定理) 设  $F \in T_n(k)$  的范数为 1, 则存在  $T_n(k)$  的一个  $k$  自同构  $\sigma$ , 使得  $\sigma(F)$  对  $z_n$  是正则的.

## 参考文献

- [A1] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973.  
 [A2] Golubitsky, M., Guillemin, V., Stable mappings and their singularities, Springer, 1973, Chapt. IV.  
 [A3] Tougeron, J. C., Ideaux de fonction différentiables, Springer, 1972, Chapt. IX.  
 [A4] Malgrange, B., Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966, Chapt. V.  
 [A5] Fresnel, J., Put, M. van der, Géométrie analytique rigide et applications, Birkhäuser, 1981, § II. 2.  
 [A6] Koblitz, N.,  $p$ -adic numbers,  $p$ -adic analysis, and zeta functions, Springer, 1977, 97.  
 [A7] Glaeser, G., Fonctions composés différentiables, *Ann. of Math.*, 77 (1963), 193 - 209.  
 [A8] Łojasiewicz, S., Whitney fields and the Malgrange-Mather preparation theorem, 载于 Wall, C. T. C. (ed.), Proc. Liverpool Singularities Symposium 1, Springer, 1971, 106 - 115. 沈永欢 译

权 [weight; bec], 权函数 (weight function)

一个函数乘子, 它可以使一个函数给定形式的范数为有限, 而没有该乘子时, 给定函数的范数 (或半范数) 可能是无限的. 权 (函数) 的概念在有关函数逼近 (特别是在无界区间上的逼近) 问题中, 在矩问题中, 在函数空间的嵌入理论中 (见加权空间 (weighted space)), 在关于函数延拓的问题中以及在微分方程理论中都起着重要的作用. Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 例如, 可以在区间  $[a, b]$  上考虑连续函数空间  $C[a, b]$  中的加权平方范数 (weighted square norm) (见 [A2])

$$\|f\| = \int_a^b w(x) f^2(x) dx,$$

其中,  $w: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  是一个取正值的连续函数.

称多项式  $P_j(x)$  在  $[a, b]$  上关于权  $w(x)$  规范正交, 如果 ([A2])

$$\int_a^b w(x) P_j(x) P_i(x) dx = \delta_{ij}.$$

关于把权 (不同的影响, 重要性) 配置给和式、积分式或其他数学构式的思想的另一种解释, 亦见加权平均 (weighted average).

这种思想还有别的一些阐释, 例如, 加权最小平方 (weighted least squares) ([A3]) 就是要寻求某种近似估计使得加权和 (weighted sum)

$$\sum_{i=1}^n w_i \|\hat{x} - x_i\|^2$$

达到极小, 再如加权匹配问题 (weighted matching problem), 考虑一个加权图 (weighted graph) (即每条边均带有一个特定权的图), 问题是要找出最大总权的某种匹配 (matching) (即任何两条边均无公共顶点的所有边的集合) ([A4]).

在滤波和识别问题中, 加权于观测结果采取重近轻远的方法是明智的. 此时, 人们常常谈及的是增益和增益序列而不是权 ([A5], [A6]).

在带有预先给定的权函数 (weighting function)  $w(x)$  的积分公式

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^N w_k f(x_k) + R$$

中,  $w_k$  被称作是权系数 (weighting coefficients) ([A7]).

线性动力输入-输出系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

产生一个输入与输出函数之间的关系

$$y(t) = \int_0^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

(有时称为黑盒表示 (black-box representation)), 其中  $W(t)$  被称为传递函数 (transfer function) 或权函数 ([A8]).

在有限范围或无限范围的优化中, 例如, 在最优经济增长理论中, 人们的目的是要极大化远景回报函数

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{-\lambda(t-t_0)} U(c(t)) dt,$$

其中,  $U$  是一个效用函数,  $c(t)$  是现存消费品的流量. 这里使用的加权函数  $\exp(-\lambda t)$  由折扣因子 (discount factor)  $\lambda$  唯一确定 ([A9]).

## 参考文献

- [A1] Rice, J. R., The approximation of functions, 1, Addison-Wesley, 1964.  
 [A2] Davis, Ph. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975, p. 49; 134.  
 [A3] Maybeck, P. S., Stochastic models, estimation, and control, 1, Acad. Press, 1979, p. 120; 232.  
 [A4] Papadimitriou, Chr. H. and Steiglitz, K., Combinatorial optimization, Prentice Hall, 1982, p. 247 ff.  
 [A5] Ljung, L., Recursive identification, in M. Hazewinkel and J. C. Willems (eds.): Stochastic Systems:

the Mathematics of Filtering and identification and Applications, Reidel, 1981, 247 - 283; esp. 272.

[A6] Maybeck, P. S., Stochastic models, estimation, and control, III, Acad. Press, 1982, 242 - 244.

[A7] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, Dover, reprint, 1987, p. 209.

[A8] Beveridge, G. S. G. and Schechter, R. S., Optimization: theory and practice, McGraw-Hill, 1970, p. 53.

[A9] Intriligator, M. D., Mathematical optimization and economic theory, Prentice Hall, 1971, p. 407.

王仁宏、檀结庆 译

### 权函数 [weight function; обложение]

正交多项式系  $\{P_n(x)\}$  的权  $d\sigma(x)$ . 如果  $\sigma$  是区间  $[a, b]$  上的有界非减函数且有无穷多个增点, 则测度  $d\sigma(x)$  (称为权函数 (weight function)) 唯一地定义了具有正首项系数且满足规范正交条件的多项式系  $\{P_n(x)\}$ .

分布函数 (distribution function) 或积分权 (integral weight)  $\sigma$  可以分解为形式

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

其中的  $\sigma_1$  是绝对连续函数 (称为核),  $\sigma_2$  是连续的奇异分量,  $\sigma_3$  是跳跃函数. 如果  $\sigma_2 \equiv \sigma_3 \equiv 0$ , 则在积分号下可作代换  $d\sigma(x) = \sigma'_1(x)dx$ , 这里的导数  $\sigma'_1 = h$  称为多项式系的微分权 (differential weight).

在分布函数的 3 个分量中, 只有核  $\sigma_1$  反映了正交多项式系的渐近性质.

参考文献见正交多项式 (orthogonal polynomials).

П. К. Суетин 撰

【补注】 术语“权函数”经常专门用于这里称谓的“微分权”.

朱学贤 译

Lie 代数表示的权 [weight of a representation of a Lie algebra; вес представления алгебры Ли], 在向量空间  $V$  上

Lie 代数 (Lie algebra)  $L$  到定义域  $k$  上的线性映射  $\alpha$ , 对此存在  $V$  的非零向量  $x$ , 使得对于表示  $\rho$ , 等式

$$(\rho(h) - \alpha(h)1)^{n_{x,h}}(x) = 0$$

对所有  $h \in L$  及某个整数  $n_{x,h} > 0$  (一般取决于  $x$  和  $h$ ) 成立. 这里 1 表示  $V$  的恒等变换. 这时也可以称  $\alpha$  是由表示  $\rho$  确定的  $L$  模  $V$  的一个权 (weight of the  $L$ -module  $V$ ). 满足这一条件的所有向量  $x \in V$  的集合, 连同零, 形成子空间  $V_\alpha$ , 通常称为权  $\alpha$  (或对应于  $\alpha$ ) 的权子空间 (weight subspace). 若  $V = V_\alpha$ , 则  $V$  称为  $L$  上权  $\alpha$  的权空间 (weight space) 或权模

(weight module).

若  $V$  是  $L$  上权  $\alpha$  的有限维模, 它的逆步模 (见逆步表示 (contragredient representation))  $V^*$  是权  $-\alpha$  的权模; 若  $V$  和  $W$  分别是  $L$  上权  $\alpha$  和  $\beta$  的权模, 则它们的张量积  $V \otimes W$  是权  $\alpha + \beta$  的权模. 若  $L$  是幂零 Lie 代数, 则权  $\alpha$  在  $V$  中的权子空间  $V_\alpha$  是  $L$  模  $V$  的  $L$  子模. 若还有

$$\dim_k V < \infty$$

并且  $\rho(L)$  是模  $V$  的线性变换的一个分裂 Lie 代数, 则  $V$  可分解成有限个不同权的权子空间的直和:

$$V = V_\alpha \oplus V_\beta \oplus \cdots \oplus V_\tau$$

( $V$  关于  $L$  的权分解 (weight decomposition)). 如果  $L$  是有限维 Lie 代数  $M$  的幂零子代数, 将  $M$  视为关于  $M$  的伴随表示  $\text{ad}_M$  的一个  $L$  模 (见 Lie 群的伴随表示 (adjoint representation of a Lie group)), 而  $\text{ad}_M L$  是  $M$  的线性变换的分裂 Lie 代数, 则  $M$  关于  $L$  所对应的权分解

$$M = M_\alpha \oplus M_\beta \oplus \cdots \oplus M_\gamma$$

称为  $M$  关于  $L$  的 Fitting 分解 (Fitting decomposition), 权  $\alpha, \beta, \cdots, \gamma$  称为根 (root), 而空间  $M_\alpha, M_\beta, \cdots, M_\gamma$  称为  $M$  关于  $L$  的根子空间 (root subspace). 如果指定代数  $M$  在有限维向量空间  $V$  上的一个表示  $\rho$ ,  $\rho(L)$  是  $V$  的线性变换的一个分裂 Lie 代数, 而

$$V = V_\alpha \oplus V_\beta \oplus \cdots \oplus V_\tau$$

是  $V$  关于  $L$  的对应的权分解, 则当  $\alpha + \sigma$  是  $V$  关于  $L$  的一个权时,  $\rho(M_\alpha)(V_\sigma) \subseteq V_{\alpha+\sigma}$ , 否则  $\rho(M_\alpha)(V_\sigma) = 0$ . 特别地, 若  $\alpha + \beta$  是一个根, 则  $[M_\alpha, M_\beta] \subseteq M_{\alpha+\beta}$ , 否则  $[M_\alpha, M_\beta] = 0$ . 如果  $k$  是特征为零的域, 则权  $\sigma, \delta, \cdots, \tau$  和根  $\alpha, \beta, \cdots, \gamma$  是  $L$  上的线性函数, 它们在  $L$  的换位子代数上取值为零.

### 参考文献

- [1] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964).

В. Л. Пономов 撰

【补注】 域  $k$  上向量空间的线性变换的集合 (代数, Lie 代数, 等等)  $L$  称为分裂的 (split 或 splitting), 如果每个变换的特征多项式的所有的根都在  $k$  中, 即  $k$  包含所有  $h \in L$  的特征多项式的分裂域 (见多项式的分裂域 (splitting field of a polynomial)).

Lie 代数的表示  $\rho: L \rightarrow \text{End}(V)$  是分裂的, 若  $\rho(L)$  是线性变换的分裂 Lie 代数 (split Lie algebra of linear transformation).



## 参考文献

- [A1] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Éléments de mathématique, Hermann, 1975, Chaps, 7; 8.

拓扑空间的权 [weight of a topological space; вес топологического пространства]

拓扑空间 (topological space) 开基 (base) 的基数中的最小基数. 权, 连同基数, 都是拓扑空间的最重要的基数不变量.

П. С. Александров 撰

【补注】亦见基数特征 (cardinal characteristic).

## 参考文献

- [A1] Arkhangle'skii, A. V., Topological function spaces, Kluwer, 1991 (译自俄文).  
[A2] Juhasz, J., Cardinal functions in topology, Math. Centre, Amsterdam, 1971. 罗嵩龄 译

权空间 [weight space; весовое пространство]

一个有限维空间  $V$ , 承担着域  $F$  上 Lie 代数 (Lie algebra) 的一个表示  $\rho$ , 且满足下述条件: 存在函数  $\alpha: L \rightarrow F$ , 使得对任何  $x \in V, l \in L$ ,

$$(l^\rho - \alpha(l)1)^k x = 0$$

对某个正整数  $k$ . 函数  $\alpha$  称为权 (weight).  $L$  在权为  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  的权空间  $V_1$  和  $V_2$  中的两个表示  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的张量积  $\rho_1 \otimes \rho_2$  是  $L$  在空间  $V_1 \otimes V_2$  中的表示, 这也是一个权空间, 权为  $\alpha_1 + \alpha_2$ . 由表示  $\rho$  导出逆步表示  $\rho^*$ , 空间  $V$  由伴随空间  $V^*$  所取代,  $\alpha$  由  $-\alpha$  所取代.

Е. Н. Кузьмин 撰

【补注】亦见 Lie 代数表示的权 (weight of representation of a Lie algebra).

蔡传仁 译

加权平均值 [weighted average; взвешенное среднее] 量

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i},$$

其中  $x_1, \dots, x_n$  是  $n$  个分别关于权  $p_1, \dots, p_n$  取的量.

王斯雷 译

加权空间 [weighted space; весовое пространство], 带加权范数的函数空间 (function space with weighted norm), 加权类 (weighted class), 具有加权范数的函数空间 (space of functions with weighted norm)

具有包含函数乘子——权 (weight) 的有限范数 (或半范数) 的函数空间. 该函数的范数 (半范数) 则称为加权范数 (半范数) (weighted norm (semi-norm)), 而此权也称为该范数 (半范数) 的权函数 (weight function of the norm (semi-norm)). 权的

引入使得有可能扩大或限制由具有无穷通常非加权范数 (半范数) 的函数所组成的通常非加权赋范和赋半范的函数空间. 例如, 考虑加权空间  $C_\varphi(E)$  (这里  $\varphi$  是权函数), 它的范数由公式

$$\|f\|_{C_\varphi} = \sup_{x \in E} |\varphi(x)f(x)|$$

定义. 如果函数  $\varphi$  是适当选取的, 该空间可以比具有通常范数

$$\|f\|_C = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

的空间大或小. 例如, 具有范数

$$\|f\|_{C_x} = \sup_{0 < x < 1} |xf(x)|$$

的空间  $C_x(0, 1)$  包含一些无界函数, 且包含区间  $(0, 1)$  上的有界函数的空间  $C(0, 1)$  作为真子空间. 反之, 具有范数

$$\|f\|_{C_{1/x}} = \sup_{0 < x < 1} \left| \frac{1}{x} f(x) \right|$$

的空间  $C_{1/x}(0, 1)$  是空间  $C(0, 1)$  的真子空间. 第二个例子: 具有加权半范数  $\sqrt{D_\alpha(u)}$  的赋半范空间, 这里  $u = u(x, y)$  且

$$D_\alpha(u) = \iint_{r \leq 1} (1-r)^\alpha (u_x^2 + u_y^2) dx dy,$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 对  $\alpha > 0$ , 它包含具有无权半范数  $\sqrt{D_0(u)}$  的函数空间作为真子空间, 而对  $\alpha < 0$ , 它是这空间的真子空间.

在极大多数情形权函数趋于零或无穷当其自变量趋近一个给定流形时, 该流形可退化成一点, 包括无穷远点. 在函数论中当研究通常 (非加权) 空间时, 以及在函数论的应用中, 例如在偏微分方程的边值问题理论中, 都会自然地出现带权的空间.

研究加权空间中的主要问题是对这样一些空间得到嵌入定理 (imbedding theorem). 在第一类型的嵌入定理中一个函数的范数用它在另一加权空间中的范数来估计, 假设两个范数对有同样定义域的函数都有定义. 这类型的定理包括关于一个加权空间中等价范数的定理, 特别是关于用 Fourier-Bessel 变换定义的范数. 这些包括对在定义域边界上为零的函数, 在适当的空间中, 用较高阶导数的 (加权) 范数来估计较低阶导数, 特别是函数本身的加权范数. 例如, 这些定理可用以确定用什么权一个函数在给定区域中可和, 如果它的所有高阶导数属于给定的加权空间. 在第二类型的嵌入定理中, 用函数的加权范数给出它们在低维流形上述的范数的估计.

重要的一类加权空间由这样的函数空间组成, 其中函数直到某一阶数的所有导数的绝对值的一定次数

的幂带有一个幂性权是可和的. 对这样一些情况加权空间的嵌入已经很详尽地作了研究. 例如令加权空间  $W_{p,\alpha}^l(E^n|\infty)$  是由  $n$  维 Euclid 空间  $E^n$  上有直到  $l$  阶 (包含在内) 广义导数  $D_0^k f$ ,  $k = (k_1, \dots, k_n)$ , 且使得量 (它是该空间的范数)

$$|f; W_{p,\alpha}^l(E^n|\infty)| = \sum_{|k|=l} |(1+|x|)^{-\alpha} D^k f; L_p(E^n)| + |f; L_p(Q^n)|$$

保持有限的函数  $f$  组成. 这里  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ ,  $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ,  $Q^n$  是  $E^n$  中  $n$  维单位球,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\alpha$  是一实数, 且  $|k| = k_1 + \dots + k_n$ . 则以下的嵌入定理适用: 如果  $\alpha > (n/p) - 1$ ,  $0 \leq k \leq l$ , 则

$$W_{p,\alpha}^l(E^n|\infty) \rightarrow W_{p,\alpha+k}^{l-k}(E^n|\infty).$$

如果  $\alpha > 0$  是小的 (即在所谓小退化情形), 加权空间  $W_{p,\alpha}^l(E^n|\infty)$  有类似于无权空间的那些性质: 如果  $0 \leq \alpha \leq (n/p) - 1$ , 则对任意的  $\varepsilon > 0$ , 嵌入

$$W_{p,\alpha}^l(E^n|\infty) \rightarrow W_{p,(n+\varepsilon)/p}^0(E^n|\infty)$$

成立. 如果  $\alpha = 0$ , 可以推出, 例如, **Dirichlet** 积分 (Dirichlet integral)

$$D(f) = \int_{E_+^n} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 dE_+^n$$

(其中  $E_+^n = \{x: x_n > 0\}$  是半空间) 作为属于  $L_2(E_+^n)$  且在超平面  $E^{n-1} = \{x: x_n = 0\}$  上为零的函数的空间上的泛函不是下有界的, 但是它在相应的权空间上是下有界的.

如果  $0 \leq \alpha < (n/p) - 1$ , 则对加权空间  $W_{p,\alpha}^l(E^n|\infty)$  中的每一个函数, 有一个对应的次数至少为  $l-1$  的多项式使得当点沿半径趋于无穷时它与该函数本身之差趋于零.

对加权空间的迹嵌入定理是对通常函数空间的正和逆嵌入定理的推广, 并且对如从区域中一点到区域边界的距离的某个幂的权的情况已经作了深入的研究.

对加权空间的嵌入定理首先用于退化椭圆型方程理论; 由此可以给出边值问题的精确的公式表示, 且得到 (依赖于退化程度和在其上未提出限制的那部分边界) 对几个边值问题可解性的必要充分条件 (用边界值性质来表示); 在证明相应的加权空间中边界问题解的存在与唯一性中, 以及在建立当边值变化时解在能量积分意义下的稳定性中, 它们都起着重要作用. 如果区域是无界的, 加权空间也应用于一致椭圆型方程理论.

在解决扩张函数 (或函数系) 从一流形到全空间使在该流形的补上无穷可微的最佳扩张问题中, 加权

空间的嵌入定理已找到直接的应用. 这里, 最佳扩张是在点趋于给定流形时导数的增长阶最小的意义下理解的. 对充分光滑的流形, 在流形上函数的整体光滑程度确定了作为扩张结果所得函数的最大可能的整体光滑程度; 因此, 从某个确定的阶数起, 扩张函数的导数仅在带有某一权时才有有限范数, 即属于相应的加权空间.

#### 参考文献

- [1] Никольский, С. М., «Успехи матем. наук», 16 (1961), 5, 63 – 114.
- [2] Кудрявцев, Л. Д., Никольский, С. М., в сб., Некоторые проблемы математики и механики, Новосибирск, 1961, 87 – 109.
- [3] Кудрявцев, Л. Д., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 55 (1959), 1 – 181.
- [4] Теория вложений классов дифференцируемых функций многих переменных, в сб.: Дифференциальные уравнения с частными производными, М., 1970, 38 – 63 (英译本: Kudryavtsev, L. D. and Nikol'skii, S. M., Spaces of differentiable functions of several variables and imbedding theorems, in S. M. Nikol'skii (ed.), Analysis, III, Encycl. of Math. Sciences, Vol. 26, Springer, 1990, 1 – 140).

Л. Д. Кудрявцев 撰 葛显良 译 鲁世杰 校

#### Weil-Châtelet 群 [Weil-Châtelet group; Вейля-Шатле группа]

Abel 簇上主齐性空间 (principal homogeneous space) 的群. A. Weil ([1]) 证明了, 而且 F. Châtelet 也对一种特殊的情形证明了对于域  $k$  上任意的 Abel 簇  $A$ , 定义在  $k$  上的  $A$  上主齐性空间的集合  $WC(A, k)$  具有群的结构. 群  $WC(A, k)$  同构于第一 Galois 上同调 (Galois cohomology) 群  $H^1(k, A)$ . 群  $WC(A, k)$  总是周期的, 此外, 如果  $k = \mathbb{Q}$ , 则它含有任意阶的元素 ([4], [5]). 根据 Lang 定理, 当  $k$  是有限域时  $WC(A, k) = 0$ . 对于任何元素  $D \in WC(A, k)$  可以定义指数  $I = \text{ind}_k(D)$  为扩张  $K/k$  的最小次数使得存在  $D$  的  $K$  有理点. 如果  $\dim A = 1$  且  $k$  是常数的代数闭域上的代数函数域或是局部域, 则  $I$  等于  $D$  在群  $WC(A, k)$  内的阶 ([6], [10]). 在一般的情形下这些数并不相等, 但  $\text{ord}(D)$  总是  $I$  的因子 ([7]). 对局部域  $k$ , 群  $WC(A, k)$  已被计算 (见 [6], [8], [9]).

如果  $k$  是整体域, 群  $WC(A, k)$  的计算是以约化同态 (reduction homomorphisms)

$$\varphi_v: WC(A, k) \rightarrow WC(A, k_v)$$

为基础的, 这里  $v$  是  $k$  的一个赋值,  $k_v$  是  $k$  关于  $v$  的完全化. 同态



$$\varphi = \sum \varphi_v: WC(A, k) \rightarrow \sum WC(A, k_v)$$

的核  $\text{III}(A)$  是有名的 Abel 簇  $A$  的 Tate-Шафаревич群, 仅当  $k$  是常数的代数闭域上单变量代数函数域时才被计算出 ([5], [8], [11]). 在这种情形下  $\varphi$  的余核也被描述了 (精确到  $p$  分量,  $p$  是  $k$  的特征数). 这些计算的结果被用在椭圆曲面理论里. 当  $k$  是代数数域时, 群  $\text{III}(A)$  的结构被研究得很少.

#### 参考文献

- [1] Weil, A., On algebraic groups and homogeneous spaces, *Amer. J. Math.*, 77 (1955), 493 – 512.
- [2] Башмаков, М. И., «Успехи матем. наук», 27 (1972), 6, 25 – 66.
- [3] Cassels, J., Diophantine equations with special reference to elliptic curves, *J. London Math. Soc.*, 41 (1966), 193 – 291.
- [4] Шафаревич, И. Р., «Докл. АН СССР», 114 (1957), 2, 267 – 270.
- [5] Шафаревич, И. Р., «Докл. АН СССР», 114 (1957), 4, 714 – 716.
- [6] Шафаревич, И. Р., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 64 (1961), 316 – 346.
- [7] Lang, S. and Tate, J., Principal homogeneous spaces over abelian varieties, *Amer. J. Math.*, 80 (1958), 659 – 684.
- [8] Ogg, A. P., Cohomology of Abelian varieties over function fields, *Ann. of Math.* (2), 76 (1962), 2, 185 – 212.
- [9] Tate, J., WC-groups over  $p$ -adic fields, in *Sem. Bourbaki*, Vol. Exp. 156, Secr. Math. Univ. Paris, 1957.
- [10] Lichtenbaum, S., The period-index problem for elliptic curves, *Amer. J. Math.*, 90 (1968), 4, 1209 – 1223.
- [11] Raynaud, M., Caractéristique de Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, in *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, 1968, 12 – 30.

И. В. Долгачев 撰

【补注】数域上某些椭圆曲线的 Tate-Шафаревич群最近已被计算 ([A1], [A2], [A5]). 关于 Weil-Châtelet 群的  $p$  分量的一些新结果也已经得到 ([A3]).

#### 参考文献

- [A1] Kolyvagin, V. A., Finiteness of  $E(\mathbb{Q})$  and  $\text{III}(E/\mathbb{Q})$  for a class of Weil curves, *Math. USSR Izv.*, 32 (1989), 523 – 541. (译自俄文).
- [A2] Kolyvagin, V. A., On the structure of Shafarevich-Tate groups, in S. Block, et al. (ed.) *Algebraic Geometry*, Lecture notes in math., Vol. 1479, Springer, 1991, 94 – 121.
- [A3] Milne, J., Arithmetic duality theorems, *Acad. Press*, 1986.

- [A4] Silverman, J. H., The arithmetic of elliptic curves, Springer, 1986.
- [A5] Rubin, K., Tate-Shafarevich groups and  $L$ -functions of elliptic curves with complex multiplication, *Invent. Math.*, 89 (1987), 527 – 560.
- [A6] Kolyvagin, V. A., Euler systems, in P. Cartier, et al. (ed.) *Grothendieck Festschrift. Vol. II*, Birkhäuser, 1990, 435 – 484.
- [A7] Rubin, K., The work of Kolyvagin on the arithmetic of elliptic curves, in W. P. Barth, et al. (ed.) *Arithmetic of Complex Manifolds*, Lecture notes in math., Vol. 1399, Springer, 1989, 128 – 136.

陈志杰 译

#### Weil 上同调 [Weil cohomology; Вейля когомологии]

系数在特征数 0 的域里的代数簇的上同调, 它具有为得到固定点个数的 Lefschetz 公式 (Lefschetz formula) 所需要的形式性质. 这样的理论的必要性是 A. Weil 指出的 ([1]), 他证明了有限域上簇的  $\zeta$  函数 (zeta-function) 和  $L$  函数的有理性可从 Lefschetz 公式导出, 而且关于  $\zeta$  函数的其余假设可以自然地表示成上同调的术语. 设簇  $X$  是固定的代数闭域  $k$  上的光滑连通射影概形,  $K$  是特征数 0 的域. 则系数域  $K$  的 Weil 上同调 (Weil cohomology) 是从簇的范畴到有限维分次反交换  $K$  代数的范畴里的反变函子  $X \rightarrow H^*(X)$ , 它满足下列条件:

1) 当  $n = \dim X$  时,  $H^{2n}(X)$  同构于  $K$ , 并且由  $H^*(X)$  内乘法定义的映射

$$H^i(X) \times H^{2n-i}(X) \rightarrow H^{2n}(X),$$

对所有的  $i$  都是非退化的;

2)  $H^*(X) \otimes_K H^*(Y) \xrightarrow{\sim} H^*(X \times Y)$  (Künneth 公式 (Künneth formula));

3) 闭链的映射. 存在从  $X$  内余维数  $p$  的代数闭链的群  $C^p(X)$  到  $H^{2p}(X)$  内的函子同态  $\gamma_X$ , 它把闭链的直积映到张量积并且在下述意义下非平凡: 对于点  $P$ ,  $\gamma_P$  成为  $\mathbb{Z}$  到  $K$  内的典范嵌入. 数

$$b_i(X) = \dim_K H^i(X)$$

称为簇  $X$  的第  $i$  个 Betti 数 ( $i$ -th Betti number of the variety  $X$ ).

例. 当  $k = \mathbb{C}$  时, 系数在  $\mathbb{C}$  内的复流形的经典上同调是一种 Weil 上同调. 如果  $l$  是不等于域  $k$  特征数的素数, 则艾达尔  $l$  进上同调

$$X \rightarrow [\varprojlim_{\mathbb{N}} H_{\text{ét}}^*(X, \mathbb{Z}/l^i\mathbb{Z})] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l$$

是系数在域  $\mathbb{Q}_l$  内的一种 Weil 上同调.

对 Weil 上同调, 以下 Lefschetz 公式 (Lefschetz

formula) 成立:

$$\langle u \cdot \Delta \rangle = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \text{Tr}(u_i).$$

在上述公式中  $\langle u \cdot \Delta \rangle$  是态射  $u: X \rightarrow X$  的图  $\Gamma$  与对角线  $\Delta \subset X \times X$  在  $X \times X$  内的相交数, 它也可理解为自同态  $u$  的固定点个数, 而  $\text{Tr}(u_i)$  是  $u$  在  $H^i(X)$  内诱导自同态  $u_i$  的迹. 此外, 这个公式对于对应 (correspondences), 即元素  $u \in H^{2n}(X \times X)$ , 也正确.

#### 参考文献

- [1] Weil, A., Numbers of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 497 – 508.
- [2] Kleiman, S. L., Algebraic cycles and the Weil conjectures, in *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, 1968, 359 – 386.

В. И. Данилов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Grothendieck, A., The cohomology theory of abstract algebraic varieties, in J. A. Todd (ed.) *Proc. int. Congr. Mathematicians* (Edinburgh, 1958), Cambridge Univ. Press, 1960, 103 – 118.
- [A2] Grothendieck, A., Bucur, I., Honzel, C., Illusie, L., Jouanolou, J.-P. and Serre, J.-P., *Séminaire du Géométrie Algébrique - 5*, Lecture notes in math., 589, Springer, 1977.
- [A3] Milne, J. S., *Étale cohomology*, Princeton Univ. Press, 1980.
- [A4] Freitag, E. and Kiehl, R., *Étale cohomology and the Weil conjecture*, Springer, 1988.
- [A5] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*, Springer, 1977.

陈志杰 译

#### Weil 区域 [Weil domain; Вейля область]

一个解析多面体 (analytic polyhedron) 的特殊情形.  $n$  维空间  $\mathbb{C}^n$  中的一个有界区域  $D$  称为一 Weil 区域 (Weil domain), 如果存在  $N \geq n$  个函数  $f_i(z)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) 在闭包  $\bar{D}$  的一固定邻域  $U(\bar{D})$  是全纯的, 使得

1)  $D = \{z: |f_i(z)| < 1, i = 1, \dots, N, z \in U(\bar{D})\}$ ;

2) Weil 区域  $D$  的面 (faces of the Weil domain  $D$ ), 即集合

$$\sigma_i = \{z \in D: |f_i(z)| = 1, |f_j(z)| \leq 1, j \neq i\}$$

的维数是  $2n - 1$ ;

3) Weil 区域  $D$  的边 (edges of the Weil domain  $D$ ), 即任何  $k$  ( $2 \leq k \leq n$ ) 个不同面的交, 维数  $\leq 2n - k$ .

— Weil 区域的所有  $n$  维边的全体称为区域的骨架 (skeleton of the domain). Weil 区域有 Bergman-Weil 表示 (Bergman-Weil representation). 这些区域以 A. Weil ([1]) 命名, 他得到这些区域的首要结果.

#### 参考文献

- [1] Weil, A., L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, *Math. Ann.*, **111** (1935), 178 – 182.
- [2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1 – 2, 2 изд., М., 1976.
- [3] Вхадимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., *Methods of the theory of functions of several complex variables*, M. I. T., 1966).

М. Ширинбеков 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Фукс, Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962 (英译本: Fuks, B. A., *Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables*, Amer. Math. Soc., 1963).
- [A2] Henkin, G. M. [G. M. Khenkin] and Leiterer, J., *Theory of functions on complex manifolds*, Birkhäuser, 1984.

钟同德 译

#### Weingarten 导数公式 [Weingarten derivational formulas; Вейнгартена деривационные формулы]

用一个曲面的位置向量的一阶偏导数来表示这个曲面的单位法向量的导数的展开的公式. 设  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  为曲面的位置向量,  $\mathbf{n}$  为单位法向量,  $E, F, G, L, M, N$  分别表示曲面的第一和第二基本形式的系数; 于是 Weingarten 导数公式取下列形式:

$$\mathbf{n}_u = \frac{FM - GL}{EG - F^2} \mathbf{r}_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} \mathbf{r}_v,$$

$$\mathbf{n}_v = \frac{FN - GM}{EG - F^2} \mathbf{r}_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} \mathbf{r}_v.$$

这两个公式是 J. Weingarten 在 1861 年建立的.

#### 参考文献

- [1] Рашевский, П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956. А. Б. Иванов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., *Elementare Differential-geometrie*, Springer, 1973.
- [A2] Hicks, N. J., *Notes on differential geometry*, v. Nostrand, 1965.

沈纯理 译



**Weingarten 曲面** [Weingarten surface; Вейнгартена поверхность]

一个曲面, 其平均曲率 (mean curvature) 和 Gauss 曲率 (Gaussian curvature) 成函数关系. 一个曲面  $S$  为 Weingarten 曲面的必要充分条件是它的两叶焦集重叠在一个旋转曲面上, 而且曲面  $S$  的曲率线的法线的回归棱 (尖棱) 重叠在子午线上. 旋转曲面、常平均曲率和常 Gauss 曲率曲面都是 Weingarten 曲面的例子. J. Weingarten 在 [1], [2] 中导入了寻找所有与给定旋转曲面等距的曲面的问题. 这一问题可以化为寻找这个类中所有的 Weingarten 曲面.

#### 参考文献

- [1] Weingarten, J., Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen, *J. Reine Angew. Math.*, **59** (1861), 382 – 393.
- [2] Weingarten, J., Über die Flächen, derer Normalen eine gegebene Fläche berühren, **62** (1863), 61 – 63.
- [3] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963. А. Б. Иванов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Addison-Wesley, 1950. 沈纯理 译

**良基关系** [well-founded relation; убедительное отношение], **良基偏序** (well-founded partial order)

【补注】集合  $A$  上的 (偏序) 关系称为良基的 (well-founded), 或递归的 (recursive), 如果  $A$  的每个非空子集有相对于这个关系的最小元. 于是, 如果集合  $A$  上的全序 (参见全序集) 是良基的, 则  $A$  是良序集 (well-ordered set).

一个  $A$  上的关系  $R \subset A \times A$  是良基的, 当且仅当对任何集合  $B$  和函数  $g: \mathcal{P}(B) \rightarrow B$  都存在唯一的函数  $f: A \rightarrow B$ , 使得下列图交换 (见 [A1]):

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ r \downarrow & & \downarrow g \\ \mathcal{P}(A) & \xrightarrow{\mathcal{P}(f)} & \mathcal{P}(B) \end{array}$$

这里,  $\mathcal{P}(A)$  是  $A$  的所有子集的集合, 对于  $A' \in \mathcal{P}(A)$ ,  $\mathcal{P}(f)(A') = \{f(a'): a' \in A'\}$  而且  $r(a) = \{a': (a, a') \in R\}$ . 在这种形式下, 良基性在任何初等拓扑斯上可定义.

#### 参考文献

- [A1] Osus, G., Categorical set theory: a characterization of the category of sets, *J. Pure Appl. Algebra.*, **4** (1974), 79 – 119.

[A2] Odifreddi, P., Classical recursion theory, North-Holland, 1989.

[A3] Goldblatt, R., Topoi. The categorical analysis of logic, North-Holland, 1984, 318ff.

何青译 罗里波校

**良序集** [well-ordered set; вполне упорядоченное множество]

具有二元关系  $\leq$  并且满足下列条件的一个集合  $P$ :

- 1) 对任意  $x, y \in P$ , 或  $x \leq y$ , 或  $y \leq x$ ;
- 2) 如果  $x \leq y$  并且  $y \leq x$ , 那么  $x = y$ ;
- 3) 如果  $x \leq y$  并且  $y \leq z$ , 那么  $x \leq z$ ;
- 4) 在任意非空子集  $X \subset P$  中, 存在一个元素  $a$ , 使得对所有  $x \in X$ ,  $a \leq x$ .

于是, 良序集是满足极小条件的全序集 (totally ordered set).

良序集概念是由 G. Cantor ([1]) 提出的. 自然数集对于自然顺序是良序集的一个实例. 另一方面, 实数区间  $[0, 1]$  对于自然顺序不是一个良序集. 良序集的任一子集是良序的. 有限个良序集的 Descartes 积对于字典序 (lexicographic order) 是良序的. 一个全序集是良序的, 当且仅当它不包含反同构于自然数集的子集 (见偏序集的反同构 (anti-isomorphism of partially ordered set)).

一个良序集  $P$  的最小元素用零 (符号 0) 表示. 对于任意元素  $a \in P$ , 集合

$$[0, a) = \{x: x \in P, x < a\}$$

称为  $P$  的一个初始段 (initial segment). 对  $P$  中任一不是最大元的元素  $a$ , 存在紧接着它的后继元; 通常用  $a + 1$  表示它. 一个良序集中没有紧接前元的元素称为极限元 (limit element).

**比较定理** (comparison theorem). 对任意两个良序集  $P_1$  和  $P_2$  有且仅有下列情形之一成立: a)  $P_1$  同构于  $P_2$ ; b)  $P_1$  同构于  $P_2$  的一个初始段; 或者 c)  $P_2$  同构于  $P_1$  的一个初始段.

如果选择公理 (axiom of choice) 包含在集合论的公理中, 那么可以证明, 对任意非空集合可以赋予它一个序关系, 使其成为一良序集 (即任一非空集合是能够良序的). 这个定理 (称为 **Zermelo 定理** (Zermelo theorem)) 事实上等价于选择公理. Zermelo 定理和比较定理构成了集合的基数之间的比较的基础. 良序集的序型称为序数 (ordinal number) (见序型 (order type; 序数 (ordinal number))).

#### 参考文献

- [1] Cantor, G., Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **21** (1883), 51 – 58.

- [2] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948.
- [3] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914. Reprinted (incomplete) English translation: Set theory, Chelsea (1978).
- [4] Bourbaki, N., Theory of sets, Elements of mathematics, Addison-Wesley, 1968 (译自法文).
- [5] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North-Holland, 1968.

Б. А. Ефимов, Т. С. Фофанова 撰

【补注】 在上面的定义中, 条件 3) (序关系的传递性) 事实上是多余的: 它从子集  $\{x, y, z\}$  的最小元素的存在性得到.

有时一个良序集称为全良序集 (totally well-ordered set), 以反映次序关系是全序 (total ordering) 或线性序 (linear ordering). 见全序集 (totally ordered set).

#### 参考文献

- [A1] Levy, A., Basic set theory, Springer, 1979.

卢景波 译 王世强 校

#### 适定问题 [well-posed problem; корректная-задача]

由度量空间  $U$  (其距离为  $\rho_U(\cdot, \cdot)$ ) 中的初值  $u$  确定度量空间  $Z$  (其距离为  $\rho_Z(\cdot, \cdot)$ ) 中的满足下列条件的解  $z = R(u)$  的问题: a) 对任一  $u \in U$  恒有解  $z \in Z$ ; b) 此解为唯一确定的; c) 此问题对于空间  $(Z, U)$  是稳定的: 即对任一  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta(\varepsilon) > 0$ , 使得对于  $u_1, u_2 \in U$ , 由不等式  $\rho_U(u_1, u_2) \leq \delta(\varepsilon)$ , 必可得到  $\rho_Z(z_1, z_2) \leq \varepsilon$ , 这里  $z_1 = R(u_1)$ ,  $z_2 = R(u_2)$ .

若一个问题不满足关于适定性的以上三条件之一, 就称为不适定问题 (ill-posed problem).

【补注】 “适定” (英文也用 properly posed 或 correctly set) 一词是法国数学家 J. Hadamard 在 20 世纪初给出来的 ([A1]). 他特别强调解对数据的连续依赖性 (continuous dependence of solutions on the data) (即性质 c). 实际问题 (例如在流体力学和地震学中) 导致不适定问题 (ill-posed problem) 也非罕见.

#### 参考文献

- [A1] Hadamard, J., Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Dover, reprint, 1952.
- [A2] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1964.

齐民友 译

#### Weyl 代数 [Weyl algebra; Вейля алгебра]

【补注】 设  $K$  是一个交换域,  $n$  是一个正整数, 系数在多项式环  $K[x] = K[x_1, \dots, x_n]$  内的微分算子环记为  $A_n(K)$ , 称为  $K$  上  $n$  元变量的 Weyl 代数. 将  $K[x]$  等同于零阶微分算子子环, 则  $A_n(K)$  由  $K[x]$

和导子算子  $\{\partial_i = \partial/\partial x_i\}_1^n$  生成. 对每个  $i$ , 换位子  $[\partial_i, x_i] = 1$ . 这样  $A_n(K)$  是非交换环. 每个元素唯一表示为

$$P(x, \partial) = \sum_{\alpha=0}^m p_\alpha(x) \partial^\alpha,$$

这里  $\partial^\alpha$  是导子算子的单项式. 使得多项式系数  $p_\alpha(x)$  非零的最大整数  $m$  ( $|\alpha| = m$ ) 是微分算子  $P$  的次数. 由次数得到一个滤过 (见滤过模 (filtered module)) 和结合分次环 (见分次模 (graded module))

$$\text{gr}(A_n(K)) = \bigoplus_{m \geq 0} \text{gr}_m(A_n(K)),$$

这里  $\text{gr}_m(A_n(K))$  是  $m$  次算子集, 模去次数不超过  $m-1$  的部分. 易知, 这个结合分次环同构于  $K$  上  $2n$  个变元的多项式环,  $\{\sigma_0(x), \sigma_1(\partial)\}$  是生成元.

环论性质. 这里仅讨论域  $K$  特征为零的情况. 如果  $\text{char}(K) > 0$ , 以下结果不再有效. 有关  $\text{char}(K) > 0$  的资料见 [A30]. 从现在起,  $\text{char}(K) = 0$ , 则  $A_n(K)$  是单环, 而由  $\text{gr}(A_n(K))$  是 Noether 和交换的, 推出  $A_n(K)$  同时是左和右 Noether 的. 据 [A42],  $A_n(K)$  的每个左理想由两个元素生成.  $A_n(K)$  的整体同调维数 (homological dimension) 等于  $n$ . 这一结果在 [A37] 中被证明.  $n=1$  的情形在 [A35] 中已先建立. 另一个重要结果是特征理想的对合性 (involutivity).

为了说明这一点, 考虑有限生成左  $A_n(K)$  模  $M$ .  $M$  的好滤过 (good filtration) 由  $K[x]$  子模的升链  $\{M_v\}$  组成, 对所有  $i, v, \partial_i M_v \subset M_{v+1}$ , 并且相伴分次模  $\bigoplus M_v/M_{v-1}$  在  $\text{gr}(A_n(K))$  上有限生成. 一个模可以带有不同的好滤过, 但对任何好滤过, 存在  $\text{gr}(A_n(K))$  的唯一的分次理想, 作为  $\bigoplus M_v/M_{v-1}$  的零化子理想的根. 记为  $J(M)$ , 称为  $M$  的特征理想 (characteristic ideal).  $\text{gr}(A_n(K))$  有一个 Poisson 积, 使得  $\{\sigma_1(\partial_v), \sigma_0(x_i)\} = \Delta_{iv}$ . 对每个有限生成左  $A_n(K)$  模, 对合性定理 (involutivity theorem) 断言

$$\{J(M), J(M)\} \subset J(M) \quad (\text{A1})$$

在  $K = \mathbb{C}$  的特殊情形, 零点定理 (nullstellen satz) (见 Hilbert 定理 (Hilbert theorem)) 将  $J(M)$  等同于辛余切空间  $T^*(\mathbb{C}^n)$  的一个代数集, 记为  $\text{Char}(M)$ , 称为  $M$  的特征簇 (亦见特征流形 (characteristic manifold)). (A1) 意味着  $\text{Char}(M)$  在辛余切空间中是对合的.

当  $M$  是非零  $A_n(K)$  模时, 对合性蕴涵着  $\text{gr}(A_n(K))/J(M)$  的维数至少为  $n$ . 利用  $A_n(K)$  是正则 Auslander 环这一事实, 可以来证明  $\text{gl. dim}(A_n(K)) = n$ . 这方面的概况见 [A8]. [A40] 用微局部分析证明了结论 ([A1]). 代数证明的给出较



迟, 见 [A14]. [A26] 利用特征理想证明了, 若  $W \subset \text{gr}(A_n(K))$  是由齐次元素形成的乘集,  $S$  是  $A_n(K)$  的乘集, 其主象征属于  $W$ , 则  $S$  满足双侧 Ore 条件. 这样, 泛  $S$  可逆环是双侧 Ore 分式环  $S^{-1}A_n(K)$ . 特别当  $S$  是非零元的集合时, 导出的除环  $D_n(K)$  关联于某个包络代数关于本原理想的除环.

**完全模.** 等式  $\text{gl. dim}(A_n(K)) = n$  蕴涵它的 Krull 维数至多为  $n$ . 实际上在上述发现之前等式  $\text{Kr. dim}(A_n(K)) = n$  已在 [A15] 中被证明. 在证明中使用的迹公式表明, 每个非零  $A_1(K)$  模是  $K$  上无限维向量空间. 特别重要的是满足  $\dim(\text{gr}(K)/J(M)) = n$  的有限生成左或右  $A_n(K)$  模  $M$  的集合. 这样的模称为完整的 (holonomic), 具有有限性条件, 即每个完全模是 Artin 的, 但其逆不真, 因为 [A43] 给出了循环模是单模的例子  $M = A_n(K)/A_n(K)P$ . 这里  $n$  是任何正整数,  $J(M)$  是一个主理想. 这样, 当  $n > 1$  时,  $M$  是非完全的.

下面给出一类重要的完全模: 若  $P(x) \in K[x]$ , 则有理函数的子环  $K[x, P^{-1}]$  是完全  $A_n(K)$  模. 这被 И. Н. Бернштейн 在 [A3], [A4] 中证明, 其中有一个由等式表示的函数方程:

$$b(s)P(x)^s = \sum s^v Q_v(x, \partial)(P(x)^{s+1}). \quad (\text{A2})$$

这里  $b(s)$  是一个多项式, 具有尽可能小的次数而最高项的系数为 1, 称为  $P$  的 Бернштейн - 佐藤多项式 (Bernstein-Sato polynomial).  $K = \mathbb{C}$  的情形特别有趣. [A27] 证明了  $b(s)$  的根由严格负有理数组成. 亦见 [A6].  $b(s)$  的根与映射  $P: X \rightarrow \mathbb{C}^*$  在  $X = \mathbb{C}^n \setminus P^{-1}(0)$  中的单值作用有关, 这里假定零是  $P$  仅有的临界值. [A31] 证明了并  $\{e^{-2\pi i \alpha}: \alpha \in b^{-1}(0)\}$  等于  $\mathbb{C}^n \setminus P$  在每个维数下的单值本征值的并. Бернштейн 函数方程给出了广义函数的亚纯延拓. 存在亚纯  $\mathcal{D}b(\mathbb{C}^n)$  值函数  $\mu_s = \int |P|^{2s}$ , 其极点含于集合  $\{\bigcup (\alpha - v): \alpha \in b^{-1}(0), v \in \mathbb{N}\}$  内.  $b$  函数的根给出确定极点集一个有效方法, 即对  $b(s)$  的任何根  $\alpha$ , 存在某个  $v \in \mathbb{N}$ , 使得  $\alpha - v$  是  $\mu_s$  的极点. 这已在 [A1] 中证明.

**基本解.** 设  $P(D)$  是常系数微分算子. 利用 Fourier 变换, 并用  $\mathbb{R}^n$  代替  $\mathbb{C}^n$  存在,  $\mathcal{D}b(\mathbb{R}^n)$  值函数  $\mu_s$ , 在检验型  $\varphi(x)$  上的作用为

$$\langle \mu_s, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} P(\xi)^{-1} |P(\xi)|^{2s} \hat{\varphi} d\xi,$$

取  $s = 0$ , 常数项  $\mu_0$  给出  $P(D)$  的一个基本解 (fundamental solution). 利用正则完全模的结果, 可以证明当多项式是齐次时,  $\mu_0$  的解析波前集等于它的  $\mathbb{C}^\infty$  波前集. 关于 Fourier 变换和带多项式系数的  $D$  模的进一步结果见 [A32] (亦见  $D$  模 ( $D$ -module)).

Weyl 代数是奇代数簇上微分算子环的特殊情

形. 在详细研究 Weyl 代数之前建立的这一结构见 [A36] 和 [A20].

但  $A_n(K)$  在代数  $D$  模理论中是基本的. 因为  $\mathbb{C}$  上任何拟射影流形  $X$  在 Zariski 拓扑 (Zariski topology) 中被仿射流形  $V$  给出的图所覆盖, 而  $V$  存在一个到  $\mathbb{C}^n \setminus T$  上的非分歧覆盖映射, 这里  $n = d_X$ ,  $T \subset \mathbb{C}^n$  是一个代数超曲面.  $V$  上正则函数的仿射代数  $\mathcal{O}(V)$  上的微分算子环等于  $\mathcal{O}(V) \otimes_{\mathbb{C}[x]} A_n(\mathbb{C})$ . 关于代数  $D$  模的理论见 [A9].

**Fuchs 滤过.** 如上, 考虑  $A_n(K)$  的由微分算子通常的次数所定义的滤过. Weyl 代数可以被赋予其他滤过, 它们不再是肯定的. 令  $X = \mathbb{C}^{n+1}$ ,  $x_1, \dots, x_n$ ,  $t$  为坐标, 取超平面  $\{t = 0\}$  和  $A_{n+1}(\mathbb{C})$  的滤过, 使得  $\deg(t) = -1$ ,  $\deg(\partial/\partial t) = 1$ , 而对每个  $v$ ,  $x_v$  和  $\partial/\partial x_v$  的次数为零. 相伴分次环是  $A_{n+1}(\mathbb{C})$ . Fuchs 滤过的相伴 Rees 环是 Noether 的, 它的整体同调维数是  $(2n+1)$ . 这个环本身有意义, 并出现在大量的环类中 ([A41]). Fuchs 滤过被改进用于研究准消没闭链 (vanishing cycle). 若  $M$  是完全  $A_{n+1}(\mathbb{C})$  模, 则关于 Fuchs 滤过存在唯一好滤过  $V(M)$ , 使得  $\bigoplus V_k(M)/V_{k-1}(M)$  上的 Euler 映射的极小多项式在格  $\{0 \leq \text{Re}(\lambda) < 1\}$  中有根. 这称为 柏原 - Malgrange 滤过 (Kashiwara-Malgrange filtration). 每个齐次商  $V_k(M)/V_{k-1}(M)$  是变量为  $x$  的  $n$  维 Weyl 代数上的完全模. 当  $M$  是正则完全的并应用 Riemann-Hilbert 对应, 可以证明  $V_0(M)/V_{-1}(M)$  的 de Rham 复形是由  $M$  的 de Rham 复形定义的异常层复形沿  $\{t = 0\}$  的准闭链. 进一步详情见 [A16].

还要提及 Weyl 代数的 Бернштейн 滤过 (Bernstein filtration), 此时  $x_v$  和  $\partial_v$  的次数都是  $+1$ . 对  $n = 1$ , [A44] 含有对  $K[x, y]$  中由  $A_1(K)$  左理想中元素的主象征生成的分次理想一个描述, 利用 Бернштейн 滤过将  $K[x, y]$  等同于  $\text{gr}(A_1(K))$ .

存在系数在环上的 Weyl 代数, 即对任何环  $R$  存在环  $A_n(R) = A_n(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$ . 当  $R$  非交换时可能发生新情况. [A19] 的工作表明, 如果  $D$  是由分式域  $D_1(K)$  给出的除环, 则环  $A_1(D)$  的整体维数为 2. 除环上 Weyl 代数的进一步结果见 [A18]. 如果  $R$  是交换 Noether 的正则  $\mathbb{Q}$  代数, 则有

$$\text{gl. dim}(A_n(R)) = n + \text{gl. dim}(R).$$

有关这一结果及各种扩张见 [A6] 和 [A17], 其他类型微分算子环的整体维数亦可计算. 如果  $S$  是一个非交换  $\mathbb{Q}$  代数, 带有一个 Zariski 滤过, 使得  $\text{gr}(S)$  是交换正则 Noether 环, 则可构造  $A_1(S) = A_1(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} S$ .  $\text{gl. dim}(A_1(S)) = \text{gl. dim}(S) + 1$  是否成立,

尚未解决. [A13] 的工作包含一个结果, 预示  $A_1(S)$  上分次模的分次数, 这里  $A_1(S)$  上的分次环结构由  $A_1(\mathbf{Q})$  的 Fuchs 分次结构导出.

出现 Weyl 代数的另一领域是不变量理论. [A29] 证明了若  $G$  是  $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  上的有限自同构群, 不含任何不同于恒等映射的伪反射, 则  $\mathbf{C}[x]$  中  $G$  不变子环上的微分算子环等于  $G$  不变子环  $\text{pf } A_n(\mathbf{C})$ . 此外,  $A_n(\mathbf{C})^G$  是内射维数为  $n$  的 Auslander-Gorenstein 环. 这意味着同时作为左和右模, 由环  $A_n(\mathbf{C})^G$  给出的双模有长为  $n$  的内射分解, 并且 Auslander 条件 (Auslander condition):

$$\text{Ext}_A^v(N, \text{Ext}_A^k(M, A))$$

对所有  $v < k$  和  $N \subset \text{Ext}_A^k(M, A)$  成立,

这里  $A = A_n(\mathbf{C})^G$ ,  $M$  是任意有限生成  $A$  模. 这一条件起先对广泛的滤环类, 包括 Weyl 代数得到验证 [A39]. 微分算子环的与不变量理论有关的更多事实见 [A30].

**Noether 算子.** 在交换代数中 Weyl 代数用来借助素根的方程描述准素理想. 设  $\mathfrak{q} \subset \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  是准素理想 (primary ideal), 令  $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$ , 则存在  $A_n(\mathbf{C})$  中的有限集  $Q_1, \dots, Q_s$ , 使得对每个  $v$ ,  $Q_v(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{p}$ . 反之, 设  $P \in \mathbf{C}[x]$ , 使得对每个  $v$ ,  $Q_v(P) \in \mathfrak{p}$ , 则  $P \in \mathfrak{q}$ . 这样  $\mathbf{C}[x]/\mathfrak{q}$  成为  $\mathbf{C}[x]/\mathfrak{p}$  的直和的一个子模. 这一事实由 Ehrenpreis 用于由指数解上的绝对收敛积分表示齐次偏微分方程组的解的基本原理. 见 [A23], 其中包含 Noether 算子的结构.

**包络代数.** 如果  $\mathfrak{g}$  是一个 Heisenberg 代数 (Heisenberg algebra), 即带有 1 维中心  $\mathfrak{c}$  的有限维幂零 Lie 代数, 且  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{c}$ , 则  $A_n(K)$  是  $\mathfrak{g}$  上包络代数的商环. 因而  $A_n(K)$  模给出  $\mathfrak{g}$  的表示, 当  $K$  的特征为零时, 表示是无限维的. 这方面见 [A11]. 半单 Lie 代数的包络代数对本原理理想的商环导致更为复杂的结果. Weyl 代数  $A_1(K)$  出现在  $U(\mathfrak{g})/(Q - \lambda)$  的研究中, 这里  $\mathfrak{g} = (2, \mathbf{C})$ ,  $Q$  是 Casimir 算子,  $\lambda \in \mathbf{C}$ . 这个环是  $A_1(\mathbf{C})$  的子环. 见 [A38], [A39]. [A12] 提出涉及 [A11] 的半单元素的几个问题. 在某些情况下的肯定答案及与多变量 Weyl 代数有关的问题见 [A24]. 最后要提到 [A2] 的基本结果, 这对于应用代数  $D$  模理论到 Lie 代数的表示理论是关键性的. 亦见 [A25]. 这就引起了对 Weyl 代数和相关的环如 [A10] 中确定的射影空间  $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$  上的微分算子环的特殊的兴趣. 对于与 Lie 代数的表示理论有关的  $D$  模理论, 亦见 [A21].

#### 参考文献

[A1] Barlet, D., Monodromic et pôles de  $\int |f|^{2\lambda}$ , *Bull.*

*Soc. Math. France*, **114** (1986), 247 – 269.

- [A2] Beilinson, A. A. and Bernstein, J., Localisation des  $\mathfrak{g}$ -modules, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **292** (1981), 15 – 18.
- [A3] Bernstein, I. N., Modules over a ring of differential operators. Study of the fundamental solutions to equations with constant coefficients, *Funct. Anal. Appl.*, **5** (1971), 2, 89 – 101. (*Funkts. Anal. i Prilozh.*, **5** (1971), 2, 1 – 16)
- [A4] Bernstein, I. N., The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, *Funct. Anal. Appl.*, **6** (1972), 4, 273 – 285. (*Funkts. Anal. i Prilozh.*, **6** (1972), 4, 3 – 25).
- [A5] Bien, F.,  $D$ -modules and spherical representations of symmetric spaces, Princeton Univ. Press, 1986.
- [A6] Björk, J.-E., Rings of differential operators, North-Holland, 1979.
- [A7] Björk, J.-E., The global homological dimension of some algebras of differential operators, *Invent. Math.*, **17** (1972), 67 – 78.
- [A8] Björk, J.-E., Non-commutative Noetherian rings and their use in homological algebra, *J. Pure Appl. Algebra*, **38** (1985), 111 – 119.
- [A9] Borel, A., et al., Algebraic  $D$ -modules, Acad. Press, 1987.
- [A10A] Borho, W. and Brylinski, J.-L., Differential operators on homogeneous spaces, I, *Invent. Math.*, **69** (1982), 437 – 476.
- [A10B] Borho, W. and Brylinski, J.-L., Differential operators on homogeneous spaces II, *Invent. Math.*, **80** (1985), 1 – 68.
- [A11] Dixmier, J., Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974.
- [A12] Dixmier, J., Sur les algèbres de Weyl II, *Bull. Sci. Math.*, **94** (1970), 289 – 301.
- [A13] Ekström, E. K., Homological properties of some Weyl algebra extensions, *Compositio Math.*, **75** (1989), 231 – 246.
- [A14] Gabber, O., The integrability of the characteristic variety, *Amer. J. Math.*, **103** (1981), 445 – 468.
- [A15] Gabriel, P. and Rentschler, R., Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **265** (1967), A712 – A715.
- [A16] Ginsburg, V., Characteristic varieties and vanishing cycles, *Invent. Math.*, **84** (1986), 327 – 403.
- [A17] Goodearl, K. R. and Warfield, R. B., Jr., Krull dimension of differential operator rings, *Proc. London Math. Soc.*, **45** (1982), 49 – 70.
- [A18] Goodearl, K. R., Hodges, T. J. and Lenagan, T. H., Krull and global dimensions of Weyl algebras over division rings, *J. Algebra*, **91** (1984), 334 – 359.
- [A19] Hart, R., A note on tensor products of algebras,



- J. Algebra*, **21** (1972), 422 – 427.
- [A20] Hochschild, G., Kostant, B. and Rosenberg, B., Differential forms on regular affine algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **102** (1962), 383 – 408.
- [A21] Hotta, R. and Kashiwara, M., The invariant system on a semi-simple Lie algebra, *Inv. Math.*, **75** (1984), 327 – 358.
- [A22] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, I, Springer, 1983.
- [A23] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1990.
- [A24] Joseph, A., The Weyl algebra-semisimple and nilpotent elements, *Amer. J. Math.*, **97** (1975), 597 – 615.
- [A25] Joseph, A., Primitive ideals in enveloping algebras, in Proc. Internat. Congress Mathem. (Warsaw, 1983), Vol. 1, PWN & North-Holland, 1984, 403 – 414.
- [A26] Kashiwara, M., A study of over-determined systems, Kyoto University, 1970. Thesis.
- [A27] Kashiwara, M.,  $b$ -functions and holonomic systems, *Inv. Math.*, **38** (1975), 121 – 135.
- [A28] Kashiwara, M., Regular holonomic  $D$ -modules and distributions on complex manifolds, in T. Suwa and P. Wagsreich (eds), Complex Analytic singularities, Adv. Studies in Math., Vol. 8, Kinokuriya & North-Holland, 1987, 199 – 206.
- [A29] Levasseur, T., Anneaux d'opérateurs différentiels, in M. P. Malliavin (ed.), Sem. P. Dubreil et M. P. Malliavin, Lecture notes in math., Vol. 867, Springer, 157 – 173.
- [A30] Levasseur, T. and Stafford, J. T., Rings of differential operators on classical rings of invariants, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **41** (1989).
- [A31] Malgrange, B., Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescence, *Asterisque*, 101 – 102 (1983), 243 – 267.
- [A32] Malgrange, B., Equations différentielles à coefficients polynomiaux, Birkhäuser, 1991.
- [A33] McConnell, J. C. and Robson, J. C., Noncommutative Noetherian rings, Wiley, 1987.
- [A34] Revoy, P., Algèbres de Weyl en caractéristique  $p$ , *C. R. Acad. Sci. Paris*, **276** (1973), 225 – 228.
- [A35] Rinehart, G. S., Note on the global dimension of a certain ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1963), 195 – 222.
- [A36] Rinehart, G. S., Differential forms on general commutative algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103** (1963), 195 – 222.
- [A37] Roos, J.-E., Détermination de la dimension homologique globale des algèbres de Weyl, *C. R. Acad. Sci. Paris* **274** (1972), A23 – A26.
- [A38] Roos, J.-E., Propriétés homologiques des quotients primitifs des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semisimples, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **276** (1973), 351 – 354.
- [A39] Roos, J.-E., Complements, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **276** (1973), 447 – 450.
- [A40] Sato, M., Kashiwara, M. and Kawai, T., Hyperfunctions and pseudo-differential equations, in H. Komatsu (ed), Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, Lecture notes in math., Vol. 287, Springer, 1973, 265 – 529.
- [A41] Smith, S. P., Differential operators in commutative algebras, in Lecture notes in math., Vol. 1197, Springer, 1986, 165 – 177.
- [A42] Stafford, J. L., Non-holonomic modules over Weyl algebras and enveloping algebras, *Inv. Math.*, **79** (1985), 619 – 638.
- [A43] Stafford, J. L., Module structure over Weyl algebras, Leeds Univ. preprint (1977).
- [A44] Strömbeck, P., On left ideals in  $A_1$  and their associated graded ideals, *J. Algebra*, **55** (1978), 116 – 144.
- [A45] Björk, J.-E., Analytic  $D$ -modules, Kluwer, 1993.  
J.-E. Björk 撰 蔡传仁 译

### Weyl 殆周期函数 [Weyl almost-periodic functions; Вейля почти периодические функции]

复值函数类  $W^p$ , 其中的函数  $f(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) 在实轴的任意有限区间上  $p$  次幂可积, 而且对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $l = l(\varepsilon, f)$  使得  $f$  有一个相对稠密的  $\varepsilon$  殆周期 (almost-period) 集  $S_l^p$ . 这一函数类是由 H. Weyl 定义的. Weyl 殆周期函数类  $W^p$  是 Степанов 殆周期函数 (Stepanov almost-periodic functions) 类的推广.

与 Weyl 殆周期函数联系在一起的度量是

$$D_{W^p}(f, g) = \left\{ \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} |f(t) - g(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

如果  $\varphi$  是一个关于度量  $D_{W^p}$  的零函数, 即

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sup_x \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} |\varphi(t)|^p dt = 0,$$

$f$  是一个 Степанов 殆周期函数, 则

$$f + \varphi \quad (*)$$

是 Weyl 殆周期函数. 但存在 Weyl 殆周期函数不能表成形式 (\*); 参见 [3].

### 参考文献

- [1] Weyl, H., Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen, *Math. Ann.*, **97** (1927), 338 – 356.

[2] Левитан, Б. М., Почти периодические функции, М., 1953 (中译本: Б. М. 列维坦, 概周期函数, 高等教育出版社, 1956).

[3] Левитан, Б. М., Степанов, В. В., «Докл. АН СССР», 22 (1939), 229 - 232.

Е. А. Бредихина 撰 朱学贤 译

### Weyl 联络 [Weyl connection; Вейля связность]

Riemann 空间 (Riemannian space)  $M$  上的一个无挠仿射联络 (affine connection), 它是 Levi-Civita 联络 (Levi-Civita connection) 的推广, 空间  $M$  的度量张量  $g_{ij}$  的共变微分 (covariant differential) 不再为 0, 而是与  $g_{ij}$  成比例. 若  $M$  上的仿射联络由局部联络形式方阵给出:

$$\begin{cases} \omega^i = \Gamma_k^i(x) dx^k, \det |\Gamma_k^i| \neq 0 \\ \omega_j^i = \Gamma_{jk}^i(x) \omega^k, \end{cases} \quad (1)$$

且  $ds^2 = g_{ij} \omega^i \omega^j$ , 则它是 Weyl 联络的必要和充分条件为

$$dg_{ij} = g_{kj} \omega_i^k + g_{ik} \omega_j^k + \theta g_{ij}. \quad (2)$$

等价地, 此条件的另一种形式是

$$\begin{aligned} Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle + \\ &+ \theta(Z) \langle X, Y \rangle, \end{aligned}$$

其中  $\nabla_Z X$  表示  $X$  关于  $Z$  的共变导数 (covariant derivative), 其定义如下:

$$\omega^i(\nabla_Z X) = Z \omega^i(X) + \omega_k^i(Z) \omega^k(X).$$

关于局部正交标架场, 有  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , 下列方程成立:

$$\omega_i^j + \omega_j^i + \delta_j^i \theta = 0,$$

即任何和乐群 (holonomy group) 为相似群或其子群的无挠仿射联络, 都是  $M$  上某个 Riemann 度量的 Weyl 联络.

若在 (1) 中,  $\omega^i = dx^i$ , 则对 Weyl 联络, 有

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{il} \left[ \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right] + \\ &- \frac{1}{2} g^{il} g_{jk} \theta_l + \frac{1}{2} (\delta_j^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_j), \end{aligned}$$

其中  $\theta = \theta_k dx^k$ . 因为

$$g_{kj} \Omega_i^k + g_{ik} \Omega_j^k + g_{ij} d\theta = 0,$$

所以下列被 H. Weyl 称为 方向曲率张量 (directional curvature tensor) 的张量

$$F_{ij,kl} = g_{im} R_{jkl}^m + \frac{1}{2} g_{ij} (\nabla_k \theta_l - \nabla_l \theta_k)$$

关于其两对指标是反对称的:

$$F_{ij,kl} + F_{ji,kl} = 0.$$

Weyl 联络是由 H. Weyl ([1]) 引入的.

### 参考文献

[1] Weyl, H., Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Z., 2 (1918), 384 - 411.

[2] Норден, А. П., Пространства аффинной связности, М.-Л., 1950.

[3] Folland, G. B., Weyl manifolds, J. Differential Geom., 4 (1970), 145 - 153.

Ю. Г. Лумисте 撰 沈纯理 译

### Weyl 准则 [Weyl criterion; Вейля критерий]

用来解决任何实数  $x_n$  模 1 的无穷序列  $(x_n)$  的一致分布 (uniform distribution) 问题的基本判别法则, 亦即要确立极限

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{\substack{n \leq N \\ \alpha \leq \{x_n\} < \beta}} \frac{1}{N} \right) = \beta - \alpha$$

的存在性, 此处  $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ , 且  $\{x_n\}$  是  $x_n$  的分数部分 (见分数部分 (fractional part)). 依据 Weyl 准则, 当且仅当对所有的整数  $m \neq 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp(2\pi i m x_n) = 0$$

时, 序列  $(x_n)$  一致分布. 它是 H. Weyl 在 1916 年证明的 (见 Weyl 法 (Weyl method)).

### 参考文献

[1] Cassels, J. W. S., An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ. Press, 1957.

Б. М. Бредихин 撰 朱尧辰 译 戚鸣皋 校

### Weyl 群 [Weyl group; Вейля группа]

1) 根系 (root system) 的对称的 Weyl 群 (Weyl group of symmetries). 根据根系的实际实现, 考虑不同的 Weyl 群: 半单可分裂 Lie 代数的 Weyl 群, 对称空间的 Weyl 群, 代数群的 Weyl 群等等.

设  $G$  是定义在代数闭域  $k$  上的连通仿射代数群 (algebraic group). 作为  $T$  的用  $N_G(T)$  的元素作共轭所诱导的  $T$  的自同构群,  $G$  关于环面  $T \subset G$  的 Weyl 群是商群

$$W(T, G) = N_G(T) / Z_G(T),$$

其中  $N_G(T)$  是正规化子 (见子集的正规化子 (normalizer))



lizer of a subset)),  $Z_G(T)$  是  $T$  在  $G$  内的中心化子 (centralizer). 群  $W(T, G)$  是有限的. 如果  $T_0$  是极大环面,  $W(T_0, G)$  就称为代数群  $G$  的 Weyl 群 (Weyl group of the algebraic group). (除了相差一个同构外) 这个定义不依赖于极大环面  $T_0$  的选取. 通过  $N_G(T_0)$  在  $G$  的含  $T_0$  的 Borel 子群 (Borel subgroup) 的集合  $B^{T_0}$  上的共轭作用, 诱导了  $W(T_0, G)$  在  $B^{T_0}$  上的单传递作用. 通过  $T$  在  $G$  上的共轭作用, 诱导了  $T$  在  $G$  的 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  上的伴随作用. 设  $\Phi(T, G)$  是  $\mathfrak{g}$  关于这个作用的权分解的非零权集, 这说明  $\Phi(T, G)$  是  $\mathfrak{g}$  关于  $T$  的根系, 见 Lie 代数表示的权 (weight of a representation of a Lie algebra).  $\Phi(T, G)$  是环面  $T$  的有理特征标的群  $X(T)$  的子集, 且它关于  $W(T, G)$  在  $X(T)$  上的作用是不变的.

设  $G$  是约化群 (reductive group),  $Z(G)^0$  是它的中心的恒等元的连通分支,  $T_0$  是  $G$  的极大环面. 向量空间

$$X(T_0/Z(G)^0)_{\mathbb{Q}} = X(T_0/Z(G)^0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

典范地等同于向量空间

$$X(T_0)_{\mathbb{Q}} = X(T_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

的子空间. 作为  $X(T_0)_{\mathbb{Q}}$  的子集, 集合  $\Phi(T_0, G)$  是  $X(T_0/Z(G)^0)_{\mathbb{Q}}$  中的约化根系, 且  $W(T_0, G)$  在  $X(T_0)_{\mathbb{Q}}$  上的自然作用定义了  $W(T_0, G)$  与根系  $\Phi(T_0, G)$  的 Weyl 群之间的一个同构. 于是  $W(T_0, G)$  展示了约化根系的 Weyl 群的全部性质, 例如它是由反射 (reflection) 生成的.

Tits 系的 Weyl 群是这种情形的推广 (关于它的确切定义见 Tits 系 (Tits system)).

特征零的代数闭域上有限维约化 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  的 Weyl 群 (Weyl group of a finite-dimensional reductive Lie algebra)  $W$  定义为它的伴随群的 Weyl 群.  $W$  在  $\mathfrak{g}$  的 Cartan 子代数  $\mathfrak{p}$  上的伴随作用是  $W$  的一个忠实表示. 看作  $\mathfrak{p}$  中由反射生成的对应的线性群, 群  $W$  通常等同于这个表示的象. “Weyl 群”的概念首先由 H. Weyl 应用在复数域上的有限维半单 Lie 代数这个特殊情形 ([1]). 对任意的有限维可分裂半单 Lie 代数, 也可以把 Weyl 群定义为它的根系的 Weyl 群. 对定义在非代数闭的域上的仿射代数群  $G$ , 可以定义它的相对 Weyl 群: 如果  $T$  是  $G$  的极大  $k$  分裂环面, 看作  $T$  的用  $N_G(T)$  的元素作共轭所诱导的  $T$  的自同构的群, 商群  $N_G(T)/Z_G(T)$  ( $T$  的正规化子模它在  $G$  中的中心化子) 就称为  $G$  的相对 Weyl 群 (relative Weyl group).

对称空间的 Weyl 群, 见对称空间 (symmetric

space). 非紧的实连通半单代数群的 Weyl 群等同于对应的对称空间的 Weyl 群. 关于仿射 Weyl 群见根系 (root system).

#### 参考文献

- [1A] Weyl, H., Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch linearen Transformationen I, *Math. Z.*, **23** (1925), 271 – 309.
- [1B] Weyl, H., Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch linearen Transformationen II, *Math. Z.*, **24** (1925), 328 – 395.
- [2] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969 (第二版: Springer, 1991).
- [3] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962.
- [4] Bourbaki, N., Lie groups and Lie algebras, Elements of mathematics, Hermann, 1975 (译自法文).
- [5A] Borel, A. and Tits, J., Groupes réductifs, *Publ. Math. I. H. E. S.*, **27** (1965), 55 – 150.
- [5B] Borel, A. and Tits, J., Complément à l'article ‘Groupes réductifs’, *Publ. Math. I. H. E. S.*, **41** (1972), 253 – 276.
- [6] Bruhat, F. and Tits, J., Groupes algébriques simples sur un corps local, in T. A. Springer et al. (ed.): Proc. Conf. on Local Fields (Driebergen, 1966), Springer, 1966, 23 – 36.
- [7] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces, Acad. Press, 1962. B. Л. ПЛОТОВ 撰

【补注】仿射 Weyl 群 (affine Weyl group) 是仿射 Kac-Moody 代数 (Kac-Moody algebra) 的 Weyl 群. 可以对任意的 Kac-Moody 代数定义一个 Weyl 群.

作为抽象群, Weyl 群是 Coxeter 群 (Coxeter group).

Weyl 群在表示论中起重要的作用, 见特征标公式 (character formula).

#### 参考文献

- [A1] Tits, J., Reductive groups over local fields, in A. Borel and W. Casselman (eds.) Automorphic Forms, Representations and L-Functions, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 33: 1, Amer. Math. Soc., 1979, 26 – 69.
- [A2] Humphreys, J. E., Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge Univ. Press, 1991.

2) 连通紧 Lie 群  $G$  的 Weyl 群 (Weyl group of a connected compact Lie group) 是商群  $W = N/T$ , 其中  $N$  是  $G$  的极大环面  $T$  在  $G$  中的正规化子. 这个 Weyl 群同构于  $T$  的 Lie 代数  $\mathfrak{t}$  的线性变换的有限群 (这个同构是通过  $N$  在  $\mathfrak{t}$  中的伴随表示来实现的), 并且可以借助于  $G$  的 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  的 (关于  $\mathfrak{t}$ ) 的根系  $\Delta$  来刻画如下: 如果  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  是这个代数的单根系, 它们是实向量空间  $\mathfrak{t}$  上的线性型, 该 Weyl 群是由关于超平面  $\alpha_i(x) = 0$  的反射生成的. 于是  $W$  是根系

$\Delta$  (作为  $\mathfrak{t}$  中的线性群) 的 Weyl 群,  $W$  是传递地作用在  $\Delta$  的所有房 (chamber) 的集合上 (这时它们被称为 Weyl 房 (Weyl chamber)). 值得注意的是在已经研究过的情形,  $N$  一般说来不是  $W$  和  $T$  的半直积.  $G$  的 Weyl 群同构于对应的复半单代数群  $G_c$  的 Weyl 群, 见 Lie 群的复化 (complexification of a Lie group). 叶家琛 译

**Weyl 法** [Weyl method; Вейля метод], 数论中的求得形如

$$S(f) = \sum_{1 \leq x \leq P} e^{2\pi i f(x)}$$

的三角和 (trigonometric sum) 的非平凡估计的一种方法, 其中

$$f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x,$$

而  $\alpha_n, \dots, \alpha_1$  为任意实数. 它是 H. Weyl (见 [1]) 为建立一致分布 (uniform distribution) 的准则而加以研究的, 见 Weyl 准则 (Weyl criterion).

这一方法可表述如下. 用连续取平方来把和式 (1) 取  $\rho_0 = 2^{n-1}$  次幂, 以此来降低多项式  $f(x)$  的次数. 于是第一步有

$$S^2(f) = \sum_{\lambda_1 \neq 0} \sum_x e^{2\pi i (f(x+\lambda_1) - f(x))} + O(P),$$

其中求和取长度  $\ll P$  的区间; 现在

$$f(x + \lambda_1) - f(x) = n\alpha_n \lambda_1 x^{n-1} + \cdots$$

是一个关于  $x$  的  $n-1$  次多项式 (记号  $O(P)$  及  $\ll P$  表示  $P$  的阶之大小). 在第  $n-1$  步可得内层的和为

$$S(\alpha) = \sum_{x=a+1}^{a+P_1} e^{2\pi i \alpha x}, \quad (2)$$

其中  $P_1 \leq P$ ,  $\alpha = n! \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} \alpha_n$ ,  $\lambda_i \neq 0$ . 形如 (2) 的和可用不等式

$$|S(\alpha)| \leq \min \left( P_1, \frac{1}{|\sin \pi \alpha|} \right)$$

进行估计, 所得之估计为

$$\begin{aligned} & |S(f)|^{\rho_0} \leq \\ & \leq P^{\rho_0-1} + P^{\rho_0-n+\epsilon} \sum_{0 < y \leq P^{n-1}} \min \left( P_1, \frac{1}{|\sin \pi y \alpha_n|} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

当  $1/|\sin \pi y \alpha_n|$  与  $P$  相比很小时, 不等式 (3) 给出和式 (1) 的不同的估计. 这些估计式依赖于多项式  $f(x)$  的系数  $\alpha_n$  用有理分数逼近的精确程度.

例. 设

$$\left| \alpha_n - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

那么就有

$$|S(f)| \ll P^{1+\epsilon} q^{\epsilon} \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{q} + \frac{q}{P^n} \right)^{\rho_0}.$$

特别地, 如果

$$P \leq q \leq P^{n-1},$$

那么

$$|S(f)| \ll P^{1-\rho_0+\epsilon}.$$

Weyl 方法对数论中若干重要的问题给出了初步近似的解. 估计式 (3) 及其推论被用来研究多项式  $f(x)$  的模 1 分布 (distribution modulo one). 1919 年 G. H. Hardy 与 J. E. Littlewood 给出了 Waring 问题 (Waring problem) 的解, 这个解就是以 Weyl 方法对和式 (1) 的估计为基础的. 由此他们估计出使方程

$$N = x_1^k + \cdots + x_r^k$$

( $N > 0$  为整数, 诸  $x_i$  也为整数) 可解的  $r = r(k)$  的值, 甚至还给出解数之渐近公式. 把估计式 (3) 推广到并非多项式而是在某种意义上接近多项式的函数  $f(x)$  的情形, 就得到素数分布 (distribution of prime numbers) 论中某些定理的改进 (相邻素数差的估计和不超过  $N$  的素数个数  $\pi(N)$  的渐近公式中的余项之估计).

由 Weyl 方法所得估计之威力不足是由于对于和  $S(f)$  取了很高的幂  $\rho_0$ . J. van der Corput 提出改进的方法来估计和式 (1). 对于积分

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S(f)|^{2b} d\alpha_n \cdots d\alpha_1,$$

当  $b \geq cn^2$  时 ( $c > 0$  为常数,  $n \geq 2$ ), Виноградов 法 (Vinogradov method) 得到了非常精确的上界. 这个估计 (见 Виноградов 均值定理 (Vinogradov theorem about the average)) 可以用来得出 Weyl 和 (1) 的本质全新的估计 (带有简化因子  $P^{-\rho}$ ,  $\rho = c_1 n^2 \ln n$ ;  $c_1 > 0$  为常数), 这一估计不能用 Weyl 方法得到.

#### 参考文献

- [1] Weyl, H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Ann.*, 77 (1916), 313 - 352.
- [2] Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971 (中译本: 伊·马·维诺格拉多夫, 数论中的三角和方法, 越民义译, 数学进展, 1 (1955), 3 - 106).

В. М. Бредихин 撰

#### 【译注】

#### 参考文献

- [B1] 潘承洞、潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 1990 年, 第二十一、二十二章.

张明尧 译 戚鸣皋 校



**Weyl 问题 [Weyl problem; Вейля проблема]**

在球面上给定的具有正曲率的正则度量在三维 Euclid 空间中实现的问题, 即给定度量的正则卵形面的存在问题. 该问题是由 H. Weyl ([1]) 在 1915 年提出的. 1937 年, H. Lewy ([2]) 在解析度量情形下解决了 Weyl 问题: 定义在球面上的具有正曲率的解析度量总可以由三维 Euclid 空间中某个解析曲面来实现. A. Д. Александров ([3]) 关于用凸曲面实现正曲率度量的定理和 A. В. Погорелов 关于具有正则度量的凸曲面的正则性定理给出了 Weyl 问题的完全解. 其结论是: 定义在一个同胚于球面的流形上具有正 Gauss 曲率的  $C^n (n \geq 2)$  类正则度量能用一个至少  $C^{n-1+\alpha} (0 \leq \alpha \leq 1)$  类正则的闭凸曲面来实现. 如果度量是解析的, 则实现曲面也是解析的. Погорелов ([3], 第六章) 在三维 Riemann 曲面的一般情形下提出并解决了 Weyl 问题.

**参考文献**

- [1] Weyl, H., Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement, *Vierteljahrsschrift Naturforsch. Gesell. Zurich*, 3 (1916), 2, 40 – 72.
- [2A] Lewy, H., A priori limitations for solutions of Monge - Ampère equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 37 (1935), 417 – 434.
- [2B] Lewy, H., On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42 (1936), 689 – 692.
- [3] Погорелов, А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969. Е. В. Шикин 撰

**【补注】****参考文献**

- [A1] Schneider, R., Boundary structure and curvature of convex bodies, in J. Tolke and J. M. Wills (eds.): *Contributions to Geometry*, Birkhäuser, 1979, 13 – 59.
- [A2] Nirenberg, L., The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large, *Comm. Pure Appl. Math.*, 6 (1953), 337 – 394.

沈纯理 译

**Weyl 和 [Weyl sum; Вейля сумма]**

形如

$$S(f) = \sum_{1 \leq x \leq P} e^{2\pi i f(x)} \quad (*)$$

的三角和 (trigonometric sum), 其中

$$f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x,$$

而  $\alpha_n, \cdots, \alpha_1$  为任意实数. Weyl 和被用来解决许多熟知的数论问题. 获得和式 (\*) 的非平凡估计的第一个方法是由 H. Weyl 于 1916 年创立的, 见 Weyl

法 (Weyl method). Weyl 和的本质更好的估计是由 И. М. Виноградов 于 1934 年得到的, 他用到他自己关于估计三角和的新方法, 见 Виноградов 法 (Vinogradov method).

Б. М. Бредихин 撰 张明尧 译 戚鸣皋 校

**白噪声 [white noise; белый шум]**

有常值谱密度 (spectral density) 的广义平稳随机过程 (stationary stochastic process)  $X(t)$ . 白噪声的广义相关函数形如  $B(t) = \sigma^2 \delta(t)$ , 其中  $\sigma^2$  是正常数而  $\delta(t)$  是  $\delta$  函数. 白噪声过程被广泛应用于描述有很小相关周期的随机扰动 (例如“热噪声”——导体中由电子的热运动产生的电流强度的脉动). 在白噪声的谱分解

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dz(\lambda)$$

中, 其“基本振动”  $e^{i\lambda t} dz(\lambda)$  在所有频率  $\lambda$  处都有同样的平均强度; 更确切些说, 它们的平均平方振幅是

$$E|dz(\lambda)|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} d\lambda, \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

这个谱分解意味着, 对每一平方可积函数  $\varphi(t)$ ,

$$\langle X, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) X(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) dz(\lambda),$$

其中  $\tilde{\varphi}(\lambda)$  是  $\varphi(t)$  的 Fourier 变换 (Fourier transform); 广义过程  $X = \langle X, \varphi \rangle$  对函数  $\varphi(t)$  的更明显的依赖性可以由一个与  $dz(\lambda)$  同类型的对应随机测度  $d\eta(t)$  来描述 ( $d\eta(t)$  是随机测度  $dz(\lambda)$  的 Fourier 变换), 即

$$\langle X, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d\eta(t).$$

Gauss 白噪声 (Gaussian white noise)  $X(t)$  作为 Brown 运动 (Brownian motion)  $\eta(t)$  的广义导数 ( $X(t) = \eta'(t)$ ), 是构造“受控”于一随机微分方程的随机扩散过程 (diffusion process)  $Y(t)$  的基础:

$$Y'(t) = a(t, Y(t)) + \sigma(t, Y(t))\eta'(t).$$

这方程常常写成微分形式:

$$dY(t) = a(t, Y(t))dt + \sigma(t, Y(t))d\eta(t).$$

涉及白噪声应用的另一类重要模型是描述有平稳随机扰动  $X(t)$  作用于其上的稳定振动系统行为的随机过程  $Y(t)$ , 这时,  $Y(s) (s < t)$  不依赖于  $X(u) (u > t)$ . 这种系统的一个很简单的例子是

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)Y(t) = X(t),$$

其中  $P(z)$  是全部根都在左半平面的多项式; 在阻尼掉“瞬时过程”之后, 过程  $Y(t)$  即由下式给出:

$$Y(t) = \int \frac{1}{P(i\lambda)} dz(\lambda).$$

实际应用中, 在所谓散粒效应 (shot effect) 过程的描述中, 如下形式的白噪声

$$X(t) = \sum_k \delta(t - \tau_k)$$

起着重要的作用 ( $k$  在  $-\infty$  与  $\infty$  之间变动, 而  $\dots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \dots$  构成一 Poisson 过程); 更确切地说,  $X(t)$  是 Poisson 过程  $\eta(t)$  的广义导数. 散弹效应过程本身有如下形式:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} c(t, s) X(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} c(t, s) d\eta(s) \\ &= \sum_k c(t, \tau_k) \end{aligned}$$

其中  $c(t, s)$  是满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c(t, s)|^2 ds < \infty$$

的权函数; 此外, 广义过程  $X = \langle X, \varphi \rangle$  的均值是

$$a(\varphi) = a \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt,$$

其中  $a$  是 Poisson 律的参数 (见上), 而该过程的谱表示

$$X(t) = a + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dz(\lambda)$$

中的随机测度  $dz(\lambda)$  满足

$$E |dz(\lambda)|^2 = \frac{a}{2\pi} d\lambda.$$

#### 参考文献

- [1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, М., 1967 (英译本: Prokhorov, Yu. V., Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969). Ю. А. Розанов 撰

【补注】关于白噪声作为“宽带”噪声 (‘wide bandwidth’ noise) 的极限在物理系统中的应用可见 [A1], 关于有白噪声输入的微分方程与伊藤微积分的随机微分方程之间的关系见 [A2] (亦见伊藤公式 (Itô formula)); 随机微分方程 (stochastic differential equation)). 关于此问题的进一步的信息, 还可见 Стратонович 积分 (Stratonovich integral). 其他重要论题还有, 作为广义随机函数的白噪声分析 ([A3]), 即  $[0, \infty)$  上缓广义函数空间  $\mathcal{S}'$  上的概率 (见白噪声分析 (white noise analysis)), 以及白噪声理论在非线性滤波中的应用 ([A4]), 这里的“白噪声”是用可分 Hilbert 空间的柱集上的有限加性 Gauss 测度来解

释的.

#### 参考文献

- [A1] Kushner, H. J., Approximation and weak convergence methods for random processes, with applications to stochastic systems theory, MIT, 1984.  
[A2] Ikeda, N. and Watanabe, S., Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland / Kodansha, 1988.  
[A3] Hida, T., Brownian motion, Springer, 1980.  
[A4] Kallianpur, G. and Karandikar, R. L., White noise theory of prediction, filtering and smoothing, Gordon & Breach, 1988.  
[A5] Gel'fand, I. M. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, 4, Acad Press, 1964, Chapt III (译自俄文).  
[A6] Hida, T., Kuo, H. H., Pothhoff, J., Streit, L. (eds.), White noise analysis - mathematics and applications, World Scientific, 1990.

潘一民 译

白噪声分析 [white noise analysis; белого шума анализ]

【补注】从本世纪 70 年代初 ([A1] - [A3]), 白噪声分析已发展成为随机与无穷维分析的一个可行的框架 ([A4] - [A6]), 并在许多学科中有着日益增多的应用, 最值得注意的或许是在量子物理学中. 非正式地说, (Gauss, 连续参数) 白噪声 (white noise), 作为一个在每个点都有独立值的广义随机过程 (stochastic process, generalized) ([A7]), 其作用是作为无穷维分析基础的无穷维坐标系统. 更确切地说, 其出发点是白噪声测度的  $L_2$  空间, 然后被嵌入具有适当性质的检验函数以及广义函数空间之间成为 Гельфанд 三元组. 特别是, 检验函数要选得充分光滑, 容许进行无穷维微分运算, 然后由对偶性转移到广义函数. 随着这些的建立, 很多概念自然地推广到无穷维结构. 例如梯度, Laplace 算子 ([A4], 第 6 章), 旋转群 ([A8]), Fourier 分析以及 Dirichlet 型. 下面略述其中的某些内容, 一个完整的介绍可以在 [A4] 中找到.

(Gauss) 白噪声. 这是一个广义随机过程  $\omega$  ([A1], [A7]); 对于任一 Schwartz 检验函数  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ , “被光滑了的”过程  $\langle \omega, f \rangle$  为一 Gauss 随机变量 (random variable)  $X_f$ , 其均值为 0, 协方差为

$$E(X_f X_g) = \int f(t) g(t) dt = (f, g).$$

依据白噪声测度  $\mu$  和它的特征函数  $C$ , 有

$$\begin{aligned} C(f) &= E(e^{i\langle \omega, f \rangle}) = \int d\mu[\omega] e^{i\langle \omega, f \rangle} = \\ &= e^{-(1/2) \int f^2(t) dt}, f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

将检验函数扩充到  $L_2(\mathbf{R})$ , 并注意到由白噪声表示



Wiener 过程

$$B(t) \equiv X(1I_{[0,t]}) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau,$$

可以得到 Wiener 的 **Brown 运动** (Brownian motion) 过程  $B(\cdot)$  的一种形式 ([A1], [A2]). 在此意义下, Brown 泛函可以看作白噪声的泛函. 后者的一大类是有有限方差的, 它们构成 Hilbert 空间

$$(L_2) \equiv L_2(\mathcal{S}^*(\mathbf{R}), d\mu).$$

$X_f (f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}))$  的多项式形成  $(L_2)$  的稠子空间, 因此  $X_f$  的单项式组成一全集; 为了将它们正交化, 引进“正规编序”积, “Wick 编序”积或“Hermite”积

$$: X_{f_1} \cdots X_{f_n} : = (1 - P_{n-1}) X_{f_1} \cdots X_{f_n},$$

其中  $P_n$  是到次数最多为  $n$  的多项式的子空间上的投影. 它们通过下式

$$: X_f^n : = \int f(t_1) \cdots f(t_n) dB(t_1) \cdots dB(t_n),$$

与多重 **Wiener 积分** (Wiener integral) 相联系 ([A9]). 由线性与连续性, 这些表达式可以从乘积核函数  $F^{(n)} = \prod f_i$  扩张到对称  $L_2$  核函数  $F^{(n)}(t_1, \dots, t_n) \in \text{Sy} L_2(\mathbf{R}^n)$ ; 因而可以得到白噪声 Hilbert 空间  $(L_2)$  与一个 Boson-Фок空间之间的同构:

$$(L_2) \simeq \bigoplus_n \text{Sy} L_2(\mathbf{R}^n, n! dt).$$

$(L_2)$  的另一刻画是经由“S 变换”或“T 变换”:

$$T: \Phi \mapsto E(\Phi e^{iX_f}) = (T\Phi)(f),$$

$$S: \Phi \mapsto E(\Phi[\cdot + f]) = (S\Phi)(f).$$

它们通过下式联系起来:

$$\begin{aligned} (S\Phi)(f) &= C(f) \cdot (T\Phi)(-if) \\ &= E(\Phi: e^{X_f}):. \end{aligned}$$

**广义函数.** 上述构造的主要好处在于超越它们去考虑诸如 Brown 运动的“作用积分”  $\int \omega^2(t) dt$ , 或“Donsker  $\delta$  函数”  $\delta(B(t) - a)$  等这样的泛函.

验证一下它们的核函数是否在 Фок空间中, 可以发现第一个例子的核函数  $F^{(n)}$  由  $F^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \delta_{n,2} \delta(t_1 - t_2)$  给出, 它显然不是平方可积的. 第二个例子的  $F^{(n)}$  虽是平方可积的, 但它们的范数并非平方可和. 因此,  $(L_2)$  的一个好的扩张, 应是放宽核函数的  $L_2$  性质及其范数的平方可和性.

扩展 Hilbert 空间的一个标准程序是通过构造 Гельфанд 三元组, 例如像

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset L_2(\mathbf{R}) \subset \mathcal{S}^*(\mathbf{R}),$$

其中  $\mathcal{S}$  定义为 Hilbert 空间的一个可数交:

$$\mathcal{S} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{S}_p, \quad \mathcal{S}_p = D(A^p),$$

$A = -d^2/dt^2 + t^2 + 1$  是  $L_2(\mathbf{R}, dt)$  中的自伴算子. 这里借助于像  $A$  这种算子的二次量子化 (second quantization)  $\Gamma([A10])$ . 它定义为  $(L_2)$  中的一个线性算子, 作用在正规编序单项式上为:

$$\Gamma(A): X_{f_1} \cdots X_{f_n} := X_{Af_1} \cdots X_{Af_n}.$$

现又构造检验泛函空间为算子定义域之交:

$$(\mathcal{S}) = \lim_{\vec{p}} (\mathcal{S})_p, \quad (\mathcal{S})_p = D(\Gamma(A^p)),$$

从而得到 Гельфанд 三元组

$$(\mathcal{S}) \subset (L_2) \subset (\mathcal{S})^*.$$

空间  $(\mathcal{S})$  与  $(\mathcal{S})^*$  的元素分别称为 **飛田检验函数** (或泛函) (Hida test functions (or functionals)) 与 **飛田广义函数** (Hida distribution).

$(\mathcal{S})$  的性质.  $(\mathcal{S})$  是核型的 (见核型空间 (nuclear space)), 且在逐点乘法下为一代数; 对于任一广义函数值方向  $h \in \mathcal{S}^*$ ,  $(\mathcal{S})$  的元素有  $(\mathcal{S})$  中的 **Gâteaux 导数** (Gâteaux derivative)

$$D_h \varphi(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\varphi(\omega + \varepsilon h) - \varphi(\omega)).$$

它们在 Фок空间中的象是湮没算子 (annihilation operators). 特别地, 取  $h$  为 Dirac 广义函数  $\delta_t$ , 其相应导数算子通常表为  $\partial_t$  (飛田导数 (Hida derivative)), 它服从 Bose 子正则对易关系 (Boson CCR)  $[\partial_t, \partial_s] = \delta(t-s)$  以及  $\omega(t) = \partial_t + \partial_t^*$ . 后一关系乃是白噪声分析框架中随机积分的出发点 ([A4] 第 8 章). 考虑随机积分 (stochastic integral)  $\int dB(t) F$ . 利用  $\dot{B}(t) = \omega(t) = \partial_t + \partial_t^*$ , 形式上得到

$$\int dB(t) F = \int dt \omega(t) F = \int dt (\partial_t + \partial_t^*) F.$$

在伊藤积分中, 所作的是向前时间的微分, 因此以  $\partial_{t+0}$  作用在一适应的被积函数  $F$  上得到  $0: \int dB(t) F = \int dt \partial_t^* F$ . 这不仅对伊藤积分提供了可行的途径, 更重要的是把它自然地推广到非适应的被积函数 ([A11]). 此外,  $(\mathcal{S})$  是 Fréchet 可微的 (见 Fréchet 导数 (Fréchet derivative)),  $\nabla: (\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}) \otimes (\mathcal{S})$  由  $(\nabla \varphi)(t, \omega) = \partial_t \varphi(\omega)$  给出. 对于所有的飛田检验函数  $\varphi$ , 有  $D_h \varphi = \langle h, \nabla \varphi \rangle$  及  $\|\nabla \varphi\|_{L_2}^2 \in (\mathcal{S})$ . 每个飛田检验函数  $\varphi$  都有一个有光滑核  $F^{(n)} \in \text{Sy} \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  的修正型

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \sum_n \langle : \omega^{\otimes n} : , F^{(n)} \rangle,$$

并连续地扩张到所有  $\omega \in \mathcal{S}^*(\mathbf{R})$  ([A12]).

飛田广义函数的对偶空间  $(\mathcal{S})^*$  有以下性质: 所

有飛田广义函数都是有限阶的  $((\mathcal{S})^*)^* = \bigcup_{p=1}^{\infty} (\mathcal{S})_{-p}$ ;  $T$  和  $S$  变换可扩张到  $(\mathcal{S})^*$ , 定义为广义函数  $\Phi$  对  $(\mathcal{S})$  中的指数函数的作用:  $(T\Phi)(f) = \langle \Phi, e^{iX_f} \rangle$ ; 任何正的飛田广义函数  $\Phi$  都是一个正测度  $\nu_\Phi$  (Кондратьев, Самойленко 与横井的一个定理 ([A13], [A14])).

飛田广义函数的例子. 1) 局部 Wick 幂 (local Wick power):

$$\Phi(\omega) = : \omega^n(t) :, (S\Phi)(f) = f^n(t).$$

2) Donsker  $\delta$  函数 (Donsker  $\delta$ -function):

$$\Phi = \delta(B(t) - a), \\ (S\Phi)(f) = (2\pi t)^{1/2} e^{(F(t) - a)^2/(2t)},$$

其中  $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ .

3) 白噪声  $\delta$  函数 (white noise  $\delta$ -function)  $\Phi = \delta_\omega$ , 由下式给出:

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \tilde{\varphi}(\omega), (S\Phi)(f) = e^{i\langle \omega, f \rangle} C(f).$$

4) 正规化 Gauss 函数 (normalized Gaussians):

$$\Phi(\omega) = \frac{e^{\langle \omega, K\omega \rangle}}{\mathbf{E}(e^{\langle \omega, K\omega \rangle})},$$

$$(S\Phi)(f) = e^{\langle f, (K/(1-2K))f \rangle}.$$

注意例 4) 的正规化指数  $\Phi(\omega) = N \exp(\langle \omega, K\omega \rangle)$  对于一大类算子  $K$  有完全确定的  $S$  变换, 比单独用来定义 Gauss 型与分母的正规化常数的算子类要大得多. 对于这样的  $K$ , 可以由它的  $S$  变换来定义  $N \exp(\langle \omega, K\omega \rangle)$ . 以其  $S$  或  $T$  变换来描述飛田广义函数是十分有用的. 这之所以可能, 是由于下面的表征定理 (characterization theorem) ([A15]). 如下三个命题是等价的:

a) 设  $F$  是 Schwartz 空间上的复值泛函, 使得对任何  $f \in \mathcal{S}$ : i)  $g(\lambda, f_1, f_2) \equiv F(\lambda f_1 + f_2)$  有一个  $\lambda$  的整解析开拓; ii) 对于某正数  $C_1$  和  $p$  和所有复数  $z$  有如下的上界估计:

$$|F(z, f)| \leq C_1 \exp(C_2 |z|^2 \|A^p f\|_2^2).$$

b)  $F$  是一个飛田广义函数  $\Phi \in (\mathcal{S})^*$  的  $S$  变换.

c)  $F$  是一个飛田广义函数  $\Phi \in (\mathcal{S})^*$  的  $T$  变换.

具有上述性质 a) 的泛函已被称为  $U$  泛函 ( $U$ -functionals). 作为这个定理的一个推论是, 如果其对应的  $U$  泛函序列是一致收敛的, 那么飛田广义函数的序列必定收敛. 类似的定理已被证明对于更一般的 Gauss 系统也成立, 特别涵盖了多参数白噪声或向量值 Brown 运动的广义函数这种有意义的情形

([A16]). 其他变种则处理放宽关于  $U$  泛函的增长条件 a) ii) 的空间 ([A17], [A18]).

显然, 扩充  $(L_2)$  的广义函数空间的构造远非唯一. 其他的例子有由 P. A. Meyer ([A19]), 杉田 ([A21]), 渡边 ([A20]) 研究过的三元组, 它较大的检验函数空间, 从而有较少的广义函数. 还需指出, [A5] 中 P. Krée 的文章有他的原始工作的一个概述与参考文献. 相反地, 由 Meyer 和严加安 ([A18]) 提出的三元组由于去掉了  $U$  泛函的增长条件而达到了一个更大的广义函数空间. 在量子概率 (quantum probability) 文献中讨论的检验泛函空间的例子是 [A22] 的空间  $K = \bigcap_{a>0} D(\Gamma(a\Pi))$ .

表征定理有许多的应用和推论, 例如  $\alpha$ ) 在上面给出的  $S$  变换的诸例中, 易简洁验证其  $U$  泛函性质; 从而这个定理直接保证了这些表示式的确是飛田广义函数的  $S$  变换.  $\beta$ )  $U$  泛函在逐点加法与乘法下显然组成一个代数; 这导致  $(\mathcal{S})^*$  上的两个代数结构, 其相应的广义函数之乘积分别是卷积 (用  $T^{-1}$ ) 和正规编序积 (用  $(S^{-1})$ ).  $\gamma$ ) 在一对飛田变换之间存在如下的线性关系

$$S\Phi = F = T\hat{\Phi}.$$

如果用一个正态分布 (normal distribution) 代替白噪声测度, 可以发现  $\hat{\Phi}$  不是别的, 而是  $\Phi$  的 Fourier 变换 (Fourier transform).

无穷维 Fourier 变换. 见 [A23] ~ [A25], [A4] 第 9 章. 上面的评注建议如下的定义: 对于  $\Phi \in (\mathcal{S})^*$ , 称  $\hat{\Phi} = T^{-1}S\Phi$  为  $\Phi$  的 Fourier 变换 (Fourier transform).

若干例子与性质如下. 1) 的 Fourier 变换是零点处的白噪声  $\delta$  函数:  $\hat{1} = \delta_0$ ,  $\hat{\delta}_0 = 1$ . Fourier 变换把导数与坐标乘法相互关联.

$$(\partial\Phi)^\wedge = i\omega\hat{\Phi}, (\omega\Phi)^\wedge = i\partial\hat{\Phi}.$$

这就是为什么单挑出  $\Phi \rightarrow \hat{\Phi}$  作为 Fourier 变换对无穷维的自然推广的原因: 这是唯一的 (当然除相差一常值乘子外) 从  $(\mathcal{S})^*$  到其自身的具有这个关联性质的连续线性变换 ([A26]).

Dirichlet 型. 见 [A27], [A28], [A4] 第 10 章. 回忆一下正的飛田广义函数必是测度, 对于任何严格正 (即  $\nu_\Phi$  在所有开集上为正) 且使  $\varepsilon$  在  $L_2(d\nu_\Phi)$  为可闭的飛田广义函数  $\Phi$ , 从

$$\varepsilon(\varphi) = \langle \Phi, |\nabla \varphi|^2 \rangle,$$

得到 Dirichlet 型  $\varepsilon$  ([A29] ~ [A31]), 然后对于这样的  $\Phi$ , 在  $L_2(d\nu_\Phi)$  中有

$$\bar{\varepsilon}(\varphi) = \|H^{1/2}\varphi\|^2,$$



其中  $H$  是与一状态空间为  $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$  的扩散过程相联系的 Markov 半群的自伴生成元。

若干应用. 上面是 [A32] 中有限维局部 Dirichlet 型的一个直接推广, 用量子力学基态的语言, 它产生了 Schrödinger Hamilton 算子  $H$  及解非线性随机微分方程的扩散过程. 在现在的构架中, 人们自然会提出这样的问题: 用对白噪声测度  $\mu$  的 (广义) 密度函数, 即经由正的  $\Phi \in (\mathcal{S})^*$ , 是否可以描述相对论的或 Euclid 的量子场论的基态? 以及这些是否满足上述产生 Dirichlet 型的条件? 第一个问题已经用关于  $n$  点函数的 Fröhlich 界以及所谓  $\phi$  界的存在性回答了 ([A33]), 第二个问题则在 [A34] 中就构造性量子场论 (constructive quantum field theory) 的各种模型作出了回答.

白噪声分析在量子物理中另一富于成果的应用是由 Feynman 路径积分提供的. 熟知 Feynman “积分”并不是对测度的积分. 因此不可能希望把它解释为沿轨道的加权平均, 除非允许广义函数值的权. 在 [A35] 中开始试图这样做了, 但仍稍有不严格处. 近来, 给出了若干例子以及判断 Feynman 积分确实是空间  $(\mathcal{S})^*$  中广义函数的作用的一般准则 ([A36]). 这一方法的好处本质上是双重的: 探测这一方法的适用范围 (即可以用这种方式来解决的 Schrödinger 问题的类别), 以及巧妙地运用 Feynman 积分与诸如分部积分这样的白噪声分析的工具, 来求得有用的量子力学的关系 ([A37], [A4] 第 12 章).

关于用白噪声来处理量子概率, 见 [A38]. 随机介质中的流体动力学流在 [A39] 中进行了研究. 白噪声分析技巧应用于解随机偏微分方程的例子见 [A40], [A41].

#### 参考文献

- [A1] Hida, T., Stationary stochastic processes, Princeton Univ. Press, 1970.
- [A2] Hida, T., Brownian motion, Springer, 1980.
- [A3A] Kubo, I., Takenaka, S., Calculus on Gaussian white noise I - II, *Proc. Japan Acad.*, **56** (1980), 376 - 380; 411 - 416.
- [A3B] Kubo, I., Takenaka, S., Calculus on Gaussian white noise III, *Proc. Japan Acad.*, **57** (1981), 433 - 437.
- [A3C] Kubo, I., Takenaka, S., Calculus on Gaussian white noise IV, *Proc. Japan Acad.*, **58** (1982), 186 - 189.
- [A4] Hida, T., Kuo, H.-H., Potthoff, J., Streit, L., White noise-an infinite dimensional calculus, To appear.
- [A5] Hida, T., Kuo, H.-H., Potthoff, J., Streit, L. (eds.): White noise analysis-mathematics and applications, World Scientific, 1990.
- [A6] Kuo, H.-H., Lectures on white noise analysis, *Soochow Math. J.*, (1992).
- [A7] Gel'fand, I. M. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, 4, Acad Press, 1968 (译自俄文).
- [A8] Hida, T., Infinite-dimensional rotation group and unitary group, in H. Heyer (ed.): *Probab. Measures on Groups IX Proc. Oberwolfach 17 - 23 Jan. 1988*, Lecture notes in math., Vol. 1379, Springer, 1989, 125 - 134.
- [A9] Ito, K., Multiple Wiener integral, *J. Math. Soc. Japan*, **3** (1951), 157 - 169.
- [A10] Simon, B., the  $P(\phi)_2$  Euclidean (quantum) field theory, Princeton Univ. Press, 1974.
- [A11] Asch, J., Potthoff, J., Itô's lemma without non-anticipatory conditions, *Probab. Th. Rel. Fields*, **88** (1991), 17 - 46.
- [A12] Kubo, I., Yokoi, Y., A remark on the space of testing random variables in the white noise calculus, *Nagoya Math. J.*, **115** (1989), 139 - 149.
- [A13] Kondratiev, Yu. G. [Yu. G. Kondrat'ev], Samoilenko, Yu. S., Integral representation of generalized positive definite kernels of an infinite number of variables, *Soviet Math. Dokl.*, **17** (1976), 517 - 521 (*Dokl. Acad. Nauk SSSR*, **227** (1976), 4, 800 - 803).
- [A14] Yokoi, Y., Positive generalized white noise functionals, *Hiroshima Math. J.*, **20** (1990), 137 - 157.
- [A15] Potthoff, J., Streit, L., A characterization of Hida distributions, *J. Funkt. Anal.*, **101** (1991), 212 - 229.
- [A16] Streit, L., Westerkamp, W., A generalization of the characterization theorem for generalized functionals of white noise, BiBos Preprint, no. 480 (1991).
- [A17] Kondratiev, Yu. G. [Yu. G. Kondrat'ev], Streit, L., Spaces of white noise distributions. Constructions, descriptions, applications I, BiBos Preprint, no. 510 (To appear in *Rep. Math. Phys.*).
- [A18] Meyer, P. A., Yan, J.-A., Les 'fonctions caractéristiques' des distributions sur l'espace de Wiener, Univ. Strasbourg Preprint (1991).
- [A19] Meyer, P. A., Quelques résultats analytiques sur le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie, in *Theory and Application of Random Fields*, Springer, 1983, 201 - 214.
- [A20] Watanabe, S., Stochastic differential equations and Malliavin calculus, Tata Institute, 1984.
- [A21] Sugita, H., Sobolev spaces of Wiener functionals and Malliavin's calculus, *J. Math. Kyoto Univ.*, **25** (1985), 31 - 48.
- [A22] Lindsay, J. M., Maassen, H., An integral kernel approach to noise, in L. Accardi, W. von Wald-

- enfels (eds.): Quantum Probability and Applications III, Lecture notes in math., Vol. 1303, Springer, 1988, 192 – 208.
- [A23] Kuo, H.-H., The Fourier transform in white noise calculus, *J. Multivariate Anal.*, **31** (1989), 311 – 327.
- [A24] Yan, J.-A., An elementary proof of a theorem of Lee, *Acta Math. Sci.*, **11** (1991), 3, 356 – 360.
- [A25] Lee, Y.-J., Analytic version of test functionals, Fourier transform and a characterization of measures in white noise calculus, *J. Funct. Anal.*, **100** (1991), 359 – 380.
- [A26] Hida, T., Kuo, H.-H., Obata, N., Transformations for white noise functionals, *J. Funct. Anal.* (to appear).
- [A27] Hida, T., Potthoff, J., Streit, L., Dirichlet forms and white noise analysis, *Comm. Math. Phys.*, **116** (1988), 235 – 245.
- [A28] Potthoff, J., Röckner, M., On the contraction property of energy forms on infinite-dimensional spaces, *J. Funct. Anal.*, **92** (1990), 155 – 165.
- [A29] Fukushima, M., Dirichlet forms and Markov processes, Kodansha & North-Holland, 1980.
- [A30] Kusuoka, S., Dirichlet forms and diffusion processes on Banach spaces, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA*, **29** (1982), 79 – 95.
- [A31] Albeverio, S., Röckner, M., New developments in the theory and application of Dirichlet forms, in S. Albeverio, et al. (ed.): Stochastic Processes, Physics and Geometry, World Scientific, 1990, 27 – 76.
- [A32] Albeverio, S., Hoegh-Krohn, R., Streit, L., Energy forms, Hamiltonians and distorted Brownian paths, *J. Math. Phys.*, **18** (1977), 909 – 917.
- [A33] Potthoff, J., Streit, L., Invariant states on random and quantum field:  $\varphi$ -bounds and white noise analysis, *J. Funct. Anal.* (To appear).
- [A34] Albeverio, S., Hida, T., Potthoff, J., Röckner, M., Streit, L., Dirichlet forms in terms of white noise analysis: I, II, *Rev. Math. Phys.*, **1** (1990), 291 – 312; 313 – 323.
- [A35] Hida, T., Streit, L., Generalized Brownian functionals and the Feynman integral, *Stoch. Proc. Appl.*, **16** (1983), 55 – 69.
- [A36] de Faria, M., Potthoff, J., Streit, L., The Feynman integrand as a Hida distribution, *J. Math. Phys.*, **32** (1991), 2123 – 2127.
- [A37] Khandekar, D. C., Streit, L., Constructing the Feynman integrand, *Ann. Physik*, **1** (1992), 49.
- [A38] Huang, Zh., Quantum white noises-white noise approach to quantum stochastic calculus, Preprint Wuhan University.
- [A39] Lindstrom, T., Oksendal, B., et al., Dynamical

systems in random media: a white noise functional approach, Preprint, Oslo (1990).

- [A40] Chow, P. L., Generalized solution of some parabolic equations with a random drift, *J. Appl. Math. Optimization*, **20** (1989), 81 – 96.

- [A41] Cochran, C., Potthoff, J., Fixed point principles for stochastic partial differential equations, LSU preprint (1992).

L. Streit 撰

#### 【译注】

#### 参考文献

- [B1] 黄志远, 严加安, 无穷维随机分析引论, 科学出版社, 1997.

潘一民 译

#### Whitehead 群 [Whitehead group; Уайтхеда группа]

用下列方式与一个结合环相联系的 Abel 群. 它是由 J. H. C. Whitehead ([1]) 引进的. 设  $A$  为一个有单位元的结合环, 并令  $GL(n, A)$  为  $A$  上可逆 ( $n \times n$ ) 矩阵的群. 则有自然嵌入

$$GL(1, A) \subset \cdots \subset GL(n, A) \subset \cdots;$$

这里  $g \in GL(n, A)$  变成

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1, A);$$

并令  $GL(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} GL(i, A)$ . 与单位矩阵只在非对角线上某一位置处有不同元素的矩阵叫做初等矩阵 (elementary matrix). 由所有初等矩阵生成的子群  $E(A) \subset GL(A)$  与  $GL(A)$  的换位子群重合. 换位子商群  $K_1 A = GL(A)/E(A)$  叫做环  $A$  的 Whitehead 群 (Whitehead group of the ring). 设  $[-1] \in K_1 A$  为与矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

相对应的元素, 它的次数为 2. 商群  $\bar{K}_1(A) = K_1 A / \{0, [-1]\}$  称为环  $A$  的约化 Whitehead 群 (reduced Whitehead group of the ring).

设  $\Pi$  为一个乘法群, 而  $Z[\Pi]$  为它在  $Z$  上的群环. 由包含关系  $\Pi \subset GL(1, Z[\Pi])$  得到自然同态  $j: \Pi \rightarrow \bar{K}_1 Z[\Pi]$ . 商群  $Wh(\Pi) = \bar{K}_1(\Pi) / j(\Pi)$  叫作群  $\Pi$  的 Whitehead 群 (Whitehead group of the group).

对于群同态  $f: \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ , 有一个自然的诱导同态  $Wh(f): Wh(\Pi_1) \rightarrow Wh(\Pi_2)$ , 使对  $g: \Pi_2 \rightarrow \Pi_3$  有  $Wh(g \circ f) = Wh(g) \circ Wh(f)$ . 于是  $Wh$  就是一个由群范畴到 Abel 群范畴的共变函子. 如果  $f: \Pi \rightarrow \Pi$  是一个内自同构, 则  $Wh(f) = id_{Wh(\Pi)}$ .

一个空间的基本群的 Whitehead 群与基点的选取



无关, 它对于定义映射的一个重要不变量, ——Whitehead 挠率 (Whitehead torsion) 是本质的.

## 参考文献

- [1] Whitehead, J. H. C., Simple homotopy types, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 1 - 57.  
 [2] Milnor, J. W., Whitehead torsion, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 358 - 426.  
 [3] Milnor, J. W., Introduction to algebraic K-theory, Princeton Univ. Press, 1971.

【补注】 如果  $A$  是可交换的, 则其行列式, 因而, 特殊的线性群  $SL(n, A)$  都是可定义的. 用它们来代替  $GL(n, A)$ , 就得到特殊 Whitehead 群 (special Whitehead group)  $SK_1(A)$ . 有  $K_1(A) = U(A) \oplus SK_1(A)$ , 这里  $U(A)$  是  $A$  中的单位构成的群. 周伯坝 译

### Whitehead 同态 [Whitehead homomorphism; Уайтхеда гомоморфизм], $J$ 同态 ( $J$ -homomorphism)

以一种特殊方式定义的, 从  $SO$  的谱的稳定同伦群 (stable homotopy group) 到球  $S^0$  的谱的稳定同伦群的同态. Whitehead 同态一种定义方法是用 Hopf 构造: 映射  $\varphi: S^m \rightarrow SO(q)$  决定了一个映射  $(J\varphi): S^m \times S^{q-1} \rightarrow S^{q-1}$ , 后者可扩充为映射  $J\varphi: S^m \times E^q \rightarrow E^q$ ,  $E^q$  为  $S^q$  的上半球面. 还有另一个扩充  $J\varphi: E^{m+1} \times S^{q-1} \rightarrow E^q$ ,  $E^q$  是  $S^q$  的下半球面. 这两个扩充决定了一个映射  $J\varphi: S^{m+q} \rightarrow S^q$ . 因而得到一个同伦类. 这样就有一个同态  $J: \pi_m^s(SO) \rightarrow \pi_m^s(S^0)$ , 称为 Whitehead 同态 (Whitehead homomorphism).

这个同态是由 G. W. Whitehead ([1]) 首先构造出来的, 在 [1] 中他还证明: 对下面的 (有无穷多个)  $n$  和  $r$ : 球面“同伦群” $\pi_n(S^r) \neq 0$ .

$n$	14	14	$8k$	$16k+2$	$8k+1$	$16k+3$
$r$	7	4	$4k$	$8k$	$4k+1$	$8k+1$

稳定同伦群  $\pi_m^s(SO)$  由 Bott 周期性定理 (Bott periodicity theorem) ([2]) 描述:

$m \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_m^s(SO)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

Whitehead 同态的象已经全计算出来了 (见 [4], [5]): 当  $m > 0$  且  $m \equiv 0 \pmod{8}$  时, Whitehead 同态是单态射, 它的象是群  $\pi_m^s(S^0)$  中的一个直和因子; 当  $m > 1$  且  $m \equiv 1 \pmod{8}$  时, Whitehead 同态是到  $\pi_m^s(S^0)$  的一个直和因子的单态射; 当  $m = 4s - 1$  时, Whitehead 同态的象是阶为  $\tau(2s)$  的循环群, 它也是  $\pi_m^s(S^0)$  的直和因子, 其中  $\tau(2s)$  是不可约分数  $B_s/(4s)$  的分母,  $B_s$  是第  $s$  个 Bernoulli 数 (Bernoulli numbers).

## 参考文献

- [1A] Whitehead, G. W., On the homotopy groups of spheres and rotation groups, *Ann. of Math.*, **43** (1942), 634 - 640.  
 [1B] Whitehead, G. W., A generalization of the Hopf invariant, *Ann. of Math.*, **51** (1950), 192 - 237.  
 [2] Bott, R., The stable homotopy of the classical groups, *Ann. of Math.*, **70** (1959), 313 - 337.  
 [3A] Adams, J. F., On the groups  $J(X) - I$ , *Topology*, **2** (1963), 181 - 195.  
 [3B] Adams, J. F., On the groups  $J(X) - II$ , *Topology*, **3** (1965), 137 - 171.  
 [3C] Adams, J. F., On the groups  $J(X) - III$ , *Topology*, **3** (1965), 193 - 222.  
 [3D] Adams, J. F., On the groups  $J(X) - IV$ , *Topology*, **5** (1966), 21 - 71.  
 [4] Becker, J. C. and Gottlieb, D. H., The transfer map and fiber bundles, *Topology*, **14** (1975), 1 - 12.  
 [5] Adams, J. F., Infinite loop spaces, Princeton Univ. Press, 1978.

A. B. Шокуров 撰

【补注】 给定拓扑空间之间的映射  $f: X \times Y \rightarrow Z$ , 一般地有一个 Hopf 构造 (Hopf construction), 它给出映射

$$\Gamma f: X * Y \rightarrow SZ,$$

其中  $X * Y$  是  $X$  和  $Y$  的联接,  $SZ$  是  $Z$  的纬垂 (suspension). 考虑

$$f \times \text{id}: X \times Y \times I \rightarrow Z \times I$$

$$(x, y, t) \mapsto (f(x, y), t).$$

联接  $X * Y$  是  $X \times Y \times I$  的某种商空间,  $SZ$  是  $Z \times I$  的商空间. 很容易验证  $f \times \text{id}$  把等价的点映为等价的点, 因而得到所要的  $\Gamma f$ . 注意  $S^m * S^n \cong S^{m+n}$ , 见联接 (join).

令  $\varphi: S^m \rightarrow SO(q)$  为一个映射,  $SO(q)$  的每个元素诱导出一个映射  $S^{q-1} \rightarrow S^{q-1}$ , 因此  $\varphi$  诱导出映射

$$\tilde{\varphi}: S^m \times S^{q-1} \rightarrow S^{q-1}.$$

对  $\tilde{\varphi}$  应用 Hopf 构造得到映射  $J_\varphi$ :

$$S^{m+q} \cong S^m * S^q \xrightarrow{\Gamma \tilde{\varphi}} S(S^{q-1}) \cong S^q.$$

## 参考文献

- [A1] Gray, B., Homotopy theory, Acad. Press, 1975, p. 334.  
 [A2] Switzer, R. M., Algebraic topology - homotopy and homology, Springer, 1975, p. 480 ff.

潘建中 译 沈信耀 校

### Whitehead 乘法 [Whitehead multiplication; Уайтхеда

## умножение]

J. H. C. Whitehead ([1]) 在同伦群上定义的乘法  $\pi_m(X) \times \pi_n(X) \rightarrow \pi_{m+n-1}(X)$ . 首先将  $S^k$  剖分成两个胞腔  $e^0$  和  $e^k$ , 则球面的乘积  $S^m \times S^n$  的胞腔剖分有四个胞腔  $e^0, e^m, e^n$  和  $e^{m+n}$ . 因此特征映射

$$\varphi_{m,n}: \partial e^{m+n} = S^{m+n-1} \rightarrow S^m \times S^n$$

可分解为

$$S^{m+n-1} \xrightarrow{W(m,n)} S^m \vee S^n \rightarrow S^m \times S^n,$$

其中  $S^m \vee S^n$  是两个球面在基点处的一点并. 如果映射  $f$  和  $g$  分别是同伦类  $\alpha \in \pi_m(X)$  和  $\beta \in \pi_n(X)$  的代表元, 则 Whitehead 积 (Whitehead product)  $[\alpha, \beta] \in \pi_{m+n-1}(X)$  由下面的复合映射给出

$$S^{m+n-1} \xrightarrow{W(m,n)} S^m \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X.$$

Whitehead 积有以下性质:

- 1)  $[\alpha, \beta] = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} [\beta, \alpha]$ ;
- 2) 若  $\alpha, \beta \in \pi_1(x)$ , 则  $[\alpha, \beta] = \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1}$ ;
- 3) 若  $x$  是  $n$  单的, 则对  $\alpha \in \pi_1(x), \beta \in \pi_n(x)$ ,  $[\alpha, \beta] = 0$ ;
- 4) 若对所有的  $\alpha \in \pi_1(x), \beta \in \pi_n(x), [\alpha, \beta] = 0$ , 则  $x$  是  $n$  单的;
- 5) 若  $\alpha \in \pi_n(x), \beta \in \pi_m(x), \gamma \in \pi_k(x), n, m, k > 1$ , 则

$$(-1)^{nk} [[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{mn} [[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{mk} [[\gamma, \alpha], \beta] = 0;$$

6) 元素  $[i, i] \in \pi_3(S^2)$  是  $\pi_3(S^2)$  的生成元的两倍, 其中  $i \in \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$  是生成元;

7) 满态射  $\Sigma: \pi_{4n-1}(S^{2n}) \rightarrow \pi_{4n}(S^{2n+1})$  的核由一个元素,  $[i_{2n}, i_{2n}] \in \pi_{4n-1}(S^{2n})$ , 生成, 其中  $i_{2n} \in \pi_{2n}(S^{2n})$  是典则生成元.

## 参考文献

- [1A] Whitehead, G. W., On products in homotopy theory, *Ann. of Math.*, 47 (1946), 460 – 475.  
 [1B] Whitehead, G. W., A generalization of the Hopf invariant, *Ann. of Math.*, 51 (1950), 192 – 237.

A. B. Шокуров 撰

## 【补注】

## 参考文献

- [A1] Whitehead, G. W., Elements of homotopy theory, Springer, 1978.  
 [A2] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966, 419 – 420 (中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).  
 [A3] Hu, S.-T., Homotopy theory, Acad. Press, 1959, 138 – 139.

【校注】 参考文献 [1A] 应改为:

[1] Whitehead, J. H. C., On adding relations to homotopy groups, *Ann. of Math.*, 42 (1941), 409 – 428.

潘建中 译 沈信耀 校

Whitehead 积 [Whitehead product; Уайтхеда произведение], 带参考点的拓扑空间的同伦群的元素的

见 Whitehead 乘法 (Whitehead multiplication).

潘建中 译 沈信耀 校

Whitehead 挠率 [Whitehead torsion; Уайтхеда кручение]

从一个  $A$  模之复形所构造的约化 Whitehead 群 (Whitehead group)  $\bar{K}_1 A$  的一个元素. 特别地, 有映射复形的 Whitehead 挠率. 设  $A$  为一个环,  $F$  为一个有限生成的自由  $A$  模. 给定  $F$  的两个基  $b = (b_1, \dots, b_k)$  与  $c = (c_1, \dots, c_k)$ , 如果  $c_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} b_j$ , 则矩阵  $\|a_{ij}\|$  是可逆的, 因此就定义了群  $\bar{K}_1 A$  的一个元素, 表以  $[c/b]$ . 如果  $[c/b] = 0$ , 基  $b$  与  $c$  就称为等价的 (equivalent). 当然

$$[e/c] + [c/b] = [e/b], [b/b] = 0.$$

对自由  $A$  模的任何正合列  $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$  与  $E$  的基  $e$ ,  $G$  的基  $g$ , 都能定出  $F$  的一基  $eg = (e, f)$ , 这里  $f$  的象形成基  $g$ . 这个基的等价类仅依赖于  $e$  与  $g$  的等价类. 现在设

$$C: C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0$$

为一复形,  $C_i$  都是选定了基  $c_i$  的自由  $A$  模, 其同调复形是自由的, 且取定了基  $h_i$ . 设同态  $\partial: C_{i+1} \rightarrow C_i$  的象仍是自由的, 基为  $b_i$ . 组合  $b_i h_i b_{i-1}$  就定义  $C_i$  中的一个新基. 于是复形  $C$  的挠率就由公式

$$\tau(C) = - \sum_{i=0}^n (-1)^i [c_i / b_i h_i b_{i-1}] \in \bar{K}_1 A$$

来给出. 这个挠率并不依赖于边缘群的基  $b_i$  的选取, 仅依赖于  $c_i$  与  $h_i$ .

给定一对  $(K, L)$ , 它是由一个有限连通的复形  $K$ , 与其一个子复形  $L$  且为  $K$  的一个形变收缩核 (deformation retract) 所组成的, 令  $\Pi \simeq \pi_1(K) \simeq \pi_1(L)$ . 如果  $\tilde{K}$  与  $\tilde{L}$  为  $K$  与  $L$  的泛覆盖复形, 则  $\sigma \in \Pi$  就定义一个链映射  $\sigma: (\tilde{K}, \tilde{L}) \rightarrow (\tilde{K}, \tilde{L})$ , 因此有一个链群的映射  $\sigma_*: C(\tilde{K}, \tilde{L}) \rightarrow C(\tilde{K}, \tilde{L})$ , 即,  $C_p(\tilde{K}, \tilde{L})$  是一个  $\mathbb{Z}[\Pi]$  模. 这样就得到  $\mathbb{Z}[\Pi]$  上的一个自由链复形

$$C_n(\tilde{K}, \tilde{L}) \rightarrow C_{n-1}(\tilde{K}, \tilde{L}) \rightarrow \dots \rightarrow C_0(\tilde{K}, \tilde{L})$$

这个复形的同调是平凡的, 即,  $\tilde{L}$  是  $\tilde{K}$  的一个形变收



缩.

设  $e_1, \dots, e_\alpha$  为  $K \setminus L$  中的  $p$  链. 对每一个链  $e_i$ , 在  $\tilde{K}$  中选一个处于  $e_i$  之上的代表  $\tilde{e}_i$ , 并固定其方向. 于是  $c_p = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_\alpha)$  是  $C_p(\tilde{K}, \tilde{L})$  中的一个基; 因此就定义了  $\tilde{K}_1 Z[\Pi]$  的一个子集  $\tau C(\tilde{K}, \tilde{L})$ , 叫作挠率. 一般地, 它依赖于基  $c_p$  的选取. 可是, 这个集合在 Whitehead 群  $\text{Wh}(\Pi)$  中的象只由一个元素  $\tau(K, L)$  所组成, 它叫作对  $(K, L)$  的 Whitehead 挠率 (Whitehead torsion of the pair).

Whitehead 挠率的一个重要的性质是其组合不变性. 至于  $\tau(K, L)$  是否为拓扑不变的, 还不知道.

设  $f: X \rightarrow Y$  是一个同伦等价 ( $X, Y$  是链复形). 那么, 映射  $f$  的挠率就定义为  $\tau(f) = f_* \tau(M_f, X) \in \text{Wh}(\pi_1 Y)$ , 这里  $M_f$  是  $f$  的映射柱. 如果  $\tau(f) = 0$ , 则  $f$  就叫作一个单同伦等价 (simple homotopy equivalence). 挠率  $\tau(f)$  的性质是: 1) 若  $i: L \rightarrow K$  是一个包含, 则  $\tau(i) = \tau(K, L)$ ; 2)  $\tau(g \circ f) = \tau(g) + g_* \tau(f)$ ; 3) 若  $f$  同伦于  $f'$ , 则  $\tau(f) = \tau(f')$ ; 4) 如果  $I$  是具有 Euler 示性数  $\chi$  的单连通复形之恒等映射, 则  $\tau(I \times f) = \chi \cdot \tau(f)$ .

#### 参考文献

[1] Whitehead, J. H. C., Simple homotopy types, *Amer. Math. J.*, 72 (1950), 1 - 57.

[2] Milnor, J. W., Whitehead torsion, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 358 - 426. A. B. Шокров 撰

【补注】  $\tau(K, L)$  的拓扑不变性在 [A1] - [A3] 中已被论述.

#### 参考文献

[A1] Chapman, T. A., Topological invariance of Whitehead torsion, *Amer. J. Math.*, 96 (1974), 488 - 497.

[A2] Ferry, S., The homeomorphism group of a compact Hilbert cube manifold is an ANR, *Ann. of Math.*, 106 (1977), 101 - 119.

[A3] West, J. E., Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: a solution to a conjecture of Borsuk, *Ann. of Math.*, 106 (1977), 1 - 18. 周伯坝 译

#### Whitney 类 [Whitney class; Уитни класс]

见 Stiefel-Whitney 类 (Stiefel-Whitney class).

#### Whitney 扩张定理 [Whitney extension theorem; Уитни теорема о продолжений]

【补注】 令  $\mathcal{E}^m$  (相应地,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^\infty$ ) 是  $\mathbb{R}^n$  上的  $m$  次可微 (相应地, 光滑) 实值函数的空间. 令  $K \subset \mathbb{R}^n$  为紧的. 对于重指标  $k = (k_1, \dots, k_n)$ ,  $k_i \in \{0, 1, \dots\}$ , 令  $|k| = k_1 + \dots + k_n$ ,  $k! = k_1! \cdots k_n!$ ,  $\partial^{|k|} / \partial x^k = (\partial^{k_1} / \partial x_1^{k_1}) \cdots (\partial^{k_n} / \partial x_n^{k_n})$ ,  $(x - a)^k = (x_1 - a_1)^{k_1} \cdots (x_n - a_n)^{k_n}$ ,  $x, a \in \mathbb{R}^n$ .  $K$  上的连续函数之多元组  $F = (f^k)_{|k| \leq m}$  组成向量空间  $J^m(K)$ , 它以适合  $|k| \leq m$

的重指标  $k$  为指标. 例如, 设  $K$  是一个点, 则  $J^m(pt)$  由  $r_m$  个实数所成的序列组成, 这里  $r_m = (n+1) \cdots (n+m)/m!$ , 而可以视为与总次数  $\leq m$  的所有  $n$  元多项式之空间相同,  $J^\infty(pt)$  则可以看出是所有  $n$  元幂级数的空间.

令  $J^m: \mathcal{E}^m \rightarrow J^m(K)$  对每个  $g \in \mathcal{E}^m$  赋以其  $m$  节, 即连续函数  $(\partial^{|k|} g / \partial x^k)_{|k| \leq m}$  之  $r_m$  元组在  $K$  上的限制; 亦见节 (jet). 对每一个  $F \in J^m(K)$  及  $a \in K$ , 令  $T_a^m F$  为多项式

$$T_a^m F(x) = \sum_{|k| \leq m} \frac{(x-a)^k}{k!} f^k(a),$$

$R_a^m F$  为  $J^m(K)$  中元素

$$R_a^m F = F - J^m(T_a^m F),$$

其分量为  $(R_a^m F)^k$ . 在  $K$  上 Whitney 意义下可微的 (differentiable in the sense of Whitney) 函数的空间  $\mathcal{E}^m(K)$  就是由适合下式的  $F \in J^m(K)$  组成的:

$$(R_x^m F)^k(y) = o(\|x-y\|^{m-k}) \quad (*)$$

对  $x, y \in K$  且  $|k| \leq m$  成立.

当然,  $\mathcal{E}^m(K)$  中之元并不真正是函数, 但这没有关系. 若  $K$  是一点,  $\mathcal{E}^m(pt) = J^m(pt)$ . Whitney 扩张定理 (Whitney extension theorem) 就是说, 存在一个线性映射  $W: \mathcal{E}^m(K) \rightarrow \mathcal{E}^m$  使对每一个  $F \in \mathcal{E}^m(K)$  及每一点  $x \in K$ ,

$$\left[ \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k} W F \right](x) = f^k(x),$$

而且  $WF$  在  $\mathbb{R}^n \setminus K$  上为光滑的.

对于  $K = \{pt\}$ , 由此即知对于每个在  $a \in \mathbb{R}^n$  处的幂级数  $\sum_k C_k (x-a)^k$  (以  $(x_1 - a_1), \dots, (x_n - a_n)$  为变元) 均有一个  $\mathbb{R}^n$  上的光滑函数, 使其在  $a$  处的 Taylor 级数正是这个幂级数.

这也可以从 Borel 扩张引理 (Borel extension lemma) (对变量个数用归纳法) 得出. 令  $f_0(x), f_1(x), \dots$  是定义在  $0 \in \mathbb{R}^n$  的某个邻域上的光滑函数序列. 则必有一光滑函数  $F(t, x)$  定义在  $0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  的一个邻域上使得  $(\partial^r F / \partial t^r)(x, 0) = f_r(x)$  对一切  $r$  成立.

#### 参考文献

[A1] Whitney, H., Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36 (1934), 63 - 89.

[A2] Malgrange, B., Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966, Chapt. 1.

[A3] Tougeron, J. C., Ideaux de fonctions différentiables, Springer, 1972, Chapt. IV.

[A4] Golubitsky, M. and Guillemin, V., Stable mappings

and their singularities, Springer, 1973. 齐民友 译

**Whittaker 方程** [Whittaker equation; Уиттекера уравнение]

二阶线性齐次常微分方程

$$w'' + \left( \frac{1/4 - \mu^2}{z^2} + \frac{\lambda}{z} - \frac{1}{4} \right) w = 0, \quad (*)$$

其中变量  $z$ ,  $w$  和参数  $\lambda, \mu$  可取任意复值. 方程 (\*) 是退化超几何方程 (hypergeometric equation) 的简约形式, 由 E. T. Whittaker 首次研究 ([1]). 当  $\lambda = 0$  时, Whittaker 方程等价于 Bessel 方程 (Bessel equation). 如果  $2\mu$  不是整数, 则 Whittaker 方程的一个基本解组由函数  $M_{\lambda, \mu}(z)$  和  $M_{\lambda, -\mu}(z)$  组成, 其中  $M_{\lambda, \mu}(z)$  是 Whittaker 函数 (Whittaker functions). 对任何参数值, Whittaker 方程的通解可写为线性组合形式

$$w = C_1 W_{\lambda, \mu}(z) + C_2 W_{-\lambda, \mu}(-z),$$

其中  $W_{\lambda, \mu}(z)$  是 Whittaker 函数.

参考文献

- [1] Whittaker, E. T., An expression of certain known functions as generalized hypergeometric functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 10 (1903), 125 - 134.
- [2] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.
- [3] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, 1, The gamma function. The hypergeometric functions. Legendre functions. McGraw-Hill, 1953 (中译本: A. 爱尔台里, 高级超越函数, 上海科学技术出版社, 1957 - 1958).
- [4] Kratzer, A., Franz, W., Transzendente Funktionen, Geest & Portig, 1960.
- [5] Kamke, E., Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen, Akad. Verlagsgesellschaft., 1942 (中译本: E. 卡姆克, 常微分方程手册, 科学出版社, 1980).

Н. Х. Розов 撰 沈永欢 译

**Whittaker 函数** [Whittaker functions; Уиттекера функции]

函数  $M_{\lambda, \mu}(z)$  和  $W_{\lambda, \mu}(z)$ , 它们是 Whittaker 方程 (Whittaker equation)

$$w'' + \left[ \frac{1/4 - \mu^2}{z^2} + \frac{\lambda}{z} - \frac{1}{4} \right] w = 0 \quad (*)$$

的解. 函数  $W_{\lambda, \mu}$  满足等式

$$W_{\lambda, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left[\frac{1}{2} - \lambda - \mu\right]} M_{\lambda, \mu}(z) +$$

$$+ \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left[\frac{1}{2} - \lambda + \mu\right]} M_{\lambda, -\mu}(z).$$

函数对  $M_{\lambda, \mu}(z)$ ,  $M_{\lambda, -\mu}(z)$  以及  $W_{\lambda, \mu}(z)$ ,  $W_{-\lambda, \mu}(z)$  是方程 (\*) 的线性无关的解. 点  $z = 0$  是  $M_{\lambda, \mu}(z)$  和  $W_{\lambda, \mu}(z)$  的分支点, 而  $z = \infty$  是本质奇点.

Whittaker 函数与其他一些函数之间的关系如下所述.

与退化超几何函数 (degenerate hypergeometric function) 的关系:

$$M_{\lambda, \mu}(z) = z^{\mu+1/2} e^{-z/2} \Phi\left[\mu - \lambda + \frac{1}{2}; 2\mu + 1; z\right];$$

与变形 Bessel 函数 (Bessel function) 和 Macdonald 函数 (Macdonald function) 的关系:

$$M_{0, \mu}(z) = 2^{2\mu} \Gamma(\mu + 1) \sqrt{z} I_{\mu}\left[\frac{z}{2}\right];$$

$$W_{0, \mu}(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}} K_{\mu}\left[\frac{z}{2}\right];$$

与概率积分 (probability integral) 的关系:

$$W_{-1/4, 1/4}(z) = 2 z^{1/4} e^{z/2} \operatorname{Erfc}(\sqrt{z});$$

与 Laguerre 多项式 (Laguerre polynomials) 的关系:

$$W_{n+\mu+1/2, \mu}(z) = n! (-1)^n z^{\mu+1/2} e^{-z/2} L_n^{2\mu}(z).$$

参考文献

- [1] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, 2. Bessel functions, McGraw-Hill, 1953 (中译本: A. 爱尔台里, 高级超越函数, 上海科学技术出版社, 1957 - 1958).
- [2] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰

【补注】 Whittaker 函数  $W_{\lambda, \mu}$  可以通过在汇合型超几何函数 (confluent hypergeometric function) 中引入的  $\Psi$  函数来表示:

$$W_{\lambda, \mu}(z) = e^{-z/2} z^{\mu+1/2} \Psi(\mu - \lambda + 1/2; 2\mu + 1; z).$$

因此, 在汇合型超几何函数 (confluent hypergeometric function) 中讨论的一些特殊情况可以写成关于 Whittaker 函数的一些特殊情况. 亦见该条目的参考文献.

杜小杨 译

**Whittaker 变换** [Whittaker transform; Уиттекера преобразование]



积分变换

$$F(x) = \int_0^{\infty} (2xt)^{-1/4} W_{\lambda, \mu}(2xt) f(t) dt,$$

这里  $W_{\lambda, \mu}(z)$  是 **Whittaker 函数** (Whittaker function). 当  $\lambda = 1/4$  和  $\mu = \pm 1/4$  时 Whittaker 变换转变为 **Laplace 变换** (Laplace transform).

参考文献

- [1] Meijer, C. S., Eine neue Erweiterung der Laplace-Transformation, *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet.*, **44** (1941), 727 - 737.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Doetsch, G., *Handbuch der Laplace-Transformation*, III, Birkhäuser, 1973.

- [A2] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, 1927.

葛显良 译 吴绍平 校

**Wick 积** [Wick product], **Wick 单项式** (Wick monomial), **Wick 幂** (Wick power)

【补注】随机变量的 Wick 积是通过一个正交化程序产生的.

设  $f_1, \dots, f_n$  是某概率空间  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  上的 (实值) 随机变量. Wick 积

$$: f_1^{k_1} \cdots f_n^{k_n} :$$

被递归地定义为总次数为  $k_1 + \dots + k_n$  的  $f_1, \dots, f_n$  的一个多项式, 满足

$$\langle : f_1^{k_1} \cdots f_n^{k_n} : \rangle = 0,$$

且对于  $k_j \geq 1$ ,

$$\frac{\partial}{\partial f_j} (: f_1^{k_1} \cdots f_n^{k_n} :) = k_j : f_1^{k_1} \cdots f_j^{k_j-1} \cdots f_n^{k_n} :,$$

其中  $\langle \rangle$  表示求期望, 符号  $:$  则是物理学中的传统记法.

例如

$$: f : = f - \langle f \rangle,$$

$$: f^2 : = f^2 - 2\langle f \rangle f - \langle f^2 \rangle + 2\langle f \rangle^2.$$

有二项式定理:

$$:(af + bg)^n:$$

$$= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^m b^{n-m} : f^m : : g^{n-m} :,$$

以及相应的多项式定理. **Wick 指数** (Wick exponen-

tial) 被定义为

$$: \exp(\alpha f) : = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} : f^n :,$$

因此有

$$: \exp(\alpha f) : = \langle \exp(\alpha f) \rangle^{-1} \exp(\alpha f). \quad (A1)$$

Wick 积、乘幂和指数, 既依赖于其变元, 也依赖于其基础测度.

设  $f, g$  是均值为 0 的 Gauss 随机变量. 那么

$$: \exp \alpha f : = \exp \left\{ \alpha f - \frac{1}{2} \alpha^2 \langle f^2 \rangle \right\}, \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} : f^n : &= \sum_m (-1)^m \frac{n!}{m!(n-2m)! 2^m} f^{n-2m} \|f\|^{2m} \\ &= \|f\|^n h_n(\|f\|^{-1} f), \end{aligned} \quad (A3)$$

其中

$$h_n(x) = \sum_m (-1)^m \frac{n!}{m!(n-2m)! 2^m} x^{n-2m}$$

是首项系数为 1 的第  $n$  个 **Hermite 多项式** (Hermite polynomial), 而  $\|f\|^2 = \langle f^2 \rangle$ . 此外,

$$\langle : f^n : : g^m : \rangle = \delta_{nm} n! \langle fg \rangle^n.$$

它是由如下的公式推出的:

$$\begin{aligned} &: \exp \alpha f : : \exp \beta g : \\ &= \exp(\alpha f + \beta g) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\alpha^2 \langle f^2 \rangle + \beta^2 \langle g^2 \rangle) \right\}, \end{aligned}$$

这是一个包含 Wick 单项式的许多组合的公式.

如果存在两个测度  $\mu$  与  $\nu$ , 使  $f$  对它们都有均值为 0 的 Gauss 分布, 那么

$$\begin{aligned} &: \exp \alpha f :_{\mu} = \\ &= : \exp \alpha f :_{\nu} \exp \left\{ \frac{\alpha^2}{2} (\langle f^2 \rangle_{\nu} - \langle f^2 \rangle_{\mu}) \right\}. \end{aligned} \quad (A4)$$

设  $f_1, \dots, f_n$  是均值为 0 的联合 Gauss 变量 (不必不同). 那么关于 Wick 单项式  $: f_1 \cdots f_n :$  有下述明显的公式:

$$\begin{aligned} &: f_1 \cdots f_n : = \\ &= \sum_G \prod_{e \in G} (-\langle f_{e_1} f_{e_2} \rangle) \prod_{j \notin [G]} f_j, \end{aligned} \quad (A5)$$

其中,  $G$  遍历  $\{1, \dots, n\}$  的所有配对 (有时称为图), 即  $\{1, \dots, n\}$  的不交无序对的所有集合,  $[G]$  是组成  $G$  的无序对的并, 而若  $e$  为一无序对, 则  $\{e_1, e_2\}$  为组成该对的顶点集.

例如:

$$\begin{aligned} :fg^2: &= fg^2 - 2\langle fg \rangle g - \langle g^2 \rangle f, \\ :f^2g^2: &= f^2g^2 - \langle f^2 \rangle g^2 - \langle g^2 \rangle f^2 - 4\langle fg \rangle fg + \\ &\quad + 2\langle fg \rangle^2 + \langle f^2 \rangle \langle g^2 \rangle. \end{aligned}$$

设  $\{l_v\}$  ( $v=1, \dots, n$ ) 是一族不交的有限集. 按照定义,  $\{l_v\}$  上的一条线是取自不同的  $l_v$  的一对元素.  $\{l_v\}$  上的一个图则是  $\{l_v\}$  上不交线的一个集. 如果把每个  $l_v$  看成是一个有  $|l_v|$  条“腿”从中伸出的顶点, 那么图  $G$  就可想像成联结不同顶点的腿的线之集. 使得所有的腿都被联结的图, 是一个 (某种特殊类型的) 全收缩图 (fully contracted graph), 真空图 (vacuum graph) 或 Feynman 图 (Feynman graph; Feynman diagram).

上面出现的“配对”情形对应于每个顶点只有一条腿的  $\{l_v\}$  上的图. 利用这些 Feynman 图, Wick 单项式的积可以表成如下的 Wick 单项式的线性组合.

设  $l_v$  ( $v=1, \dots, n$ ) 是一族不交的有限集,  $l = \bigcup_v l_v$ , 而  $f_j$  是一族以  $l$  为指标集的联合 Gauss 随机变量. 那么

$$\prod_v \prod_{j \in l_v} f_j := \sum_G \prod_{e \in G} \langle f_{e_1} f_{e_2} \rangle : \prod_{j \notin [G]} f_j :, \quad (\text{A6})$$

其中  $G$  遍历  $\{l_v\}$  上所有的图, 而  $[G]$  是组成  $G$  的所有不交无序对的并. 更一般的 Feynman 图, 如还带有自交线的图, 出现在涉及某些不同协方差的情形, 见 [A4].

关于 Wick 单项式之积的期望, 有

$$\langle \prod_v \prod_{j \in l_v} f_j \rangle = \sum_{G \in \Gamma_0(\{(l_v)\})} \prod_{e \in G} \langle f_{e_1} f_{e_2} \rangle, \quad (\text{A7})$$

特别有

$$\langle f_1 \cdots f_n \rangle = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数,} \\ \sum_{G \in \Gamma_0(n)} \prod_{e \in G} \langle f_{e_1} f_{e_2} \rangle, & n = 2k, \end{cases} \quad (\text{A8})$$

其中  $\Gamma_0(2k)$  遍历把  $\{1, \dots, 2k\}$  分裂成  $k$  个无序对的所有  $(2k)! 2^{-k} (k!)^{-1}$  种分法. 所有这些公式 (A1) ~ (A4), (A7), (A8), 特别是 (A8), 通常被命名为 Wick 公式 (Wick formula) 或 Wick 定理 (Wick theorem).

在 (Euclid) 量子场论的建立中, 设  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  是急减光滑函数的 Schwartz 空间,  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  是实值缓广义函数空间. 对于  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , 令  $\varphi(f)$  是由  $\varphi(f)(u) = u(f)$  定义的  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  上的线性函数. 那么对于  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$  上的任一连续正纯量积  $C, (f, g) \mapsto \langle f, Cg \rangle$ , 在  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  上存在唯一的可

数可加 Gauss 测度  $dq_c$ , 使

$$\int e^{i\varphi(f)} dq_c = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle f, Cf \rangle \right\}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).$$

于是对于所有  $p \in [1, \infty)$ ,  $\varphi(f) \in L_p(\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n), dq_c)$ , 且

$$\int \varphi(f) dq_c = 0,$$

$$\int \varphi(f_1) \varphi(f_2) dq_c = \langle f_1, Cf_2 \rangle.$$

所以  $\langle \varphi(f_1) \varphi(f_2) \rangle = \langle f_1, Cf_2 \rangle$ , 而某些 Wick 单项式的公式现在取如下形式:

$$:\varphi(f)^n: =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_j \frac{n!}{(n-2j)! j! 2^j} (-1)^j \langle f, Cf \rangle^j \varphi(f)^{n-2j} = \\ &= \langle f, Cf \rangle^{n/2} h_n(\varphi(f)/\langle f, Cf \rangle^{1/2}), \quad (\text{A3}') \end{aligned}$$

$$:\sum_{v=1}^n \varphi(f_v): = \sum_G \prod_{e \in G} \langle f_{e_1}, -Cf_{e_2} \rangle \prod_{j \notin [G]} \varphi(f_j). \quad (\text{A5}')$$

Wick 单项式在很多情形下都是经由伊藤 - Wick - Segal 同构 (Ito - Wick - Segal isomorphism) 与  $\Phi_{\text{ok}}$  空间 (Fock space) 联系起作用的. 这是基于如下两个紧密关联的唯一性定理: 标准 Gauss 函数的唯一性 (uniqueness of standard Gaussian functions) 或  $\Phi_{\text{ok}}$  表示的唯一性 (uniqueness of Fock representation).

设  $\mathcal{S}$  为一维 Hilbert 空间.  $\mathcal{S}$  上的一个正则对易关系表示 (representation of the canonical commutation relations), 是一对线性映射

$$f \mapsto a(f), \quad g \mapsto a^*(g),$$

它们是从  $\mathcal{S}$  映到定义在一复 Hilbert 空间  $H$  的稠域  $D$  上的算子  $a(f), a^*(g)$ , 使得对所有  $x, x_1, x_2 \in D, f, g \in \mathcal{S}$ ,

$$a(f)D \subset D, \quad a^*(g)D \subset D,$$

$$\langle x_1, a(f)x_2 \rangle = \langle a^*(f)x_1, x_2 \rangle,$$

$$[a(f), a(g)] = [a^*(f), a^*(g)] = 0,$$

$$[a(f), a^*(g)]x = \langle f, g \rangle x.$$

这个表示称为  $\Phi_{\text{ok}}$  表示 (Fock representation), 如果此外还存在一个  $\Omega \in D$ , 称为真空向量 (vacuum vector), 使得

$$a(f)\Omega = 0, \quad f \in \mathcal{S},$$

且使  $D$  为向量  $a^*(g_1) \cdots a^*(g_k)\Omega, g_j \in \mathcal{S}, k=0, 1,$



..., 张成的线性空间. 有一个存在性定理 (见 Фок 空间 (Fock space) 与对易和反对易关系的表示 (commutation and anti-commutation relationships, representation of)) 及唯一性定理: 如果  $(a_i, a_i^*)$  ( $i = 1, 2$ ) 是  $\mathcal{H}$  上的两个 Фок 表示, 且有真空向量  $\Omega_i$ , 那么它们是酉等价的, 且其酉等价  $U$  由  $U\Omega_1 = \Omega_2$  唯一确定.

一个实 Hilbert 空间  $V$  上的标准 Gauss 函数 (standard Gaussian function) ([A3] 中称为以  $V$  为指标集的 Gauss 随机过程 (Gaussian random process indexed by  $V$ )) 是从  $V$  到概率空间  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  上的随机变量的一个映射  $\varphi$ , 使得 (几乎处处) 成立

$$\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w), v, w \in V,$$

$$\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v), \alpha \in \mathbf{R}, v \in V,$$

还使  $\varphi(v)$  ( $v \in V$ ) 生成的  $\sigma$  域就是  $\mathcal{B}$  (除相差零测集外), 且使  $\varphi(v)$  为均值 0 的 Gauss 随机变量, 并有

$$\langle \varphi(v) \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

以此为目标, 有一个存在性定理, 还有唯一性定理指出, 概率空间  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  与  $(X', \mathcal{B}', \mu')$  上的两个标准 Gauss 函数在下述意义上是等价的: 存在两个概率空间之间的同构, 使  $\varphi(v)$  与  $\varphi'(v)$  对一切  $v \in V$  彼此对应 (见 [A1], § 4, [A3] 第 1 章). 这个唯一性定理是 Колмогоров 定理的一个特殊情形, 后者指出, 测度空间由相容的联合概率分布完全确定.

把对称 Фок 空间  $F(V)$  与实现  $H$  上的标准 Gauss 函数的空间  $L_2(X, \mathcal{B}, \mu)$  等同起来,  $\varphi(v)$  的 Wick 积即可由取通常的积然后应用  $F(V)$  在其  $n$  粒子子空间上的正交投影而得到.

在概率测度为  $(2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} dx$  的一个 Gauss 变量  $x$  的情形, 上述问题解决如下:

$$: x^n : = h_n(x).$$

$L_2(\mathbf{R}, (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} dx)$  的 Фок 表示是

$$\Omega = 1, a = \frac{d}{dx}, a^* = x - \frac{d}{dx},$$

而事实上,  $h_n(x) = (x - d/dx)^n (1)$ , 它是合适的, 因为  $F(\mathbf{R})$  上的产生算子是  $a^*(e^{\otimes n}) = e^{\otimes (n+1)}$ . 利用变量  $y = x/\sqrt{2}$ ,

$$\Omega = 1, a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dy}, a^* = \sqrt{2} y - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dy},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^*),$$

而

$$: y^n : = (\sqrt{2})^{-n} h_n(\sqrt{2} y) =$$

$$= (\sqrt{2})^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{*k} a^{n-k},$$

其中在右边  $((a + a^*)/\sqrt{2})^n$  的“二项式展开”中, 湮没算子  $a$  全部排在产生算子  $a^*$  的前面 (Wick 序 (Wick ordering)). 加以适当的解释, 同样的公式一般也成立, 见 [A3], 第 24 页.

#### 参考文献

- [A1] Dobrushin, R. L., Minlos, R. A., Polynomials in linear random functions, *Russian Math. Surveys*, 32 (1977), 71 – 127 (*Uspekhi Mat. Nauk*, 32 (1977), 67 – 122).
- [A2] Dimock, J., Glimm, J., Measures on Schwartz distribution space and applications to  $P(\varphi)_2$  fields theories, *Adv. in Math.*, 12 (1974), 58 – 83.
- [A3] Simon, B., The  $P(\varphi)_2$  Euclidean (quantum) field theory, Princeton Univ. Press, 1974.
- [A4] Glimm, J., Jaffe, A., Quantum physics, Springer, 1981.

#### 【译注】

#### 参考文献

- [B1] 黄志远, 严加安, 无穷维随机分析引论, 科学出版社, 1997. 潘一民 译

宽度 [width; поперечник], 集合的

刻画在一定的逼近方法下度量空间中一个集合与一组 (照例是有限维的) 对象之间的偏离程度的值. 宽度也估量在一定的编码技巧下从已知集合中取出某个元素的准确度. 得到广泛研究的宽度有 Александров 宽度 (用有限维紧统逼近一个集合的可能性估计) 及 Колмогоров 宽度 (用有限维线性流形逼近一个集合的可能性估计).

设  $X$  是赋范空间, 单位球为  $B$ ,  $C \subset X$  是待逼近的子集,  $\mathfrak{A} = \{A: A \subset X\}$  是一族逼近子集,  $F(C, A)$  是映射  $f: C \rightarrow A$  的集合, 最后,  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(C, \mathfrak{A}) = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} F(C, A)$ . 数

$$p_{\mathfrak{F}}(C, X) = \inf_{f \in \mathfrak{F}} \sup_{x \in C} \|x - f(x)\| \quad (1)$$

是在逼近方法  $\mathfrak{F}$  下集合  $C$  偏离逼近集族  $\mathfrak{A}$  的一个估计.

作为在各式各样的逼近方法下对逼近性质的估计, 大多数宽度都是由 (1) 给出的.

若  $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}_N$  是维数  $\leq N$  的所有线性流形 (即线性子空间的平移) 的集合  $(M_N)$ ,  $F(C, M_N)$  是从  $C$  到  $M_N$  的所有映射的集合, 则表达式 (1) 称为集合  $C$  的 Колмогоров  $N$  宽度 ( $N$ -width according to Kolmogorov), 通常记为  $d_N(C, X)$ , 是已知集合  $C$  偏离  $N$

维线性流形的最小偏离估计.

下面是  $d_N$  的另一个等价而一般可以接受的定义 (见 [1]):

$$\begin{aligned} d_N(C, X) &= \inf_{\{M_N\}} \sup_{x \in C} \inf_{y \in M_N} \|x - y\| \\ &= \inf_{\{M_N\}} \inf_{\varepsilon} \{ \varepsilon > 0 : C \subset M_N + \varepsilon B \}. \end{aligned} \quad (1')$$

若  $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}_N$  (或  $\mathfrak{L}_N$ , 维数  $\leq N$  的所有子空间的集合  $\{L_N\}$ ),  $F(C, M_N)$  [ $F(C, L_N)$ ] 是把  $C$  映入  $M_N$  ( $L_N$ ) 的所有仿射 (线性) 连续映射的集合, 则量 (1) 记为  $\alpha_N(C, X)$  [ $\lambda_N(C, X)$ ], 称为仿射 (线性)  $N$  宽度 (affine (linear)  $N$ -width), 估计了在仿射 (线性)  $N$  维映射下的逼近性质.

若  $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}_N$  是所有  $N$  维紧统 (等价地, 所有  $N$  维多面体) 的集合 ( $K_N$ ),  $F(C, K_N)$  是从  $C$  到  $K_N$  的所有连续映射的集合, 则量 (1) 称为 Александров  $N$  宽度 ( $N$ -width according to Alexandrov), 记为  $a_N(C, X)$ , 它估计了  $N$  维紧统逼近集合  $C$  的程度.

若  $\mathfrak{A} = \Sigma_N$  是  $X$  的所有  $N$  点集  $\xi_N = \{x_1, \dots, x_N\}$  的集合  $\{\xi_N\}$ ,  $F(C, \xi_N)$  是从  $C$  到  $\xi_N$  的所有映射的集合, 则宽度 (1) 记为  $\varepsilon_N(C, N)$ , 是集  $C$  偏离  $N$  点集的最小程度.

上述所有近似宽度均依赖于环境空间  $X$ , 当  $C$  连同其度量一起嵌入另一个赋范空间时是可以改变的.

另一类宽度涉及对集合  $C$  的元素用另一种元素加以编码的问题. 这个过程经常称为取出问题. 让  $C$  是度量空间,  $Z = \{\zeta\}$  是一族“编码”集,  $\varphi(C, \zeta)$  是一族映射  $f: C \rightarrow \zeta$ . 最后,  $\Phi = \Phi(C, Z) = \bigcup_{\zeta \in Z} \varphi(C, \zeta)$  是已知的编码方法集. 量

$$p^*(C) = \inf_{f \in \Phi} \sup_{z \in f(C)} D(f^{-1}(z)) \quad (2)$$

估计了利用由  $Z$  中集合  $\zeta$  的元素在  $\Phi$  中的映射下“编码”而得的信息取出集  $C$  的元素的可能性, 其中  $D(E)$  表示集合  $E$  的直径. 涉及取出过程的大多数宽度均由类似于 (2) 的公式给出.

若  $\Phi$  是从  $C$  到  $Z$  的一切可能的映射的集合, 这里  $Z$  由唯一的集合  $\{1, 2, \dots, N\}$  组成, 则宽度 (2) 记为  $\varepsilon^N(C)$ , 估计了利用  $N$  个元素组成的一张表取出某个元素的准确度. 若  $C$  位于线性赋范空间  $X$  中,  $\Phi$  是映入  $\mathbf{R}^N$  的所有仿射连续映射的集合, 则量  $p^*(C)/2$  称为 Гельфанд  $N$  宽度 ( $N$ -width according to Gel'fand), 记为  $d^N(C)$ . 它估计了利用元素在映入  $\mathbf{R}^N$  的仿射映射下的象来取出该元素的准确度, 其中  $p^*(C)$  由 (2) 定义. 就关于原点成对称的集合而言, 宽度  $d^N$  有另一个等价的定义:

$$d^N(C) = \inf_{\{L^N\}} \sup_{x \in C \cap L^N} \|x\| =$$

$$= \inf_N \sup_{\varepsilon} \{ \varepsilon < 0 : C \cap L^N \subset \varepsilon B \}, \quad (2')$$

其中  $L^N$  是余维数为  $N$  的闭子空间. 让  $Z$  由所有  $N$  维紧统  $\{K_N\}$  组成,  $\varphi(C, K_N)$  是把  $C$  映入  $K_N$  的所有连续映射的集合,  $\Phi = \bigcup \varphi(C, K_N)$ . 这时 (2) 称为 Урысон  $N$  宽度 ( $N$ -width according to Urysohn), 记为  $u_N(C)$ . Урысон 宽度的另一个等价而广泛使用的定义如下:  $u_N(C)$  是集合  $C$  的阶数  $\leq N+1$  的覆盖集的所有直径的下确界. Урысон 宽度估计了集合  $C$  的  $N$  维性程度 (按 Brouwer 维数的观点).

后来称为宽度的第一个量是 1923 年 П. С. Урысон 定义  $u_N$  时引进的 (见 [2]). 1933 年 П. С. Александров ([3]) 建立了关于维数论的逼近理论, 结果定义了  $a_N$ . 1933 年 А. Н. Колмогоров ([1]) 定义了  $d_N$ , 这个宽度在逼近论中得到深入研究. 1931 年 Л. С. Понтрягин 和 Л. Г. Шнирельман ([4]) 把维数 (一个拓扑示性数) 表为一个渐近的度量示性数  $N_\varepsilon(C)$  ( $\varepsilon^N(C)$  的逆), 就度量空间  $C$  而言, 等于  $C$  的  $2\varepsilon$  覆盖元素的最少个数. 在 50 年代, 对这种示性数的兴趣增大了. 那时, Колмогоров ([5]) 基于信息论的论断引进了  $N_\varepsilon(C, X)$  ( $\varepsilon_N(C, X)$  的逆), 并且提出了一个研究诸如  $N_\varepsilon(C)$  及  $N_\varepsilon(C, X)$  这些变量的规划, 作为逼近论中与函数最优列表法问题有关的一个特定部分.  $N_\varepsilon(C, X)$  的以 2 为底的对数称为集合  $C$  的  $\varepsilon$  熵 ( $\varepsilon$ -entropy), 而  $\log_2 N_\varepsilon(C)$  称为  $C$  的绝对  $\varepsilon$  熵 (absolute  $\varepsilon$ -entropy).

现在已经得到一系列具体结果, 对若干形形色色的函数和几何对象算出了某些宽度, 这些计算可以分成两组: 渐近的和精确的.

涉及 Соболев 类宽度的渐近计算的某些结果如下. 让  $W_p^r$  是某个有限区间 (例如  $[0, 1]$ ) 上的函数  $x(\cdot)$  的集合, 其中  $x(\cdot)$  具有绝对连续的  $r-1$  阶导数和  $r$  阶导数, 使得

$$\|x^{(r)}(\cdot)\|_p = \left[ \int_0^1 |x^{(r)}(t)|^p dt \right]^{1/2} < 1, \quad p \geq 1.$$

下述渐近公式成立:

$$d_N(W_p^r, L_q) \sim \begin{cases} N^{-[r - (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})]}, & 1 \leq q \leq p \leq \infty \text{ 或} \\ & 1 \leq p \leq q \leq 2, \\ N^{-[r - (\frac{1}{p} - \frac{1}{2})]}, & 1 \leq p \leq q \leq \infty, \\ & q \geq 2. \end{cases} \quad (3)$$

就 (3) 中上一行的某些特殊情形而言, 渐近最优逼近空间是三角多项式空间或结点一致分布的样条空间.



人们曾经猜测, 这样的渐近性态总是出现的, 即阶数一定的三角多项式子空间总是渐近极端子空间. 结果, 这个猜测不成立 (见 [10], [13]). 由  $\{\cos nt, \sin nt: 0 \leq n \leq N\}$  张成的三角多项式集合就是渐近非极端集. 不过, 就若干情形而言, “重排”调和多项式, 即取 “不规则” 序的  $\sim N$  调和多项式, 仍然是极端集.

Соболев 类宽度问题的解基于  $\mathbf{R}^n$  中  $n$  维八面体

$$O_p^n = \{x \in \mathbf{R}^n: \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq 1\}$$

的直径问题. 就  $p > q$  而言, 量  $d_N(O_p^n, l_q^n)$  已经精确确定; 此外,  $d_N(O_1^n, l_2^n)$  已经精确算出, 结果是  $(1 - N/n)^{1/2}$ . 下述估计 (见 [13]) 对计算 Соболев 类的 Колмогоров 宽度非常重要:

$$A) d_N(O_1^n, l_\infty^n) \leq 2N^{-1/2}(\ln n)^{1/2};$$

$$B) d_N(O_2^n, l_\infty^n) \leq AN^{-1/2}(1 + \ln n/N)^{3/2}, \text{ 其中 } A \text{ 是常数};$$

C) 若  $\lambda \in (0, 1)$ , 则在  $n^\lambda \leq N \leq n$  时下述不等式成立:

$$d_N(O_1^n, l_\infty^n) \leq C_\lambda N^{-1/2}.$$

Соболев 类的 Александров 宽度的渐近性态也得到考虑. 已经证明

$$a_N(W_p^r, L_q) \sim \frac{1}{N^r}, \quad 1 < p, q < \infty, r \in \mathbf{N}.$$

宽度的精确计算等价于对已知类求极端逼近. 第一个这样的结果是 Колмогоров ([1]) 得到的, 他解决了计算  $d_N(W_2^r, L_2[0, 1])$  的问题, 以及在  $L_2([-\pi, \pi])$  的度量下周期类  $W_2^r$  的类似问题.

为了计算宽度  $d_N(\tilde{W}_\infty^r, L_\infty[-\pi, \pi])$  的精确值, 首先使用了 (见 [7]) 某些拓扑方法 (化为 Borsuk 对径点的球面宽度定理). 这个定理得到推广 (见 [12]), 并且用来得到另一些精确解. 后来建立了与变分学及最优控制论的某些有趣联系 (见 [9]).

关于  $\varepsilon_N$ ,  $\varepsilon^N$  及逆值  $N_\varepsilon(C)$  及  $N_\varepsilon(C, X)$  的信息见  $\varepsilon$  熵 ( $\varepsilon$ -entropy).

与宽度有关的某些问题与几何中的形形色色的问题密切相关. 例如,  $N_\varepsilon(C, \mathbf{R}^n)$  的渐近性态问题与空间  $\mathbf{R}^n$  的最优球面包装问题密切相关. 由于宽度的渐近性态依赖于环绕空间, 从而引进了绝对宽度

$$p_F^A(C) = \inf p_F(C, X),$$

其中下确界是对  $C$  的所有嵌入来取的,  $C$  的度量即是环绕空间  $X$  中的度量. 此外, 例如 (见 [9]) 还有

$$\varepsilon_N^A(C) = \frac{1}{2} \varepsilon^N(C),$$

$$a_N^A(C) = \frac{1}{2} u_N(C).$$

#### 参考文献

- [1] Kolmogorov, A. N., Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse, *Ann. of Math.*, **37** (1936), 107 – 110.
- [2] Урысон, П. С., Труды по топологии и другим областям математики, М.-Л., **1** (1951), 483.
- [3] Aleksandrov, P. S., Über die Urysohnschen Konstanten, *Fund. Math.*, **20** (1933), 140 – 150.
- [4] Hurewicz, W. and Wallman, H., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1941 (Appendix by L. S. Pontryagin, L. G. Shnirel'man in Russian edition).
- [5] Колмогоров, А. Н., «Докл. АН СССР», **108** (1956), 3, 385 – 388.
- [6] Брудный Ю. А., Тиман А. Ю., «Докл. АН СССР», **126** (1959), 5, 927 – 930.
- [7] Тихомиров В. М., «Успехи Матем. наук.», **15** (1960), 3, 81 – 120; **20** (1965), 1, 227 – 230.
- [8] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.
- [9] Тихомиров В. М., Теория приближения функций, Тр. Межд. конф. по Теории приближения функций, Калуга, 1975, М., 1977, 359 – 365.
- [10] Исмагилов Р. С., в кн., Геометрия линейных пространств и теория операторов, Ярославль, 1977, 75 – 113.
- [11] Исмагилов Р. С., «Успехи матем. наук.», **29** (1974), 3, 161 – 178.
- [12] Маковоз, Ю. И., «Матем. сб.», **87** (1972), 1, 138 – 142.
- [13] Кашин, Б. С., «Изв. АН СССР, Сер. матем.», **41** (1977), 2, 334 – 351.
- [14] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976. В. М. Тихомиров撰

【补注】关于逼近论中的宽度理论, 西方文献中的最好来源可能是 [A3], 其中有一份详尽的文献目录, 含有许多俄文的参考资料.

Александров  $N$  宽度及 Урысон  $N$  宽度可以用来刻画覆盖维数 (convering dimension) (见维数 (dimension)): 若  $X$  是某个 Euclid 空间  $\mathbf{R}^n$  的紧子空间, 则  $\dim X \leq N$  的充要条件是  $a_N(X) = 0$ , 即存在任意小的映射, 把  $X$  映入  $N$  维多面体. 同样, 若  $X$  是紧度量空间, 则  $\dim X \leq N$  的充要条件是  $u_N(X) = 0$ .

#### 参考文献

- [A1] Engelking, R., Dimension theory, PWN & North Holland, 1978.
- [A2] Michelli, Ch. A. and Rivlin, Th. J., A Survey in optimal recovery, in Ch. A. Michelli and Th. J. Rivlin (eds.): Optimal Estimation in Approximation Theory, Plenum, 1977, 1 – 54.
- [A3] Pinkus, A.,  $n$ -widths in approximation theory, Springer, 1985. 胡师度、白苏华译

## Wiener 混沌分解 [Wiener chaos decomposition]

【补注】 设  $U$  为一可分 Hilbert 空间  $H$  的稠子空间. 由单射  $i: U \rightarrow H$  给定的三重组  $U \subset H \subset U^*$ , 是由等同  $H$  与其对偶, 取  $i$  的对偶, 再赋予  $U$  的代数对偶  $U^*$  以弱拓扑而得到的. 对于任意实数  $\lambda$ , 令  $\lambda H$  为以  $\lambda$  乘  $H$  的范数而从  $H$  得到的 Hilbert 空间.

对称  $k$  重张量积  $S_k(U)$  的对偶, 是  $U$  上所有  $k$  次齐次多项式的空间  $\text{Pol}_k(U)$ .  $F_k \in \text{Pol}_k(U)$  在  $u \in U$  处的值是  $F_k(u) = \langle F_k, u^{\otimes k} \rangle_{k!}$ . 因此, 对每个  $k$ , 存在一三重组

$$S_k(U) \subset \sqrt{k!} S_k(H) \subset \text{Pol}_k(U). \quad (\text{A1})$$

取内空间  $S_k(U)$  的直和及中心空间的 Hilbert 和, 得到一三重组

$$S(U) \subset \text{Fock}(H) \subset \text{Pol}(U), \quad (\text{A2})$$

称为包装 Фок 空间 (dressed Fock space). 其中项是通常的 Фок 空间 (Fock space),

$$\text{Fock}(H) = \bigoplus \sqrt{k!} S_k(H). \quad (\text{A3})$$

外空间是  $U$  上所有形式幂级数的空间  $\prod_k \text{Pol}_k(U)$ .  $F \in \text{Pol}(U)$  在  $u \in U$  处的值  $F(u)$  定义为  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N F_k(u)$ , 若此极限存在. 例如, 对任意  $F = \sum F_k \in \text{Fock}(H)$ , 有

$$F(u) = \langle F, e^u \rangle, \quad (\text{A4})$$

其中  $e^u = \sum (k!)^{-1} u^{\otimes k}$ .

一个概率化向量空间 (probabilized vector space) 是一个构造

$$(U \cdots X \supset \Omega, P), \quad (\text{A5})$$

其中  $U$  和  $X$  是两个对偶的空间, 而  $X = \text{span}(\Omega)$  是由  $X$  的子集  $\Omega$  线性生成的. 这个子集被赋予一 Polish (或 Суслин) 拓扑, 使任一  $u \in U$  定义一  $\Omega$  上的 Borel 函数  $u(\omega) = \langle u, \omega \rangle$ . 空间  $U$  包含一个分离  $\Omega$  的点的可数子集 (因此其 Borel  $\sigma$  域由  $U$  生成). 最后,  $P$  是这个  $\sigma$  域上的概率测度.

此外, 假定柱面多项式的空间  $P(\Omega) = \text{span}(u(\omega)^k: u \in U, k = 0, 1, 2, \dots)$  在  $L_2(\Omega)$  中是稠密的. 还设如下  $U$  上的双线性型为一纯量积:

$$\begin{aligned} b(u, v) &= \\ &= E([u(\omega) - E(u(\omega))] [v(\omega) - E(v(\omega))]), \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

且令  $H$  是  $U$  的完全化. 对于任意  $k > 0$ , 令  $\pi_k$  表示  $L_2(\Omega)$  在  $\text{span}(u(\omega)^j: u \in U, j < k)$  的闭包

$\overline{P_{<k}(\Omega)}$  上的正交投影. 令  $KO_k$  为  $\overline{P_{<k}(\Omega)}$  在  $\overline{P_{\leq k}(\Omega)}$  中的正交补, 这个空间即称为  $k$  次齐次混沌 (homogeneous chaos). 空间  $L_2(\Omega)$  是  $KO_k$  的 Hilbert 直和. 此处  $L_2(\Omega)$  允许一个混沌分解 (decomposition in chaos), 如果对于任何  $k$ , 如下的映射是等距映射:

$$\begin{aligned} \sqrt{k!} S_k(H) \supset S_k(U) \ni \\ \ni Q \mapsto Q - \pi_k(Q) \in KO_k \subset L_2(\Omega). \end{aligned}$$

这些等距映射  $l_k (k = 0, 1, \dots)$  的集合是一个等距映射  $l$ , 它的逆映射

$$L_2(\Omega) \xrightarrow{l^{-1}} \text{Fock}(H), f \mapsto \hat{f} \quad (\text{A7})$$

扩张到  $\Omega$  上的广义函数, 乃是  $\Omega$  上广义函数演算的出发点. 由于 (A4),  $\hat{f}$  显然由下式给出:

$$\hat{f}(u) = \langle \hat{f}, e^u \rangle = E[f \varepsilon^u], \quad (\text{A8})$$

其中  $\varepsilon^u = l^{-1}(e^u)$ .

混沌分解是由 N. Wiener 发现的 (对  $\Omega$  为 Wiener 空间的情形) ([A1]). 进一步的贡献则应归于 Th. A. Dwyer 与 I. Segal ([A2], [A3]), 它们在构造性量子场论中是很重要的. K. 伊藤获得了 Poisson 概率空间的混沌分解, 并把  $l_k(f)$  解释为重随机积分. 关于公式 (A8) 扩张到 Gauss 概率空间的广义函数, 见 [A5], [A6], [A7], [A9], [A10]. 与 Malliavin 演算的联系, 见 [A8].

更多的材料亦见 [A11], [A12]; Wick 积 (Wick product), 白噪声分析 (White noise analysis), 及其中的参考文献.

## 参考文献

- [A1] Wiener, N., The homogeneous chaos, Amer. J. Math., 60 (1938), 897 - 936.
- [A2] Dwyer, Th. A., III: Partial differential equations in Fischer-Fock spaces for the Hilbert-Schmidt holomorphy type, Bull. Amer. Math. Soc., 77 (1971), 725 - 730.
- [A3] Segal, I., Tensor algebras over Hilbert space, I, Trans. Amer. Math. Soc., 81 (1956), 106 - 134.
- [A4] Itô, K., Multiple Wiener integral, J. Math. Soc. Japan, (1951), 157 - 169.
- [A5] Krée, P., Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles II, in Sémin. P. Lelong 1973/1974, Lecture notes in math., Vol. 474, Springer, 1974, 16 - 47.
- [A6] Krée, P., Raczka, R., Kernels and symbols of operators in quantum field theory, Ann. Inst. H. Poincaré (1978).
- [A7] Lascar, B., Propriétés locales des espaces de type



Sobolev en dimension infinie, *Comm. Partial Diff. Eq.*, 1 (1976), 6, 561 - 584.

[A8] Ocone, D., Malliavin calculus and stochastic integral representation of functionals of diffusion processes, *Stochastics*, 12 (1984), 161 - 185.

[A9] Krée, M., Propriété de trace en dimension infinie d'espaces du type Sobolev, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 279 (1974), 157 - 160.

[A10] Krée, M., Propriété de trace en dimension infinie d'espaces de type Sobolev, *Bull. Soc. Math. de France*, 105 (1977), 141 - 163.

[A11] Kallianpur, G., The role of reproducing kernel Hilbert spaces in the study of Gaussian processes, in P. Ney (ed.): *Adv. in Probability and Related Topics*, Vol. 2, M. Dekker, 1970, 49 - 84.

[A12] Neveu, J., *Processus aléatoires Gaussiens*, Presses Univ. de Montréal, 1968.

P. Krée 撰 潘一民 译

### Wiener-Hopf 方程 [Wiener-Hopf equation; Винера-Хопфа уравнение]

在半直线上带有依赖于自变量之差的核的一种积分方程

$$u(x) - \int_0^{\infty} k(x-s)u(s)ds = f(x), \quad 0 \leq x < \infty. \quad (1)$$

这种类型的方程常常出现于数学物理问题中, 例如在辐射转移理论 (Milne 问题) 中; 在绕射理论中 (在半平面上的绕射, 边界折射问题)。

方程 (1) 的最早研究应归功于 N. Wiener 和 E. Hopf ([1] 和 [2]), 且用一种因子分解方法来处理 (见 **Wiener-Hopf 方法** (Wiener-Hopf method)). 正是因子分解的思想证明是如 (1) 一类积分方程理论构造中的决定性因素. B. A. Фок ([3]) 在核  $k(x)$  是偶的且按指数递减的假设下研究了 Wiener-Hopf 方程.

解 Wiener-Hopf 方程的形式方案如下. 设

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{当 } x > 0, \\ 0 & \text{当 } x < 0, \end{cases}$$

$$n(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x < 0, \\ - \int_0^{\infty} k(x-s)u(s)ds & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

则方程 (1) 能在整个直线上写成

$$v(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k(x-s)v(s)ds = f(x) + n(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

如果构成方程 (2) 的组成部分的所有函数的 Fourier

变换的存在性条件满足, 即

$$V(\lambda) = \int_0^{\infty} u(x)e^{i\lambda x}dx, \quad K(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x)e^{i\lambda x}dx,$$

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx, \quad N(\lambda) = \int_{-\infty}^0 n(x)e^{i\lambda x}dx$$

存在, 则用 **Fourier 变换** (Fourier transform), 方程 (2) 化成函数方程

$$[1 - K(\lambda)]V(\lambda) = F(\lambda) + N(\lambda), \quad (3)$$

其中  $V(\lambda)$  和  $N(\lambda)$  是未知函数. Wiener-Hopf 方法使得对某一类函数解方程 (3) 是可能的. 在这方面, 条件  $1 - K(\lambda) \neq 0$  必须满足. 该方程的指标

$$\nu = -\text{ind}[1 - K(\lambda)] = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda [1 - K(\lambda)], \quad (4)$$

在具有非对称核的方程 (1) 的理论中起着特别的作用. 设  $k \in L_1(-\infty, \infty)$  且  $1 - K(\lambda) \neq 0$ , 则有: 如果  $\nu = 0$ , 那么非齐次方程 (1) 有唯一解; 如果  $\nu > 0$ , 那么齐次方程 (1) 有  $\nu$  个线性无关的解; 如果  $\nu < 0$ , 那么非齐次方程 (1) 或者无解, 或者当以下条件:

$$\int_0^{\infty} f(x)\psi_k(x)dx = 0, \quad k = 0, \dots, |\nu| - 1$$

满足时有唯一解, 这里  $\psi_k(x)$  是 (1) 的转置齐次方程

$$\psi(x) - \int_0^{\infty} k(x-s)\psi(s)ds$$

的线性无关解.

### 参考文献

[1] Wiener, N. and Hopf, E., Ueber eine Klasse singularer Integralgleichungen, *Sitzungber. Akad. Wiss. Berlin*, (1931), 696 - 706.

[2] Hopf, E., *Mathematical problems of radiative equilibrium*, Cambridge Univ. Press, 1934.

[3] Фок, B. A., «Матем. сб.», 14 (1944), 1 - 2, 3 - 50.

[4] Noble, B., *Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations*, Pergamon, 1958. В. И. Дмитриев 撰

【补注】关于上面提到的 Wiener-Hopf 积分方程解的一些定理发表于 [A1] 中, 该文在许多不同的 Banach 或 Hilbert 型函数空间中讨论方程 (1). 该理论的矩阵值的说法属于 [A2]. 当  $K(\lambda)$  是一个有理矩阵函数的情况下的显式解可在 [A3] 中找到. 关于 Wiener-Hopf 积分方程理论的最近阐述, 包括 Fredholm 理论和对有理的  $K(\lambda)$  情况的状态空间方法, 见 [A4].

## 参考文献

- [A1] Krein, M. G., Integral equations on a half-line with kernel depending upon the difference of the arguments, *Transl. Amer. Math. Soc.* (2), **22** (1962), 162 - 288 (*Uspekhi Mat. Nauk* **13** (1958), 5, 3 - 120).
- [A2] Gohberg, I. and Krein, M. G., Systems of integral equations on a half line with kernels depending on the difference of arguments, *Transl. Amer. Math. Soc.* (2), **14** (1960), 217 - 287 (*Uspekhi Mat. Nauk*, **13** (1958), 2 (80), 3 - 72).
- [A3] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Minimal factorizations of matrix and operator functions, Birkhäuser, 1979.
- [A4] Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. A., Classes of linear operators, 1, Birkhäuser, 1990, Chaps. XI - XII.
- [A5] Hochstatt, H., Integral equations, Wiley, 1973.

葛显良 译 吴绍平 校

## Wiener-Hopf 法 [Wiener-Hopf method; Винера-Хопфа метод]

解以下类型:

$$A(\lambda)\Phi_+(\lambda) + B(\lambda)\Phi_-(\lambda) + C(\lambda) = 0 \quad (1)$$

的函数方程的一种方法, 其中  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$  是一个复变量  $\lambda$  的给定函数, 在带形  $\tau_- < \operatorname{Im} \lambda < \tau_+$  内解析, 且  $A(\lambda)$  和  $B(\lambda)$  在此带形中是非零的. 函数  $\Phi_+(\lambda)$  和  $\Phi_-(\lambda)$  是复变量  $\lambda$  的未知函数, 当  $|\lambda| \rightarrow \infty$  时趋于零且是待定的,  $\Phi_+(\lambda)$  对  $\operatorname{Im} \lambda > \tau_-$  解析而  $\Phi_-(\lambda)$  对  $\operatorname{Im} \lambda < \tau_+$  解析. 方程 (1) 必须在整个的解析带形  $\tau_- < \operatorname{Im} \lambda < \tau_+$  满足.

Wiener-Hopf 方法以下面两个定理为基础.

1) 在带形  $\tau_- < \operatorname{Im} \lambda < \tau_+$  内解析且当  $|z| \rightarrow \infty$  时一致趋向于零的函数  $F(\lambda)$  在此带形内能够表成和式:

$$F(\lambda) = F_+(\lambda) - F_-(\lambda),$$

其中  $F_+(\lambda)$  在半平面  $\operatorname{Im} \lambda > \tau_-$  内解析, 而  $F_-(\lambda)$  在半平面  $\operatorname{Im} \lambda < \tau_+$  内解析.

2) 在带形  $\tau_- < \operatorname{Im} \lambda < \tau_+$  内解析且不为零而又在此带形内当  $|\lambda| \rightarrow \infty$  时一致趋于 1 的函数  $F(\lambda)$  在该给定带形内可表成乘积:

$$F(\lambda) = F_+(\lambda) \cdot F_-(\lambda), \quad (2)$$

其中  $F_+(\lambda)$  和  $F_-(\lambda)$  分别在半平面  $\operatorname{Im} \lambda > \tau_-$  和  $\operatorname{Im} \lambda < \tau_+$  内解析且不为零. 表示式 (2) 通常称为函数  $F(\lambda)$  的一个因子分解 (factorization).

Wiener-Hopf 法的基本思想在于将函数  $L(\lambda) = A(\lambda)/B(\lambda)$  作因子分解是可能的; 换言之, 该方法

基于表示式

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = \frac{L_+(\lambda)}{L_-(\lambda)} \quad (3)$$

是可能的这一假定. 利用 (3), 方程 (1) 可写成:

$$L_+(\lambda)\Phi_+(\lambda) + L_-(\lambda)\Phi_-(\lambda) + L_-(\lambda)\frac{C(\lambda)}{B(\lambda)} = 0.$$

由于  $L_-(\lambda)C(\lambda)/B(\lambda)$  在该带形内部解析, 有

$$L_-(\lambda)\frac{C(\lambda)}{B(\lambda)} = D_+(\lambda) + D_-(\lambda). \quad (4)$$

利用 (4), 最后得到方程 (1) 变为形式

$$L_+\Phi_+ + D_+ = -D_- - L_-\Phi_-. \quad (5)$$

(5) 式左边表示一个在  $\operatorname{Im} \lambda > \tau_-$  中是解析的函数, 而右边是一个在  $\operatorname{Im} \lambda < \tau_+$  中是解析的函数. 由于它们有一个公共的解析性带形, 在其中条件 (5) 满足, 因而存在唯一的整函数  $P(\lambda)$  分别地与 (5) 的左边和右边在它们的解析区域中恒等. 因而

$$\Phi_+(\lambda) = \frac{P(\lambda) - D_+(\lambda)}{L_+(\lambda)},$$

$$\Phi_-(\lambda) = \frac{-P(\lambda) - D_-(\lambda)}{L_-(\lambda)},$$

即 (1) 的解是唯一确定到相差一个整函数. 如果  $L(\lambda)$  和  $D(\lambda)$  的增长阶数在无穷处是有界的,  $P(\lambda)$  必是一个多项式. 所求诸函数则唯一地确定到相差常数, 它们由所加的附加条件计算出.

Wiener-Hopf 法在 [1] 中形成用于解特殊类型的积分方程 (见 Wiener-Hopf 方程 (Wiener-Hopf equation)). 它随后在数学物理的各种问题中找到了广泛的应用 ([2]).

## 参考文献

- [1] Wiener, N. and Hopf, E., Ueber eine Klasse singularer Integralgleichungen, *Sitzungber. Akad. Wiss. Berlin*, (1931), 696 - 706.
- [2] Noble, B., Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations, Pergamon, 1958. В. И. Дмитриев 撰

【补注】上面叙述的定理 2 是错误的; 它需要一个附加条件, 即由  $\lambda \mapsto F(\lambda)$  参数化的曲线的卷绕数等于零, 这里  $\lambda$  跑遍给定带形中直线  $\operatorname{Im} \lambda = \tau$ . 所以上面描述的 Wiener-Hopf 法仅在对  $A(\lambda)/B(\lambda)$  卷绕数条件满足这附加要求下才可行. 对各种函数类 (不必在一带形上解析) 的 Wiener-Hopf 法的详细分析可在 [A1] 中找到. 这个理论的矩阵值的表述, 应归于 [A2] (亦见 [A3]), 是更加复杂且显式解仅在特殊情况才能得到. 当出现于方程 (1) 的函数  $A(\lambda)$  和  $B(\lambda)$  是有理矩阵的情形是特别有兴趣的且能应用一种与数学系统理论有联系的状态空间方法显式地求解 (见



[A4], [A5] 和卷积型积分方程 (integral equation of convolution type)).

#### 参考文献

- [A1] Kreĭn, M. G., Integral equations on a half-line with kernel depending upon the difference of the arguments, *Transl. Amer. Soc.* (2), **22** (1962), 163 – 288 (*Uspekhi Mat. Nauk*, **13** (1958), 5, 3 – 120).
- [A2] Gohberg, I. Ts. and Kreĭn, M. G., Systems of integral equations on a half line with kernels depending on the difference of arguments, *Transl. Amer. Math. Soc.* (2), **14** (1960), 217 – 287 (*Uspekhi Mat. Nauk*, **13** (1958), 2 (80)).
- [A3] Gohberg, I. C. and Feldman, I. A., Convolution equations and projection methods for their solution, *Amer. Math. Soc.*, 1974 (译自俄文).
- [A4] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Minimal factorizations of matrix and operator functions, *Birkhäuser*, 1979.
- [A5] Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., The state space method for solving singular integral equations, in A. C. Antoulas (ed.): *Mathematical System Theory. The influence of Kalman*, Springer, 1991, 509 – 523.
- [A6] Hochstatt, H., *Integral equations*, Wiley, 1973.

葛显良 译 吴绍平 校

#### Wiener 积分 [Wiener integral; Винера интеграл]

一种 Lebesgue 型的抽象积分, 是定义在无穷维函数空间中集族上泛函的积分, 由 N. Wiener 在 19 世纪研究 Brown 运动 (Brownian motion) 时引进的 ([1], [2]).

设  $C_0$  是由定义在  $[0, 1]$  上的实值连续函数  $x$  组成的向量空间, 其中  $x(0) = 0$ , 其范数为

$$\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|.$$

集合

$$Q = \{x \in C_0 : a_i \leq x(t_i) \leq b_i, \\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$$

称为该空间的拟区间 (quasi-interval). 这里  $a_i$  和  $b_i$  可以是  $-\infty$  和  $+\infty$ , 但此时符号  $\leq$  必须换成符号  $<$ . 全空间  $C_0 = \{x(t) : -\infty < x(1) < +\infty\}$  就是拟区间一例.

拟区间  $Q$  的 Wiener 测度 (Wiener measure) 是指数值

$$\mu_w(Q) = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi^n \prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})}} \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} e^{-L_n} dx_n \cdots dx_1,$$

其中

$$L_n = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}},$$

且  $x_j = x(t_j)$ . 这一测度扩展于由拟区间生成的集族 Borel 域上的  $\sigma$  加性测度也就是著名的 Wiener 测度.

设  $F$  是  $C_0$  上的一个泛函, 关于测度  $\mu_w$  是可测的. 此时, 其 Lebesgue 型积分

$$\int_{C_0} F(x) d\mu_w(x)$$

就是知名的泛函  $F$  的 Wiener 积分 (Wiener integral), 或泛函  $F$  关于 Wiener 测度的积分 (integral with respect to the Wiener measure). 如果  $E \subset C_0$  是可测的, 那么

$$\int_E F(x) d\mu_w(x) = \int_{C_0} F(x) \chi_E(x) d\mu_w(x),$$

其中  $\chi_E$  是集合  $E$  的特征函数.

Wiener 的积分具有通常 Lebesgue 积分的多种性质. 特别是, 在集合  $E$  上的一个有界可测泛函在此集合上关于 Wiener 测度是可积的, 且此外如果  $F$  是连续和非负的, 那么

$$\int_{C_0} F(x) d\mu_w(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi^n \prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})}} \times \\ \times \int_{R^n} \frac{F_n(x_1, \cdots, x_n)}{e^{L_n}} dx_1, \cdots, dx_n,$$

其中  $F_n(x_1, \cdots, x_n)$  是关于点列  $(t_i, x_i \equiv x(t_i))$  间  $x(t)$  的线性内插上  $F$  的值.

Wiener 积分的计算呈现出相当大的困难, 甚至对最简单的泛函也如此. 有时, 这项工作可转化为解一个简单微分方程 ([1]).

有一种方法, 可借助高重数 Stieltjes 积分 (Stieltjes integrals) 的逼近来近似计算 Wiener 积分.

#### 参考文献

- [1] Ковальчик, И. М., «Успехи матем. наук», **18** (1963), 1, 97 – 134.
- [2] Шилов, Г. Е., «Успехи матем. наук», **18** (1963), 2, 99 – 120. В. И. Соболев 撰

【补注】关于上述意义下的 Wiener 积分还可参见 [A1] 和 [A2]. 在西方的文献中, “Wiener 积分” 的正式称呼是指一个确定性函数  $f \in L_2[0, t]$  (对每个  $t \in \mathbf{R}_+$ ) 关于概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的 Wiener 过程 (Wiener process)  $X(t)$  的随机积分 (stochastic integral). 记为

$$I_t(f) = \int_0^t f(s) dX(s),$$

且定义如下: 如果  $f$  是一个简单函数 (simple function),

即对  $s \in (t_{i-1}, t_i)$  有  $f(s) = a_i$ , 其中  $a_i \in \mathbf{R}$  且  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ , 那么

$$I_t(f) = \sum_{i=1}^n a_i (X(t_i) - X(t_{i-1})).$$

记简单函数全体为  $S$ . 对  $f, g \in S$ , 经计算可得  $E I_t(f) = 0$ ,  $E (I_t(f) I_t(g)) = \int_0^t f(s) g(s) ds$ , 即  $f \mapsto I_t(f)$  是从  $L_2[0, t]$  到  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  的保内积映射. 对任一  $f \in L_2[0, t]$ , 存在一列  $f_n \in S$ , 使得  $f_n \rightarrow f$ , 从而  $\{I_t(f_n)\}$  是  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  中的 Cauchy 列, 而定义

$$\int_0^t f(s) dX(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_t(f_n).$$

这一构造中值得注意的特性如下:

能对一切  $t \geq 0$  同时定义  $I_t(f)$ , 且可得到一种界说, 它是具有连续样本道路

$$\text{sp}\{X(s): 0 \leq s \leq t\} = \{I_t(f): f \in L_2[0, t]\}$$

的 Gauss 鞅 (Gaussian martingale), 其中 “sp” 表示在  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  中的闭线性张成. 关于在此意义下的 Wiener 积分见 [A3], [A4].

#### 参考文献

- [A1] Chorin, A. J., Accurate evaluation of Wiener integrals, *Math. Comp.*, **27** (1973), 1 – 15.
- [A2] Blankenship, G. L. and Baras, J. S., Accurate evaluation of stochastic Wiener integrals with applications to scattering in random media and to nonlinear filtering, *SIAM J. Appl. Math.*, **41** (1981), 518 – 552.
- [A3] Davis, M. H. A., Linear estimation and stochastic control, Chapman & Hall, 1977.
- [A4] Lipster, R. S. and Shiryaev, A. N., Statistics of random processes, 1, Springer, 1977 (译自俄文).
- [A5] Yeh, J., Stochastic processes and the Wiener integral, M. Dekker, 1973.
- [A6] Simon, B., Functional integration and quantum physics, Acad. Press, 1979.
- [A7] Rogers, L. C. G. and Williams, D., Diffusions, Markov processes, and martingales, 2, Itô calculus, Wiley, 1987.
- [A8] Bauer, H., Probability theory and elements of measure theory, Holt, Rinehart & Winston, 1972.

周民强 译

#### Wiener 测度 [Wiener measure; Винера мера]

区间  $[0, 1]$  上的实值连续函数  $x$  组成的空间  $C[0, 1]$  上的概率测度 (probability measure)  $\mu_w$ , 定义如下: 设  $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq 1$  是  $[0, 1]$  的任一组样本点,  $A_1, \cdots, A_n$  是实轴上的 Borel 集. 记  $C(t_1, \cdots, t_n; A_1, \cdots, A_n)$  是一族函数  $x \in C[0, 1]$ ,

其中  $x(t_k) \in A_k$ ,  $k = 1, 2, \cdots, n$ . 那么

$$\begin{aligned} \mu_w(C(t_1, \cdots, t_n; A_1, \cdots, A_n)) &= \quad (*) \\ &= \int_{A_1} p(t_1, x_1) dx_1 \int_{A_2} p(t_2 - t_1, x_2 - x_1) dx_2 \cdots \\ &\quad \cdots \int_{A_n} p(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1}) dx_n, \end{aligned}$$

这里

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}.$$

借助于测度扩张定理, 根据等式 (\*), 可以在所有  $C[0, 1]$  的 Borel 集上定义测度  $\mu_w$  的值.

A. B. Скороход 撰

【补注】 Wiener 测度是 N. Wiener 在 1923 年导入的 ([A1]); 这是积分论在超越有限维背景下首次较大的拓广. 上面概述的构造容易扩展到定义在  $C[0, \infty)$  上的 Wiener 测度  $\mu_w$ . 坐标过程  $x(t)$  就是著名的 Brown 运动 (Brownian motion) 或 Wiener 过程 (Wiener process). 它的形式导数 “ $dx(t)/dt$ ” 称为 Gauss 白噪声 (white noise).

#### 参考文献

- [A1] Wiener, N., Differential space, *J. Math & Phys.*, **2** (1923), 132 – 174.
- [A2] Hida, T., Brownian motion, Springer, 1980.
- [A3] Karatzas, I. and Shreve, S. E., Brownian motion and stochastic calculus, Springer, 1988.
- [A4] Partzsch, L., Vorlesungen zum eindimensionalen Wienerischen Prozess, Teubner, 1984.
- [A5] Yeh, J., Stochastic processes and the Wiener integral, M. Dekker, 1973.
- [A6] Albeverio, S., Fenstad, J. E., Høegh-Krohn, R. and Lindstrøm, T., Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics, Acad. Press., 1986.

周民强 译

#### Wiener 过程 [Wiener process; Винеровский процесс]

一种具有独立增量的齐次 Gauss 过程 (Gaussian process)  $X(t)$ . Wiener 过程作为 Brown 运动 (Brownian motion) 的模型之一. 经简单的变换把 Wiener 过程作为 “标准” Wiener 过程  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , 它满足

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, E(X(t) - X(s)) = 0, \\ D[X(t) - X(s)] &= t - s, s \leq t. \end{aligned}$$

对于这样的平均值和增量方差, 这是具独立增量的, 几乎必然连续的仅有过程. 以下 Wiener 过程就理解为这种过程.

Wiener 过程  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 也可以定义作具有零期望和协方差函数

$$B(s, t) = \min(s, t)$$



的 Gauss 过程. Wiener 过程  $X = X(t)$ ,  $t \geq 0$ , 也可以定义作具有转移函数

$$P(t, x, \Gamma) = \int_{\Gamma} p(t, x, y) dy$$

的齐次 **Марков** 过程 (Markov process), 其中转移密度 (transition density)  $p(t, x, y)$  是偏微分方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

的基本解, 用公式

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y-x)^2/2t}$$

给定. 其转移函数  $P(t, x, \Gamma)$  在相空间中是平移不变的:

$$P(t, x + y, \Gamma) = P(t, x, \Gamma - y),$$

其中  $\Gamma - y$  表示集合  $\{z: z + y \in \Gamma\}$ .

Wiener 过程是离散时间质点的随机游动 (random walk) 的连续类比. 质点在离散时刻  $t = k\Delta t$  ( $\Delta t$  的倍数) 随机地位移一个与过去独立的量  $\Delta X(t)$  ( $E\Delta X(t) = 0$ ,  $D\Delta X(t) = \Delta t$ ); 更确切地, 如果

$$X(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta X\left[\frac{k}{n}\right] + (nt - m)\Delta X\left[\frac{m}{n}\right],$$

$$0 \leq t \leq 1,$$

是这一质点在区间  $[0, 1]$  上运动的随机轨道 (其中  $m = [nt]$  是  $nt$  的整数部分,  $X(t) = nt\Delta X(0)$ , 如果  $0 \leq t < 1/n$ ,  $P_n$  是在连续函数  $x = x(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 空间上相应的概率分布), 则 Wiener 过程  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 轨道的概率分布是分布  $P_n$  当  $n \rightarrow \infty$  时 (在弱收敛意义上) 的极限.

作为一个取值在 Hilbert 空间  $L_2(\Omega)$  (一切具有  $E X^2 < \infty$  的随机变量构成的空间, 其内积由公式

$$\langle X_1, X_2 \rangle = E X_1 X_2$$

定义) 上的函数, Wiener 过程  $X = X(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 可以规范地表示为

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \varphi_k(t),$$

其中  $z_k$  是独立 Gauss 变量,

$$E z_k = 0, D z_k = \frac{1}{\left[\frac{\pi}{2} (2k+1)\right]^2},$$

且

$$\varphi_k(t) = \sin \left[ \frac{\pi}{2} (2k+1)t \right], k = 0, 1, \dots$$

是用下述公式在一切  $[0, 1]$  上平方可积 (关于 Lebesgue 测度) 函数的 Hilbert 空间  $L_2[0, 1]$  上定义的算子

$B$  的本征函数.

$$B\varphi(t) = \int_0^1 B(s, t)\varphi(s)ds.$$

Wiener 过程的几乎所有的轨道具有下述性质:

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{X(h)}{\sqrt{2h \ln \ln \frac{1}{h}}} = 1, X(0) = 0,$$

这是重对数律 (law of the iterated logarithm);

$$\limsup_{h \rightarrow 0+, 0 \leq t \leq \delta - h} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{\sqrt{2h \ln \frac{\delta}{h}}} = 1,$$

表征在  $[0, h]$  上连续性的模数; 以及

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta X(kh)|^2 = \delta,$$

$$h = \frac{\delta}{n}, \Delta X(t) = X(t+h) - X(t).$$

当应用于 Wiener 过程  $X_1(t) = tX(1/t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , 时, 重对数律写作

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_1(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1.$$

最大值  $\max_{0 \leq s \leq t} X(s)$ , Brown 质点首次达一固定点  $x > 0$  的首达时  $\tau_x$ , 以及在 Brown 质点的运动中首次见到值  $\max_{0 \leq s \leq t} X(s)$  的时刻  $\tau$  的分布深刻地刻画了 Brown 质点运动的性质, 这些分布用下列公式给出:

$$P\left\{\max_{0 \leq s \leq t} X(s) > x\right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2t} du,$$

$$P\{\tau_x \geq t\} = P\left\{\max_{0 \leq s \leq t} X(s) \leq x\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-u^2/2} du,$$

$$0 < t < \infty, 0 \leq x < \infty,$$

(对相空间的变换  $x \rightarrow -x$ , Wiener 过程的分布律保持不变). 最大值点  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , 和最大值  $\max_{0 \leq s \leq t} X(s)$  本身的联合分布具有概率密度

$$p(s, x) = \frac{1}{\pi \sqrt{s(t-s)}} \frac{x}{s} e^{-x^2/2s},$$

$$0 < s < t, 0 \leq x < \infty,$$

而点  $\tau$  本身 (以概率 1 在区间  $0 \leq s \leq t$  上仅有一个最大值) 按反正弦律 (arcsine law):

$$P(\tau \leq s) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}, 0 \leq s \leq t,$$

分布, 具有概率密度

$$p(s) = \frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}, \quad 0 < s < t.$$

Wiener 过程的下列性质很容易由上述公式得到. Brown 轨道是无处可微的; 从任意点  $x$  开始以概率 1, 轨道穿过“水平” $x$  (回到它的起始点) 无穷多次, 即便在短时间  $\delta$  内; Brown 轨道以概率 1 通过所有的点  $x$  (更严格的说,  $\tau_x < \infty$ ) 对于大的  $x$ ,  $\tau_x$  的最可能值与  $x^2$  同阶. 如果考虑固定区间  $[0, t]$ , 轨道往往在接近于端点  $s=0$  和  $s=t$  处达到其极值.

因为 Wiener 过程是齐次 Марков 过程, 存在它的不变测度  $Q(dx)$ , 即

$$Q(A) = \int Q(dx)P(t, x, A),$$

因为已经看到转移函数  $P(t, x, A)$  是不变的, 它与实直线上的 Lebesgue 测度相合:  $Q(dx) = dx$ . Brown 运动在时间 0 和  $T$  之间处于集合  $A$  上的时间  $T(A)$  满足, 当  $T \rightarrow \infty$  时,

$$\frac{T(A_1)}{T(A_2)} \rightarrow \frac{Q(A_1)}{Q(A_2)}$$

以概率 1 对任何有界 Borel 集  $A_1$  和  $A_2$  成立.

由 Lévy ([3]) 导出的 Wiener 随机场类似于向量参数  $t = (t_1, \dots, t_n)$  的 Wiener 过程  $X(t)$ .

#### 参考文献

- [1] Itô, K. and MacKean, H. P., Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1974.
  - [2] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд, М., 1973 (英译本: Prokhorov, Yu. V. and Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).
  - [3] Lévy, P., Processus stochastiques et mouvement Brownien, Gauthier-Villars, 1965.
  - [4] Павлов, В. П., Броуновское движение, в кн.: БСЭ, 3 изд, т. 4, М., Ю. А. Розанов 撰
- 【补注】西方文献中更普遍地是把 Wiener 过程看作 Brown 运动 (Brownian motion). 它是随机分析中最重要的结构. 对迄今为止有关它的性质的阐述见 [A1]—[A3]. 特别重要的是局部时 (local time) 理论. 在区间  $[0, t]$  上 Borel 集  $B$  的占据时间 (occupation time) 是

$$\Gamma_t(B) = \int_0^t I_B(X(s)) ds.$$

存在一个几乎必然联合连续的随机场 (random field)  $L(t, x)$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , 使得

$$\Gamma_t(B) = 2 \int_B L(t, x) dx.$$

$L(t, x)$  是在  $x$  处的局部时. 对固定的  $x \in \mathbb{R}$ , 过程  $t \mapsto L(t, x)$  的样本轨道是增的、连续的, 但对 Lebesgue 测度是奇异的.

亦见 Марков 过程 (Markov process); 随机微分

方程 (stochastic differential equation).

#### 参考文献

- [A1] Durrett, R., Brownian motion and martingales in analysis, Wadworth, 1984.
- [A2] Karatzas, I. and Shreve, S. E., Brownian motion and stochastic calculus, Springer, 1988.
- [A3] Revuz, D. and Yor, M., Continuous martingales and Brownian motion, Springer, 1990.
- [A4] Dynkin, E. B., Markov processes, I, Springer, 1965 (译自俄文).
- [A5] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1—2, Wiley, 1957—1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 第一卷, 上、下册, 科学出版社, 1964, 1979; 第二卷, 科学出版社, 1994).
- [A6] Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., The theory of stochastic processes, III, Springer, 1975 (译自俄文).
- [A7] Hida, T., Brownian motion, Springer, 1980.
- [A8] Spitzer, F., Principles of random walk, v. Nostrand, 1964.
- [A9] Yeh, J., Stochastic processes and the Wiener integral, M. Dekker, 1973.
- [A10] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984.

刘秀芳 译 陈培德 校

#### Wiener Tauber 定理 [Wiener Tauberian theorem; Вилнера Тауберова теорема]

若  $x \in L_1(-\infty, \infty)$  有处处不为零的 Fourier 变换 (Fourier transform),  $y$  是  $L_\infty(-\infty, \infty)$  中的函数, 使得  $t \rightarrow \infty$  时卷积  $(x \star y)$  趋于零, 则对任意  $z \in L_1(-\infty, \infty)$ , 卷积  $(z \star y)$  当  $t \rightarrow \infty$  时趋于零. 它是 N. Wiener 建立的 ([1]). 这个定理可以推广到包含任何可换局部紧非紧群  $G$  上: 若  $x$  是  $G$  上的函数, 关于 Haar 测度 (Haar measure) 可和, 其 Fourier 变换在  $G$  的特征群  $\hat{G}$  上不为零,  $y$  是  $L_\infty(G)$  内函数, 使得卷积  $(x \star y)$  在  $G$  的无穷远处趋于零, 则对  $G$  中所有可和函数  $z$ , 卷积  $(z \star y)$  在  $G$  的无穷远处趋于零.

这个定理基于可换局部紧群的群代数 (group algebra) 的正则性, 及属于仅有限个正则极大理想的闭理想的群代数中谱综合 (spectral synthesis) 的可能性 ([3]).

#### 参考文献

- [1] Wiener, N., Tauberian theorems, Ann. of Math. (2), 33 (1932), 1, 1—100.
- [2] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本: Naïmark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984).



[3] Bourbaki, N., Théories spectrales, Eléments de mathématique. Hermann, 1967. А. И. Штерн 撰

## 【补注】

## 参考文献

[A1] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis, 2, Springer, 1970.

[A2] Rudin, W., Fourier analysis on groups, Interscience, 1962.

[A3] Reiter, H., Classical harmonic analysis and locally compact spaces, Clarendon Press, 1968.

罗嵩龄 译

## Wilcoxon 检验 [Wilcoxon test; Вилкоксона критерий]

两个样本  $X_1, \dots, X_n$  和  $Y_1, \dots, Y_m$  齐一性的非参数检验 (non-parametric test). 假设两样本的元素相互独立, 其分布函数是连续型的, 分别为  $F(x)$  和  $G(x)$ . 拟检验的假设为  $F(x) = G(x)$ . Wilcoxon 检验基于秩统计量 (rank statistic)

$$W = s(r_1) + \dots + s(r_m), \quad (*)$$

其中  $r_j$  是随机变量  $Y_j$  在  $X_i$  和  $Y_j$  的联合顺序统计量序列中的秩, 而函数  $s(r) (r = 1, \dots, n+m)$  由事先给定的置换决定,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n+m \\ s(1) & s(2) & \dots & s(n+m) \end{pmatrix},$$

其中  $s(1), \dots, s(n+m)$  是数  $1, \dots, n+m$  可能的排列之一. 对于给定的备选假设, 选择置换使 Wilcoxon 检验的功效最大. 统计量  $W$  的分布只依赖于样本容量, 而不依赖于置换的选择 (只要齐一性假设成立). 当  $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$  时, 随机变量  $W$  有渐近正态分布. Wilcoxon 检验的这种形式, 是 F. Wilcoxon 针对两等容量样本于 1945 首先提出的, 并且基于  $s(r) \equiv r$  的特殊情形 (见秩和检验 (rank sum test); Mann-Whitney 检验 (Mann-Whitney test)). 亦见 van der Waerden 检验 (van der Waerden test); 秩检验 (rank test).

## 参考文献

[1] Wilcoxon, F., Individual comparison by ranking methods, Biometrics, 1(1945), 6, 80 - 83.

[2] Бoльшев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1983.

[3] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957. А. В. Прохоров 撰

## 【补注】

## 参考文献

[A1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988. 周概容 译

非驯嵌入 [wild imbedding; дикое вложение], 拓扑空间  $X$  在拓扑空间 (topological space)  $Y$  中的

一个嵌入, 它不拓扑等价于从被称为驯顺的 (tame) 或佳嵌入 (nice imbeddings) 中选出来的某类的嵌入. 下面所列的情形是最有用的;  $n$  维 Euclid 空间取作  $Y$ .

1) 设  $M$  是一个  $k$  维拓扑流形 (见流形的拓扑学 (topology of manifolds)), 拓扑嵌入  $g: M \rightarrow \mathbf{R}^n$  (见嵌入的拓扑学 (topology of imbeddings)) 称为非驯的 (wild), 如果不存在  $\mathbf{R}^n$  到它自身的一个同胚, 它将  $g(M)$  变到  $\mathbf{R}^n$  中的一个局部平坦的子流形中.

2) 设  $P$  是一个  $k$  维多面体 (polyhedron). 拓扑嵌入  $g: P \rightarrow \mathbf{R}^n$  称为非驯的 (wild), 如果不存在  $\mathbf{R}^n$  到它自身的一个同胚, 它将  $g(P)$  变到  $\mathbf{R}^n$  中的多面体中 (即变到一个有某个三角剖分的体中).

3) 设  $K$  是  $k$  维局部紧空间 (locally compact space). 拓扑嵌入  $g: K \rightarrow \mathbf{R}^n$  称为非驯的, 如果不存在  $\mathbf{R}^n$  到它自身的一个同胚, 它将  $g(K)$  变到  $k$  维 Menger 紧统  $M_n^k$  的一个子集中.

如果维数  $k \leq n-3$  和如果  $n \geq 5$ , 那么, 在所有三种情形中导出的性质是由下面的局部同伦性质来刻画: 一个嵌入是非驯的, 当且仅当  $g(X)$  不满足性质 1-ULC (见嵌入的拓扑学 (topology of imbedding)). 对余维数  $n-k=1$  和 2 的状况更加复杂: 对  $n \geq 6$ , 余维数为 1 的流形, 问题已被解决, 但余维数为 2 的嵌入流形和多面体, 两者都没有完全解决. 如果  $Y$  是  $n$  维流形——拓扑的或者分片线性的, 所有叙述的也都是有意义的.

М. А. Штанько 撰 徐森林 译

## 非驯纽结 [wild knot; дикий узел]

Euclid 空间  $E^3$  中的一个纽结  $L$  (见纽结理论 (knot theory)), 使得不存在  $E^3$  到它自身的同胚, 在此同胚下,  $L$  变成由有限条线段组成的闭折线.

这样, 包含所谓的 Fox - Artin 弧 (Fox - Artin arcs)——由  $E^3$  中的非驯嵌入 (wild imbedding) 得到的一些简单弧——的纽结为非驯的. 例如, 对弧  $L_1$  (图 1), 基本群  $\pi_1(E^3 \setminus L)$  是非平凡的; 对弧  $L_2$  (图 2), 该群是平凡的, 但是  $E^3 \setminus L_2$  自身不同胚于一个点在  $E^3$  中的补集.

关于参考文献, 见非驯球面 (wild sphere).



图 1

[A2] Moise, E. E., Geometric topology in dimensions 2 and 3, Springer, 1977. 徐森林 译

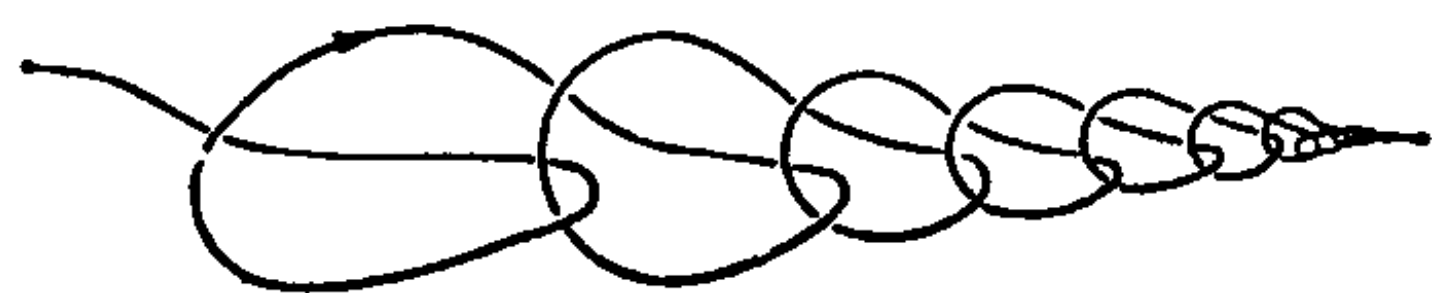


图 2

М. И. Войцеховский 撰 徐森林 译

### 非驯球面 [wild sphere; дикая сфера]

三维 Euclid 空间中的一个闭流形，它由球面  $S^2$  在  $E^3$  中的非驯嵌入 (wild imbedding) 得到。因此，非驯球面是两个具有公共边界的圆盘的并，它是一个非驯纽结 (wild knot)。非驯球面的第一个例子是所谓的“有角球面”或 Alexander 球面 (Alexander sphere) (图 1)；它界住一个不同胚于  $E^3$  的区域 (在图中，这是没有任何将环柄和形成它们边界的点相连接的圆柱的内部)。图 2 表示了一个非驯球面，在它里面单个的外部区域不同胚于  $E^3$ 。

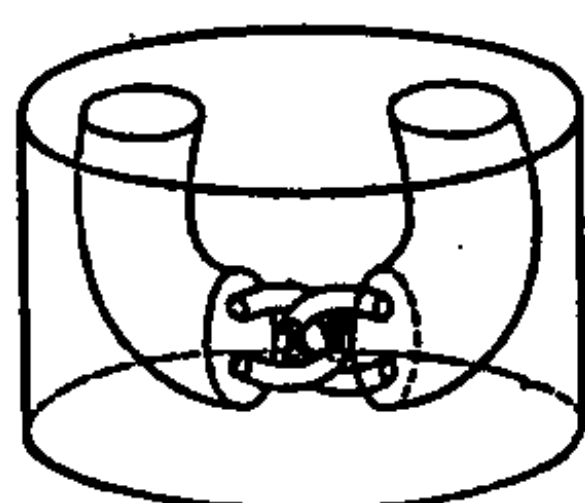


图 1

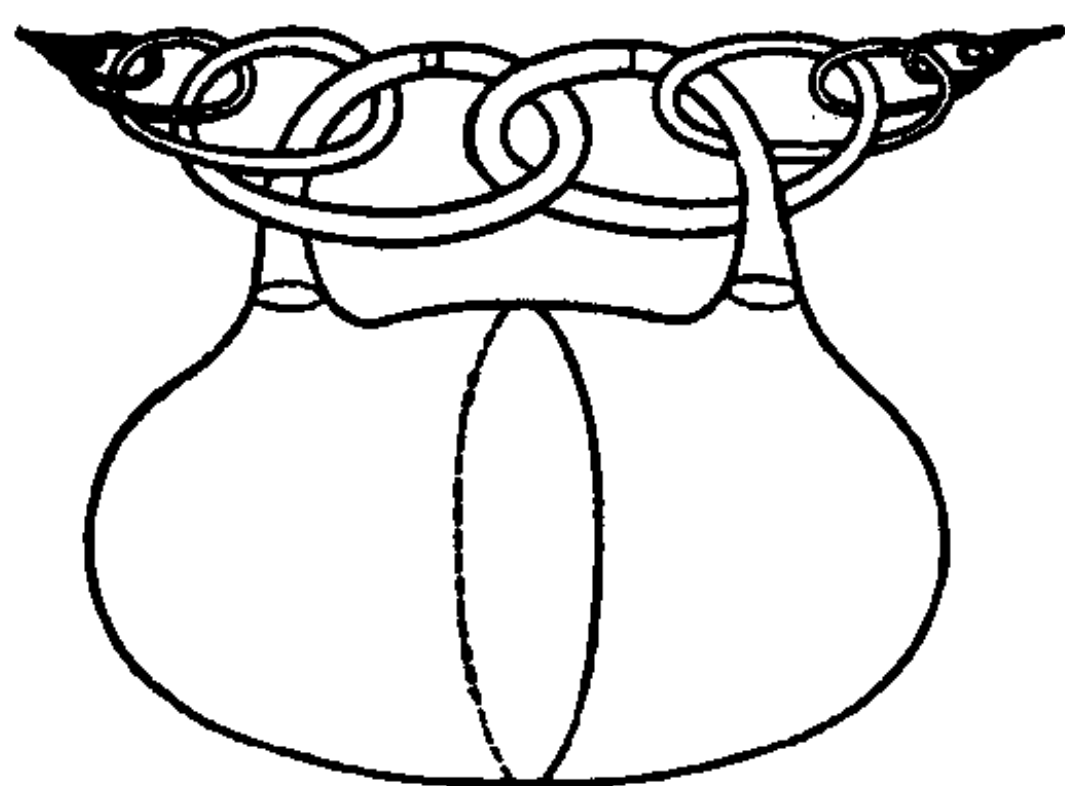


图 2

### 参考文献

- [1] Келдыш, Л. В., Топологические вложения в евклидово пространство, ТР. Матем. ин-та АН СССР, 81 (1966). М. И. Войцеховский 撰

### 【补注】

### 参考文献

- [A1] Bing, R. H., The geometric topology of 3-manifolds, Amer. Math. Soc., 1983.

Wilson 多项式 [Wilson polynomials; Вилсона многочлены]

【补注】由广义超几何级数 (hypergeometric series) 通过

$$\frac{W_n(x^2; a, b, c, d)}{(a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n} = {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, n+a+b+c+d, a+ix, a-ix \\ a+b, a+c, a+d \end{matrix}; 1 \right)$$

定义的正交多项式 (orthogonal polynomials)，其中  $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a) = a(a+1)\cdots(a+n-1)$  是 Pochhammer 符号 (Pochhammer symbol)。它们满足正交性关系

$$\int_0^\infty W_n(x^2) W_m(x^2) w(x) dx = 0, n \neq m,$$

其中

$$w(x) =$$

$$= \left| \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d+ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2,$$

且出现于共轭对中的复参数满足  $\operatorname{Re}(a, b, c, d) > 0$ 。对于当一个参数为负以及出现有限多个离散质点时更一般的正交性，见 J. A. Wilson [A6]。

Wilson 多项式与经典正交多项式 (classical orthogonal polynomials) 有紧密联系，因为它们是二阶差分算子

$$A(x)W_n((x-i)^2) + B(x)W_n(x^2) + C(x)W_n((x+i)^2) = \lambda_n W_n(x^2)$$

( $A, B, C$  是不依赖于  $n$  的某些函数) 关于本征值  $\lambda_n$  的本征函数。存在类似于 Wilson 多项式的多项式 (见 [A2])，称为 Askey-Wilson 多项式 (Askey-Wilson polynomials)，它作为极限情形包含 Wilson 多项式。Askey-Wilson 多项式也是一个二阶差分算子的正交多项式本征函数；而且人们相信在下述意义下它们是具有这一性质的最一般的正交多项式：所有具有这一性质的其他的类能通过指定参数或取极限从 Askey-Wilson 多项式得到。

Wilson 多项式有一重要变种，称为 Racah 多项式 (Racah polynomials)，它们由

$$R_n(\lambda(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta) =$$



$$= {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1, -x, x + \gamma + \delta + 1 \\ \alpha + 1, \beta + \delta + 1, \gamma + 1 \end{matrix} ; 1 \right)$$

定义, 其中  $\lambda(x) = x(x + \gamma + \delta + 1)$ ,  $\beta + \delta + 1 = -N$ ,  $n = 0, \dots, N$ . 它们对某些可显式表示的权  $w(x)$  满足形如

$$\sum_{n=0}^N R_n(\lambda(x)) R_m(\lambda(x)) w(x) = 0, n \neq m$$

的正交性关系. 它们可解释为对于群  $SU(2)$  的不可约表示的张量积的 Racah 系数 (Racah coefficients).

Wilson 多项式和 Racah 多项式的极限情形的完全集常写成有向图, 称为 Askey 表 (Askey tableau), 见 [A2] 的附录及所列的参考文献. 在该表中 Wilson 多项式和 Racah 多项式的 4 参数族处于最高的级别, 同时还有依赖于 3, 2, 1 或 0 个参数的处于较低级别的族. 一般地说, 每当进行一次极限转移, 就会有一个参数消失. 3 参数级别包含连续 Hahn 多项式 (continuous Hahn polynomials) (见 [A1]), 连续对偶 Hahn 多项式 (continuous dual Hahn polynomials) (连续权函数), Hahn 多项式 (Hahn polynomials) 和对偶 Hahn 多项式 (dual Hahn polynomials) (离散权). 2 参数级别包含 Meixner-Pollaczek 多项式 (Meixner-Pollaczek polynomials), Jacobi 多项式 (Jacobi polynomials) (连续权函数), (离散) Krawtchouk 多项式 (Krawtchouk polynomials) 和 Meixner 多项式 (Meixner polynomials). 单参数级别包含 (连续) Laguerre 多项式 (Laguerre polynomials) 和 (离散) Charlier 多项式 (Charlier polynomials). 最低级别的 0 参数族只包含 Hermite 多项式 (Hermite polynomials), 它是所有其他的类的极限情形.

#### 参考文献

- [A1] Askey, R., Continuous Hahn polynomials, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18** (1985), L 1017 - L 1019.
- [A2] Askey, R. and Wilson, J., Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **319** (1985).
- [A3] Atakishiyev, N. M. and Suslov, S. K., On the Askey Wilson polynomials, *Constr. Approx.*, **8** (1992), 363 - 369.
- [A4] Koornwinder, T. H., Group theoretic interpretations of Askey's scheme of hypergeometric orthogonal polynomials, in M. Alfaro, J. S. Dehesa, F. J. Marcellina and J. L. Rubio de Francia (eds.): *Orthogonal Polynomials and Their Applications*, Lecture notes in math., Vol. 1329, Springer, 1988, 46 - 72.
- [A5] Nikiforov, A. F., Suslov, S. K. and Uvarov, V. B., *Classical orthogonal polynomials of a discrete variable*, Springer, 1991 (译自俄文).
- [A6] Wilson, J. A., Some hypergeometric orthogonal po-

lynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, **11** (1980), 690 - 701. T. H. Koornwinder 撰 沈永欢 译

#### Wilson 定理 [Wilson theorem; Вильсона теорема]

设  $p$  是素数, 则数  $(p-1)! + 1$  被  $p$  整除. 首先由 E. Waring (1770) 陈述的这一定理, 按他的说法, 是属于 J. Wilson 的. 由 J. L. Lagrange 于 1771 年予以证明. 由 Wilson 定理得到关于整数的素性检验: 自然数  $n > 1$  是素数, 当且仅当

$$(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

这一检验法并不实用, 因为包含的阶乘很快会变得极大.

#### 参考文献

- [1] Бухштаб, А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966.
- [2] Trost, E., *Primzahlen*, Birkhäuser, 1953.
- [3] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972 (中译本: И. М. 维诺格拉陀夫, 数论基础, 高等教育出版社, 1952).

Н. И. Климов 撰

【补注】事实上, 其反问题也是正确的 (通常也称 Wilson 定理): 设  $N = (p-1)! + 1$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . 则当且仅当  $p$  是素数时,  $N$  被  $p$  整除.

#### 参考文献

- [A1] Shanks, D., *Solved and unsolved problems in number theory*, Chelsea, reprint, 1978.
- [A2] Schroeder, M. R., *Number theory in science and communication*, Springer, 1984, 103.
- [A3] Hardy, G. H. and Wright, E. M., *The theory of numbers*, Clarendon Press, 1960, 68.

戚鸣皋 译 潘承彪 校

#### 卷绕数 [winding number]

【补注】设  $\Gamma = \{z(\tau): \alpha \leq \tau \leq \beta\}$  是复平面内一条弧线,  $C$  是不在  $\Gamma$  上的一点. 在  $\Gamma$  上  $z - c$  的连续辐角 (continuous argument) 是  $[\alpha, \beta]$  上的一个实值连续函数  $\varphi$ , 使得对于每个  $\tau \in [\alpha, \beta]$ , 它是  $z(\tau) - c$  的一个辐角 (argument), 即对某个  $r$  有  $z(\tau) - c = r \exp(i\varphi(\tau))$ . 这样的函数可以求得, 且若  $\varphi(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$  是两个连续辐角, 则它们相差  $2\pi$  的常数整数倍. 这推出辐角增量 (increase of the argument)  $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$  不依赖于连续辐角的选取, 被表示为  $[\arg(z(\tau) - c)]_\Gamma$ . 若  $\Gamma$  是一条逐段正则弧, 则有

$$[\arg(z(\tau) - c)]_\Gamma = \operatorname{Im} \int_\Gamma \frac{1}{z - c} dz.$$

在  $\Gamma$  是闭曲线即  $z(\alpha) = z(\beta)$  的特殊情形,  $[\arg(z(\tau) - c)]_\Gamma$  必定是  $2\pi$  的整数倍, 并且称整数

$$n(\Gamma, c) = \frac{1}{2\pi} [\arg(z(\tau) - c)]_{\Gamma}$$

为  $\Gamma$  关于  $c$  的卷绕数. 对于分段正则闭曲线  $\Gamma$  及不在  $\Gamma$  上的  $c$  有

$$n(\Gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - c} dz.$$

#### 参考文献

[A1] Henrici, P., Applied and computational complex analysis, 1. Wiley-Interscience, 1974, § 4.6.

杨维奇 译

#### 机翼理论 [wing theory; крыла теория]

涉及物体与液体或气体流动之间相互作用的空气动力学分支. 机翼理论的基本问题是决定作用在物体上的空气动力和求出作为时间  $t$  和 Descartes 坐标  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  函数的速度场  $\mathbf{u}$  和压力  $p$ , 这里  $n = 2$  (二维流动) 或  $n = 3$  (三维流动).

在无旋正压流动情况下, 当没有粘性和质量力时气体的密度  $\rho$  是压力的已知函数  $\rho = \rho(p)$ , 速度分量  $u_i$  是势  $\varphi$  的偏导数:  $u_i = \partial \varphi / \partial x_i$ . 在充满气体的区域里  $\varphi$  满足拟线性方程:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{c^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial t} = \\ = \sum_{i,j=1}^n \left[ \delta_{ij} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $c = (d\rho/dp)^{-1/2}$  是声速,  $\delta_{ij}$  是 Kronecker 符号. 压力  $p$  借助 Cauchy-Lagrange 积分 (Cauchy-Lagrange integral) 由势决定:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2.$$

流动区域的边界由块块光滑的翼面  $S$  和有限数目的接触间断面  $\Sigma_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) 组成, 后者或沿翼梢的尖缘与  $S$  相交或与  $S$  相切. 在二维流动中  $S$  和  $\Sigma_j$  是块块光滑的曲线, 而翼梢是  $S$  的一些角点. 在  $S$  上势满足不穿透性条件, 而在  $\Sigma_j$  上它满足接触间断条件:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla F \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \text{在 } S \text{ 上}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} + \nabla F_j \cdot \nabla \varphi^\pm = 0, \quad p^+ = p^- \quad \text{在 } \Sigma_j \text{ 上}, \quad (3)$$

其中  $F(\mathbf{x}, t) = 0$ ,  $F_j(\mathbf{x}, t) = 0$  是面  $S$ ,  $\Sigma_j$  的方程,  $\varphi^\pm$  是从不同两面趋近  $\Sigma_j$  时  $\varphi$  的极限值. 沿  $S$  与  $\Sigma_j$  的交线有 Жуковский-Kutta-Чаплыгин 条件 (Zhukovskii-Kutta-Chaplygin condition), 根据该条件

在翼梢上压力是有限的:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |p(x)| < \infty, \quad \text{若 } x_0 \in S \cap \Sigma_j. \quad (4)$$

在定常流动中条件 (4) 等价于条件:  $S \cap \Sigma_j$  的点上的速度是有限的. 在求解过程中面  $\Sigma_j$  的形状是未知的, 而是要随解一起确定.

面  $\Sigma_j$  模拟实际流动中被绕流物体后边产生的涡迹 (见空气动力学的数学问题 (aerodynamics, mathematical problems of)). 这与如下事实相一致, 即若假设运动是无旋的, 则对在尖缘上为有限压力的翼的绕流问题不存在一般的连续解. 在特殊情况下, 例如在翼剖面四周有不变环流的定常二维流动情况下, 间断面可能不存在.

方程 (1) - (4) 与初始数据一起构成决定  $\varphi$ ,  $\Sigma_j$  的边值问题. 问题的类型取决于流动的类型和 Mach 数 (Mach number)  $M = |\nabla \varphi| c^{-1}$ . 对于可压缩流体的非定常运动和定常 ( $\partial \varphi / \partial t = 0$ ) 超声速 ( $M > 1$ ) 流动, 方程 (1) 是双曲型; 对不可压缩 ( $\rho = \text{常数}$ ,  $c = \infty$ ) 和定常亚声速 ( $M < 1$ ) 流动, 它是椭圆型. 在后一种情况下, 若假设  $S$  是有一个有着角度  $\alpha\pi$  ( $\alpha \in [0, 1]$ ) 的角点  $x_0$  的块块光滑曲线, 则以下结论是正确的: 对任何向量  $\mathbf{k}$ ,  $|\mathbf{k}| = 1$ , 存在这样的  $\lambda > 0$ , 当  $q \in [0, \lambda]$  时问题 (1) - (2) 有在  $x_0$  点满足 Жуковский-Kutta-Чаплыгин 条件和在无穷远处满足下列条件的唯一的解:

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} |\nabla \varphi| < \infty, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \nabla \varphi(\mathbf{x}) = q \mathbf{k};$$

并且当  $q \rightarrow 0$  时  $M(q) \rightarrow 0$  和当  $q \rightarrow \lambda$  时  $M(q) \rightarrow 1$ , 这里  $M(q) = \sup_{\mathbf{x}} M(\mathbf{x})$  是流动的 Mach 数.

对于定常亚声速二维流动有 Жуковский 基本定理 (fundamental theorem of Zhukovskii) (见 [1] - [3]): 在对剖面的绕流中由流体方面作用在剖面上的总力垂直于  $\mathbf{k}$ , 其量值  $R$  等于

$$R = q \rho_\infty \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds, \quad \rho_\infty = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{x}).$$

对这样的流动已证明下列更一般的问题在数学上是可适的: 同时绕几个剖面的流动; 有气流分离和形成滞止区 (射流) 的绕翼流动; 反问题——按给定的压力曲线决定翼的形状及其局部 ([4]).

由于按严格提法求解机翼理论的问题是困难的, 所以一些近似模型有很大意义: 薄翼理论、小展弦比翼理论, 等等. 应用最广的模型是微弯薄翼的线性理论 (见 [1], [5] - [11]), 该模型建立在以下假设上: 流的势由  $\varphi = qx_1 + \Phi$  给出, 翼的厚度及  $\nabla \Phi$  与翼弦及未扰流的速度  $q > 0$  相比是小量. 在薄翼理论中面  $S$  是由它在平面  $x_n = 0$  上的投影  $S_0$  来模拟, 间断面  $\Sigma$  由半平面  $\Sigma_0 = \Omega \setminus S_0$  模拟, 这里  $\Omega$



是所有由  $S_0$  的点上在  $x_1$  正方向发出的平行于  $0x_1$  轴的射线之组合, 函数  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  满足线性化的方程和边界条件:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2 \frac{M_\infty}{c_\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial t} = \\ & = (1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}, \quad \text{在 } \Omega \text{ 外面;} \\ & \lim_{x_n \rightarrow \pm 0} \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = v^\pm, \quad \text{在 } S_0 \text{ 上;} \\ & \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right] = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + q \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right] = 0, \quad \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上;} \\ & \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} + q \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right| < \infty, \quad \text{对于 } x_0 \in S_0 \cap \Sigma_0, \end{aligned}$$

其中  $c_\infty$ ,  $M_\infty$  是对应具有速度  $q$  的均匀流的常声速和 Mach 数, 符号  $[f]$  代表穿过  $\Sigma_0$  时  $f$  值的跃变,  $v^\pm$  是由翼的形状和运动条件决定的给定函数.

还要给这些方程增加决定无穷远处解行为的关系式: 在定常亚声速流 ( $M_\infty < 1$ ) 中条件是当  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  时扰动衰减; 在翼的亚声速小振动情况下有 Sommerfeld 辐射条件 (见辐射条件 (radiation conditions)); 在超声速流 ( $M_\infty > 1$ ) 中附加关系式是在扰动的前波 (中心在  $S_0$  上的特征锥的包络) 上  $\Phi = 0$ .

求解薄翼理论问题的基本方法是将  $S_0$  和  $\Sigma_0$  表示为涡面的形式和把边值问题化为涡密度的奇异积分方程. 当这样做时在不属于  $\Sigma_0$  的  $S_0$  的点上  $\Phi$  的导数通常变为无穷. 线性理论适于描述的只是前尖缘外部一定邻域中的实际流动.

在薄翼线性理论中, 在诸如翼剖面小简谐振动的二维问题和  $S$  是椭圆时的三维定常流动问题的情况下, 解可以表示为含特殊函数的无穷级数 (见 [1], [5] - [9]). 为任意形状翼的计算已发展了数值方法 (见 [10], [11]).

#### 参考文献

- [1] Седов, Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 2 изд., М., 1966 (英译本: Sedov, L. I., Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics, Acad. Press, 1965).
- [2] Кочин, Н. Е., Кибель, И. А., Розе, Н. В., Теоретическая гидромеханика, 6 изд., г. 1, М., 1963.
- [3] Bers, L., Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, Wiley, 1958.
- [4] Монахов, В. Н., Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, Новосиб., 1977 (英译本: Monakhov, V. N., Boundary value problems with free boundaries for elliptic systems of equations, Amer. Math. Soc., 1983).

- [5] Некрасов, А. И., Теория крыла в нестационарном потоке, М.-Л., 1947.
- [6] Горелов, Д. Н., Теория крыла в нестационарном потоке, Новосиб., 1975.
- [7] Miles, J., The potential theory of unsteady supersonic flow, Cambridge Univ. Press, 1959.
- [8] Голубев, В. В., Труды по аэродинамике, М.-Л., 1957.
- [9] Кочин, Н. Е., «Прикл. матем. и механ.», 9 (1945), 1, 13 - 66.
- [10] Красильщикова, Е. А., Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке, М.-Л., 1952.
- [11] Белоцерковский, О. М., Ништ, М. И., Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью, М., 1978.

В. Н. Монахов, П. И. Плотников 撰

【补注】 上述的一部分机翼理论主要限于非定常流中可压缩性的影响. 有理论的较容易部分, 它处理定常不可压缩流动, 这里基本方程是 Laplace 方程, 所以所有势理论的工具都能使用. 特别是, 薄翼剖面的理论 (二维的) 适合于完全解析处理, 它的主要实际结果归结为升力系数 (lift coefficient)

$$C_L = \frac{2L}{\rho V_\infty^2 A} = 2\pi(\alpha - \alpha_0),$$

其中  $L$  是升力,  $\rho$  是流体密度,  $V_\infty$  是远离机翼处的流体速度,  $A$  是翼的面积,  $\alpha$  是攻角,  $\alpha_0$  是依翼剖面平均轮廓的形状而定的常数. 对俯仰矩系数 (pitching moment coefficient) 得到类似的公式. 理论的另一重要结果是沿机翼的压力分布. 如由 T. Theodorsen 首先证明的, 当且只当攻角有某一定值时 (“理想的”或“设定的攻角”) 前缘处的压力原来是有限的. 这些结果就像能用相似变换证明的那样也适用于亚声速可压缩流 ( $M_\infty < 1$ ) 的线性化理论.

还要说明, Жуковский-Kutta-Чаплыгин 条件通常称为 Kutta 条件 (Kutta condition), 在西方文献中 Жуковский 定理通常称为 Kutta-Жуковский 定理 (Kutta-Zhukovskii theorem). 最后, Жуковский 常被译为 Joukowski.

#### 参考文献

- [A1] Liepmann, H. W. and Roshko, A., Elements of gas dynamics, Wiley, 1957.
- [A2] Ландау, Л. Д. и Лифшиц, Е. М., Гидродинамика, Физматгиз, 1958 (中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席兹, 连续介质力学, 人民教育出版社, 1958).
- [A3] Schlichting, H., Boundary layer theory, McGraw-Hill, 1955.
- [A4] Birkhoff, G., Hydrodynamics, Princeton Univ. Press, 1960.
- [A5] Lamb, H., Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press,

1932.

[A6] Milne-Thompson, L. M., Theoretical hydrodynamics, McMillan, 1957.

[A7] Prandtl, L. and Tietjens, O. G., Applied hydro- &amp; aeromechanics, Dover, reprint, 1934.

[A8] Prandtl, L. and Tietjens, O. G., Fundamentals of hydro- &amp; aeromechanics, Dover, reprint, 1934.

[A9] Goldstein, S. (ed.), Modern developments in fluid mechanics, 1-2, Dover, reprint, 1965.

[A10] Mises, R. von, Theory of flight, Dover, reprint, 1959.

[A11] Lighthill, J., An informal introduction to theoretical fluid mechanics, Clarendon Press, 1986.

李维新 译

**Wishart 分布** [Wishart distribution; Уишарта распределение]

来自多元正态分布 (normal distribution) 观测值样本协方差矩阵的元素的联合分布. 设观测结果服从  $p$  维正态分布  $N(\mu, \Sigma)$ , 其中  $\mu$  是均值向量,  $\Sigma$  是协方差矩阵. 那么, 记矩阵

$$A = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$$

的元素的联合密度为  $w(A; n, \Sigma)$ : 若矩阵  $A$  正定, 则

$$w(A; n, \Sigma) = \frac{|A|^{(n-p)/2} e^{-\text{tr}(A\Sigma^{-1})/2}}{2^{(n-1)p/2} \pi^{p(p-1)/4} |\Sigma|^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right)},$$

否则  $w(A; n, \Sigma) = 0$ , 其中  $\text{tr} M$  表示矩阵  $M$  的迹. 以  $w(A; n, \Sigma)$  为密度的  $p(n+1)/2$  维分布  $W(n, \Sigma)$ , 称为自由度为  $n$  和协方差矩阵为  $\Sigma$  的 Wishart 分布 (Wishart distribution). 作为矩阵  $\Sigma$  的估计量的样本协方差矩阵  $S = A/(n-1)$  服从 Wishart 分布.

Wishart 分布是多元统计分析中的基本分布; 它是一维  $\chi^2$  分布 ('chi-squared' distribution) (在上述意义下的)  $p$  维推广.

如果独立随机向量  $X$  和  $Y$  分别服从 Wishart 分布  $W(n_1, \Sigma)$  和  $W(n_2, \Sigma)$ , 则  $X+Y$  服从 Wishart 分布  $W(n_1+n_2, \Sigma)$ .

Wishart 分布是 J. Wishart ([1]) 首先引进的.

**参考文献**[1] Wishart, J., *Biometrika A*, 20 (1928), 32-52.

[2] Anderson, T., An introduction to multivariate statistical analysis, Wiley, 1958. A. B. Прохоров 撰

**【补注】****参考文献**

[A1] Kharsagar, A. M., Multivariate analysis, M. Dekker, 1972.

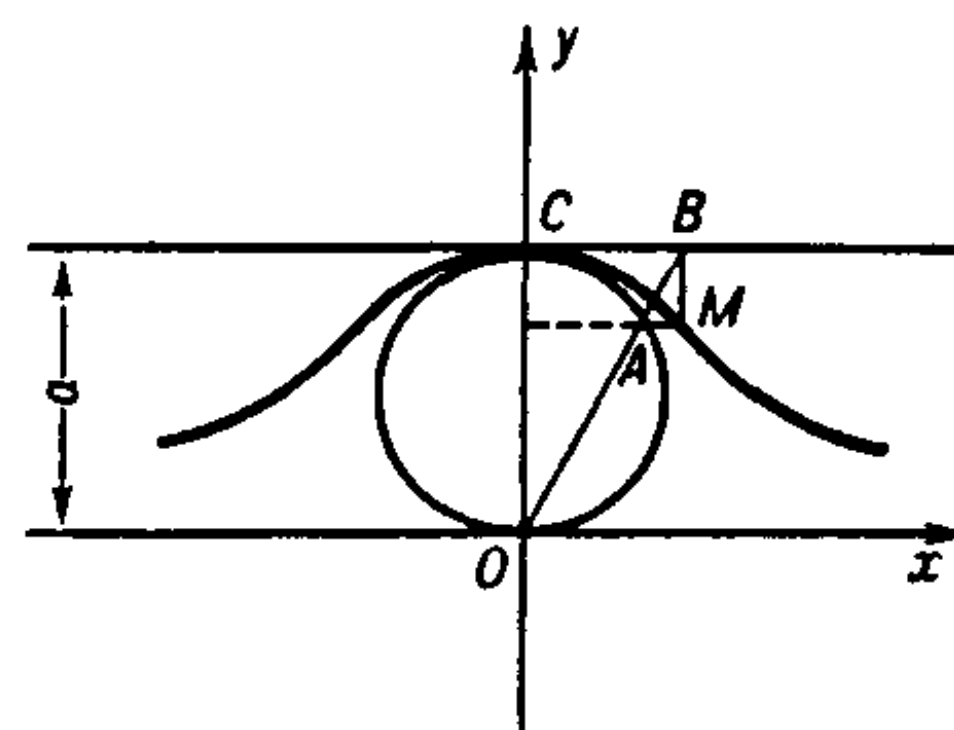
[A2] Muirhead, R. J., Aspects of multivariate statistical theory, Wiley, 1982. 周概容 译

**Agnesi 箕舌线** [witch of Agnesi 或 versiera; Аньези локон]

一条平面曲线, 在 Descartes 直角坐标系中由方程

$$y(a^2 + x^2) = a^3, a > 0$$

给出.



如果  $a$  是圆心在点  $(0, a/2)$  的一个圆的直径,  $OA$  是一条割线,  $CB$  和  $AM$  平行于  $x$  轴,  $BM$  平行于  $y$  轴 (见图), 则 Agnesi 箕舌线是点  $M$  的轨迹. 如果把生成圆的中心和切线  $CB$  沿  $y$  轴移位, 那么这样得到的曲线称为 Newton 类箕舌线 (Newton aguea), 它是 Agnesi 箕舌线的一个推广. M. Agnesi 研究过这一曲线 (1748), 因而得名.

**参考文献**

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

А. Б. Иванов 撰

**【补注】****参考文献**

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972. 杜小杨 译

**Witt 代数** [Witt algebra; Витта алгебра]**【补注】** 设  $k$  是特征为  $p \neq 0$  的域. 考虑  $k$  代数

$$A_n = k[X_1, \dots, X_n]/(X_1^p, \dots, X_n^p).$$

设  $V_n$  是  $A_n$  的  $k$  导子代数. 代数  $V_1$  通常称为 Witt 代数 (Witt algebra).  $V_n (n \geq 2)$  通常称为分裂 Jacobson-Witt 代数 (split Jacobson-Witt algebra). 代数  $V_n$  是单的 Lie 代数 (Lie algebra), 除非它是 2 维的.  $V_n$  的维数是  $np^n$ .

更一般地, 考虑  $k$  代数

$$A_n(\xi) = k[X_1, \dots, X_n]/(X_1^p - \xi_1, \dots, X_n^p - \xi_n)$$

及它们的导子代数  $V_n(\xi)$ , Jacobson-Witt 代数 (Jacobson-Witt algebra).  $A_n(\xi)$  和  $V_n(\xi)$  (显然) 是  $A_n$  和  $V_n$  的  $k'/k$  型, 这里  $k' = k(\xi_1^{1/p}, \dots, \xi_n^{1/p})$  (见



代数结构的形式 (form of an (algebraic) structure)). 许多特征为  $p$  的单 Lie 代数归结为  $V_n$  的子代数.

设  $G$  是  $\{1, \dots, m\}$  到  $k$  的函数的加群,  $G$  中对所有  $g \in G$ , 满足  $\sum f(i)g(i) = 0$  的元素  $f$  仅有零元  $f = 0$ . 例如  $G$  可以是  $\{1, \dots, m\}$  到  $k$  的某个加法子群的所有函数的集合. 如果  $G$  有限, 则有某个  $n$ , 使  $G$  的阶是  $p^n$ . 现在, 设  $V$  是  $k$  上的向量空间 (vector space), 带有基元  $e_g^i (i = 1, \dots, m, g \in G)$ , 并定义  $V$  上的双线性积为

$$[e_g^i, e_h^j] = h(i)e_{g+h}^j - g(j)e_{g+h}^i,$$

结果得到一个 Lie 代数, 称为广义 Witt 代数 (generalized Witt algebra). 如果  $G$  是有限阶的, 阶为  $p^n$ , 则  $V$  的维数是  $mp^n$ , 而当  $m > 1$  或  $p > 2$  时  $V$  是单 Lie 代数.

如果  $k$  的特征为零,  $m = 1$ ,  $G$  是加法子群  $Z \subset k$ , 则相同的构造在 Virasoro 代数 (Virasoro algebra) 中导致  $[e_g, e_h] = (h - g)e_{g+h}$ .

如果  $k$  的特征为  $p$ ,  $G$  是  $\{1, \dots, n\}$  上在  $Z/(p) \subset k$  中取值的所有函数作成的群, 则又回到 Jacobson-Witt 代数  $V_n$ .

当  $\text{char}(k) \neq 2, 3$  时, 在 Jacobson-Witt 代数  $V_n$  和正特征的经典 Lie 代数之间没有同构. 不同于经典 Lie 代数及  $V_n$  的好几类单 Lie 代数已被发现 ([A1]).

这里所描述的 Witt 代数当然不能同域上二次型的 Witt 环 (Witt ring) 相混淆, 也不能同 Witt 向量 (Witt vector) 的各种环相混淆.

#### 参考文献

- [A1] Seligman, G. B., Modular Lie algebras, Springer, 1967.
- [A2] Jacobson, N., Classes of restricted Lie algebras of characteristic  $p$ , II, Duke Math. J., 10 (1943), 107 - 201.
- [A3] Ree, R., On generalised Witt algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 83 (1956), 510 - 546. 蔡传仁 译

**Witt 分解** [Witt decomposition; Витта разложение], 向量空间的

向量空间分解为三个具有特定性质的子空间的直和. 更精确地说, 令  $V$  是特征不等于 2 的域  $k$  上向量空间 (vector space), 借助于一个对称的或斜对称的双线性型 (bilinear form)  $f$  装备了一个度量结构. 直和分解

$$V = N_1 + N_2 + D$$

称为  $V$  的 Witt 分解, 如果  $N_1$  与  $N_2$  均为全迷向的, 而  $D$  是各向异性的, 并且关于  $f$  与  $N_1 + N_2$  正交. Witt 分解对于双线性型  $f$  的结构的研究, 以及双

线性型的分类问题方面起着重要作用.

设  $f$  是一个非退化的双线性型, 且设  $V$  是有限维的. 则  $V$  的任一个极大全迷向子空间可以作为  $N_1$  或  $N_2$  被包含在  $V$  的一个 Witt 分解中. 对于任一个 Witt 分解  $\dim N_1 = \dim N_2$ , 且对于  $N_1$  的任意基  $v_1^{(1)}, \dots, v_n^{(1)}$ , 存在  $N_2$  的一个基  $v_1^{(2)}, \dots, v_n^{(2)}$ , 使得  $f(v_i^{(1)}, v_j^{(2)}) = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  是 Kronecker 符号). 对于任意两个 Witt 分解

$$V = N_1 + N_2 + D = N'_1 + N'_2 + D',$$

存在  $V$  的一个度量自同构  $\varphi$ , 使得

$$\varphi(N_1) = N'_1, \varphi(N_2) = N'_2, \varphi(D) = D'$$

的充分必要条件是  $\dim N_i = \dim N'_i, i = 1, 2$ .

$V$  上一个非退化的对称或斜对称双线性型  $f$  称为中性的 (neutral), 如果  $V$  是有限维的, 且有一个 Witt 分解, 其中  $D = 0$ . 在此情况下, 这个对称双线性型称为一个双曲型 (hyperbolic form), 而  $V$  称为一个双曲空间 (hyperbolic space). 中性型的正交直和是中性的. 中性型的矩阵 (关于上面所描述的空间  $V = N_1 + N_2$  的基  $v_1^{(1)}, \dots, v_n^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_n^{(2)}$ ), 形如

$$\left\| \begin{array}{c|c} 0 & E_n \\ \hline \varepsilon E_n & 0 \end{array} \right\|,$$

其中  $E_n$  是  $n$  阶单位矩阵, 对于对称型  $\varepsilon = 1$ , 而对于斜对称型  $\varepsilon = -1$ . 两个中性型等距同构, 当且仅当它们有相同的秩. 中性对称双线性型的类是域  $k$  的 Witt 环 (Witt ring) 的零元 (即关于加法的中性元素). 中性型且只有这种型具有 Witt 指数  $(\dim V)/2$ . 有限维空间上的斜对称型是中性的.

设  $f$  是有限维空间  $V$  上一个非退化对称双线性型,  $V = N_1 + N_2 + D$  是一个 Witt 分解, 其中  $\dim N_1 = \dim N_2$  且等于  $f$  的 Witt 指数, 则  $f$  在  $D$  上的限制是一个定双线性型 (definite bilinear form) 或非迷向双线性型 (anisotropic bilinear form), 即对所有非零的  $v \in D$  都有  $f(v, v) \neq 0$ . 这个双线性型与  $V$  的 Witt 分解的选择无关 (不考虑等距同构). 在定双线性型的集合里可以引进一个加法, 使之成为一个 Abel 群—— $k$  的 Witt 群 (Witt group) (见 Witt 环 (Witt ring)).

令  $v_1^{(i)}, \dots, v_n^{(i)}$  是  $N_i$  的基,  $i = 1, 2$ , 使得  $f(v_i^{(1)}, v_j^{(2)}) = \delta_{ij}$ ; 这两个基的并集再连同  $D$  的任一基就得到  $V$  的一个基, 关于这个基,  $f$  的矩阵形如

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & E_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{array} \right\|.$$

对于对称双线性型, 在  $V$  中存在一个正交基 (orthogonal basis), 即一个基使得这个双线性型关于它的矩阵是对角形. 如果域  $k$  是代数闭的,  $V$  中甚至存在一个规范正交基 (orthonormal basis) (一个基使得这个双线性型关于它的矩阵是单位矩阵), 据此理由,  $k$  上两个非退化有限秩的对称双线性型等距同构, 当且仅当它们有相同的秩 (rank). 在一般情况下, 这种双线性型的分类实质上依赖于域  $k$  的算术性质.

退化的对称型与斜对称型的分类和研究可以简化为对于非退化型的研究 (将该双线性型限制于它的核的补子空间).

以上所述均允许推广到除环上具有性质 (T) 的  $\varepsilon$ -Hermite 型 (见 Witt 定理 (Witt theorem)) 的情形, 也可以推广到伴随有二次型的对称双线性型的情形, 不必限制域的特征.

#### 参考文献

- [1] Bourbaki, N., Algebra, Elements of mathematics, 1974, Chaps. 1 - 2 (译自法文).
- [2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.
- [3] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.
- [4] Dieudonné, J. A., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1955.

【补注】 具有一个中性的非退化双线性型的向量空间称为分裂的 (split) 或代谢的 (metabolic).

Witt 分解定理的一个不同形式给出了二次空间 (quadratic space)  $(V, q)$  (即向量空间  $V$  上有一个二次型  $q$ ) 分解为正交和

$$(V, q) = (V_t, q_t) \oplus (V_h, q_h) \oplus (V_a, q_a), \quad (*)$$

其中  $(V_t, q_t)$  是全迷向的,  $(V_h, q_h)$  是双曲的, 和  $(V_a, q_a)$  是各向异性的. 并且  $(V_t, q_t)$ ,  $(V_h, q_h)$  和  $(V_a, q_a)$  的等距同构类是由  $(V, q)$  的等距同构类唯一确定的.

在这个分解中,  $(V_t, q_t)$  是  $V$  的根 (radical),  $V_t = \text{rad}(V) = \{v \in V: B(v, w) = 0, \text{ 对所有 } w \in V\}$ , 其中  $B$  是  $V$  上相关于  $q$  的对称双线性型;

$$B(v, w) = \frac{1}{2} \{q(v+w) - q(v) - q(w)\}.$$

根据 Witt 消去定理 (Witt cancellation theorem) 可得 Witt 分解 (\*) 中其因子的唯一性, 该定理叙述为: 如果  $q \oplus q_1$  与  $q \oplus q_2$  是等距同构的, 那么  $q_1$  与  $q_2$  是等距同构的.

#### 参考文献

- [A1] Milnor, J. and Husemoller, D., Symmetric bilinear forms, Springer, 1973.
- [A2] Lam, T. Y., The algebraic theory of quadratic forms, Benjamin, 1973.

蒋滋梅 译

Witt 环 [Witt ring; Витта кольцо], 二次型的类型环 (ring of types of quadratic forms), 域  $k$  上的

域  $k$  上的有限维向量空间上的非退化二次型关于下述等价关系的类构成的环  $W(k)$ : 型  $f_1$  等价于型  $f_2$  ( $f_1 \sim f_2$ ), 当且仅当对于某两个中性二次型  $g_1, g_2$ ,  $f_1$  与  $g_1$  的正交直和等距于  $f_2$  和  $g_2$  的正交直和 (亦见 Witt 分解 (Witt decomposition); 二次型 (quadratic form)).  $W(k)$  中的加法及乘法由取型的正交直和及张量积所诱导.

设  $k$  的特征不是 2, 则型的等价性的定义等价于:  $f_1 \sim f_2$  当且仅当对应于  $f_1$  和  $f_2$  的非迷向型  $f_1^a$  和  $f_2^a$  是等距的 (见 Witt 分解 (Witt decomposition)). 型  $f$  的等价类称作它的类型 (type), 记为  $[f]$ . Witt 环, 或二次型的类型环是结合的、交换的有么元的环.  $W(k)$  的么元是型 (1) 的类型 (这里  $(a_1, \dots, a_n)$  表示二次型  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum a_i x_i^2$ ). 零秩的零型的类型包含着全体中性型, 作为零元. 类型  $[-f]$  是类型  $[f]$  的负元.

环  $W(k)$  的加法群称作域  $k$  的 Witt 群 (Witt group) 或  $k$  上的二次型的类型群 (group of types of quadratic forms). 形如  $(a)$  的二次型的类型生成环  $W(k)$ , 其中  $a$  是  $k$  的乘法群  $k^\times$  的元素.  $W(k)$  被生成元的下述关系完全确定:

$$(a)(b) = (ab),$$

$$(a) + (b) = (a+b) + ((a+b)ab),$$

$$(a)^2 = 1,$$

$$(a) + (-a) = 0.$$

Witt 环可以被描述为与群  $k^\times / (k^\times)^2$  的整数群环

$$\mathbb{Z}[k^\times / (k^\times)^2]$$

关于元素

$$\bar{1} + (-\bar{1}) \text{ 和 } \bar{1} + \bar{a} - \overline{1-a} - \overline{(1+a)a} \quad (a \in k^\times)$$

生成的理想的商环同构的环, 此处  $\bar{x}$  是  $x$  关于子群  $(k^\times)^2$  的剩余类.

Witt 环常常可以被精确地计算出. 例如, 如果  $k$  是二次 (特别地, 代数) 封闭域, 则有  $W(k) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ; 如果  $k$  是实闭的, 则  $W(k) \simeq \mathbb{Z}$  (此同构实现为: 将  $[f]$  映成型  $f$  的符号差); 如果  $k$  是 Pythagoras 域 (Pythagorean field) (即  $k$  中两个平方的和仍是平方) 且  $k$  不是实的, 则  $W(k) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ; 如果  $k$  是有限域, 则相应于  $q \equiv 3$  或  $1 \pmod{4}$ , 其中  $q$  是  $k$  的元素个数,  $W(k)$  分别同构于剩余环  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  或  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[t]/(t^2-1)$ ; 如果  $k$  是完全局部环并且它的类域  $\bar{k}$  的特征不是 2, 则



$$W(k) \simeq W(\bar{k})[t]/(t^2 - 1).$$

$k$  的一个扩张  $k'/k$  定义 Witt 环的一个同态  $\varphi: W(k) \rightarrow W(k')$ , 在此同态下,  $[(a_1, \dots, a_n)] \mapsto [(a_1, \dots, a_n)]$ . 如果此扩张是有限的且是奇数次的, 则  $\varphi$  是单同态; 若进一步它还是群  $G$  的 Galois 扩张 (Galois extension), 则  $G$  的作用可以扩充到  $W(k')$  上, 且有

$$\varphi(W(k)) = W(k')^G.$$

**Pfister 定理 (Pfister theorem)** 描述了 Witt 环的一般性质:

1) 对于任一域  $k$ ,  $W(k)$  的扭子群  $W_t(k)$  是 2 准素的;

2) 如果  $k$  是实域,  $k_p$  是它的 Pythagoras 闭包 (Pythagorean closure) (即包含  $k$  的最小的 Pythagoras 域), 则序列

$$0 \rightarrow W_t(k) \rightarrow W(k) \rightarrow W(k_p)$$

正合 (于是,  $W_t(k) = 0$ , 则  $k$  是 Pythagoras 域);

3) 若  $\{k_\alpha\}$  是  $k$  的实闭包的族, 则下面的序列正合:

$$0 \rightarrow W_t(k) \rightarrow W(k) \rightarrow \prod W(k_\alpha);$$

特别地,

4) 若  $k$  不是实域, 则群  $W(k)$  是扭的.

若干其他结果与型的乘性理论有关. 特别地, 设  $m$  是偶维空间上的二次型的类型的集合, 则  $m$  是  $W(k)$  中的双边理想, 且  $W(k)/m \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ;  $m$  包含  $W(k)$  的全部零因子;  $W(k)$  的幂零元的集合与  $m$  中的有限阶元素的集合相重合, 此即  $W(k)$  的 Jacobson 根, 也是  $W(k)$  的准素根. 环  $W(k)$  是有限的, 当且仅当  $k$  不是实的且群  $k^\times/(k^\times)^2$  是有限的; 环  $W(k)$  是 Noether 环, 当且仅当  $k^\times/(k^\times)^2$  是有限的. 如果  $k$  不是实域, 则  $m$  是  $W(k)$  的唯一的素理想. 反之, 若  $k$  是实域, 则  $W(k)$  的素理想的集合是理想  $m$  与对应于  $k$  的序  $p$  的素理想族:

$$P = \{[(a_1, \dots, a_n)]: \sum \text{sgn}_p a_i = 0\},$$

$$P_l = \{[(a_1, \dots, a_n)]: \sum \text{sgn}_p a_i \equiv 0 \pmod{l}\}$$

的析取并, 其中  $l$  取遍素数集合,  $\text{sgn}_p a_i$  表示  $a_i$  在序  $p$  下的符号.

如果  $k$  是具有对合的环, 则与 Witt 环类似的构造导致具有对合的 Witt 环的群 (group of Witt ring with involution) 的概念.

从更广泛的观点出发, Witt 环 (群) 是  $K$  函子 (参见代数  $K$  理论 (algebraic  $K$ -theory)) 的最初的例子之一, 它在酉代数  $K$  理论中起着重要的作用.

#### 参考文献

- [1] Witt, E., Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, *J. Reine Angew. Math.*, **176** (1937), 31 - 44.
- [2] Bourbaki, N., Algebra, Elements of mathematics, Addison-Wesley, 1974, Chaps. 1 - 2 (译自法文).
- [3] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.
- [4] Lorenz, F., Quadratische Formen über Körpern, Springer, 1970.
- [5] O'Meara, O. T., Introduction to quadratic forms, Springer, 1973.
- [6] Lam, T. Y., The algebraic theory of quadratic forms, Benjamin, 1973.
- [7] Milnor, J. and Husemoller, D., Symmetric bilinear forms, Springer, 1973.

А. В. Михалев, А. И. Немытов, В. Л. Попов 撰

【补注】 给定两个具有双线性型  $B_i$  的向量空间  $V_i (i = 1, 2)$ , 其张量积 (tensor product) 是指具有如下定义的双线性型的张量积  $V_1 \otimes V_2$ :

$$B(v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) = B_1(v_1, w_1) B_2(v_2, w_2).$$

赵春来 译 冯绪宁 校

#### Witt 定理 [Witt theorem; Витта теорема]

特征不等于 2 的域  $k$  上有限维向量空间 (vector space)  $V$ , 通过一个非退化的对称或斜对称双线性型 (bilinear form)  $f$ , 装备了一个度量结构,  $V$  的两个子空间  $F_1$  与  $F_2$  之间的任意等距同构可以扩张为整个空间  $V$  的度量自同构. 这个定理首先由 E. Witt 获得 ([1]).

Witt 定理还可以在对  $k$  和  $f$  更一般的假设下予以证明 ([2], [3]). 事实上, 如果  $k$  是一个除环,  $V$  是有限维左  $k$  模,  $f$  是非退化  $\varepsilon$ -Hermite 型 (关于  $k$  的某个固定的对合反自同构  $\sigma$ , 见 Hermite 型 (Hermitian form)) 满足下列条件: 对任意  $v \in V$ , 存在元素  $\alpha \in k$ , 使得

$$f(v, v) = \alpha + \varepsilon \alpha^\sigma$$

(性质 (T) (property (T))), 那么这个定理仍然成立. 性质 (T) 成立的例子是: 若  $f$  是 Hermite 型且  $k$  的特征不等于 2, 或者若  $f$  是交错型. 假设  $k$  是一个域,  $f$  是对称双线性型伴随有  $V$  上一个非退化二次型 (quadratic form)  $Q$ , 则 Witt 定理同样成立. 根据 Witt 定理可得到,  $V$  的度量自同构群可迁地置换维数相同的全迷向子空间, 并且  $V$  的所有极大全迷向子空间有相同的维数 ( $f$  的 Witt 指数 (Witt index)). 由 Witt 定理得到的又一个结论可陈述如下:  $k$  上有限秩的非退化对称双线性型的所有等距同构类, 对于正交直和构成一个具有消去律的么半群; 这个么半群到

它的 **Grothendieck 群** (Grothendieck group) 的典范映射是单射. 群  $WG(k)$  称为  $k$  的 **Witt-Grothendieck 群** (Witt-Grothendieck group)  $WG(k)$ ; 而双线性型的张量积在其上诱导了环的结构, 它称为  $k$  的 **Witt-Grothendieck 环** (Witt-Grothendieck ring) ([7]).

Witt 定理的其他应用见 **Witt 分解** (Witt decomposition); **Witt 环** (Witt ring).

#### 参考文献

- [1] Witt, E., Theorie der quadratischen formen in beliebigen Körpern, *J. Reine Angew. Math.*, 176 (1937), 31 - 44.
- [2] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, Elements of mathematics, 1, Addison-Wesley, 1974, Chaps. 1 - 2 (译自法文).
- [3] Dieudonné, J. A., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1955.
- [4] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.
- [5] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.
- [6] Serre, J. - P., A course in arithmetic, Springer, 1973 (译自法文).
- [7] Milnor, J., Algebraic K-theory and quadratic forms, *Invent. Math.*, 9 (1969/1970), 318 - 344.

В. Л. Попов 撰 蒋滋梅 译

#### Witt 向量 [Witt vector; Витта вектор]

一种代数结构的元素, 1936 年 E. Witt ([1]) 在描述  $p$  进数域的非分歧扩张时首先提出. 其后, Witt 向量被用来研究正特征的域上的代数簇 ([3]), 交换代数群理论 ([4], [5]), 以及形式群理论. 设  $A$  是一个有单位元的结合交换环. 分量在  $A$  中的无限序列  $a = (a_0, a_1, \dots)$ ,  $a_i \in A$  称为 **Witt 向量** (Witt vectors), 其加法和乘法规则如下:

$$\begin{aligned} & (a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) \\ &= (S_0(a_0, b_0), S_1(a_0, a_1; b_0, b_1), \dots), \\ & (a_0, a_1, \dots) \times (b_0, b_1, \dots) \\ &= (M_0(a_0, b_0), M_1(a_0, a_1; b_0, b_1), \dots), \end{aligned}$$

这里  $S_n, M_n$  是以  $X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n$  为变量的整系数多项式, 由下述条件唯一决定:

$$\begin{aligned} \Phi_n(S_0, \dots, S_n) &= \Phi_n(X_0, \dots, X_n) + \Phi_n(Y_0, \dots, Y_n), \\ \Phi_n(M_0, \dots, M_n) &= \Phi_n(X_0, \dots, X_n) \cdot \Phi_n(Y_0, \dots, Y_n), \end{aligned}$$

其中

$$\Phi_n = Z_0^{p^n} + p Z_1^{p^{n-1}} + \dots + p^n Z_n$$

是多项式,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $p$  是一个素数. 特别地

$$S_0 = X_0 + Y_0, S_1 = X_1 + Y_1 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{i} X_0^i Y_0^{p-i};$$

$$M_0 = X_0 Y_0, M_1 = X_0^p Y_1 + X_1 Y_0^p + p X_1 Y_1.$$

Witt 向量关于上述运算形成一个环, 称为 **Witt 向量环** (ring of Witt vectors), 记成  $W(A)$ . 对任一自然数  $n$ , 都有一个长度为  $n$  的截尾 Witt 向量环 (truncated Witt vectors)  $W_n(A)$ . 这个环的元素是有限元组  $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ ,  $a_i \in A$ , 其加法和乘法运算如上所述. 典范映射

$$R: W_{n+1}(A) \rightarrow W_n(A),$$

$$R((a_0, \dots, a_n)) = (a_0, \dots, a_{n-1}),$$

$$T: W_n(A) \rightarrow W_{n+1}(A),$$

$$T((a_0, \dots, a_{n-1})) = (0, a_0, \dots, a_{n-1})$$

是同态. 规则  $A \mapsto W(A)$  (或  $A \mapsto W_n(A)$ ) 定义从具有单位元的交换环范畴到环范畴的共变函子. 这个函子可以用多项式环  $\mathbf{Z}[X_0, \dots, X_n, \dots]$  (或  $\mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-1}]$ ) 表示, 其上定义了一个环对象的结构. 谱  $\text{Spec } \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_n, \dots]$  (或  $\text{Spec } \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-1}]$ ) 称为 **Witt 概形** (Witt scheme) (或截尾 Witt 概形 (truncated Witt scheme)), 是一个环概形 ([3]).

$A$  中每一个元  $a$  定义了一个 Witt 向量

$$a^\tau = (a, 0, 0, \dots) \in W(A),$$

称为元素  $a$  的 **Teichmüller 代表** (Teichmüller representative). 如果  $A = k$  是一个特征  $p > 0$  的完全域, 则  $W(k)$  是一个特征 0 的完满离散赋值环, 其剩余域为  $k$ , 极大理想为  $pW(k)$ .  $W(k)$  中任一元  $\omega$  可以唯一地表示成

$$\omega = \omega_0^\tau + p\omega_1^\tau + p^2\omega_2^\tau + \dots.$$

这里  $\omega_i \in k$ . 反过来, 每一个具有剩余域  $k = A/p$  的这样的环  $A$  都典范同构于环  $W(k)$ . 利用 Teichmüller 代表可以构造一个从  $k$  到  $W(k)$  的典范乘法同态  $k \rightarrow W(k)$ , 使得映射

$$W(k) \rightarrow W(k)/p \cong k$$

分裂. 如果  $k = \mathbf{F}_p$  是  $p$  元域, 则  $W(\mathbf{F}_p)$  就是  $p$  进整数环  $\mathbf{Z}_p$ .

#### 参考文献

- [1] Witt, E., Zyklische Körper und Algebren der charakteristik  $p$  vom Grad  $p^n$ . Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassen-Körper der charakteristik  $p$ , *J. Reine Angew. Math.*, 176 (1936), 126 - 140.



- [2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.  
 [3] Mumford, D., Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ. Press, 1966.  
 [4] Serre, J.-P., Groupes algébrique et corps des classes, Hermann, 1959.  
 [5] Demazure, M. and Gabriel, P., Groupes algébriques, 1. Masson, 1970.  
 [6] Dieudonné, J., Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique  $p > 0$  VII, *Math. Ann.*, 134 (1957), 114 - 133. И. В. Долгачев 撰

【补注】上述构造有一个对所有素数  $p$  都同时适用的推广 ([A3]): 函子  $W$ : 环  $\rightarrow$  环称为大 Witt 向量 (big Witt vector), 此处, 环是指有单位元的交换、结合环范畴. 上述所描述的相应于素数  $p$  的无限长 Witt 向量 (Witt vectors of infinite length) 的函子是  $W$  的一个商, 通常记成  $W_p^\infty$ .

对每个  $n \in \{1, 2, \dots\}$ , 令  $w_n(X)$  是多项式

$$w_n(X) = \sum_{d|n} d X_d^{n/d}.$$

那么有下述的 Witt 向量表征定理 (characterization theorem for the Witt vectors): 存在唯一的函子  $W$ : 环  $\rightarrow$  环 (ring  $\rightarrow$  ring) 具有下列性质: 1) 作为函子  $W$ : 环  $\rightarrow$  集合  $W(A) = \{(a_1, a_2, \dots): a_i \in A\}$ , 且对任一环同态  $\varphi: A \rightarrow B$ ,  $W(\varphi)(a_1, a_2, \dots) = (\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots)$ ; 2) 对每个  $A$  和  $n \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $w_{n,A}: W(A) \rightarrow A$ ,  $(a_1, a_2, \dots) \mapsto w_n(a_1, a_2, \dots)$  是环的函子同态.

对任一  $n \in \{1, 2, \dots\}$ , 函子  $W$  有一组函子环自同态  $f_n: W \rightarrow W$ , 它由下式唯一确定: 对任意  $n, m \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $w_n f_m = w_{nm}$ . 最后, 从  $W(-)$  到  $W(W(-))$  有一个函子同态  $\Delta$ , 它由下列性质唯一决定: 对所有的  $n, A$ ,  $w_{n,W(A)} \Delta_A = f_{n,A}$ .

为构造  $W(A)$ , 按下式定义多项式  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n, \dots; \Pi_1, \dots, \Pi_n, \dots; r_1, \dots, r_n, \dots$ :

$$w_n(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n) = w_n(X) + w_n(Y),$$

$$w_n(\Pi_1, \dots, \Pi_n) = w_n(X) w_n(Y),$$

$$w_n(r_1, \dots, r_n) = -w_n(X).$$

$\Sigma_n$  和  $\Pi_n$  是  $X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_n$  的多项式,  $r_n$  是  $X_1, \dots, X_n$  的多项式, 它们都是整系数的. 现在,  $W(A)$  可以定义为集合  $W(A) = \{a = (a_1, a_2, \dots): a_i \in A\}$ , 有加法, 乘法和负:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots) + (b_1, b_2, \dots) &= (\Sigma_1(a, b), \Sigma_2(a, b), \dots), \\ (a_1, a_2, \dots) \cdot (b_1, b_2, \dots) &= (\Pi_1(a, b), \Pi_2(a, b), \dots), \end{aligned}$$

$$-(a_1, a_2, \dots) = (r_1(a), r_2(a), \dots).$$

$W(A)$  的零元为  $(0, 0, \dots)$ , 单位元是  $(1, 0, 0, \dots)$ . Frobenius 自同态 (Frobenius endomorphisms)  $f_n$  和 Artin-Hasse 指数 (Artin-Hasse exponential)  $\Delta$  可以用类似的方法构造, 即它们也可以用某些通用多项式给出. 另外有 Verschiebung 态射 (Verschiebung morphisms)  $V_n: W(-) \rightarrow W(-)$ , 它由下式刻画:

$$w_m V_n = \begin{cases} 0, & \text{如 } n \text{ 不能整除 } m, \\ n w_{m/n}, & \text{如 } n \text{ 整除 } m. \end{cases}$$

$V_n$  是  $W(-)$  的群自同态, 但不是环自同态.

理想  $I_n = \{(0, \dots, 0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)\} \subset W(A)$  在  $W(A)$  上定义了一个拓扑, 使  $W(A)$  成为一个可分的完全拓扑环.

对每个  $A \in$  环, 令  $\Lambda(A)$  是在幂级数乘法下的 Abelian 群  $1 + tA[[t]]$ , 则

$$\bar{E}: W(A) \rightarrow \Lambda(A),$$

$$(a_1, a_2, \dots) \mapsto \prod_{i=1}^{\infty} (1 - a_i t^i),$$

定义一个 Abelian 群的函数同构, 利用同构  $\bar{E}$  在  $\Lambda(A)$  上可定义一个交换环结构. 利用  $\bar{E}$ , Artin-Hasse 指数 (Artin-Hasse exponential)  $\Delta$  定义了环的函子同态:

$$W(A) \rightarrow \Lambda(W(A)),$$

使得  $W(A)$  成为一个函子特殊  $\lambda$  环 ( $\lambda$ -ring). Artin-Hasse 指数  $\Delta: W \rightarrow W \cdot W$  在  $W$  上定义了一个余三元组, 且这个余三元组的余代数恰好就是这个特殊  $\lambda$  环 (见范畴 (category) 和三元组 (triple)).

在  $\Lambda(A)$  上, Frobenius 和 Verschiebung 自同态满足

$$f_n(1 - at) = (1 - a^n t),$$

$$V_n f(t) = f(t^n),$$

且完全由上式决定 (在  $f_n$  情形下要加上函子性和加性).

对每个超自然数 (supernatural number)  $\mathbf{n} = \prod_p p^{\alpha_p}$ ,  $\alpha_p \in \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ , 定义  $N(\mathbf{n}) = \{n \in \{1, 2, \dots\}: v_p(n) \leq \alpha_p \text{ 对所有素数 } p\}$ , 这里  $v_p$  是  $n$  的  $p$  进赋值 ( $p$ -adic valuation), 即  $n$  中素因子  $p$  的个数. 令

$$\mathfrak{a}_n(A) = \{(a_1, a_2, \dots): a_d = 0, \text{ 对所有的 } d \in N(\mathbf{n})\},$$

则  $\mathfrak{a}_n(A)$  是  $W(A)$  的一个理想, 对每个超自然数  $\mathbf{n}$ , 一个相应的 Witt 向量环定义为

$$W_n(A) = W(A) / \mathfrak{a}_n(A).$$

特别地, 在上文讨论的关于素数  $p$  的无限长 Witt 向量环  $W_{p^\infty}(A)$  是大 Witt 向量环  $W(A)$  的商.

在某种意义上, Artin - Hasse 指数  $\Delta: W \rightarrow W \circ W$  与这些商的形成是相容的. 同样, 利用同构  $\bar{E}$  可以得到映射:

$$\mathbf{Z}_p = W_{p^\infty}(F_p) \rightarrow \Lambda(W_{p^\infty}(F_p)) = \Lambda(\mathbf{Z}_p),$$

这里  $\mathbf{Z}_p$  表示  $p$ -adic 整数,  $F_p$  为  $p$  元素域. 这个映射可以与 Artin 和 Hasse ([A1], [A2], [A3]) 定义的经典态射等同起来.

作为 Abel 群,  $W(A)$  与一维乘法形式群 (formal group)  $G_m$  的曲线组成的曲线群  $\mathcal{C}(G_m; A)$  同构. 这样, 对每一个一维形式群, 都存在一个类似于 Witt 向量的取值于 Abel 群的函子. 在特殊情况下, 如 Lubin - Tate 形式群, 它给出取值于环的函子, 称为分歧 Witt 向量 ([A3], [A4]).

设  $r_n(X, Y)$  是如下所定义的系数在  $\mathbf{Z}$  中的多项式序列:

$$X^n + Y^n = \sum_{d|n} d r_d(X, Y)^{n/d}.$$

Cartier 环 (Cartier ring)  $\text{Cart}(A)$  是所有形式表达式

$$\sum_{i,j \in \{1,2,\dots\}} \mathbf{V}_i \langle a_{ij} \rangle \mathbf{f}_j \quad (*)$$

形成的环, 其运算规则是

$$\begin{aligned} \langle a \rangle \langle b \rangle &= \langle ab \rangle, \\ \langle 1 \rangle &= \mathbf{f}_1 = \mathbf{V}_1 = \text{单位元 } 1, \\ \mathbf{V}_n \mathbf{V}_m &= \mathbf{V}_{nm}, \mathbf{f}_n \mathbf{f}_m = \mathbf{f}_{nm}, \\ \langle a \rangle \mathbf{V}_m &= \mathbf{V}_m \langle a^m \rangle, \mathbf{f}_m \langle a \rangle = \langle a^m \rangle \mathbf{f}_m, \\ \mathbf{V}_m \mathbf{f}_n &= \mathbf{f}_n \mathbf{V}_m, \text{ 如果 } (n, m) = 1, \\ \mathbf{f}_n \mathbf{V}_n &= 1 + \dots + 1 \text{ (} n \text{ 项)}, \\ \langle a + b \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{V}_n \langle r_n(a, b) \rangle \mathbf{f}_n. \end{aligned}$$

$A$  上的交换形式群是利用  $\text{Cart}(A)$  上的某些模进行分类的. 当  $A$  是一个  $\mathbf{Z}_{(p)}$  代数时, 为此目的可以利用一个更简单的环  $\text{Cart}_p(A)$ . 它由所有表达式 (\*) 构成, 这时下标  $i, j$  仅取素数  $p$  的幂  $p^0, p^1, p^2, \dots$ . 运算规则类似. 当  $k$  是一个特征  $p > 0$  的完全域, 表示  $W(k)$  的 Frobenius 自同态 (此时由  $\sigma(a_1, a_2, \dots) = (a_1^p, a_2^p, \dots)$  给出), 那么  $\text{Cart}_p(k)$  可以表示成由系数在  $W_{p^\infty}(k)$  中关于符号  $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{V}$  的所有表达式

$$x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{V}^i + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathbf{f}^j$$

所成的环, 且满足附加条件  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$ , 其运算规则为:

$$\mathbf{f}x = \sigma(x)\mathbf{f}, \mathbf{V}x = \sigma^{-1}(x)\mathbf{V},$$

$$\mathbf{f}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{f} = p.$$

这个环, 及由表达式

$$x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{V}^i + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathbf{f}^j$$

所成的子环称为 Dieudonné 环 (Dieudonné ring)  $D(k)$ , 其上的某些模 (称作 Dieudonné 模 (Dieudonné modules)) 将  $k$  上的幂么交换仿射群概型分类, 见 [A5].

#### 参考文献

- [A1] Artin, E. and Hasse, H., Die beide Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der  $l^n$ -ten Potenzreste im Körper der  $l^n$ -ten Einheitswurzeln, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 6 (1928), 146 - 162.
- [A2] Whaples, G., Generalized local class field theory III: Second form of the existence theorem, structure of analytic groups, *Duke Math. J.*, 21 (1954), 575 - 581.
- [A3] Hazewinkel, M., Twisted Lubin-Tate formal group laws, ramified Witt vectors and (ramified) Artin-Hasse exponentials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 259 (1980), 47 - 63.
- [A4] Hazewinkel, M., Formal group laws and applications, Acad. Press, 1978.
- [A5] Demazure, M. and Gabriel, P., Groupes algébriques, I, North-Holland, 1971.

裴定一 译 赵春来 校

#### WKB 方法 [WKB method; БКБ-метод]

G. Wentzel, H. Kramers, L. Brillouin 和 H. Jeffreys 用来求解以下形式的常微分方程的一种渐近方法:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - q(t)x = 0. \quad (1)$$

其中在最高阶导数前有一小参数  $\varepsilon > 0$ . 他们在 1926 年为求 Schrödinger 量子力学波动方程的近似解引入这个方法 (关于其历史的详细叙述和有关文献, 见 [5], [6]). 这个方法还有另一些名字: Liouville - Green 近似 (Liouville - Green approximation); 相位积分方法 (method of the phase integral); 半经典近似 (semi-classical approximation), 有时  $W, K, B$  (还有  $J$ ) 这几个字母的排列次序也会不同.

令  $I = [a, b]$ ,  $q(t) \in C^\infty(I)$  而当  $t \in I$  时  $\text{Re} \sqrt{q(t)} \geq 0$  或当  $t \in I$  时  $q(t) < 0$ . 于是方程 (1) 有一解, 使得当  $\varepsilon \rightarrow +0$  时, 对于  $t \in I$  一致地有,

$$x_j(t, \varepsilon) \approx w_j(t, \varepsilon) \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_{kj}(t) \right], j = 1, 2,$$

其中

$$w_{1,2}(t, \varepsilon) = q^{-1/4}(t) \exp \left[ \pm \varepsilon^{-1} \int_a^t \sqrt{q(\tau)} d\tau \right]. \quad (2)$$

渐近展开式的主项 (2) 通常称为 WKB 近似 (WKB approximation).



令  $I = [0, +\infty)$ , 且上述关于  $q(t)$  的条件都满足, 再令

$$\int_0^{\infty} (|q'(t)|^2 |q(t)|^{-5/2} + |q''(t)| |q(t)|^{-3/2}) dt < \infty.$$

这时方程 (1) 有解  $x_j(t, \varepsilon) = w_j(t, \varepsilon) (1 + \varepsilon \varphi_j(t, \varepsilon)) (j = 1, 2)$ , 其中  $|\varphi_j(t, \varepsilon)| \leq C (t \in I, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ , 这里  $\varepsilon_0 > 0$  充分小, 而当  $t \rightarrow +\infty, \varepsilon > 0$  时,  $\varphi_j(t, \varepsilon) \rightarrow 0$ .

如果  $q(t_0) = 0$ , 点  $t_0$  称为方程 (1) 的转向点 (turning point). WKB 近似在转向点不适用. 而适用于转向点邻域中的渐近公式已经找到了 ([1], [4]). 渐近展开式的主项可以用 Bessel 函数表示.

在许多问题 (如本征值问题, 散射问题) 中, 只需知道方程 (1) 的解在区间端点的渐近状况, 即不必去找转向点处的渐近展开. 如果  $q(t)$  是一解析函数, 一般地可以经由复平面  $C$  将 WKB 公式由区间  $I$  的一端拓展到另一端 (严格证明见 [2]). 当  $q(t)$  为整函数时, 已知 WKB 近似 (2) 在复平面  $C$  上由 Stokes 线 (Stokes lines) (即经过转向点的水平线  $\operatorname{Re} \int \sqrt{q(t)} dt = \text{常数}$ ) 所包围的区域中适用. 也得到了方程 (1) 的基本解组除在转向点的邻域外, 整个复平面上都适用的渐近公式.

关于偏微分方程的 WKB 近似可见 [5], [6], [8], [9], [10].

#### 参考文献

- [1] Wazov, W., Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience, 1965.
- [2] Евграфов, М. А., Федорюк, М. В., «Успехи матем. наук», 21 (1966), 1, 3 – 50.
- [3] Федорюк, М. В., Добавление к книге В. Вазова [1], 406 – 433.
- [4] Дородницын, А. А., «Успехи матем. наук», 7 (1952), 6, 3 – 96.
- [5] Heading, J., An introduction to phase-integral methods, Methuen, 1962.
- [6] Fröman, N. and Fröman, P. O., JWKB approximation, North-Holland, 1965.
- [7] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Квантовая механика, 2 изд., М., 1963 (英译本: Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., Quantum Mechanics, Pergamon, 1965).
- [8] Маслов, В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965.
- [9] Маслов, В. П., Операторные методы, М., 1973.
- [10] Маслов, В. П., Федорюк, М. В., Квазиклассическое, приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976. (英译本: Maslov, V. P. and Fedoryuk, M. V., Semi-classical approximation in quantum mechanics, Reidel, 1981).

М. В. Федорюк 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Olver, F. W. J., Asymptotics and special functions, Acad. Press, 1974. 齐民友 译

#### Wolfowitz 不等式 [Wolfowitz inequality; Вольфовица неравенство]

一个关于参数的统计估计与其真值的偏差平方的数学期望的不等式, 是用序贯分析 (sequential analysis) 方法得到的. Wolfowitz 不等式类似于固定样本大小的 Rao-Cramér 不等式 (Rao-Cramér inequality), 它由 J. Wolfowitz 求得. И. В. Романовский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Wolfowitz, J., The efficiency of sequential estimates and Wald's equation for sequential processes, Ann. Math. Statist., 18 (1947), 215 – 230.

潘一民 译

#### 字 [word; слово]

某一字母表 (alphabet) 中的字母 (letter) 的 (线性) 序列. 例如, 符号序列 “wordinalphabet” 就是任意含字母 i, w, o, r, d, n, a, l, p, h, b, e, t 的字母表中的一个字. 为了方便起见, 也容许空字 (empty word), 即不含字母的字. 它是任意字母表中的字.

更确切地, 可以使用字的归纳特征化 (inductive characterization), 按照这个办法, 在一个字母表  $A$  中的字定义为由以下的生成步骤而得到的对象: a) 空字是  $A$  中一个字; b) 如果对象  $P$  是  $A$  中一个字而  $\xi$  是  $A$  的一个字母, 则  $P\xi$  也是  $A$  中一个字. 这种对字的刻画使得证明在一个给定的字母表中关于字的普遍为真的论断时可以应用归纳论证.

字是构造对象 (constructive object) 的一种很好的一般类型, 因此, 字的概念在构造性数学中占有重要的地位. 字的概念也被广泛地用于代数、数学语言等各个方面.

#### 参考文献

- [1] Марков, А. А., Теория алгоритмов, М. - Л., 1954 (《Тр. матем. ин-та АН СССР》, 42 (1954), 12 – 25). (中译本: А. А. 马尔科夫, 算法论 (上, 下), 科学出版社, 1959).
- [2] Markov, A. A. and Nagorny, N. M. (N. M. Nagorniy): The theory of algorithms, Kluwer 1988 (译自俄文). Н. М. Нагорный 撰

【补注】在代数中, 字通常由字母和运算符号构成, 如  $x + y - z$ .

字长 (length of a word) 归纳地定义为:  $l$  (空字)  $= 0$ ,  $l(P\xi) = l(P) + 1$ .

对于 (字的) 毗连 (concatenation) 运算

$$(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \mapsto a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m,$$

字母表  $A$  上的所有字的集  $\Omega(A)$  构成一个结合幺半群 (monoid). 空字是单位元. 这是  $A$  上的自由幺半群 (free monoid). 它具有自由性质 (或称泛性质): 对每一个幺半群  $M$  和集映射  $\varphi: A \rightarrow M$ , 存在唯一一个幺半群态射  $\tilde{\varphi}: \Omega(A) \rightarrow M$ ,  $\tilde{\varphi}$  是  $\varphi$  的扩充. 这里,  $A$  与  $\Omega(A)$  中长为 1 的字的集合相同.

#### 参考文献

- [A1] Lyndon, R. and Schupp, P. Combinatorial group theory, Springer, 1977. 郝钢新 译

#### 世界函数 [world function; мировая функция]

沿 (测地凸的) 时空 (space-time) 中连接两点  $P'(x')$  和  $P(x)$  的测地线  $\Gamma$  所取的积分值

$$\begin{aligned} \Omega(P', P) &= \Omega'(x', x) = \\ &= \frac{1}{2} (u_1 - u_0) \int_{u_0}^{u_1} g_{ij} U^i U^j du. \end{aligned}$$

这里  $\Gamma$  是用参数化  $x^i = \xi^i(u)$  给出的,  $u$  是典范参数,  $U^i = d\xi^i/du$ . 世界函数在可相差一个符号的意义下等于连接  $P'$  和  $P$  的测地线的平方测度的一半, 而且是两点不变的, 即它的值在  $P'$  与  $P$  的邻域中的坐标变换下是不变的.

在平坦时空中, 存在着一个坐标系使得

$$\Omega(x', x) = \frac{1}{2} g_{ij}^0 (x'^i - x^i) (x'^j - x^j),$$

其中

$$g_{ij}^0 = \text{diag}(1, 1, 1, -1).$$

#### 参考文献

- [1] Synge, J. L., Relativity: the general theory, North-Holland & Interscience, 1960, Chapt. II (译自俄文). М. И. Войцеховский 撰 沈纯理 译

#### 世界线 [world line; мировая линия]

时空 (space-time) 中的一条线, 它是一个质点的时空轨线. 在时空的某个区域中引入一个局部坐标系  $t, x, y, z$ , 并设点  $P(t, x, y, z)$  位于世界线  $\gamma$  上,  $P$  称为世界点 (world point); 它描述了事件 (event), 即在时间  $t$ , 质点  $P$  具有空间坐标  $x, y, z$ . 事件的概念以及相关的世界点和世界线的概念, 加上从经典力学中借来的质点的概念都是相对论中的基本概念. 通常考虑光滑 (或分段光滑) 的世界线. 具有正静止质量的质点的世界线是一条类时曲线. 具有零静止质量的质点 (例如光子及其他一些零质量的基本

粒子的非量子模型) 的世界线是一条类光曲线. 时空中任一点被看成是一个世界点, 即一个 (潜在) 事件, 每一条类时或类光曲线被看成某一质点的 (可能的) 世界线. 根据测地线假设 (geodesic hypothesis), 不受非引力场影响的一个质点的世界线是时空测地线. 世界线  $\gamma$  的单位切向量  $\dot{\gamma}$  是一个四维速度向量; 在局部坐标系中, 它具有如下形式:

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right],$$

其中

$$v = \left[ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right].$$

亦见 Minkowski 空间 (Minkowski space).

Д. Д. Соколов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Taylor, E. F. and Wheeler, J. A., Space-time physics, Freeman, 1963.  
[A2] Eddington, A. S., The mathematical theory of relativity, Cambridge Univ. Press, 1960.  
[A3] Bergmann, P. G., Introduction to the theory of relativity, Dover, reprint, 1976.  
[A4] Lawden, D. F., Tensor calculus and relativity, Methuen, 1962. 沈纯理 译

#### 圈积 [wreath product; сплетение]

1) 两个群  $A$  和  $B$  的圈积 (wreath product of two groups) 是用下述方法构成的. 令  $A^B$  是  $B$  上定义的在  $A$  中取值的所有函数的集合. 对于逐个分量的乘法, 它是群 (group), 且是  $A$  的  $|B|$  个副本的完全直积 ( $|B|$  表示  $B$  中元素的数目);  $B$  按下述方法作为自同构群作用在  $A^B$  上: 设  $b \in B$ ,  $\varphi \in A^B$ , 则对  $x \in B$ ,  $\varphi^b(x) = \varphi(xb^{-1})$ . 对于这个运算, 可形成  $B$  和  $A^B$  的半直积  $W$ , 即所有元素对  $(b, \varphi)$  的集合, 这里  $b \in B$ ,  $\varphi \in A^B$ , 乘法运算是

$$(b, \varphi) (c, \psi) = (bc, \varphi^c \psi).$$

作成的群  $W$  称为  $A$  和  $B$  的 Descartes (或完全的) 圈积 (Cartesian (complete) wreath product), 且记成  $A \text{ Wr } B$  (或用 Ph. Hall 的记号  $A \wr B$ ). 若用具有有限支撑的所有函数, 即仅在有限点集上取非单位元值的函数组成较小的群  $A^{(B)}$  代替  $A^B$ , 则就得到  $W$  的一个子群, 称为  $A$  和  $B$  的圈积 (wreath product) (直接圈积 (direct wreath product), 离散圈积 (discrete wreath product)); 用  $A \text{ wr } B$  (或  $A \wr B$ ) 表示它. 这两种圈积都广泛用于构造群的各种例子.



## 参考文献

- [1] Neumann, H., Varieties of groups, Springer, 1967.  
 [2A] Krasner, M. and Kaloujnine, L., Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes, I, *Acta Sci. Math. Szeged*, **13** (1950), 208 – 230.  
 [2B] Krasner, M. and Kaloujnine, L., Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes, II, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1951), 39 – 66; 69 – 82. A. Л. Шмелькин 撰

【补注】更一般地，令  $G$  为群， $H$  是置换群 (permutation group)，即  $H$  为作用在集合  $X$  上的群 (不传递或忠实地)。考虑全部元素对

$$\{(h, f) : f: X \rightarrow G, h \in H\}$$

的集合。在该集上定义乘法

$$(h_1, f_1)(h_2, f_2) = (h_1 h_2, f_1^{h_2} f_2),$$

这里  $f_1^{h_2}(x) = f_1(h_2(x))$  (以及  $(ff')(x) = f(x) \cdot f'(x)$ )。这样就定义了群结构，所得的群记成  $G \wr H$ ，且称为  $G$  和  $H$  的 (完全的 (complete)) 圈积 (wreath product)。若  $X$  是无限的，则仅取映射  $f: X \rightarrow G$ ，在几乎所有  $x \in X$  上使  $f(x) = e$ ，这里  $e$  是  $G$  中单位元，得到 (限制的 (restricted)) 圈积 (wreath product)。

在  $X = H$  的特殊情形， $H$  作用于本身， $x^h = h(x) = x h^{-1}$  是右正则置换表示，就得到前面所述的圈积，这种圈积通常叫做标准圈积 (standard wreath product) 或正则圈积 (regular wreath product)。

若  $G$  还是作用于集合  $Y$  的置换群，则  $G \wr H$  可看成作用在集合  $Y \times X$  上的置换群，其作用为

$$(h, f)(y, x) = (f(x)(y), h(x)).$$

对称群的许多自然的子群，如元素的中心化子，某些子群的正规化子，Sylow 子群，都是圈积的直积。例如 Young 子群 (Young subgroup)  $S_m \times \cdots \times S_m \subset S_{nm}$  的正规化子是圈积  $S_m \wr S_n$ 。当  $G$  是任意群时，圈积  $G \wr S_n$ ，曾称为  $G$  的次数为  $n$  的完全单项群 (complete monomial group of degree  $n$ )，或  $G$  的  $n$  次对称 (symmetry of degree  $n$ )。圈积  $\mathbb{Z}/(m) \wr S_n$  及  $\mathbb{Z}/(m) \wr A_n$  有时称为广义对称群 (generalized symmetric group) 及广义交错群 (generalized alternating groups)； $\mathbb{Z}/(2) \wr S_n$  是超八面体群 (hyper-octahedral group)。更一般的标准积是扭圈积，它结合了  $H$  的子群  $H_1$  在  $G$  上的作用，参见 [A4]。

## 参考文献

- [A1] Huppert, B., Endliche Gruppen, I, Springer, 1967, § 15 (中译本：贝·胡佩特，有限群，I，上、下册，福建人民出版社，1992)。

- [A2] Hall, M., The theory of groups, Macmillan, 1959, p. 81 ff (中译本：M. 赫尔，群论，科学出版社，1982)。  
 [A3] Kerber, A., Representations of permutation groups, I – II, Springer, 1971 – 1975.  
 [A4] Suzuki, M., Group theory, I, Springer, 1982.

石生明 译 王杰 校

(2) 半群的圈积 (wreath product of semi-group) 是由两个半群用下述方法构造出的第三个半群： $A$  和  $B$  的圈积  $W$  的底集合是  $F(B, A) \times B$ ，其中  $F(B, A)$  是从  $B$  到  $A$  中的所有映射的半群 (semi-group)，它的乘法是逐点乘法， $W$  上的运算由下述公式给定： $(f, b)(g, c) = (f^{b_g}, bc)$ ，其中映射  $b_g$  定义为  $b_g(y) = g(yb)$ 。 $A$  和  $B$  的圈积写成  $A \wr B$ 。这是标准圈积；圈积的其他定义和推广可参见 [1], [2], [4] – [7]。

$A$  和  $B$  的圈积包含直积 (direct product)  $A \times B$  作为子半群。若  $A$  有单位元，则  $A$  被  $B$  的任何理想扩张可嵌入  $A \wr B$  (见 [3])。

对  $A, B$  的各种性质何时能被  $A \wr B$  继承的问题已进行了研究，主要是对于各种类型的单纯性 (参见单半群 (simple semi-group))。下面是一些例子。设  $A$  和  $B$  是理想单半群， $B$  具有右消去律，则  $A \wr B$  是理想单半群。若  $A$  和  $B$  是完全单半群且  $A$  是左单的，则  $A \wr B$  是完全单的 ([3])。若  $A$  和  $B$  是有完全单核 (见半群的核 (kernel of a semi-group)) 的半群，则  $A \wr B$  有完全单核 ([4])，进而， $A \wr B$  的核等于核的圈积的平方 ([7])。若  $A, B$  之一为正则的，另一个为左单的，则  $A \wr B$  是正则的 ([6])。令  $|A| > 1$ ；则  $A \wr B$  是逆半群 (inversion semi-group) (或右群 (right group))，当且仅当  $A$  是逆半群 (或右群，分别地) 且  $B$  是群 ([6])。

圈积可用于给出下述 Evan 定理的紧凑的证明：每个可数半群  $S$  可嵌入到有二个生成元的半群中 ([1])，且当  $S$  是有限生成的周期半群时可嵌入到有两个生成元的周期半群中。

圈积和它的推广在自动机的代数理论中起重要作用。例如可用于证明下述定理：每个有限半群自动机可分解成触发器和单群自动机的逐级联接 ([2]，亦见 [5])，这即所谓 Krohn-Rhodes 定理。

## 参考文献

- [1] Neumann, B. H., Embedding theorems for semi-groups, *J. London Math. Soc.*, **35** (1960), 138, 184 – 192.  
 [2] Krohn, K. and Rhodes, J., Algebraic theory of machines. I, Prime decomposition theorem for finite semi-groups and machines, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **116** (1965), 450 – 464.

- [3] Hunter, R. P., Some results on wreath products of semi-groups, *Bull. Soc. Math. Belgique*, 18 (1966), 1, 3 - 16.
- [4] McKnight, J. D., jr. and Sadowski, E., The kernal of the wreath product of semi-groups, *Semigroup Forum*, 4 (1972), 232 - 236.
- [5] Arbib, M. (ed.): Algebraic theory of machines, languages and semi-groups, Acad. Press, 1968.
- [6] Кошелев, Ю. Г., Сплетение и уравнение на полугруппе, *Semigroup Forum*, 11 (1975), 1, 1 - 13.
- [7] Nakajima, S., On the kernal of the wreath product of completely simple semi-groups II, in Proc. First Symp. Semi-groups, Shimane Univ. Matsue, 1977, 84 - 88. Э. А. Голубов, Л. Н. Шеврин 撰 石生明 译 王 杰 校

### 翻滚数 [writting number]

【补注】 设  $C$  是  $\mathbf{R}^3$  中一条闭的嵌入的光滑曲线. 对  $C$  上的每一个有序点对  $x, y$ , 设  $e(x, y) = (y - x) / \|y - x\|$  为从  $x$  指向  $y$  的单位长度向量. 这给出了一个映射  $e: C \times C \rightarrow S^2$ . 空间曲线  $C$  的翻滚数为

$$\text{Wr}(C) = \frac{1}{4\pi} \int_{C \times C} e^* d\Sigma,$$

其中  $e^* d\Sigma$  是单位球面  $S^2$  上的标准面积元  $d\Sigma$  沿  $e$  的拉回. 藉助于在  $x$  和  $y$  点处的局部曲线参数  $s_1$  和  $s_2$ ,  $\text{Wr}(C)$  可表示成

$$\text{Wr}(C) = \frac{1}{4\pi} \iint \left[ \frac{\partial e}{\partial s_1} \times \frac{\partial e}{\partial s_2} \cdot e \right] ds_1 ds_2.$$

现在设  $R$  是一个以  $C$  为基础的带 (ribbon), 这样的带可通过取  $C$  上的一个光滑的单位长度向量场  $v$  而得到, 使得在  $x \in C$  处,  $v(x)$  总是垂直于  $C$  在  $x$  处的切向量. 将单位长度取得足够小, 使得  $x$  处的每个单位长度线段  $v(x)$  与  $C$  仅交于点  $x$ . 带  $R$  是所有闭的单位长度线段  $v(x)$  ( $x \in C$ ) 的并集. 设  $C'$  是由  $v(x)$  的末端点所构成的光滑曲线. 带  $R$  的全扭曲 (total twist) 定义为

$$\text{Tw}(R) = \frac{1}{2\pi} \int_C v^\perp \cdot dv,$$

其中  $v^\perp$  是在  $x \in C$  处的单位长度矢量, 使得  $v, v^\perp$  及在  $x$  处的沿  $C$  的单位长度切矢量  $t$  构成了一个右手标准正交 3 维标架.  $C$  的翻滚数,  $R$  的全扭曲以及环绕数 (linking number)  $\text{Lk}(C, C')$  (见环绕系数 (linking coefficient)) 之间满足如下的 White 公式 (White formula):

$$\text{Lk}(C, C') = \text{Tw}(R) + \text{Wr}(C),$$

这里环绕数是由 Gauss 公式 (Gauss formula)

$$\text{Lk}(C, C') = \frac{1}{4\pi} \int_{C \times C'} e^* d\Sigma$$

给出的 (其中  $x$  取遍  $C$ ,  $y$  取遍  $C'$ ). White 公式在 DNA 的螺旋和超螺旋中有应用.

### 参考文献

- [A1] Pohl, W. F., DNA and differential geometry, *Math. Intelligencer*, 3 (1980), 20 - 27.
- [A2] White, J. H., Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions, *Amer. J. Math.*, 91 (1969), 693 - 728. 沈纯理 译

### Wronski 行列式 [Wronskian 或 Wronski determinant; Вронскиан]

$n$  个  $n$  维向量函数系

$$\varphi_i(t) = \{\varphi_i^1(t), \dots, \varphi_i^n(t)\}, i = 1, \dots, n \quad (1)$$

的下述行列式 (determinant)

$$W(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_n^1(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^n(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix}$$

具有直到 (包括)  $(n-1)$  阶导数的  $n$  个标量函数系

$$f_1(t), \dots, f_n(t) \quad (2)$$

的 Wronski 行列式是

$$W(f_1(t), \dots, f_n(t)) = \begin{vmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}. \quad (3)$$

这些概念由 J. Wronski ([1]) 首先引入.

如果向量函数系 (1) 在集合  $E$  上线性相关, 那么

$$W(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \equiv 0, t \in E.$$

若标量函数 (2) 在集合  $E$  上线性相关, 则

$$W(f_1(t), \dots, f_n(t)) \equiv 0, t \in E.$$

逆定理一般不成立: 一个 Wronski 行列式在某集合上恒为零不是  $n$  个函数在该集上线性相关 (linear dependence) 的充分条件.

假设向量函数 (1) 是  $n$  阶线性齐次方程组  $x' = A(t)x$  ( $x \in \mathbf{R}^n$ ) 的解,  $A(t)$  是  $n \times n$  维矩阵, 它在某区间  $I$  上连续. 若这些解构成一基本解系, 那么

$$W(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \neq 0, t \in I.$$

若这些解的 Wronski 行列式至少在  $I$  的某一点上等于零, 那么它就在  $I$  上恒等于零, 从而函数系 (1) 线性相关. 下述 Liouville 公式 (Liouville formula) 是有用的:

$$W(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) =$$



$$= W(\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_n(\tau)) \exp \int_{\tau}^t \text{Tr } A(s) ds, \quad t, \tau \in I,$$

这里  $\text{Tr } A(t)$  是矩阵  $A(t)$  的迹.

设函数系 (2) 是  $n$  阶线性齐次方程

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0$$

的解, 其中  $p_1(t), \dots, p_n(t)$  在区间  $I$  上连续. 若这些解构成一个基本解系, 那么

$$W(f_1(t), \dots, f_n(t)) \neq 0, \quad t \in I.$$

若这些解的 Wronski 行列式至少在  $I$  的某点上为 0, 那么它在  $I$  上恒等于零, 从而函数系 (2) 线性相关. Liouville 公式 (Liouville formula) 成立:

$$W(f_1(t), \dots, f_n(t)) = W(f_1(\tau), \dots, f_n(\tau)) \exp \left[ - \int_{\tau}^t p_1(s) ds \right], \quad t, \tau \in I.$$

#### 参考文献

- [1] Hoene-Wronski, J., *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, Paris, 1812.  
 [2] Понтрягин, Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, 4 изд., М., 1974 (中译本: Л. С. 庞特利雅金, 常微分方程, 上海科学技术出版社, 1962). И. Х. Розов 撰

【补注】 G. Peano ([A3]) 给出了使 Wronski 行列式恒为零但非线性相关的  $n$  个函数系 (2) 的例子.

$\Phi = \{f_1, \dots, f_n\}$  的一个  $i$  阶子 Wronski 行列式是从  $\Phi$  中取  $i$  个函数所构成的 Wronski 行列式. 下面两个定理都是通过 Wronski 行列式给出线性相关的充分条件. 1) 设  $n > 1$ ,  $f_1, \dots, f_n$  解析且  $W(\Phi) \equiv 0$ , 则  $f_1, \dots, f_n$  线性相关 ([A4], [A5]). 2) 设  $n > 1$ ,  $W(\Phi) \equiv 0$ , 又设在  $f_1, \dots, f_n$  的定义区间上不存在点使所有  $n-1$  阶子 Wronski 行列式同时为零, 那么  $\Phi$  线性相关 ([A3]).

关于多元函数的更多知识与结果, 见 [A6], [A7].

#### 参考文献

- [A1] Apostel, T. M., *Mathematical analysis*, Addison-Wesley, 1974.  
 [A2] Hartman, P., *Ordinary differential equations*, Birkhäuser, 1982.  
 [A3] Peano, G., *Sur le déterminant Wronskian*, *Mathesis*, 9 (1889), 75 – 76.  
 [A4] Böcher, M., *Certain cases in which the vanishing of the Wronskian is a sufficient condition for linear dependence*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2 (1901) 139 – 149.  
 [A5] Crutis, D. R., *The vanishing of the Wronskian and the problem of linear dependence*, *Math. Ann.*, 65 (1908), 282 – 298.

[A6] Wollsson, K., *A condition equivalent to linear dependence for functions with vanishing Wronskian*, *Linear Alg. Appl.*, 116 (1989), 1 – 8.

[A7] Wollsson, K., *Linear dependence of a function set of  $m$  variables with vanishing generalized Wronskians*, *Linear Alg. Appl.*, 117 (1989), 73 – 80.

王斯雷 译

#### 点窝 [wurf; выпл]

当  $n > 1$  时,  $n$  维射影空间中  $n+2$  个点的有序集; 当  $n = 1$  时, 一维射影空间中 4 个点的有序集. 如果  $n > 1$ , 则点窝中的任意  $n+1$  点都不属于同一个超平面. 一条直线或一条圆锥截线上的两个点窝是相等的, 如果构成它们的两个点的四元组是射影的. 可以对点窝定义加法和乘法运算, 为此利用具有三个基点  $P_0, P_1, P_\infty$  的点窝——所谓约化点窝 (reduced wurf) 是合适的. 用这种方式, 点窝上的运算简化为点的运算.

两个点  $A$  和  $B$  的和 (sum of two points  $A$  and  $B$ ) ( $A, B \neq P_\infty$ ) 是点  $A+B$ , 它对应于交换  $A$  和  $B$  并保持  $P_\infty$  不动的双曲对合 (involution) ( $AB$ ) ( $P_\infty P_\infty$ ) 下的  $P_0$ . 加法运算是交换和结合的. 点  $P_0$  是零元; 每一点  $A$  对应于一个相反的点  $-A$ :  $A + (-A) = P_0$ .

两个点  $A$  和  $B$  的积 (product of two points  $A$  and  $B$ ) ( $A, B \neq P_0, P_\infty$ ) 是点  $A \times B$ , 它与点  $P_1$  一起在交换  $A$  和  $B$  及  $P_0$  和  $P_\infty$  的椭圆或双曲对合 ( $AB$ ) ( $P_0 P_\infty$ ) 下构成一个偶. 乘法运算是交换和结合的. 点  $P_1$  是单位元; 对每一点  $A$ , 存在一个对应的逆点  $A^{-1}$ :  $A \times A^{-1} = P_1$ .

#### 参考文献

- [1] Staudt, K. von, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 2, Kom, Nürnberg, 1959, 166 – 194.  
 [2] Coxeter, H. S. M., *The real projective plane*, Springer, 1992, Chapt. 11. А. Б. Иванов 撰

【补注】 K. von Staudt 用他的“点窝”使射影几何学坐标化. 现在他的方法已被认为过时了, 尽管这一方法是精巧的.

现代的方法始于 [A1].

如果  $P_0, P_1, P_\infty$  分别是射影直线上坐标为  $(0:1), (1:1), (1:0)$  的点,  $A$  和  $B$  是坐标为  $(a:1)$  和  $(b:1)$  的两个点, 则点窝等价类  $(P_0, P_1, P_\infty, A)$  和  $(P_0, P_1, P_\infty, B)$  的和与积是点窝等价类  $(P_0, P_1, P_\infty, A+B)$  与  $(P_0, P_1, P_\infty, A \times B)$ ,  $A+B$  与  $A \times B$  的坐标为  $(a+b:1)$  与  $(ab:1)$ .

#### 参考文献

- [A1] Veblen, O. and Young, J. W., *Projective geometry*, 1 – 2, Blaisdell, 1946. 陆珊年 译

# Y

**Y 微分同胚** [*Y-diffeomorphism*; *Y-диффеоморфизм*]

生成 **Y 系统** (*Y-system*) 的微分同胚.

**Y 系统** [*Y-system*; *Y-система*], **U 系统** (*U-system*), **C 系统** (*C-system*)

带有一个紧相流形的光滑动力系统 (**流** (连续时间动力系统) (flow (continuous-time dynamical system)) 或者 **瀑布** (cascade)), 其相流形是一个 **双曲集** (hyperbolic set). 称生成一个 **Y 级联** 的微分同胚为 **Y 微分同胚** (*Y-diffeomorphism*). **Y 系统** 是由 Д. В. Аносов 引入的 (见 [1], [2]), 因此它们也常被称为 **Аносов 系统** (*Anosov system*).

**Y 系统** 是结构稳定的 (见 **粗系统** (rough system)), 且 **Y 系统** 的一个 (在  $C^1$  意义下的) 微小扰动仍是一个 **Y 系统**. 周期至多为  $T$  的 **Y 系统** 的周期轨道的个数随着  $T$  指数增长. 关于一大类所谓的 “Gibbs” 不变测度, **Y 系统** 具有强遍历性 (见 [4] – [6]). 特别地, 如果一个 **Y 系统** 具有一个 “相容于光滑性” 的有限不变测度, 即此测度在局部坐标下是由一个正密度所定义的 (在早期的论文中只考虑这类测度, 见 [1] – [3]), 那么它一定是一个 Gibbs 测度. 因此, 如果一个 **Y 微分同胚** 没有 **游荡点** (wandering point), 那么它度量地同构于一个 **Bernoulli 自同构** (Bernoulli automorphism): 在广泛的假设下, 从时间平均值到空间平均值的收敛服从中心极限定理, 且混合率是指数的 (“相关的指数衰变”).

在 **Y 系统** 的研究中, 经常利用 **符号动力学** (symbolic dynamics), 由于文献 [7], [8] 引入了 **Марков** 分割才使得这成为可能 (其确切的定义在 [5] 中, 亦见 **符号动力学** (symbolic dynamics)). 已经证明关于 **Y 系**

统的许多结果对于某些其他类型的双曲集也成立. 在稍微减弱的双曲性条件下, 也有很少的直接推广 (见 [6], [14]).

环面的双曲自同构和负曲率闭流形上的 **测地流** (geodesic flow) 是 **Y 系统**. 也存在着其他的与代数-几何性质有关的例子. 在这些例子中, **Y 系统** 有一个与光滑性相容的不变测度. 通过一个微小扰动, 这样的测度可以不出现, 但从结构稳定性的观点来看, 所有点仍是非游荡的. 带有游荡点的 **Y 系统** (见 [9]) 的例子有根本不同的特征.

流形上 **Y 系统** 的存在强烈地限制着流形的拓扑性质. 关于这一点的一般情形, 人们所知甚少 (见 [10], [11]), 但当稳定或非稳定流形 (见 **双曲集** (hyperbolic set)) 是一维的情形, 已被彻底地研究了 (见 [9], [12], [13], [15]).

## 参考文献

- [1A] Аносов, Д. В., «Докл. АН СССР», 145 (1962), 4, 707 – 709.
- [1B] Аносов, Д. В., «Докл. АН СССР», 151 (1963), 6, 1250 – 1252.
- [2] Аносов, Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, М., 1967.
- [3] Аносов, Д. В., Синай, Я. Г., «Успехи матем. наук», 22 (1967), 5, 107 – 172.
- [4] Синай, Я. Г., «Успехи матем. наук», 27 (1972), 4, 21 – 64.
- [5] Bowen, R., Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Springer, 1975.
- [6] Каток, А. Б., Синай, Я. Г. and Stepin, A. M., Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, 129 – 262.



- [7] Adler, R. L. and Weiss, B., Similarity of automorphisms of the torus., *Mem. Amer. Math. Soc.*, **98** (1970).
- [8] Синай, Я. Г., «Функциональный анализ и его приложения», **2** (1968), 1, 64 – 89.
- [9] Franks, J. M. and Williams, B., Anomalous Anosov flows, in Z. Nitecki and C. Robinson (eds.): *Global Theory of Dynamical Systems* (Proc. Evanston, 1969), Lecture notes in math., Vol. 819, Springer, 1980, 158 – 174.
- [10] Hirsch, M. W., Anosov maps, polycyclic groups and homology, *Topology*, **10** (1971), 3, 177 – 183.
- [11] Shiraiwa, K., Manifolds which do not admit Anosov diffeomorphisms, *Nagoya Math. J.*, **49** (1973), 111 – 115.
- [12A] Franks, J., Anosov diffeomorphisms, in *Global Analysis*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 14, Amer. Math. Soc., 1970, 61 – 93.
- [12B] Newhouse, S. E., On codimension one Anosov diffeomorphisms, *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 761 – 770.
- [12C] Manning, A., There are no new Anosov diffeomorphisms on tori, *Amer. J. Math.*, **96** (1974), 422 – 429.
- [13] Verjovsky, A., Codimension one Anosov flows, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, **19** (1974), 2, 49 – 77.
- [14A] Fahti, A. and Laudenbach, F., Les feuilletages mesurés, *Astérisque*, **66 – 67** (1979), 71 – 126.
- [14B] Fahti, A. and Laudenbach, F., Comment Thurston compactifie l'espace de Teichmüller, *Astérisque*, **66 – 67** (1979), 139 – 158.
- [14C] Fahti, A. and Poénaru, V., Théorème d'unicité des difféomorphismes pseudo-Anosov, *Astérisque*, **66 – 67** (1979), 225 – 242.
- [15] Солодов, В. В., «Успехи матем. наук», **46** (1991), 91 – 114. Д. В. Аносов撰

【补注】在西方的文献中一直沿用术语 АНОСОВ 系统 (流, 微分同胚). АНОСОВ 流是公理 A 流 (axiom-A flows) 的特殊情形, 即紧流形上满足非游荡点 (non-wandering point) 的集合为双曲集 (hyperbolic set), 且周期点 (periodic point) 是稠密的流. 公理 A 流是由 S. Smale 引入的, 关于 АНОСОВ 系统的许多信息可在 [A2] 中找到.

#### 参考文献

- [A1] Adachi, T., Distribution of closed orbits with a pre-assigned homology class in a negatively curved manifold, *Nagoya Math. J.*, **110** (1988), 1 – 14.
- [A2] Bowen, R., On axiom A diffeomorphisms, *Amer. Math. Soc.*, 1978.
- [A3] Eberlein, P., When is a geodesic flow Anosov type? *J. Differential Geom.*, **8** (1973), 437 – 463.

- [A4] Plante, J. F., Homology of closed orbits of Anosov flows, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **37** (1973), 297 – 300.
- [A5] Shub, M., *Global stability of dynamical systems*, Springer, 1986.
- [A6] Palis, J. and De Melo, W., *Geometric theory of dynamical systems*, Springer, 1982.
- [A7] Smale, S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747 – 817.

沈纯理 译

#### 杨 (振宁)-Baxter 方程 [Yang-Baxter equation]

【补注】令  $R$  为  $(n^2 \times n^2)$  矩阵, 其元为  $r_{kl}^{ij}$ . 视  $R$  为  $C^n \otimes C^n$  的以  $e_i \otimes e_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) 为基的自同态, 使得

$$R(e_i \otimes e_j) = \sum_{a,b} r_{ij}^{ab} e_a \otimes e_b, \quad (A1)$$

则  $R$  的定常杨 (振宁)-Baxter 方程, 或称量子杨 (振宁)-Baxter 方程 (quantum Yang-Baxter equation) 是

$$R^{12} R^{13} R^{23} = R^{23} R^{13} R^{12}, \quad (A2)$$

这里  $R^{ij}$  是  $C^n \otimes C^n \otimes C^n$  的自同态, 它在第  $i, j$  两因子上的作用与  $R$  相同, 而令第三个因子不动. 于是,  $R^{12} = R \otimes \text{id}$ ,  $R^{23} = \text{id} \otimes R$ , 而

$$R^{13}(e_i \otimes e_j \otimes e_k) = \sum_{a,b} r_{ik}^{ab} e_a \otimes e_j \otimes e_b. \quad (A3)$$

杨-Baxter 方程的另一个形式是

$$\tilde{R}^{12} \tilde{R}^{23} \tilde{R}^{12} = \tilde{R}^{23} \tilde{R}^{12} \tilde{R}^{23}. \quad (A4)$$

$R$  是 (A2) 之解, 当且仅当  $\tilde{R} = PR$  为 (A4) 之解, 这里  $P$  是  $(n^2 \times n^2)$  矩阵  $P = (p_{kl}^{ij})$ ,  $p_{kl}^{ij} = \delta_{il} \delta_{jk}$  将  $C^n \otimes C^n$  的两个因子调换位置.

杨-Baxter 方程 (A2) 可以解释为关于具有内状态空间  $C^n$  的相对论性粒子的相互作用的条件 ([A2]). 令两个快度为  $\lambda, \mu$  的粒子的相互作用是  $R(\lambda, \mu): C^n \otimes C^n \rightarrow C^n \otimes C^n$ ; 则杨-Baxter 方程

$$\begin{aligned} R^{12}(\lambda, \mu) R^{13}(\lambda, \nu) R^{23}(\mu, \nu) &= \\ &= R^{23}(\mu, \nu) R^{13}(\lambda, \nu) R^{12}(\lambda, \mu) \end{aligned} \quad (A5)$$

表示这样一个条件: 三个粒子的相互作用是由各对粒子相互作用决定的而与哪一对粒子作用在先没有关系. 就这一方面而言, 杨-Baxter 方程也称为因子分解方程 (factorization equation). 这首先是在 [A5], [A6] 中被发现的. 在点阵统计力学中, 杨-Baxter 方程有另一种解释 ([A3], [A4]). 在这种情况下, 此方程称为三角形方程 (triangle equation) 或星形-三角形方程 (star-triangle equation). 它的起源可追溯到 [A7].

若  $\tilde{R}$  满足 (A4), 令  $\tilde{R}_i = \text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id} \otimes \tilde{R} \otimes \text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id}$ , 其中有  $i$  个因子  $\text{id}$  在  $\tilde{R}$  之前,  $n-i-1$  个因子  $\text{id}$  在其后. 于是  $\sigma_i \mapsto \tilde{R}_i$  定义了辫群 (braid group)  $B_n$  的一种表示,  $\sigma_i$  是第  $i$  简单辫, 见辫论 (braid theory). 这是纽结和辫的理论与量子场论和统计力学有相互联系的主要理由之一, 例如见 [A9].

杨-Baxter 方程的一个推广是基本交换关系 (fundamental commutation relation)

$$R(\lambda, \mu)(T(\lambda) \otimes T(\mu)) = (T(\mu) \otimes T(\lambda))R(\lambda, \mu), \quad (\text{A6})$$

它是由 Л. Д. Фаддеев, Е. К. Склянин 和 Л. А. Тахтадзеян 作为他们的量子反散射方法 (quantum inverse scattering method) 的基础引入的 ([A8]). 在 (A6) 中  $R(\lambda, \mu)$  是一个标量元的  $(n^2 \times n^2)$  矩阵 (和前面一样, 它通常满足杨-Baxter 方程),  $T(\lambda)$  则是算子的  $(n \times n)$  矩阵. 方程 (A6) 是应用一个 (代数的) Bethe 引理 (Bethe ansatz) 来计算 Hamilton 算子  $t(\lambda) = \text{Tr}(\dot{T}(\lambda))$  的本征值与本征向量的起点. (A6) 的解与某些 Hopf 代数的表示族有关, 特别是与拟三角 Hopf 代数 (的对偶) 的表示有关, 见量子群 (quantum groups) 和 [A14], [A15], [A11].

经典的杨-Baxter 方程 (classical Yang-Baxter equation) 是 (A2) 的半经典极限. 它就是

$$\begin{aligned} & [X^{12}(u_1, u_2), X^{13}(u_1, u_3)] + \\ & + [X^{12}(u_1, u_2), X^{23}(u_2, u_3)] + \\ & + [X^{13}(u_1, u_3), X^{23}(u_2, u_3)] = 0, \quad (\text{A7}) \end{aligned}$$

这里  $X(u, v)$  是在  $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  中取值的函数,  $\mathfrak{g}$  是一个 Lie 代数. (为了解释 (A7), 把  $\mathfrak{g}$  嵌入在它的泛包络代数  $U_{\mathfrak{g}}$  中:  $X^{12}$  等的意义类似于方程 (A2) 的情况). 经典杨-Baxter 方程与完全可积 Hamilton 系统 (Hamiltonian system) 有密切关系 (又见孤立子 (soliton)), 见 [A12], 而 [A13] 的结果多少能解释何以孤立子方程的解典型地主要涉及椭圆函数、三角函数和有理函数.

#### 参考文献

- [A1] Jimbo, M. (ed.), Yang-Baxter equation in integrable systems, World Scientific, 1990.
- [A2] Zamolodchikov, A. B. and Zamolodchikov, Al. B., Factorized  $S$ -matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models. *Ann. Physics*, **120** (1979), 253 – 291 (重印于 [A1] 中, 82 – 120).
- [A3] Baxter, R. J., Solvable eight-vertex model on an arbitrary planar lattice, *Phil. Trans. Royal Soc. London*, **289** (1978), 315 – 346 (重印于 [A1] 中, 50 – 81).
- [A4] Baxter, R. J., Exactly solved models in statistical mechanics, Acad. Press, 1982.
- [A5] McGuire, J. B., Study of exactly solvable one-dimensional  $N$ -body problems, *J. Math. Physics*, **5** (1964), 622 – 636.
- [A6] Yang, C. N., Some exact results for the many-body problem in one dimension with delta-function interaction, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1312 – 1314.
- [A7] Onsager, L., Crystal lattices, I. A two-dimensional model with an order-disorder transition, *Phys. Rev.*, **65** (1944), 117 – 149.
- [A8] Faddeev, L. D., Integrable models in  $(1+1)$ -dimensional quantum field theory, in *Les Houches*, Vol. Session 39, Elsevier, 1982, 563 – 608.
- [A9] Yang, C. N. and Ge, M. L. (eds.), Braid groups, knot theory and statistical mechanics, World Scientific, 1989.
- [A10] Jimbo, M., Introduction to the Yang-Baxter equation, in M. Jimbo (ed.), Yang-Baxter equation in integrable systems, World Scientific, 1990, 111 – 134.
- [A11] Hazewinkel, M., Introductory recommendations for the study of Hopf algebras in mathematics and physics, *CWI Quarterly*, **4** (1991), 3 – 26.
- [A12] Semenov-Tyan-Shanskiĭ, M. A., What is a classical  $r$ -matrix, *Funct. Anal. Appl.*, **17** (1984), 259 – 272 (重印于 [A1] 中, 226 – 242). (《Функц. Анал. и его прилож.》, **17** (1983), 4, 17 – 33).
- [A13] Belavin, A. A. and Drinfel'd, V. G., Solutions of the classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras, *Funct. Anal. Appl.*, **16** (1983), 159 – 180 (重印于 [A1] 中, 200 – 221). (《Функц. Анал. и его Прилож.》, **16** (1982), 3, 1 – 29).
- [A14] Любашенко, В. В., Хопф алгебра и векторные симметрии, «Успехи матем. наук» **41** (1986), 185 – 186.
- [A15] Faddeev, L. D., Reshetikhin, N. Yu. and Takhtadzhyan, L. A., Quantization of Lie groups and Lie algebras, *Algebra and Analysis*, **1** (1989), 178 – 206 (俄文). 齐民友 译

杨 (振宁) - Mills 场 [Yang-Mills field; Янга-Миллса поле]

(伪) Riemann 流形上主纤维丛 (principal fibre bundle) 中的一个联络 (connection), 其曲率满足调和条件 (杨 (振宁) - Mills 方程 (Yang-Mills equation)).

杨 (振宁) - Mills 场, 亦称规范场 (gauge field), 它在近代物理中被用来描述起相互作用载体作用的物理场. 因而, 电动力学中的电磁场, 矢量  $W$  玻色子 (电弱作用的 Weinberg - Salam 理论中弱相互作用的载体) 场, 和最后, 胶子 (强相互作用的载体) 场, 都由杨-Mills 场描述. 引力场也可以解释为杨-Mills 场 (见 [4]).



联络作为场的概念是由 H. Weyl (1917) 首先发展的, 他还曾试图用联络来描述电磁场. 1954 年, 杨振宁 (C. N. Yang) 和 R. L. Mills 提出, 基本粒子的内禀自由度空间 (例如, 描述核子的两个自由度的同位旋空间, 两个自由度对应于核子的两个纯态, 质子和中子) 依赖于时空点, 而对应于不同时空点的内禀空间不是典范同构的, 用几何学术语说, 杨振宁和 Mills 的建议是, 内禀自由度空间是时空 (space-time) 上的 **向量丛** (vector bundle), 它并不具有典范平凡化, 而物理场则由此向量丛的截面描述. 为了描述场演化的微分方程, 必须定义丛中的某个联络, 即, 沿底中曲线的丛的平凡化. 这种具有固定和乐群的联络描述一个物理场 (通常称为杨-Mills 场). 对于自由杨-Mills 场的方程可从变分原理推导出来; 它们是 **Maxwell 方程组** (Maxwell equations) 自然的非线性推广.

杨-Mills 场的一个更严格定义包括下面内容. 令  $\pi: P \rightarrow M$  为 Riemann 流形  $M$  上的一个主  $G$  丛, 并令  $E(M) = P \times_G E \rightarrow M$  为与  $\pi$  和  $G$  模  $E$  相配的向量丛.  $\pi$  的一个联络  $\nabla$  定义一个算子  $\nabla^E: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*(M) \otimes E(M))$ , 作用于  $E(M)$  的截面的空间  $\Gamma(E)$ . 可以通过公式  $d^\nabla(\omega \otimes e) = d\omega \otimes e + (-1)^p \omega \wedge \nabla^E e$  扩展至一个算子  $d^\nabla: \Gamma(E_p) \rightarrow \Gamma(E_{p+1})$ , 它作用于取值于  $E(M)$  的  $p$  形式的空间  $\Gamma(E_p)$ . 形式上与  $d^\nabla$  共轭的  $p$  形式上的算子  $\delta^\nabla$ , 等于  $\delta^\nabla = (-1)^{p+1} * d^\nabla *$ , 其中  $*$  表示 Hodge 星算子.

主  $G$  丛中的一个联络  $\nabla$ , 若曲率  $R^\nabla$  满足  $\delta^\nabla R^\nabla = 0$ , 则称为杨-Mills 场; 这里认为  $R^\nabla$  是向量丛  $\mathfrak{g}(M) = P \times_{\text{Ad}G} \mathfrak{g}$  中取值的 2 形式, 其中  $\mathfrak{g}$  是 Lie 群  $G$  的 Lie 代数.

对于 Riemann 流形  $(M, g)$  的 **Riemann 联络** (Riemannian connection)  $\nabla^g$ , 杨-Mills 方程等价于对于 **Ricci 张量** (Ricci tensor)  $\text{Ric}$  的共变导数的对称条件

$$(\nabla_X^g \text{Ric})(Y, Z) = (\nabla_Y^g \text{Ric})(X, Z),$$

$$X, Y, Z \in D(M) = \Gamma(TM).$$

因而杨-Mills 场的例子是 Einstein 空间以及这类空间的直积的 Riemann 联络. 特别是, Kähler-Einstein 空间和四元数 Riemann 空间的 Riemann 联络定义具有结构群  $U(n/2)$  和  $\text{Sp}(1) \cdot \text{Sp}(n/4)$  的主标架丛中杨-Mills 场. 满足杨-Mills 方程的非 Einstein Riemann 联络的例子是具有常数数量曲率和非常数截面曲率的共形平坦度量的 Riemann 联络. 满足杨-Mills 方程的非 Riemann 联络的例子是对称空间全测地子流形法丛中的联络, 或者四元数空间四元数子流形法丛中的联络, 它们由这些空间的 Riemann 联

络所诱导.

杨-Mills 方程是  $\pi$  的联络的空间上泛函  $L(\nabla)$  的 Euler-Lagrange 变分方程, 泛函  $L(\nabla)$  由

$$L(\nabla) = \int_M \langle R^\nabla, R^\nabla \rangle$$

予以定义. 假定 Riemann 流形  $(M, g)$  为紧的和定向的, 而  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示矢量丛  $\mathfrak{g}(M) \otimes \Lambda^2$  的纤维中的标量积, 由  $G$  的 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  中  $\text{Ad}G$  不变标量积以及由度量  $g$  所诱导的、 $M$  上 2 形式丛  $\Lambda^2$  的纤维中的标量积予以定义. 因此, 杨-Mills 场是  $L(\nabla)$  的临界点. 如果  $L$  在  $\nabla$  的二阶微分是正定的 (因而  $\nabla$  是  $L$  的局部极小值), 一个杨-Mills 场称为 **稳定的** (stable); 而如果二阶微分是正半定的, 则称为 **弱稳定的** (weakly stable). 众所周知,  $n \geq 5$  的标准球  $S^n$  上的任意非平凡主丛中, 没有弱稳定的杨-Mills 场. 另一方面, 对于  $n \geq 3$ , 球  $S^n$  相对于等距同构的自由作用非平凡有限群  $\Gamma$  的商空间  $S^n/\Gamma$ , 其标准 Riemann 度量的 Riemann 联络是稳定杨-Mills 场 ([5]).

对于物理学家, 最感兴趣的是四维 Riemann (还有 Lorentz) 流形上的杨-Mills 场. 在这个情况, Hodge \* 算子将  $M$  (具有值在一任意向量丛中) 上 2 形式的空间映上自身; 而且, 它是一个对合 ( $*^2 = \text{id}$ ), 仅依赖于度量  $g$  的定向和共形类.  $M^4$  上主丛中的一个联络  $\nabla$ , 如果其曲率 2 形式  $R^\nabla$  是 Hodge 算子的具有本征值 1 (相当地,  $-1$ ) 的本征向量, 则称为 **自对偶联络** (self-dual connection) 或 **瞬子** (instanton) (相当地, **反自对偶联络** (anti-self-dual connection) 或 **反瞬子** (anti-instanton)). 根据 Bianchi 恒等式, 瞬子和反瞬子是杨-Mills 场. 而且, 它们是使  $L$  具有绝对极小值的点. 对于在具有结构群为  $\text{SU}(2)$ ,  $\text{SU}(3)$  或  $\text{SU}(4)$  的标准球上的一个主丛的情况,  $L$  的局部极小值仅限于瞬子和反瞬子 (从而有全局极小值). Riemann 流形  $M^4$  上的一个 Riemann 联络仅对具有和乐群  $G \subset \text{Sp}(1)$  的流形才是一个瞬子. 所有这类紧流形仅限于复 K3 曲面 (见 K3 曲面 (K3-surface)).

丛  $\pi: P \rightarrow M$  的自同构群  $G(\pi) = \Gamma(P_{\text{Ad}} G)$ , 它们在底空间上为恒等, 称为 **规范群** (gauge group). 它自然地作用于具有和乐群  $G$  的  $\pi$  的瞬子集合  $C^+(\pi)$  上. 商空间  $M^+(\pi) = C^+(\pi)/G(\pi)$  称为  $\pi$  的 **不可约瞬子的模空间** (moduli space of irreducible instantons). 如果  $\pi$  的结构群  $G$  是紧的和半单的, 而  $M^4$  的底是一紧的可定向 Riemann 流形, 具有非负非零数量曲率, 以及自对偶的 Weyl 共形曲率张量, 则模空间  $M^+(\pi)$  或者是空或者是具有维数为

$$\dim M^+(\pi) = 2p_1(\mathfrak{g}(M)) +$$

$$- \frac{\dim G}{2} (\chi(M^4) - \sigma(M^4))$$

的一个流形, 其中  $p_1(\mathfrak{g}(M))$  是丛  $\mathfrak{g}(M)$  的第一 **Понтрягин 数** (Pontryagin number), 而  $\chi(M^4)$  和  $\sigma(M^4)$  分别是  $M^4$  的 Euler-Poincaré 示性数 (见 Euler 示性数 (Euler characteristic)) 和  $M^4$  的符号差 (signature).

对于物理上重要的情况, 具有古典紧结构群  $G$  的标准球  $S^4$  上的丛, 已经获得最完全的结果. 特别是, 这类丛中的所有瞬子可以用纯代数术语予以描述 (例如, 用 Grassmann 代数上的某些模, 或者用对某些四元数矩阵方程的解来描述 (见 [1])). 对于  $G = \mathrm{Sp}(1)$  的情况, 所有瞬子可以显示形式予以描述, 例如, 对于具有 **Понтрягин 数** 为 1 的一个  $\mathrm{Sp}(1)$  丛  $\pi_1: P_1 \rightarrow S^4$ , 模空间是  $M^+(\pi_1) \approx \mathbf{R}^+ \times \mathbf{H}$ , 其中  $\mathbf{R}^+$  是正数集合而  $\mathbf{H}$  是四元数集合. 对于对  $(\lambda, a) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{H}$  对应由取值于  $\mathfrak{g}$  的 1 形式联络

$$A(x) = \mathrm{Im} \frac{\overline{u(x)} \cdot du(x)}{1 + |u(x)|^2}$$

所定义的瞬子, 其中  $u(x) = \lambda(\overline{a-x})^{-1}$ ,  $x \in \mathbf{H}$ .  $\mathbf{H} \approx \mathbf{R}^4$  中的四元数, 通过应用球极平面投影, 被认为与  $S^4$  的点相同, 而 Lie 代数  $\mathfrak{g} = \mathrm{Sp}(1)$  被认为是纯虚数四元数的 Lie 代数  $\mathrm{Im} \mathbf{H}$ .

#### 参考文献

- [1] Манин, Ю. И., в сб.: Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем., т. 17, М., 1981, 3–55.
- [2] Шварц, А. С., в сб.: Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем., т. 17, М., 1981, 113–173.
- [3] Atiyah, M. F., Hitchin, N. J. and Singer, I. M., Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, *Proc. Roy. Soc. London, A* **362** (1978), 425–461.
- [4] Попов, Д. А., Дайхин, Л. И., «ДАН СССР», **225** (1975), 790–793.
- [5] Bourguignon, J., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **76** (1979), 4, 1550–1553.
- [6] Коноплева, Н. П., Попов, В. Н., Калибровочные поля, 2 изд., М., 1980 (英译本: Konopleva, N. P. and Popov, V. N., Gauge fields, Horwood, 1981).
- [7] Yang, C. N. and Mills, R. L., Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, *Phys. Rev.*, **96** (1954), 1, 191–195.
- [8] Geometrical ideas in physics, Moscow, 1983 (俄文, 译自英文).
- [9] Freed, D. S. and Uhlenbeck, K. K., Instantons and four manifolds, Springer, 1984.

Д. В. Алексеевский 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Manin, Yu. I., Gauge field theory and complex geometry, Springer, 1988.

- [A2] Albeverio, S., Paycha, S. and Scarlatti, S., A short overview of mathematical approaches to functional integration, in Z. Haba and J. Sobczyk (eds.), Functional Integration, Geometry and Strings, Birkhäuser, 1989, 230–276.
- [A3] DeWitt, B. S., Dynamical theory of groups and fields, Gordon & Breach, 1964.
- [A4] Cheng, T.-P. and Li, L.-F., Gauge theory of elementary particle physics, Clarendon Press, 1984.
- [A5] Nélipa, N., Physique des particules élémentaires, Mir.
- [A6] Atiyah, M. F., Geometry of Yang-Mills fields, Scuola Norm. Sup. Pisa, 1979.
- [A7] Dubrovine, B. [B. Dubrovin], Novikov, S. and Fomenko, A., Contemporary geometry, Springer, 1990 (译自俄文).
- [A8] Lawson, B. and Michelsohn, M.-L., Spin geometry, Princeton Univ. Press, 1989.
- [A9] Bleeker, D., Gauge theory and variational principles, Addison-Wesley, 1981. 徐锡申 译

#### Yates 校正 [Yates correction; Йерса поправка]

数理统计的某些问题 (例如, 独立性的统计检验问题) 中应用的连续性校正. 它可以改进用  $\chi^2$  分布对  $\chi^2$  检验统计量的逼近 (亦见  $\chi^2$  分布 ('chi-squared' distribution);  $\chi^2$  检验 ('chi-squared' test)). Yates 校正是 J. Yates ([1]) 提出的.

#### 参考文献

- [1] Yates, J., *Trans. Roy. Stat. Soc.*, **1** (1934), 217.
- [2] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学方法, 上海科学技术出版社, 1966).

В. В. Сенатов 撰 周概容 译

#### 吉田表示定理 [Yosida representation theorem]

【补注】 设  $X$  是拓扑空间 (topological space),  $C(X)$  是  $X$  上连续实值函数的集合 (见连续函数空间 (continuous functions, space of)). 用逐点定义的偏序:  $f \geq g$ , 当且仅当对所有的  $x \in X$ ,  $f(x) \geq g(x)$ ,  $C(X)$  成为一个 **Riesz 空间** (Riesz space). 于是产生了下面的问题: 是否可能用带有这个序关系的连续函数来表示一个任意的 Riesz 空间, 这里也可能用可取值  $+\infty$  和  $-\infty$  的更一般的 (扩充的) 函数. 其答案由各种不同的表示定理给出. 下面对具有强单位的 Archimedes 的 Riesz 空间情形的吉田表示定理作了描述. 对有弱单位  $e$  的 Riesz 空间  $(L, e)$  的吉田表示定理, 见 [A1], 而对更一般的 Johnson-Kist 表示定理 (Johnson-Kist representation theorem), 见 [A2].

Riesz 空间  $L$  中的强单位 (strong unit) 是元素  $e \in L^+ = \{f \in L: f \geq 0\}$ , 使得对所有的  $f \in L$  存在  $n \in \mathbf{N}$  使得  $|f| \leq ne$ , 即由  $e$  生成的主理想与整个空



问相等.  $L$  中的弱单位 (weak unit) 是一个  $L^+$  的元素  $e$  使得由  $e$  生成的主带是整个  $L$ .

**Riesz 空间  $C(X)$ .** 设  $X$  是紧 Hausdorff 空间. 那么  $C(X)$  是 Archimedes 的 Riesz 空间且函数  $1: X \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto 1$  对所有  $x$ , 是一个强单位. 设  $Y$  是第二个紧 Hausdorff 空间. Banach-Stone 定理 (Banach-Stone theorem) 阐明如果  $C(X)$  和  $C(Y)$  作为 Riesz 空间是同构的, 则  $X$  和  $Y$  是同胚的. 作为直接的推论可得出: 如果  $C(X)$  和  $C(Y)$  作为代数 (按逐点乘法) 是同构的, 则  $X$  和  $Y$  是同胚的; 还有, 如果  $C(X)$  和  $C(Y)$  作为 Banach 空间 (取上确界范数) 是同构的, 则  $X$  和  $Y$  是同胚的.

一个拓扑空间  $X$  是极不连通的 (extremely disconnected), 如果每一开子集有开的闭包 (即  $\bar{U}$  是既开又闭的). 中野定理 (Nakano theorem) 说  $C(X)$  是 Dedekind 完全的, 当且仅当  $X$  是极不连通的. 它独立地被小笠原藤次郎 (T. Ogasawara) 和 M. H. Stone 得到, 见 [A2].

**具有强单位的 Archimedes 的 Riesz 空间的表示.** 设  $L$  是一个 Archimedes 的 Riesz 空间. 设  $X = \text{MSpec}(L)$  是  $L$  的极大理想的集合. 对每一个  $f \in L^+$ , 令  $X_f = \{M \in X: f \notin M\}$ . 在  $X$  上定义一个拓扑以  $X_f$  作为子基 (见准基 (pre-base)).  $X$  的闭子集是集合  $C_D = \{M \in X: D \subset M\}$ , 这里  $D$  跑遍  $L^+$  的所有子集. 这个拓扑称为  $X$  上包核拓扑 (hull-kernel topology). 该结构是相当熟悉的一种且在数学的若干部分遇到. 它原来归功于 M. H. Stone. 视其所用的是哪些理想的集合, 涉及的数学专门学科, 以及作者们的习性, 它也被称为 Zariski 拓扑 (Zariski topology), Гельфанд 拓扑 (Gel'fand topology), Гельфанд-Колмогоров 拓扑 (Gel'fand-Kolmogorov topology), Jacobson 拓扑 (Jacobson topology), Grothendick 拓扑 (Grothendick topology), 等等.

从现在起, 设  $L$  有一强单位  $e$ . 对每一个  $M \in \text{MSpec}(L)$ ,  $L/M \cong \mathbf{R}$  且存在唯一的 Riesz 空间的同态  $\varphi_M: L \rightarrow \mathbf{R}$  使得  $\varphi_M(e) = 1$ . 利用这点, 对每一  $f \in L$  用  $\hat{f}(M) = \varphi_M(f)$  定义一个函数  $\hat{f}: X = \text{MSpec}(L) \rightarrow \mathbf{R}$ . 数  $\hat{f}(M)$  也可描述为使得  $f - \hat{f}(M)e \in M$  的唯一的实数. 现在有以下表示定理 (吉田耕作, 角谷静夫, М. Г. Крейн, С. Г. Крейн, 中野秀五郎). 令  $X, L, e$  如刚才所述. 则  $\hat{f}(M) = \varphi_M(f)$  定义  $X$  上的一个连续函数且映射  $f \mapsto \hat{f}$  是  $L$  到 Riesz 子空间  $\hat{L} = C(X)$  上的一个 Riesz 同构. 有许多补充的结果. 用 Stone-Weierstrass 定理 (Stone-Weierstrass theorem) 可得到  $\hat{L}$  在  $C(X)$  中按范数稠密; 然后它也是按序稠密的.

给定  $(L, e)$ , 其中  $e$  是一个弱单位,  $\rho(f, g) =$

$\inf\{r \in \mathbf{R}: |f - g| \wedge e \leq re\}$  定义  $L$  上一个度量, 称为一致度量 (uniform metric). 如果  $L$  关于这个度量是完全的,  $L$  称为一致闭的 (uniformly closed). 然后一个进一步添加到表示定理的结果是:  $(L, e)$  同构于  $(C(X), 1)$ , 当且仅当  $e$  是强单位且  $L$  是一致闭的. 最后这个陈述, 连同  $(L, e)$  同构于  $(C(X), 1)$  的一个子 Riesz 空间这一结果 (如果  $e$  是强单位), 也称为 Крейн-角谷静夫定理 (Krein-Kakutani theorem).

对吉田表示定理的一个最后的补充是: 如果  $L$  有主投影性质 (principal projection property), 即对每一主带  $A$  有  $A + A^\perp = L$ , 则  $X = \text{MSpec}(L)$  是零维的且  $\hat{L}$  包含  $X$  上所有的局部常函数. 这也可称为 Freudenthal 谱定理 (Freudenthal spectral theorem), ([A3]), 这是由于该谱定理按其传统的表述是上述结果的直接推论, 见 Riesz 空间 (Riesz space) 的补注.

#### 参考文献

- [A1] Hager, A. W. and Robertson, L. C., Representing and ringifying a Riesz space, in Symp. Math. INDAM, Vol. 21, Acad. Press, 1977, 411 - 432.
- [A2] Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C., Riesz spaces, 1, North-Holland, 1971.
- [A3] Jonge, E. de and Rooy, A. C. M. van, Introduction to Riesz spaces, Mathematical Centre, Amsterdam, 1977.

葛显良 译 鲁世杰 校

#### Young 准则 [Young criterion; Юнга признак]

**Fourier 级数 (Fourier series)** 在一点收敛的一个充分性准则. 设函数  $f$  以  $2\pi$  为周期且在区间  $[0, 2\pi]$  上 Lebesgue 可积. 令  $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ . 如果在  $x_0$  点满足下述条件: 1)  $\varphi_{x_0}(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow +0)$ ; 2) 函数  $\psi(t) = t\varphi_{x_0}(t)$  在区间  $[0, \delta]$  ( $0 \leq \delta \leq \delta_0$ ,  $\delta_0 > 0$  是某个固定的数) 上具有有界变差  $V(\delta) \equiv \text{Var} \psi(t)$ ; 3)  $V(\delta) = O(\delta) (\delta \rightarrow +0)$ , 则  $f$  的 Fourier 级数在  $x_0$  点收敛到  $f(x_0)$  (见 [2]). Young 准则比 Jordan 准则 (Jordan criterion) 强. 它是由 W. H. Young 建立的.

#### 参考文献

- [1] Young, W. H., On the convergence of the derived series of Fourier series, Proc. London Math. Soc., 17 (1916), 195 - 236.
- [2] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bari, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

Б. И. Голубов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

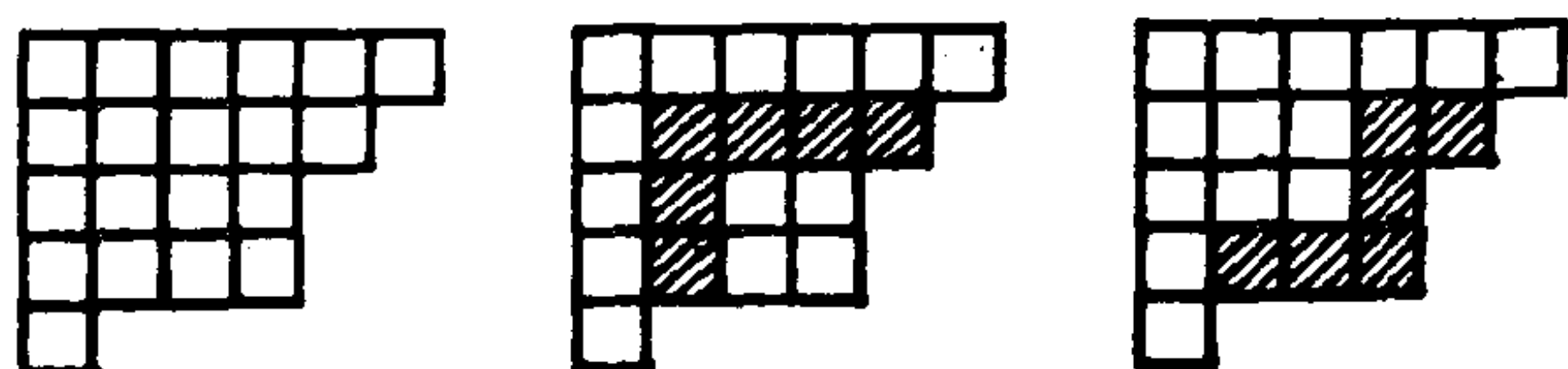
- [A1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 - 2, Cambridge

Univ. Press, 1988.

朱学贤 译

**Young 图** [Young diagram; Юнга таблица],  $m$  阶的

自然数  $m$  的分拆  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  的图表示 (其中  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ ,  $\sum \lambda_i = m$ ). 这个 Young 图  $t_\lambda$  是排成一些行和列的由  $m$  个方格组成, 使第  $i$  行有  $\lambda_i$  个方格, 其中每一行的第一个方格位于第一列. 如 20 的分拆  $(6, 5, 4, 4, 1)$  的 Young 图表示为下述左图.



转置 Young 图 (transposed Young diagram)  $t'_\lambda$  对应于共轭分拆 (conjugate partition)  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_s)$ , 其中  $\lambda'_j$  是 Young 图中第  $j$  列的方格数. 所以上述例子的共轭分拆为  $(5, 4, 4, 4, 2, 1)$ .

Young 图中每个方格定义了其方格的两个集合, 称为钩形 (hook) 和斜钩形 (skew-hook). 设  $c_{ij}$  是 Young 图中位于第  $i$  行第  $j$  列的方格. 对应于  $c_{ij}$  的钩形  $h_{ij}$  是由所有方格  $c_{il}$  ( $l \geq j$ ), 以及  $c_{kj}$  ( $k \geq i$ ), 组成的集合; 而斜钩形则是包含第  $i$  行最后一个方格和第  $j$  列最后一个方格的边缘方格的最小连通集. 如上面左边的 Young 图中方格  $c_{22}$  所对应的钩形和斜钩形分别如中间图和右图中的阴影部分所示.

一个钩形 (或斜钩形) 的长度 (length of a hook) 就是它的方格的个数. 钩形  $h_{ij}$  的长度为  $\lambda_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$ . 从一个 Young 图中去掉一个长度为  $p$  的斜钩形, 则得到一个  $m - p$  阶的 Young 图. 一个钩形 (或斜钩形) 的高度 (height of a hook) 就是这个钩形 (或斜钩形) 所在的行的个数.

Young 图和 Young 表的术语 (见 Young 表 (Young tableau)) 被用于对称群的表示 (representation of the symmetric groups) 和典型群的表示 (representation of the classical groups), 这是 A. Young 提出来的 (见 [1]).

**参考文献**

- [1A] Young, A., On quantitative substitutional analysis, *Proc. London Math. Soc.*, 33 (1901), 97 - 146.  
[1B] Young, A., On quantitative substitutional analysis, *Proc. London Math. Soc.*, 34 (1902), 361 - 397.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】在西方 Young 图也称为 Ferrers 图.

**参考文献**

- [A1] Kerber, A. and James, G. D., The representation theory of the symmetric group, Addison-Wesley,

1981.

[A2] Kerber, A., Algebraic combinatorics via finite group actions, B. 1. Wissenschaftsverlag, 1991.

[A3] Andrews, G. E., The theory of partitions, Addison-Wesley, 1976.

[A4] Macdonald, I. G. Symmetric functions and Hall polynomials, Clarendon Press, 1979.

刘振宏 译 李 乔 校

**Young 子群** [Young subgroup; Юнга подгруппа]

【补注】令  $\bigcup_{i=1}^k \alpha_i = \{1, 2, \dots, n\}$  是  $\{1, 2, \dots, n\}$  分成  $k$  个不相交子集的一个分划. 则  $n$  个文字的对称群  $S_n$  的对应的 Young 子群是子群

$$S_{\alpha_1} \times \dots \times S_{\alpha_k},$$

这里  $S_{\alpha_i} = \{\sigma \in S_n, \sigma(j) = j, \text{ 对所有 } j \notin \alpha_i\}$ . 有时

$$S_{\alpha_1} \times \dots \times S_{\alpha_k}$$

仅表示特殊情况, 即  $\alpha_i = \{\lambda_{i-1} + 1, \dots, \lambda_i\}$ , 这里  $\lambda_0 = 0$ , 而  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  是自然数  $n$  的一个分划, 即  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k, \sum \lambda_i = n$ .

**参考文献**

[A1] James, G. D., The representation theory of the symmetric groups, Springer, 1978, p. 13.

[A2] Kerber, A., Representations of permutation groups, 1, Springer, 1971, p. 17. 石生明 译 王 杰 校

**Young 对称化子** [Young symmetrizer; Юнга симметризатор]

由  $m$  阶 Young 表 (Young tableau)  $d$  按下述法则定义的对称群 (symmetric group)  $S_m$  的群环的一个元素  $e_d$ . 设  $R_d(C_d)$  是  $S_m$  的子群, 它是由对  $d$  表中每一行 (列) 里的数  $1, \dots, m$  的作置换时的所有置换构成. 再令

$$r_d = \sum_{g \in R_d} g, c_d = \sum_{g \in C_d} \varepsilon(g)g,$$

其中  $\varepsilon(g) = \pm 1$  是  $g$  的奇偶性示数, 那么  $e_d = c_d r_d$  (有时人们定义  $e_d = r_d c_d$ ).

Young 对称化子的基本性质是, 它正比于群代数  $CS_m$  的本原幂等元, 其比例系数等于  $d$  中所有钩形的长度之积.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】理想  $C[S_m]e_d$  同构于 Young 表  $d$  定义的  $S_m$  的 Specht 模 (Specht module). 参考文献和更详细内容亦见 Young 表 (Young tableau).

刘振宏 译 李 乔 校

**Young 表** [Young tableau; Юнга диаграмма],  $m$  阶的



一个  $m$  阶的 Young 图 (Young diagram), 在它的  $m$  个方格中按某种顺序填入  $m$  个数  $1, \dots, m$  (见图).

5	7	9	4
8	2	1	
3			
6			

一个 Young 表, 如果它的每一行和每一列上的数都是按递增顺序出现的, 则称它为标准的 (standard). 对一个给定的  $m$  阶 Young 图  $t$ , 其所有 Young 表的个数为  $m!$ , 而标准 Young 表的个数为

$$\frac{m!}{\prod \lambda_{ij}}$$

其中的积是对  $t$  的所有方格  $c_{ij}$  求的, 而  $\lambda_{ij}$  表示相应钩形的长度.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】在西方文献中, Ferrers 图 (Ferrers diagram) 一词也用于 Young 图. 在俄文文献中, Young 表 (Yunga tablitsa) 和 Young 图 (Yunga diagramma) 恰好以相反的方式使用, “表”是指分拆的图表示, 而“图”是指填好了的表.

设  $\kappa$  表示  $m$  的一个分拆 (partition) ( $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ ,  $\kappa_i \in \{0, 1, \dots\}$ ,  $\kappa_1 + \dots + \kappa_m = m$ ) 以及它的相应 Young 图 (Young diagram), 即其图表示. 设  $\lambda$  是  $m$  的第二个分拆. 一个  $\lambda$  型的  $\kappa$  表 ( $\kappa$ -tableau of type  $\lambda$ ) 是一个 Young 图  $\kappa$ , 它的方格填  $\lambda_1$  个 1,  $\lambda_2$  个 2, 等等.  $\lambda$  型的半标准  $\kappa$  表 (semi-standard  $\kappa$ -tableau of type  $\lambda$ ) 是方格中的数满足每一行 (自左至右) 是非减的, 而每一列 (自上至下) 是严格递增的. 例如.

1	1	1	1	4
2	2	3		
3	4			

是型为  $(4, 2, 2, 2)$  的半标准的  $(5, 3, 2)$  表. 型  $\lambda$  的半标准  $\kappa$  表的个数  $K(\kappa, \lambda)$  称为 Kostka 数 (Ko-

stka numbers).

对  $n$  的每一个分拆  $\mu$ ,  $n$  个字母的对称群  $S_n$  有两种自然的表示: 既约表示  $\rho(\mu)$  和 Specht 模  $[\mu]$ . 表示  $\rho(\mu)$  为

$$\rho(\mu) = \text{Ind}_{G_\mu}^{S_n} 1,$$

其中  $1$  是  $G_\mu$  的平凡表示, 而  $G_\mu$  是由  $\mu$  确定的  $S_n$  的 Young 子群,  $G_\mu = S_{\mu_1} \times \dots \times S_{\mu_m}$ . 这里若  $\mu_j = 0$ , 则  $S_{\mu_j} = \{1\}$ , 否则  $S_{\mu_j}$  是字母  $\mu_1 + \dots + \mu_{j-1} + 1, \dots, \mu_1 + \dots + \mu_j$  上置换的子群.

群  $S_n$  作用在由这些符号的排列形成的所有  $\mu$  表 ( $\mu$ -tableaux) 的集合上. 两个  $\mu$  表是等价的, 如果它们只相差一个符号的置换, 而且这个置换保持每一行上指标的集合不变.  $\mu$  表的一个等价类是一个  $\mu$  简表.  $S_n$  在  $\mu$  表上的作用导出在  $\mu$  简表上的作用, 并且在基域  $F$  上的线性扩充给出  $S_n$  的显然同构于  $\rho(\mu)$  的表示.  $\rho(\mu)$  的维数为  $\binom{n}{\mu}$ . 给定一个  $\mu$  表  $t$ , 设  $\kappa_t$  是  $F[S_n]$  的下述元素:

$$\kappa_t = \sum_{\pi \in C_t} \text{sign}(\pi) \pi,$$

其中  $C_t$  是  $t$  的列稳定子, 即  $S_n$  的保持  $t$  的列标号集不变的所有置换构成的子群.

$\mu$  的 Specht 模 (Specht module)  $[\mu]$  是由所有元素  $\kappa_t \{t\}$  张成的  $\rho(\mu)$  的子模, 其中  $\{t\}$  是  $t$  的简表且  $t$  是  $\mu$  表. 在特征为 0 的域上, Specht 模恰好给出所有  $S_n$  的不同的绝对不可约表示. 按 Young 法则 (Young rule),  $Q$  上 Specht 模  $[\lambda]$  (作为合成因子) 在  $\rho(\kappa)$  里出现的次数等于 Kostka 数  $K(\kappa, \lambda)$ . 如果  $e_t$  是  $\mu$  表  $t$  的 Young 对称化子 (Young symmetrizer), 那么由基图确定的 Specht 模同构于  $F[S_n]$  的理想  $F[S_n]e_t$ . 这也是 (在同构意义上) 在对称群表示 (representation of the symmetric groups) 中记为  $T_\mu$  的表示. 关于涉及到分拆, Young 图和表, 以及对称群的表示等的其他结果可参见优化序 (majorization ordering).

#### 参考文献

- [A1] Knuth, D., The art of computer programming, 3, Addison-Wesley, 1973. 刘振宏译 李乔校

# Z

**$z$  分布** [ **$z$ -distribution**;  **$z$ -распределение**]

见 **Fisher  $z$  分布** (Fisher  $z$ -distribution).

**Zariski 切空间** [**Zariski tangent space**; **Зарисского касательное пространство**], 代数簇或概形  $X$  在点  $x$  的

点  $x$  的剩余域  $k(x)$  上的向量空间, 它是空间  $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$  的对偶, 这里  $\mathfrak{M}$  是  $x$  在  $X$  上局部环 (local ring)  $\mathcal{O}_{X,x}$  的极大理想. 如果  $X \subset \mathbb{A}_k^n$  由方程组

$$F_\alpha = 0$$

所定义, 这里  $F_\alpha \in k[X_1, \dots, X_n]$ , 则在有理点  $x = (x_1, \dots, x_n)$  处的 Zariski 切空间由线性方程组

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_\alpha}{\partial X_i}(x) (X_i - x_i) = 0$$

定义. 簇  $X$  在有理点  $x$  处非奇异, 当且仅当  $X$  在  $x$  的 Zariski 切空间的维数等于  $X$  的维数. 对于有理点  $x \in X$ , Zariski 切空间对偶于空间  $\Omega_{X/k}^1 \otimes k(x)$ , 即余切层  $\Omega_{X/k}^1$  在  $x$  的茎. 完全域  $k$  上不可约簇  $X$  是光滑的, 当且仅当层  $\Omega_{X/k}^1$  是局部自由的. 与  $\Omega_{X/k}^1$  相伴的向量丛  $T_X = V(\Omega_{X/k}^1)$  称为  $k$  上  $X$  的切丛 (tangent bundle), 它是函子地与  $X$  相关联. 它的截面的层称为  $X$  的切层 (tangent sheaf). Zariski 切空间是 O. Zariski 引入的 ([1]).

**参考文献**

- [1] Zariski, O., The concept of a simple point of an abstract algebraic variety, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 62 (1947), 1 - 52.
- [2] Samuel, P., *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*, Springer, 1955.

- [3] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972, 107 (英译本: Shafarevich, I. R., *Basic algebraic geometry*, Springer, 1977).

В. И. Данилов 撰

**【补注】**

**参考文献**

- [A1] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*, Springer, 1977. 陈志杰 译

**Zariski 定理** [**Zariski theorem**; **Зарисского теорема**]

关于连通性的, Zariski 连通性定理 (Zariski connectedness theorem)

设  $f: X \rightarrow Y$  是不可约簇的真满态射 (morphism), 有理函数域  $k(Y)$  在  $k(X)$  内可分代数闭, 且设  $y \in Y$  是正规点, 则  $f^{-1}(y)$  是连通的 (且是几何连通的) (见 [2]). 此定理对退化的经典原理提供了基础: 如果闭链的代数系的泛闭链是一个簇 (即几何不可约的), 则这个闭链的任何特殊化是连通的.

Zariski 连通性定理的一个特殊情形是所谓的 Zariski 基本定理 (Zariski fundamental theorem) 或 Zariski 双有理对应定理 (Zariski birational correspondence theorem): 代数簇的双有理态射  $f: X \rightarrow Y$  是到正规点  $y \in Y$  的邻域里的开嵌入, 如果  $f^{-1}(y)$  是一个有限集的话 (见 [1]). 特别地, 正规簇的双有理态射如果在点上是一对一的, 则必是同构. 这个定理的另一种形式是: 设  $f: X \rightarrow Y$  是概形的拟有限可分态射,  $Y$  是拟紧拟可分概形, 则存在分解  $f = u \circ g$ , 这里  $u$  是有限态射,  $g$  是开嵌入 ([3]).

**参考文献**

- [1] Zariski, O., Foundations of a general theory of birational correspondences, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 53 (1943), 3, 490 - 542.



[2] Zariski, O., Theory and applications of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary ground fields, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **5** (1951), 1 – 90.

[3A] Grothendieck, A., *Eléments de géométrie algébrique*, III, Etude cohomologique des faisceaux cohérents I, *Publ. Math. IHES*, **11** (1961).

[3B] Grothendieck, A., *Eléments de géométrie algébrique*, IV, Etude locale des schémas et des morphismes des schémas IV, *Publ. Math. IHES*, **32** (1967). В. И. Данилов 撰

【补注】当  $f: X \rightarrow Y$  是真双有理态射且  $y \in Y$  是非奇异点时,  $f^{-1}(y)$  还是线性连通的 (linearly connected), 即  $f^{-1}(y)$  中任意两个点可用  $f^{-1}(y)$  内的一系列有理曲线连通 (见 [A2] – [A4]).

#### 参考文献

[A1] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*, Springer, 1977.

[A2] Zariski, O., The connectedness theorem for birational transformations, in R. H. Fox et al. (ed.) *Algebraic Geometry and Topology* (Symp. in Honor of S. Lefschetz), Princeton Univ. Press, 1957, 182 – 188.

[A3] Murre, J. P., On a connectedness theorem for a birational transformation at a simple point, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 3 – 15.

[A4] Chow, W.-L., On the connectedness theorem in algebraic geometry, *Amer. J. Math.*, **83** (1959), 1033 – 1074. 陈志杰 译

**Zariski 拓扑** [Zariski topology; Зарисского топология] 仿射空间  $A^n$  上的

定义在  $A^n$  上的拓扑, 把  $A^n$  的代数子簇取为闭集. 如果  $X$  是  $A^n$  内的仿射代数簇 (见仿射代数集 (affine algebraic set)), 则  $X$  上的诱导拓扑也称 Zariski 拓扑. 类似地, 可定义环  $A$  的仿射概形  $\text{Spec } A$  的 Zariski 拓扑 (有时称为谱拓扑 (spectral topology)), 其闭集是下列集合:

$$V[I] = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec } A : \mathfrak{p} \supseteq I \},$$

这里  $I$  是  $A$  的理想.

Zariski 拓扑首先是由 O. Zariski 引进的 ([1]), 作为代数函数域的赋值集合上的拓扑. 虽然一般说来 Zariski 拓扑不是可分的, 代数拓扑中的许多结构仍然可建立在它之上 ([2]). 赋予 Zariski 拓扑的仿射概形是拟紧的.

最自然地定义在任意概形 (scheme) 上的拓扑也称为 Zariski 拓扑, 以与艾达尔拓扑 (étale topology) 相区分, 或当簇  $X$  定义在域  $C$  上时, 以与  $X(C)$  的复值点集合的解析空间的拓扑相区别.

#### 参考文献

[1] Zariski, O., The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 10, 683 – 691.

[2] Серр, Ж. П., в сб. *Расслоенные пространства и их приложения*, пер. с франц, М., 1958, 372 – 450 (译自法文). В. И. Данилов 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

[A1] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*, Springer, 1977. 陈志杰 译

**Zassenhaus 公式** [Zassenhaus formula; Цассенхауза формула]

【补注】设  $L(X, Y)$  是  $Z$  上两个生成元的 (分次) 自由 Lie 代数 (Lie algebra),  $\text{Ass}(X, Y)$  是  $Z$  上两个生成元的分次自由结合代数,  $\hat{\text{Ass}}(X, Y)$  是它关于增广理想的完全化 (这里  $X$  和  $Y$  的次数都为 1). 对每个没有常数项的  $z \in \text{Ass}(X, Y)$ , 设  $e^z$  表示  $\hat{\text{Ass}}(X, Y)$  的元素

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

则存在  $n$  次齐次元素  $c_n(X, Y)$  和  $X$  次数为  $m$  而  $Y$  次数为  $n$  的齐次元素  $R_{m,n}(X, Y)$ , 为  $\text{Ass}(X, Y)$  中的 Lie 元素, 即位于  $L(X, Y) \subseteq \text{Ass}(X, Y)$  中, 并且使得

$$e^X e^Y = \prod_{n \geq 1} e^{c_n(X, Y)/n!}, \quad (\text{A1})$$

$$e^{-X} e^{-Y} e^X e^Y = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{\infty} e^{R_{m,n}(X, Y)/m!n!}. \quad (\text{A2})$$

这里右式的因子在 (A1) 中按自然顺序, 而在 (A2) 中先对  $m$  求积, 再对  $n$  求积.  $c_n(X, Y)$  递归定义为

$$c_n(X, Y) =$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} [e^{-t^{n-1}c_{n-1}/(n-1)!} \cdots e^{-t^2c_2/2!} e^{-tc_1} e^{tX} e^{tY}]|_{t=0}.$$

这些公式在 (组合) 群论、代数拓扑、量子论等方面都有应用, 例如, 见 [A2] – [A4]. 有关公式 (A1) 及更一般公式的收敛性的结果 (对 Banach 代数的元素  $X$  和  $Y$ ), 见 [A2].

#### 参考文献

[A1] Zassenhaus, H., Über Lie'schen Ringe mit Primzahlcharakteristik, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **13** (1940), 1 – 100.

[A2] Suzuki, M., On the convergence of exponential operators the Zassenhaus formula, BCH formula and systematic approximants, *Comm. Math. Phys.*, **57** (1977), 193 – 200.

[A3] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combina-

torial group theory, Interscience, 1966.

- [A4] Baues, H. J., Commutator calculus and groups of homotopy classes, Cambridge Univ. Press, 1981.

蔡传仁 译

**Zassenhaus 群** [Zassenhaus group; Цассенхауза группа]

有限集  $M$  上的双重传递置换群 (permutation group)  $G$ , 群中仅有恒等置换固定  $M$  中多于两个元素且对任何元素对  $a, b \in M$ , 子群  $H_{a,b}$  是非平凡的, 其中

$$H_{a,b} = \{h: h \in G, h(a) = a, h(b) = b\};$$

这种群是 H. Zassenhaus 在 [1] 中首先考虑的. Zassenhaus 群类包括两族有限单群: 射影的特殊线性群 (special linear group)  $PSL(2, q)$ ,  $q > 3$  及铃木群 (Suzuki group).

参考文献

- [1] Zassenhaus, H., Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11 (1935), 17 – 40.  
[2] Gorenstein, D., Finite groups, Harper & Row, 1968.

Н. Н. Вильямс 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Huppert, B. and Blackburn, N., Finite groups, 3, Springer, 1967.

石生明 译 王杰 校

**Zeno 悖论** [Zeno paradox; Зенона парадокс]

一种悖论 (antinomy).

**Zermelo 公理** [Zermelo axiom; Цермело аксиома]

关于任意集族 (未必不交) 的选择公理 (axiom of choice). E. Zermelo 于 1904 年以如下形式表述了这一公理: 对每一由非空集合组成的集族  $t$ , 可从其中每一项中取出一个代表且所有这些代表组成一个集合. 他称该公理为选择原则 (principle of choice) ([1]). 在其选择原则的基础上, 他成为最早给出良序定理证明的人 (见 Zermelo 定理 (Zermelo theorem)). 1906 年 B. Russell 以乘积形式表述了选择公理: 如果  $t$  是一集族, 其中元素不空且两两不交, 则直积  $\prod t$  不空. Zermelo 于 1908 年证明了选择公理的乘积形式与其通常表述的等价性.

参考文献

- [1] Zermelo, E., Beweiss, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.*, 59 (1904), 514 – 516.  
[2] Fraenkel, A. and Bar-Hillel, Y., Foundations of set theory, North-Holland, 1958.

В. И. Малыгин 撰

【补注】

参考文献

- [A1] Moore, G. H., Zermelo's axiom of choice, Springer, 1982.  
[A2] Rubin, J. and Rubin, H., Equivalents of the axiom of choice, 1 – 2, North-Holland, 1963 – 1985.

赵希顺 译

**Zermelo 定理** [Zermelo theorem; Цермело теорема]

每一集合都可被良序 (见良序集 (well-ordered set)). E. Zermelo 于 1904 年从选择公理 (见 Zermelo 公理 (Zermelo axiom)) 的等价形式之一选择原则出发, 第一次证明了该定理. 之后, 人们得知, Zermelo 定理与选择公理 (在通常的集合论公理系统中) 等价. 因此它也和许多其他的集论命题等价 (见选择公理 (axiom of choice)).

В. И. Малыгин 撰

【补注】 这一结论通常也称作良序定理 (well-ordering theorem) 或 Zermelo 良序定理 (Zermelo well-ordering theorem).

参考文献见 Zermelo 公理 (Zermelo axiom).

赵希顺 译

**零, 零元, 零点** [zero; нуль]

1. 零 (zero) 是一个 (实或复) 数, 它有如下性质: 任何一个数加上零之后不变. 零用符号 0 来表示. 任何一个数与零的积为零:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

如果两个数的积为零, 那么它们之中的一个为零 (即  $ab = 0$  蕴涵  $a = 0$  或  $b = 0$ ). 被零除是没有定义的. 这个概念的直接推广是 Abel 群的零元.

2. 零元 (zero 或 null element)

i) Abel 群  $A$  (用加号) 的零元 (zero of an Abelian group) 是一个元素, 也用 0 来表示, 对所有  $a \in A$ , 满足  $0 + a = a$ , 它是唯一确定的.

ii) 环的零元 (zero of a ring) (特别地, 除环 (skew-field, division ring) 的零元, 或域 (field) 的零元) 是它的加群的零元. 环的零元 (与数 0 一样) 在乘法中有吸收性质:  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ . 然而, 在任意环中, 两个非零元的积可能为零元. 此种元素称为零因子 (zero divisor). 域, 体和整环没有零因子.

iii) 半群  $A$  (用乘号) 的左零元 (left zero) 是一个元素  $0 \in A$  使得对所有  $a \in A$ ,  $0 \cdot a = 0$ . 用对偶性定义右零元 (right zero). 如果一个半群有双边零元 (two-sided zero) (一个元素是左零元又是右零元), 那么这个元素是唯一的. 一个环的零元也是它的乘法半群的零元.



iv) 格的零元 (zero of a lattice) 是它的极小元, 如果它存在. 一个完全格总有零元: 所有元素的交.

v) 代数系统的零元 (zero of an algebraic system) 是由零元运算选定的元素 (见代数运算 (algebraic operation); 代数系统 (algebraic system)). 上面考虑的多数例子, 在给定的系统中零是唯一的, 甚至形成一个一元子系统.

3. 零点 (zero). 在 Abel 群 (环, 域, 体)  $A$  中取值的函数  $f(x_1, \dots, x_n)$  的零点 (zero of a function) 的集合是函数  $f(x_1, \dots, x_n)$  的变元  $(x_1, \dots, x_n)$ , 使得  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  的值组  $(x_1, \dots, x_n)$  的全体.

О. А. Иванова, Л. В. Кузьмин 撰

【补注】拓扑空间  $X$  的一个子集称为零点集 (zero set), 如果它是  $X$  上某个连续实值函数的零点集. 零点集是代数几何 (多项式系统的零点集) 和局部解析几何 (全纯函数和映射系统的零点集) 的一种研究对象.

#### 参考文献

[A1] Jacobson, N., Basic algebra, I, Freeman, 1974.

卢景波 译

**零维映射** [zero-dimensional mapping; нульмерное отображение]

一个连续映射 (continuous mapping)  $f: X \rightarrow Y$  (其中  $X$  与  $Y$  是拓扑空间), 使得对任何  $y \in Y$ ,  $f^{-1}(y)$  是 (在 ind 意义下) 零维集. 零维映射及与之紧密相关映射的应用, 把对给定空间的研究化为对另一个更简单空间的研究. 因此, 许多维数性质及其他基数不变量 (见基数特征 (cardinal characteristic)), 就从  $X$  转到  $Y$  (或更常见的从  $Y$  转到  $X$ ).

例 1. 任何度量空间  $X$  ( $\dim X \leq n$ ), 能经过一个完全零维映射 (complete zero-dimensional mapping), 映入具有可数基的空间  $Y$  ( $\dim Y \leq n$ ) (Katetov 定理 (Katetov theorem)). 这里, 完全零维指的是对任意  $\varepsilon > 0$  及任意  $y \in f(X)$ , 存在一个邻域  $U_y \subset Y$ , 它的原象  $f^{-1}(U_y)$  分裂成为  $X$  中直径  $< \varepsilon$  的离散开集系.

例 2. 若零维映射  $f: X \rightarrow Y$  ( $X$  是正规局部连通空间) 是完满映射 (perfect mapping), 则  $X$  的权与  $Y$  的权相同 (见拓扑空间的权 (weight of a topological space)).

#### 参考文献

[1] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】研究零维映射的起点是紧度量空间中的如下定理: 若  $f: X \rightarrow Y$  是零维映射, 则  $\dim Y \geq \dim X$ .

对闭连续映射, 它可以扩张到可分度量空间, 但对开连续映射则不行; 见 [A1] 91 页.

#### 参考文献

[A1] Hurewicz, W. and Wallman, H., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1948.

[A2] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989

(译自波兰文).

罗嵩龄 译

**零维空间** [zero-dimensional space; нульмерное пространство], 在 ind 意义下的

一个拓扑空间, 以既开且闭的集合为基. 任何离散空间 (discrete space) 都是零维空间, 但零维空间未必有孤立点 (有理数空间  $\mathbb{Q}$  即为一例). 所有零维空间都是完全正则的. 零维性可遗传给子空间, 并且蕴涵空间的全不连通性 (total disconnectedness): 零维空间中仅有的连通集是单点集和空集. 然而, 后一性质并不等价于零维性. 存在着不是零维, 而其任意点都是开闭集族之交的空间, 但是这种空间不可能是紧空间.

有时更狭义地理解空间的零维性. 空间称为在 dim 意义下零维的 (zero-dimensional in the sense of dim), 如果它的任意有限开覆盖能加细为具有不相交元素的开覆盖. 空间称为在 Ind 意义下零维的 (zero-dimensional in the sense of Ind), 如果其任何闭子集的任何邻域都包含该子集的一个开闭邻域. 在  $T_1$  空间类中, ind 意义下的零维由 dim 意义及 Ind 意义下两种零维得出. 在有可数基的可度量化空间类 (见可度量化空间 (metrizable space)) 及 Hausdorff 紧统类中, 零维空间的三种定义等价. 对所有可度量化空间, dim 意义下的零维性等价于 Ind 意义下的零维性; 然而, 有一个熟知的可度量化空间的例子, 它在 ind 意义下是零维空间, 而在 Ind 意义下却不是. 不论 dim 意义下还是 Ind 意义下的零维性, 都不能遗传给子空间. 在  $T_1$  空间中, 在 ind 意义下的零维空间可作为广义 Cantor 不连续统  $D^*$  (两点空间 (colon) 之积) 的子空间刻画, 准确到同胚. 任何完全正则空间 (completely-regular space) 可以作为零维空间在好的映射 (例如完满映射 (perfect mapping), 具有点的紧原象的连续开映射 (open mapping)) 下的象得到. 然而, 既开又闭的连续映射, 在 ind 意义下和 Ind 意义下均保持零维性. 现在还知道是不是任何完全正则空间都包含一个处处稠密的零维子空间.

#### 参考文献

[1] Александров, П. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности ..., М., 1973.

А. В. Архангельский 撰

【补注】既开又闭的集合, 有时称为闭开集 (clopen set).

$T_0$  分离公理 (除非特别申明) 总是作为零维性定义的一部分: 事实上, 如果没有这个假定, 上述主要条目中的一些断言不成立.

在  $\text{Ind}$  和  $\text{dim}$  意义下, 零维性是等价的. 这种类型的零维性一般称为强零维性 (strong zero-dimensionality). 强零维空间显然是正规的. 正规空间  $X$  强零维的充要条件是, 它的 Stone-Čech 紧化 (Stone-Čech compactification)  $\beta X$  (在任何意义下) 零维. 这个事实促成了将强零维性概念扩张到完全正则空间类: 完全正则空间  $X$  是强零维空间, 若它的紧化  $\beta X$  零维.

任何拓扑空间都是零维仿紧空间的一个开商空间 ([A4]). 完全正则空间甚至是极不连通空间 (extremely-disconnected space) 的完满象.

在可分度量空间中, 与三个基本定义一致的第四个维数定义是 Krull 维数  $\text{gdim}$ ; 见 [A5] 及格 (lattice) (的补注). 对于一般度量空间  $X$ ,  $\text{ind } X \leq \text{gdim } X \leq \text{dim } X$  ([A5]).

对于完全正则空间, 可以定义用多种方式映到其上的零维空间. 这种重要结构之一是绝对形 (absolute), 或 Gleason 覆盖 (Gleason cover). A. M. Gleason 最早对紧 Hausdorff 空间  $Y$  构造了  $aY$ , 并证明了它是  $Y$  在对偶于内射包 (injective hull) (见内射模 (injective module)) 意义下的投射覆盖 (projective covering) ([A3]). 事实上, 应用于零维紧 Hausdorff 空间 (也称 Boole 空间 (Boolean space) 或 Stone 空间 (Stone space)), 按照 Stone 对偶性 (Stone duality) 其结构对偶于 Boole 代数 (Boolean algebra) 的 MacNeille 完全化, 它是内射壳的一种代替 (见 MacNeille 完全化 (completion, MacNeille)); 配备适当的“相容”序, 还证明了对任意分配格的 (Priestly 对偶性 (Priestly duality)). Gleason 覆盖有很多推广: 推广至  $T_0$  空间 ([A2]), 推广至一般型的拓扑代数 ([A1]), 推广至拓扑斯 ([A6]).

本条目最后的问题已部分地得到解决: 在连续统假设 (continuum hypothesis) 下, 可以构造一个空间, 使得它没有零维不可数子空间, 且没有可数子集是稠密的.

#### 参考文献

- [A1] Banaschewski, B., Projective covers in categories of topological spaces and topological algebras, in J. Novák, et al. (ed.): General Topol. and its Relations to Modern Anal. and Alg. (Proc. Kanpur, 1968), Vol. 3, Academia, 1971, 63 – 91.
- [A2] Błaszczyk, A., Extramally disconnected resolutions of  $T_0$  spaces, *Collog. Math.*, **32** (1974), 57 – 68.
- [A3] Gleason, A., Projective topological spaces, III, *J. Math.*, **2** (1958), 482 – 489.
- [A4] Isbell, J., A note on complete closure algebras,

*Math. Systems Theory*, **3** (1969), 310 – 312.

- [A5] Isbell, J., Graduation and dimension in locales, in I. H. James and E. H. Kronheimer (eds.): Aspects of Topology: in Memory of Hugh Dowker, Lecture notes London Math. Soc., Vol. 93, Cambridge Univ. Press, 1985, 195 – 210.
- [A6] Johnstone, P. T., The Gleason cover of a topos I, *J. Pure Appl. Alg.*, **19** (1980), 171 – 192.
- [A7] Johnstone, P. T., The Gleason cover of a topos II, *J. Pure Appl. Alg.*, **22** (1981), 229 – 247.
- [A8] Ciesielski, K.,  $L$ -space without any uncountable 0-dimensional subspace, *Fundam. Math.*, **125** (1985), 231 – 235.
- [A9] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989 (译自波兰文).
- [A10] Engelking, R., Dimension theory, North-Holland, 1978 (译自波兰文).
- [A11] Hurewicz, W. and Wallman, H., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1941.
- [A12] Nyikos, P., A survey of zero-dimensional spaces, in S. P. Franklin, et al. (ed.): Topology (Proc. 9th Annual Spring Conf. Memphis, 1975), M. Dekker, 1976, 87 – 114.
- [A13] Johnstone, P. T., Stone spaces, Cambridge Univ. Press, 1983. 罗嵩龄 译

**零因子** [zero divisor; делитель нуля], 在环或有零元素的半群中的

一个非零元素, 它与某非零元素的乘积为零. 一个元素  $a$  称为左 (右) 零因子 (left (right) divisor of zero), 若至少有一个  $b \neq 0$ , 使  $ab = 0$  ( $ba = 0$ ).

O. A. Иванова 撰

【补注】 设  $A$  为环,  $M$  为  $A$  上左模, 则  $A$  的元素  $a \neq 0$  称为模  $M$  中的零因子, 如果有  $m \in M$  ( $m \neq 0$ ) 使  $am = 0$ . 裴定一 译 赵春来 校

**零一律** [zero-one law; нуль-единица закон], 亦称 0-1 律

在概率论 (probability theory) 中的陈述: 每一尾事件 (tail event) 具有概率 0 或 1. 所谓尾事件即它的发生决定于一个独立随机事件或随机变量序列的任意远的元素. 这个规律可推广到依赖于连续参数的随机变量系统上 (见下面所述).

对单个的尾事件, 它的概率是 0 和 1 这一事实建立于 20 世纪初. 这样, 设  $A_1, A_2, \dots$ , 是一独立事件序列, 设  $A$  是无穷多个事件  $A_k$  发生这一尾事件, 即

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$



则如 E. Borel ([1]) 所指出,

$$P(A) = 0 \text{ 或 } P(A) = 1.$$

通过简单的计算他证明了

$$P(A) = 0, \text{ 如果 } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

且

$$P(A) = 1, \text{ 如果 } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

(见 Borel-Cantalli 引理 (Borel-Cantalli lemma)).

再者, 如果  $X_1, X_2, \dots$  是一独立随机变量序列, 则级数  $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$  收敛的概率只能是 0 或 1. 这一事实 (连同区别这两种情形的准则) 由 A. H. Колмогоров 在 1928 年建立 (见 [2], [5]).

对与函数级数 (例如随机项幂级数) 之和的解析性质相联系的尾事件, 也有研究. 1896 年 Borel 含糊地断言: 对“任意系数”收敛圆盘的边界是用系数表达的解析函数的自然边界. 由 H. Steinhaus ([3]) 以下面严格的形式表述: 设  $X_1, X_2, \dots$  是在  $(0, 1)$  上均匀分布 (uniform distribution) 的独立随机变量序列, 设  $a_k$  是给定的数并假定幂级数

$$f(z; X_1, X_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i X_k} z^{k-1}$$

具有收敛半径  $R > 0$ . 则函数  $f$  不能扩展到圆盘  $|z| \leq R$  的边界之外的 (尾) 事件有概率 1. B. Jessen ([4]) 证明了与在  $(0, 1)$  上均匀分布的独立随机变量序列有关的任意尾事件具有概率 0 或 1.

Колмогоров (见 [5]) 如下叙述了一般的零一律: 设  $X_1, X_2, \dots$  是随机变量序列,  $f(X_1, X_2, \dots)$  是 Borel 可测函数且使得关系式

$$f(X_1, X_2, \dots) = 0$$

的事件在给定开始  $n$  个变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  之下的条件概率

$$P\{f(X_1, X_2, \dots) = 0 | X_1, \dots, X_n\}$$

等于无条件概率

$$P\{f(X_1, X_2, \dots) = 0\}, \quad (*)$$

对于任意  $n$  成立. 在这些条件之下, 概率 (\*) 是 0 或 1. 对独立随机变量  $X_1, X_2, \dots$ , 本文开始时叙述的零一律可由此推出.

P. Lévy 在 1937 年 (见 [6]) 证明了: Колмогоров 定理可由更一般的条件概率的性质推出, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{f(X_1, X_2, \dots) = 0 | X_1, \dots, X_n\}$$

几乎必然等于 1 或 0 (依赖于  $f(X_1, X_2, \dots)$  是否为

零). 而这个结论又可从关于鞅的定理推出 (见 [7] 第 III 章第 1 节; 第 VII 章第 4, 5, 7 节及注释, 在第 11 节, 对独立增量随机过程有一个类似的零一律; 特别, 这蕴含着具连续相关函数可分 Gauss 过程的样本分布函数要么以概率 1 在每点连续, 要么以概率 1 在每一点有第二类间断性; 亦见 [8]).

对独立同分布随机变量序列  $X_1, X_2, \dots$  的情形, 已经证明了 (见 [9]): 不仅任意尾事件的概率是 0 或 1, 而且在任意有限多项置换下不变的事件概率也是 0 或 1.

#### 参考文献

- [1] Borel, E., Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétique, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), 27 (1909), 247 – 271.
- [2] Kolmogorov, A. N. Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen, *Math. Ann.*, 99 (1928), 309 – 319.
- [3] Steinhaus, H., Über die Wahrscheinlichkeit dafür dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist, *Math. Z.*, 31 (1929), 408 – 416.
- [4] Jessen, A. B., The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions, *Acta Math.*, 63 (1934), 249 – 323.
- [5] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974 (中译本: А. Н. 柯尔莫格洛夫, 概率论基本概念, 商务印书馆, 1952).
- [6] Lévy, P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937.
- [7] Doob, J. L., Stochastic processes, Chapman and Hall, 1953.
- [8] Добрушин, Р. Л., «Теория вероятн. и ее приложения», 5 (1960), 1, 132 – 134.
- [9] Hewitt, E. and Savage, L. J., Symmetric measures on Cartesian products, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80 (1955), 470 – 501.

А. В. Прохоров, Ю. В. Прохоров 撰

#### 【补注】

#### 参考文献

- [A1] Loève, M., Probability theory, 1 – 2, Springer, 1978 (中译本: М. 洛易甫, 概率论, 上册, 科学出版社, 1965).

刘秀芳 译 陈培德 校

#### 零系 [zero system 或 null system; нуль система]

$n$  维射影空间的带有一个反对称算子的对合的对射变换. 设零系有形式

$$'u = Ax,$$

则标量乘积  $'ux$ , 即

$$(x, Ax) = -(x, Ax)$$

为零.

#### 参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Многомерные пространства, М., 1966. Д. Д. Соколов 撰

【补注】零系也称为零配极 (null polarity), 辛配极 (symplectic polarity) 或辛对射变换 (symplectic correlation). 由以上显然可见, 它是使得每个点位于它自身的极超平面上的配极 (polarity).

在三维射影空间里, 一个对射变换是一个对偶变换 (见对射变换 (correlation)), 将点、直线和平面分别变为平面、直线和点, 依据对偶原理, 还保持关联性质不变. 如果一直线上任何点列变为通过一新直线的平面束且两者成射影对应关系, 则此对射变换称为射影的 (projective). 存在唯一射影的对射变换将给定的无四点共面的五个点, 变为给定的无四面共点的五个平面.

一个配极是一个周期为 2 的射影对射变换 (见配极 (polarity)) 换言之, 它将每个点  $A$  变为一平面  $\alpha$ , 且  $\alpha$  上的每个点变为通过  $A$  的一平面. 有一类配极将二次曲面上每一点变为该点的切平面. 另一类是零配极 (null polarity), 它将空间里的每个点变为通过该点的一平面. 作为唯一的射影对射变换, 可以描述为将五个点  $A, B, C, D, E$  (其中无四点共线) 分别变换到平面  $EAB, ABC, BCD, CDE, DEA$ . 由于直线  $AB$  是  $A$  和  $B$  的极平面  $EAB$  与  $ABC$  的交线, 所以它是自配极的 (self-polar). 事实上, 所有的通过  $A$  且在它的极平面  $EAB$  上的直线都是自配极的. 在每个平面上有一个这种直线所构成的平坦线束, 且所有的自配极直线的集合是一个线性线丛 (linear complex).

在射影坐标系下, 一个零配极将每一点  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  变为平面  $[X_0, X_1, X_2, X_3]$ , 这里

$$X_\mu = \sum_{\nu=0}^3 C_{\mu\nu} x_\nu$$

且  $C_{\mu\nu} + C_{\nu\mu} = 0$ ,  $C_{01}C_{23} + C_{02}C_{31} + C_{03}C_{12} \neq 0$ . 对于一直线的 Plücker 坐标 (Plücker coordinates)  $\{p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}\}$ , 这里  $p_{\mu\nu} + p_{\nu\mu} = 0$  与  $p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0$ , 零配极中自配极直线的线性线丛有方程

$$\sum \sum C_{\mu\nu} p_{\mu\nu} = 0.$$

#### 参考文献

- [A1] Staudt, K. G. C. von., Beiträge zur Geometrie der Lage, Korn, Nürnberg, 1847, 60 – 69, 190 – 196.  
[A2] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1965, 65 – 70.  
[A3] Pedoe, D., Geometry: a comprehensive course, Dover, reprint, 1988, § 85.5. 林向岩 译 陆珊年 校

$\zeta$  函数 [zeta-function 或  $\zeta$ -function; дзета-функция]

1) 数论中的  $\zeta$  函数是一类单复变量的解析函数, 由 Riemann  $\zeta$  函数, 它的推广及类似函数所组成.  $\zeta$  函数及它们的形如  $L$  函数 (见 Dirichlet  $L$  函数 (Dirichlet  $L$ -function)) 的推广构成了近代解析数论的基础. 除 Riemann  $\zeta$  函数外, 还有推广的  $\zeta$  函数  $\zeta(s, a)$ , Dedekind  $\zeta$  函数, 同余  $\zeta$  函数, 等等.

Riemann  $\zeta$  函数 (Riemann zeta-function) 是由 Dirichlet 级数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s = \sigma + it \quad (1)$$

定义, 它在复  $s$  平面的任一满足  $\sigma \geq 1 + \delta$  ( $\delta > 0$ ) 的区域中绝对一致收敛. 当  $\sigma > 1$  时, 有 Euler 积 (Euler product):

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad (2)$$

这里  $p$  遍历全体素数.

级数 (1) 和积 (2) 之间的恒等式是  $\zeta(s)$  的基本性质之一. 由此可以得到一系列联系  $\zeta(s)$  和重要数论函数的关系式. 例如, 当  $\sigma > 1$  时,

$$\ln \zeta(s) = s \int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx,$$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad \zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s},$$

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{v(n)}}{n^s}, \quad \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s},$$

这里  $\pi(x)$  是不超过  $x$  的素数个数,  $\Lambda(n)$  是 (von) Mangoldt 函数 (Mangoldt function),  $\mu(n)$  是 Möbius 函数 (Möbius function),  $\tau(n)$  是  $n$  的除数个数,  $v(n)$  是  $n$  的不同的素因子个数, 及  $\lambda(n)$  是 Liouville 函数 (Liouville function). 这表明了  $\zeta(s)$  在数论中的重要作用. 作为实变量的函数,  $\zeta(s)$  是 Euler ([1]) 在 1737 年引进的, 他证明了它能表为积 (2). 此后, 这函数被 P. G. L. Dirichlet 和 П. Л. Чебышев ([2]) 所研究, 后者的研究在素数分布 (distribution of prime numbers) 问题方面取得了杰出的成就. 然而,  $\zeta(s)$  的最深刻的内在性质是后来把它作为一个复变量的函数来研究时发现的. 这首先是由 B. Riemann ([3]) 于 1876 年得到的. 他证明了下面的结论.

a)  $\zeta(s)$  可由以下的形式解析延拓 (analytic continuation) 至整个复  $s$  平面:

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} +$$



$$+ \int_1^{\infty} (x^{-(1-s/2)} + x^{-(1-(1-s)/2)}) \theta(x) dx, \quad (3)$$

其中  $\Gamma(\omega)$  是  $\Gamma$  函数 (gamma-function) 及

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi n^2 x).$$

b) 除了  $s=1$  外,  $\zeta(s)$  是所有  $s$  值的解析函数, 在  $s=1$  有一个一级极点, 留数为 1, 以及它满足函数方程

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s), \quad (4)$$

这方程称为 Riemann 函数方程. 为了研究  $\zeta$  函数, Riemann 引进了函数

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

它被称为 Riemann  $\xi$  函数 (Riemann  $\xi$ -function). 对于它方程 (4) 变为

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

若设

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

则方程 (4) 变为

$$\Xi(t) = \Xi(-t).$$

最后这个函数  $\Xi$  由于以下事实而引人注目: 它是一个偶的整函数, 对实数  $t$  它取实值, 以及它在实轴上的零点对应于  $\zeta(s)$  在直线  $\sigma=1/2$  上的零点.

c) 因当  $\sigma > 1$  时  $\zeta(s) \neq 0$ , 故由 (4) 知, 在半平面  $\sigma < 0$  内,  $\zeta(s)$  仅在点  $s = -2v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) 处有一级零点. 这些零点称为  $\zeta(s)$  的平凡零点 (trivial zeros). 此外, 当  $0 < s < 1$  时  $\zeta(s) \neq 0$ . 这样,  $\zeta(s)$  的所有非平凡零点 (non-trivial zeros) 是复数, 它们对于实轴  $t=0$  及垂直直线  $\sigma=1/2$  均为对称分布, 以及全部位于带域  $0 \leq \sigma \leq 1$  内, 这个带域称为临界带 (critical strip).

Riemann 也提出了下面五个假设.

1.  $\zeta(s)$  在矩形  $0 \leq \sigma \leq 1, 0 < t < T$  中的零点个数  $N(T)$  有公式

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \ln T - \frac{1 + \ln 2\pi}{2\pi} T + O(\ln T).$$

2. 设  $\rho$  遍历  $\zeta(s)$  的所有非平凡零点. 那么, 级数  $\sum |\rho|^{-2}$  收敛, 而级数  $\sum |\rho|^{-1}$  发散.

3. 函数  $\zeta(s)$  可表为无穷积

$$ae^{bs} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho},$$

这里  $\rho$  遍历  $\zeta(s)$  的所有零点 (即  $\zeta(s)$  的所有非平凡零点).

4. 设

$$P(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n},$$

$$P_0(x) = \frac{1}{2} [P(x+0) + P(x-0)].$$

那么, 当  $x \geq 1$  时有

$$P_0(x) = \operatorname{li} x - \sum_{\rho} \operatorname{li} x^{\rho} + \int_x^{\infty} \frac{du}{(u^2-1)\ln u} - \ln 2, \quad (5)$$

其  $\operatorname{li} x$  是积分对数 (integral logarithm):

$$\operatorname{li} e^w = \int_{-\infty+iv}^{u+iv} \frac{e^z}{z} dz, \quad w = u + iv, \quad v < 0 \text{ 或 } v > 0.$$

5.  $\zeta(s)$  的所有非平凡零点均位于直线  $\sigma=1/2$  上.

随 Riemann 工作之后,  $\zeta$  函数的值分布, 特别是, 零点分布问题变得广为人知, 并有许多数学工作者对此进行研究. Riemann 的假设 2 和 3 被 J. Hadamard 于 1893 年所证明, 并证明了在假设 3 中  $a=1/2$  及  $b=\ln 2 + (1/2)\ln \pi - 1 - C/2$ , 这里  $C$  是 Euler 常数 (Euler constant); 假设 1 和 4 于 1894 年被 H. von Mangoldt 所证明, 他同时得到了关于素数的公式 (5) 的下述的重要类似关系式. 设

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{2} [\Psi(x+0) + \Psi(x-0)],$$

则对  $x \geq 1$  有

$$\Psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

这里  $\rho = \beta + i\gamma$  遍历  $\zeta(s)$  的所有非平凡零点, 而  $\sum_{\rho} x^{\rho}/\rho$  表示和式  $\sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho}/\rho$  当  $T \rightarrow \infty$  的极限. 类似于公式 (5), 这公式表明, 自然数列中的素数分布问题是与函数  $\zeta(s)$  的非平凡零点的位置有密切关系.

最后一个假设 (假设 5) 至今 (1997) 还未被证明或否定. 这就是关于  $\zeta$  函数零点的著名的 Riemann 假设 (Riemann hypothesis).

函数  $\zeta(s)$  明确地由它的函数方程所定义. 更正确地说, 任一由常义 Dirichlet 级数所表示并满足方程 (4) 的函数, 在它的解析性满足相当明显的条件下, 一定在只相差一个常数因子的意义下与  $\zeta(s)$  相同 ([4]).

设

$$\chi(s) = \pi^{s-1/2} \frac{\Gamma(1-s/2)}{\Gamma(s/2)}$$

及  $h > 0$  是常数, G. H. Hardy 和 L. E. Littlewood ([4]) 于 1920 年证明了: 当  $0 < \sigma < 1$ ,  $x > h$ ,  $y > h$ ,  $2\pi xy = |t|$  时, 有下述近似函数方程 (approximate functional equation) 成立:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n \leq y} \frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-\sigma}) + O(|t|^{1/2-\sigma} y^{\sigma-1}). \quad (6)$$

这个方程在近代  $\zeta$  函数理论及其应用中起着重要作用. 有一些一般方法可以用来不仅对这类  $\zeta$  函数而且对一般的满足 Riemann 型函数方程 (3) 的 Dirichlet 函数得到这种形式的结果. 在这方面文献 [5] 证明了最完全的结果; 在  $\zeta(s)$  的情形, 它导致如下的关系式: 对任意的  $\tau$ ,  $|\arg \tau| < \pi/2$ , 有

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-s/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s/2, \pi n^2 \tau)}{n^s} + \pi^{-(1-s)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma((1-s)/2, \pi n^2 / \tau)}{n^{1-s}} + \frac{\tau^{(s-1)/2}}{1-s} - \frac{\tau^{s/2}}{s},$$

其中  $\Gamma(z, x)$  是不完全  $\Gamma$  函数 (incomplete gamma-function). 对

$$\tau = \Delta^2 \exp \left[ i \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{|t|} \right] \operatorname{sign} t \right], \Delta > 0,$$

由此就得到渐近方程 (6); 对  $\tau = 1$ , 这关系式就变为原始的公式 (3).

$\zeta$  函数论的主要问题是它的非平凡零点的位置, 及一般的, 它在区域  $1/2 \leq \sigma \leq 1$  中的值.  $\zeta$  函数的主要研究方面有: 确定离开直线  $\sigma = 1$  的左边尽可能宽的区域, 使在其中  $\zeta(s) \neq 0$ ; 在临界带中  $\zeta$  函数的阶及均值问题; 估计  $\zeta$  函数在直线  $\sigma = 1/2$  上及其外的零点个数, 等等.

第一个关于  $\zeta$  函数零点的边界的非显然结果是 Ch. J. de la Vallée-Poussin 于 1896 年得到的, 他证明了存在常数  $A_1 > 0$ , 使得

$$\zeta(s) \neq 0, \text{ 若 } \sigma \geq 1 - \frac{A_1}{\ln^\alpha(|t|+2)}, \alpha \geq 1. \quad (7)$$

这方面的进一步的推进是与渐近方程 (6) 及估计三角和的方法的发展相联系.

估计这类三角和的最强有力的方法是由 И. М. Виноградов 创造的 (见 Виноградов 法 (Vinogradov method)). 关于  $\zeta$  函数的非零区域的边界的最好结果 (至 1997 年) 是 1958 年 Виноградов ([7]) 得到的: 存在常数  $A_2 > 0$ , 使得

$$\zeta(s) \neq 0,$$

$$\text{若 } \sigma \geq 1 - \frac{A_2}{(\ln(|t|+4))^{2/3} (\ln \ln(|t|+4))^{1/3}}. \quad (7')$$

关于素数个数可得到相应的公式: 存在常数  $A_3 > 0$ , 使得

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O(x^{-A_3(\ln x)^{3/5} (\ln \ln x)^{-1/5}}).$$

在直线  $\sigma = 1$  邻近, 函数  $\zeta(s)$  的模的阶与其有无零点之间存在某种联系. 这样, 式 (7') 是下面估计的推论: 在式 (7') 的条件下有存在正常数  $A_4, A_5$ , 使得

$$\zeta(s) = O(e^{A_4 \ln |t|}),$$

$$\text{若 } \sigma \geq 1 - A_5 (\ln |t|)^{-2/3} (\ln \ln |t|)^{2/3}. \quad (7'')$$

在另一方面 ([4]), 已知有

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|\zeta(1+it)|}{\ln \ln t} \geq e^c,$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|\zeta(1+it)|^{-1}}{\ln \ln t} \geq \frac{6}{\pi^2} e^c,$$

以及, 若 Riemann 假设成立, 这两个上极限分别不超过  $2e^c$  及  $(12/\pi^2)e^c$ .

$\zeta$  函数在临界带中的阶是指使得  $\zeta(\sigma+it) = O(|t|^v)$  成立的数  $v$  的最大下界  $\eta(\sigma)$ . 若  $\sigma > 1$ , 则  $\eta(\sigma) = 0$ ; 若  $\sigma < 0$ , 则  $\eta(\sigma) = 1/2 - \sigma$ . 函数  $\eta(\sigma)$  当  $0 \leq \sigma \leq 1$  时的确切值至今仍不知道. 根据最简单的猜测 (Lindelöf 假设 (Lindelöf hypothesis)), 应有

$$\eta(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma, \text{ 当 } \sigma \leq \frac{1}{2},$$

$$\text{及 } \eta(\sigma) = 0, \text{ 当 } \sigma > \frac{1}{2}.$$

这等价于命题: 对任意的  $\varepsilon > 0$  有

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(|t|^\varepsilon). \quad (8)$$

当  $\sigma > 1/2$  时有估计  $\zeta(\sigma+it) = O(|t|^{(1-\sigma)/2})$  成立.

$\zeta(s)$  在直线  $\sigma = 1/2$  上最近已知的估计 ([4]) 是

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(|t|^{\varepsilon+15/32})$$

离所期望的估计 (8) 相差甚远.

$\zeta$  函数的均值问题是要对给定的  $\sigma$  及  $k = 1, 2, \dots$ , 确定函数

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k} dt$$

当  $T \rightarrow \infty$  时的性质. 这样的结果在  $\zeta$  函数的零点及数论中有直接的应用.



在 [4] 中证明了:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_1^T \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt &= \\ &= \ln T + 2C - 1 - \ln 2\pi + O\left(\frac{\ln T}{\sqrt{T}}\right), \\ \frac{1}{T} \int_1^T \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^4 dt &= \frac{\ln^4 T}{2\pi^2} + O(\ln^3 T), \end{aligned}$$

当  $\sigma > 1/2$  时有

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt &= \zeta(2\sigma), \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^4 dt &= \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}. \end{aligned}$$

对  $k > 2$ , 仅知道当  $\sigma > 1 - 1/k$  时有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}},$$

其中  $\tau_k(n)$  是  $n$  表为  $k$  个正整数乘积的表法个数, 以及渐近关系式

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}}$$

等价于  $\sigma > 1/2$  时的 Lindelöf 假设.

$\zeta$  函数论中的一个重要部分是关于函数  $N(\sigma, T)$  的估计问题, 它表示区域  $\beta \geq \sigma, 0 < \gamma \leq T$  中  $\zeta(s)$  的零点  $\beta + i\gamma$  的个数.  $N(\sigma, T)$  的新的估计是基于解析函数均值的凸性定理, 把它应用于函数

$$f_X(s) = \zeta(s) \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n^s} - 1.$$

若对某个  $X = X(\sigma, T), T^{1-l(\sigma)} \leq X \leq T^A$ , 当  $T \rightarrow \infty$  时

$$\int_T^{2T} |f_X(s)|^2 dt = O(T^{l(\sigma)} \ln^m T)$$

对  $\sigma \geq \alpha$  一致成立, 其中  $l(\sigma)$  是有有界导数的正的非增函数和  $m \geq 0$  是一个常数, 那么

$$N(\sigma, T) = O(T^{l(\sigma)} \ln^{m+1} T)$$

对  $\sigma \geq \alpha + 1/\ln T$  一致成立.

此外还知道, 若对  $r_1 \leq 3/2$  有

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^{r_1} \ln^{r_1} t)$$

成立, 那么, 当  $1/2 \leq \sigma \leq 1$  时有

$$N(\sigma, T) = O(T^{2(1+2r_1)(1-\sigma)} \ln^5 T).$$

由这两个结论可以证明下面的关于  $\zeta$  函数的零点

密度定理 (density theorems on the zeros of the zeta-function): 当  $1/2 \leq \sigma \leq 1$  时有

$$N(\sigma, T) = O(T^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)} \ln^5 T),$$

以及对  $3/4 \leq \sigma \leq 1$  有

$$N(\sigma, T) = O(T^{3(1-\sigma)/(3\sigma-1)} \ln^4 T).$$

$\zeta$  函数在直线  $\sigma = 1/2$  上的零点. 根据 Riemann 假设,  $\zeta$  函数的所有非平凡零点均位于直线  $\sigma = 1/2$  上. 在这条直线上有无穷多个零点这一事实首先是由 Hardy ([4]) 于 1914 年基于下述的 Ramanujan 公式 (Ramanujan formula) 证明的:

$$\int_0^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2 + 1/2} \cos xt dt = \frac{\pi}{2} [e^{x/2} - e^{-x/2} \theta(e^{-2x})].$$

一个本质上的新结果属于 A. Selberg (1942) ([4]): 存在正常数  $A$ , 使得  $\zeta(s)$  的形如  $1/2 + it$  ( $0 < t \leq T$ ) 的零点个数  $N_0(T)$  满足不等式

$$N_0(T) > AT \ln T.$$

这表明  $\zeta$  函数在直线  $\sigma = 1/2$  上的零点个数与它的所有非平凡零点的个数

$$N(T) = N(1/2, T) \sim \frac{1}{2\pi} T \ln T$$

有同样的增长阶. 关于  $\zeta$  函数在这一直线上的零点还知道一些其他的结果. 利用近似函数方程便可计算 (在一定的精度内) 靠近实轴使  $\zeta$  函数等于零的点的值. 由这一方法使用计算机找到了  $\zeta(s)$  在矩形  $0 \leq \sigma \leq 1, 0 \leq t \leq 1.6 \cdot 10^6$  中的全部零点, 它们共有  $3.5 \cdot 10^6$  个且均位于直线  $\sigma = 1/2$  上. 最初的六个零点是 (精确到小数点后两位): 14.13, 21.02, 25.01, 30.42, 32.93 及 37.58.

在一般情形下,  $\zeta(s)$  的相邻零点之间的距离的估计由 Littlewood 定理 (Littlewood theorem) (1924) 给出: 对任意充分大的  $T$ , 函数  $\zeta(s)$  有一个零点  $\beta + i\gamma$ , 使得

$$|\gamma - T| < \frac{A}{\ln \ln \ln T}.$$

对  $0 < a < 1$ , 广义  $\zeta$  函数 (generalized zeta-function) 由如下级数定义:

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+a)^{-s}.$$

当  $a = 1$  时, 它就是 Riemann  $\zeta$  函数. 公式

$$\zeta(s, a) = \frac{e^{-\pi i s} \Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_L \frac{z^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}} dz$$

把  $\zeta(s, a)$  解析延拓到全平面, 其中积分线路  $L$

是: 先沿正实轴的上边由无穷远到某个给定正数  $r$ ,  $0 < r < 2\pi$ ; 再以反时针方向沿半径为  $r$  的圆周一圈; 最后沿正实轴的下边由  $r$  到无穷远.  $\zeta(s, a)$  处处解析, 除了点  $s = 1$ , 该点是它的一级极点留数为 1. 它是 Dirichlet  $L$  函数理论的重要组成部分 ([9], [10]).

Dedekind  $\zeta$  函数 (Dedekind zeta-function) 是 Riemann  $\zeta$  函数在代数数域上的类似, 由 R. Dedekind ([11]) 引进.

设  $k$  是  $n (> 1)$  次代数数域,  $n = r_1 + 2r_2$ ,  $r_1$  是它的共轭实数域的个数,  $r_2$  是它的共轭复数域的对数; 再设  $\Delta$ ,  $h$ , 及  $R$  分别是域  $k$  的判别式, 除子类数及调整子, 以及  $g$  是  $k$  中的单位根的个数.

域  $k$  上的 Dedekind  $\zeta$  函数  $\zeta_k(s)$  由级数

$$\zeta_k(s) = \sum_{\mathfrak{A}} \frac{1}{N_{\mathfrak{A}}^s}$$

定义, 其中  $\mathfrak{A}$  遍历  $k$  的所有整的非零除子, 及  $N_{\mathfrak{A}}$  是除子  $\mathfrak{A}$  的范数. 当  $\sigma \geq 1 + \delta$  ( $\delta > 0$ ) 时这级数绝对一致收敛, 定义了一个半平面  $\sigma > 1$  上的解析函数.

若  $\sigma > 1$ , 则

$$\zeta_k(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^s},$$

其中  $f(m)$  是  $k$  中范数为  $m$  的整除子的个数;  $f(m) \leq \tau_n(m)$ ,  $\tau_n(m)$  是  $m$  表为  $n$  个自然数之积的表法个数.

若  $\sigma > 1$ , 则有 Euler 恒等式

$$\zeta_k(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left( 1 - \frac{1}{N_{\mathfrak{p}}^s} \right)^{-1}$$

成立, 这里  $\mathfrak{p}$  遍历  $k$  的全体素除子.

Dedekind  $\zeta$  函数的主要性质. 见 [11].

1)  $\zeta_k(s)$  在整个复平面上解析除了  $s = 1$ , 该点是它的一级极点留数为

$$\frac{2^{r_1+r_2} \pi^{r_2} h R}{g \sqrt{|\Delta|}}.$$

2)  $\zeta_k(s)$  满足函数方程

$$\xi_k(s) = \xi_k(1-s),$$

其中

$$\xi_k(s) = \left( \frac{|\Delta|}{4^{r_2} \pi^n} \right)^s \Gamma^{r_1} \left( \frac{s}{2} \right) \Gamma^{r_2}(s) \zeta_k(s).$$

3) 当  $r = r_1 + r_2 - 1 > 0$  时, 函数  $\zeta_k(s)$  在点  $s = 0$  有一个  $r$  级零点; 当  $r = 0$  时  $\zeta_k(0) \neq 0$ ; 点  $s = -2\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) 是 Dedekind  $\zeta$  函数  $\zeta_k(s)$  的  $r+1$  级零点; 当  $r_2 > 0$  时点  $s = -2\nu - 1$  是它的  $r_2$  级零点, 当  $r_2 = 0$  时它不等于零. 这些是  $\zeta_k(s)$  的平凡零点.

4.  $\zeta_k(s)$  的所有其他的零点均位于临界带  $0 \leq \sigma \leq 1$  中.

一个基本假设是  $\zeta_k(s)$  的所有非平凡零点均位于直线  $\sigma = 1/2$  上. 已经证明在  $\sigma = 1$  上  $\zeta_k(s)$  无零点. 此外, 存在一个绝对正常数  $A$ , 及一个依赖于  $k$  的参数常数  $\lambda$ , 使得

$$\zeta_k(s) \neq 0, \text{ 当 } \sigma \geq 1 - \frac{A}{n \ln |t|}, |t| > \lambda.$$

一般说来, 若已给定  $k$  的参数, 则许多类似于 Riemann  $\zeta$  函数的结果可推广到  $\zeta_k(s)$ . 然而, 在一般情形下, Dedekind  $\zeta$  函数理论更为复杂, 因为它也包含了 Dirichlet  $L$  函数理论. 至今 (1997) 还不知道 Dedekind  $\zeta$  函数在 0 与 1 之间是否有实零点. Dedekind  $\zeta$  函数与有理数域上的  $L$  级数之间的确切关系有如下的形式: 设  $k^*$  是包含  $k$  的最小的 Galois 域;  $Q$  是  $k^*$  的 Galois 群,  $h$  是  $Q$  的共轭类数, 及  $\chi_i$  是  $Q$  的素特征标. 那么,

$$\zeta_k(s) = \zeta(s) \prod_{i=1}^h L^{c_i}(s; \chi_i, k^*),$$

其中  $\zeta(s)$  是 Riemann  $\zeta$  函数,  $L$  是 Artin  $L$  级数, 及  $c_i = c_i(k)$  是正整数, 它们由域  $k^*$  的相对 Galois 群的性质确定. 特别地, 若  $k$  是一个分圆扩张, 则  $k^* = k$ ,  $h = \varphi(n)$ ,  $c_i = 1$ , 及 Artin  $L$  级数就是通常的 Dirichlet  $L$  级数.

域  $k$  的除子类  $H_j$  的 Dedekind  $\zeta$  函数 (Dedekind zeta functions of a divison class  $H_j$ ) 是同 Dedekind  $\zeta$  函数  $\zeta_k(s)$  平行地考虑的, 记作  $\zeta_k(s; H_j)$ . 这些函数以与  $\zeta_k(s)$  同样的级数来定义, 但  $\mathfrak{A}$  仅遍历属于给定类  $H_j$  的所有整除子而不是  $k$  的所有整除子. 函数  $\zeta_k(s; H_j)$  的性质与  $\zeta_k(s)$  类似, 并有下面的公式成立:

$$\zeta_k(s) = \sum_{j=1}^h \zeta_k(s; H_j).$$

Dedekind  $\zeta$  函数是近代代数数域除子的解析理论的基础, 在这里它们与 Riemann  $\zeta$  函数在有理数域上的数论中所起的作用相同.

同余  $\zeta$  函数 (congruence zeta-function) 或 Artin-Schmidt  $\zeta$  函数 (Artin-Schmidt zeta-function) (见下面代数几何中的  $\zeta$  函数 (zeta-function in algebraic geometry)) 是 Dedekind  $\zeta$  函数在以有限域为常数域的单变量代数函数域上的类似.

#### 参考文献

- [1] Euler, L., Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Springer, 1983 (译自拉丁文).
- [2] Чебышев, П. Л., Избр. математические труды, М.-Л., 1946.
- [3] Riemann, B., Collected works, Dover, reprint, 1953.
- [4] Titchmarsh, E. C., The theory of the Riemann zeta-function, Clarendon Press, 1986. (Rev. ed).
- [5] Лаврик, А. Ф., «Изв. АН СССР, сер. ма-



тем.», 32 (1968), 1, 134 – 185.

- [6] Виноградов, И. М., а) Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2 изд. М.-Н., 1980; б) Особые варианты метода тригонометрических сумм, М.-Н., 1976 (英译本: Vinogradov, I. M., Selected works, Springer-Verlag, 1984, а) The method of trigonometric sums in number theory, 181 – 295; б) Special variants of the method of trigonometric sums, 299 – 383).
- [7] Виноградов, И. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 22 (1958), 161 – 164.
- [8] Montgomery, H. L., Zeros of  $L$ -functions, *Invent. Math.*, 8 (1969), 346 – 354.
- [9] Prachar, K., *Primzahlverteilung*, Springer, 1957.
- [10] Чудаков, Н. Г., Введение в теорию  $L$ -функций Дирихле, М.-Л., 1947.
- [11] Hecke, E., *Mathematische Werke*, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959. А. Ф. Лаврик 撰

【补注】由数值计算结合解析理论, 已经证明  $\zeta(s)$  的前 200 000 000 个非显然零点都确在直线  $\operatorname{Re}(s) = 1/2$  上 ([A4]).

N. Levinson 证明了  $\zeta(s)$  的非显然零点至少有  $1/3$  是位于直线  $\operatorname{Re}(s) = 1/2$  上 ([A5]).

#### 参考文献

- [A1] Ivic, A., *The Riemann zeta-function*, Wiley, 1985.
- [A2] Patterson, S. J., *An introduction to the theory of the Riemann-zeta-function* Cambridge Univ. Press, 1988.
- [A3] Edwards, H. M., *Riemann's zeta-function*, Acad. Press, 1974.
- [A4] Brent, R. P., Lune, J. van de, Riele, H. J. J. te and Winter, D. T., The first 200 000 001 zeros of Riemann's zeta-function, in *Computational methods in number theory*, Math. Centre, Amsterdam, 1982, 389 – 403.
- [A5] Levinson, N., More than one third of the zeros of the Riemann zeta-function are on  $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ , *Adv. Math.*, 13 (1974), 383 – 436.
- [A6] Apostol, T. M., *Introduction to analytic number theory*, Springer, 1976.
- [A7] Dedekind, R., *Gesammelte Math. Werke*, 1 – 3, Vieweg, 1930 – 1932.
- [A8] Hardy, G. H. and Wright, E. M., *An introduction to the theory of numbers*, Clarendon Press, 1979.
- [A9] Haselgrove, C. B. and Miller, J. C. P., *Tables of the Riemann zeta-function*, Cambridge Univ. Press, 1960.
- [A10] Hecke, E., *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen zahlen*, Chelsea, reprint, 1970.
- [A11] Ivic, A., *Topics in recent zeta-function theory*, Publ. Math. Orsay, 1983.
- [A12] Landau, E., *Handbuch der Lehre von der verteilung*

der primzahlen, Chelsea, reprint, 1953.

- [A13] Lehman, R. S., Separation of zeros of the Riemann zeta-function, *Math. of Comp.*, 20 (1966), 523 – 541.
- [A14] Riele, H. J. J. te, Lune, J. van de and Winter, D. T., On the zeros of the Riemann zeta-function in the critical strip VI, *Math. of Comp.*, 46 (1986), 667 – 682.
- [A15] Zagier, D. B., *Zetafunktionen und quadratische Körper*, Springer, 1981.

【译注】关于  $\zeta(s)$  的最好的非零区域是由 Виноградов 方法得到的, 但他的论文 [7] 有缺陷, 正文中的结果是经改正的 (见 [A1], [B1], [B3], [B4]).

#### 参考文献

- [B1] 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社, 1963 (德文版: Hua, L.-K., *Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie*, Enzyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Vol. 1, 1959, Heft 13, Teil I).
- [B2] 闵嗣鹤, 数论的方法 (上、下), 科学出版社, 1981.
- [B3] 潘承洞, 潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 1991.
- [B4] Воронин, С. М., Карацуба, А. А., *Дзета-Функция Римана*, М.-Ф., 1994.

潘承彪 译 赵春来 校

2) 代数几何中的  $\zeta$  函数 (zeta function in algebraic geometry) 是描述有限域上的代数簇以及  $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$  上的有限型概型上算术的复变量  $s$  的解析函数. 如果  $X$  是一个这样的概型,  $\bar{X}$  是它的闭点的集合,  $N(x)$  是点  $x \in \bar{X}$  的剩余域  $k(x)$  的元素个数, 则  $\zeta$  函数  $\zeta_X(s)$  由 Euler 乘积给出:

$$\zeta_Z(s) = \prod_{x \in \bar{X}} (1 - N(x)^{-s})^{-1}.$$

当  $\operatorname{Re} s > \dim X$  时它绝对收敛, 并可半纯地开拓到半平面  $\operatorname{Re} s > \dim X - 1/2$  上, 以点  $s = \dim X$  为极点 ([10]). 如果  $X = \operatorname{Spec} \mathbf{Z}$ , 则  $\zeta_X(s)$  就是 Riemann  $\zeta$  函数 (Riemann zeta function), 如果  $X$  在  $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$  上是有限的, 则  $\zeta_X(s)$  是相应的数域的 Dedekind  $\zeta$  函数.

被研究得最透彻的是当  $X$  是有限域  $F_q$  上的代数簇的情形. 此时

$$N(x) = q^{\deg x},$$

其中  $\deg x$  是域  $k(x)$  在  $F_q$  上的次数. 通常人们考察由

$$Z_X(q^s) = \zeta_X(s)$$

所定义的函数  $Z_X(t)$  用以代替  $\zeta_X(s)$ . 如果  $v_n$  是簇  $X$  在域  $F_{q^n}$  中的有理点的个数, 则已证明 ([14])

$$\ln Z_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \frac{t^n}{n}.$$

这种  $\zeta$  函数是 E. Artin 在 1924 年对于代数曲线的情形 (类似于代数数域) 引入的 ([1]), 他指出这些函数是  $t$  的有理函数, 并且在某些情形下与 Riemann 关于零点的猜想相类似的结论对于这些函数是成立的. 这个类似的结论被称为 Artin 假设 (Artin hypothesis). H. Hasse 在 1933 年对于亏格 1 的曲线证明了此假设 (亏格 0 的情形是平凡的), 进而 A. Weil (1940) 借助于 Abel 簇 (Abelian variety) 理论的结果对于任意亏格的曲线证明了此假设, 该理论主要是由他为此目的而创立的 (见 [2], [14]).

Weil ([2]) 考虑了任意代数簇的  $\zeta$  函数并且提出了一个假设, 该假设推广了当时已知的关于曲线的结果. 他的研究基于以下的考虑: 簇  $X$  在  $\mathbf{F}_q$  中的有理点集也就是该簇的 Frobenius 自同态 (Frobenius endomorphism) 的  $a$  次幂的不动点集. Weil 第一猜想 (Weil first conjecture) 提出, 有限域上的代数簇的范畴中存在一个上调理论, 该理论满足为得到 Lefschetz 公式 (Lefschetz formula) 所需要的全部的形式性质. 如果  $\{H^i(X)\}$  是这样的理论的上同调群, 则由 Lefschetz 公式可知

$$Z_X(t) = \frac{P_1(t) \cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t) \cdots P_{2n}(t)},$$

其中  $n = \dim X$ ,  $P_i(t)$  是由 Frobenius 自同态在 Weil 上调 (Weil cohomology)  $H^i(X)$  上诱导出的映射的特征多项式. 特别地,  $Z_X(t)$  是有理函数.

Weil 第二猜想 (Weil second conjecture) 提出, 函数  $Z_X(t)$  应当满足一个函数方程. 对于光滑射影簇  $X$ , 这个方程形如

$$Z_X(q^{-n}t^{-1}) = (-1)^{\chi} q^{nx/2} t^{\chi} Z_X(t),$$

其中  $\chi$  是 Euler 示性数, 等于  $\sum (-1)^i \dim H^i(X)$  (此猜想是上调存在性的形式上的推论). B. Dwork ([6]) 采用不涉及上调的方法对于所有的  $X$  证明了  $\zeta$  函数是有理函数. Weil 所预想的上调理论于 1958 年被 A. Grothendieck 所建立 (见 Weil 上调 (Weil cohomology); 拓扑化范畴 (topologized category);  $l$  进上调 ( $l$ -adic cohomology)). Grothendieck 和 M. Artin 一起对于光滑射影簇证明了 Weil 的两个猜想, 并且证明了  $P_i(t)$  总具有整的  $l$  进系数, 这些系数依赖于作为理论基础的素数  $l$  的选取, 人们预言这些系数事实上是不依赖于  $l$  的整数, 并且, 一般而言, 不依赖于上调理论的选取. 这个预言通常被称为 Weil 第三猜想 (Weil third conjecture). 最后, Weil 第四猜想 (Weil fourth conjecture) 提出, 多项式  $P_i(t)$  的零点  $\alpha_i$  作为代数整数有 (Riemann 假设 (Riemann

hypothesis))

$$|\alpha_i| = q^{i/2}.$$

所有这些猜想都被 P. Deligne 证明 ([4]).

Weil 猜想在数论中的主要应用在于对同余的研究. 仅在曲线的情形 Weil 的定理就可以导致一元有理三角和的最佳估计. 这个估计已被推广到包含任意多个变元的和的情形. 这套理论的另一个重要应用是估计模形式 (modular form) 的 Fourier 系数 (Ramanujan-Peterson 问题 ([4], [5])).

事实上, 上述结果仅是与簇  $X$  的覆盖的 Galois 群表示相关联的, 或者更广泛地, 与  $X$  的某个  $l$  进层相关联的任意  $L$  函数的更为一般的定理的特殊情形 ([5], [10]). 这些函数是代数数论中人们熟知的  $L$  函数在任意概型上的类比.

现在设  $X$  是  $\text{Spec } \mathbf{Z}$  上的有限型概形, 使得它的一般纤维  $X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  是有理数域  $\mathbf{Q}$  上的非空代数簇. 人们猜想  $\zeta$  函数  $\zeta_X(s)$  可解析开拓为整个  $s$  平面上的半纯函数并且满足一个函数方程. 在 [11] 中提供了此函数方程的假设形式. 但是直到撰写此条目的时刻, 仅在非常特殊的情形 (有理曲面, 可被模函数一致化的代数曲线以及具有复乘的 Abel 簇 ([15])) 证明了此猜想. 在这种场合下的 Riemann 假设的类似物甚至还没有形成.

J. Birch, P. Swinnerton-Dyer ([12]) 和 J. Tate ([13]) 提供了研究  $\zeta$  函数的新思想. 为确切表述他们的猜想, 应当注意函数  $\zeta_X(s)$  是映射  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}$  的纤维  $X_p$  的  $\zeta$  函数  $\zeta_{X_p}(s)$  的乘积. 这些纤维是有限域上的簇, 根据 Weil 第一猜想, 有多项式分解. 将这些展开式连乘起来, 即得到  $\zeta$  函数的类似的表达式

$$\zeta_X(s) = \prod_i \zeta_X^{(i)}(s)^{(-1)^{i+1}}.$$

依据 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想, 函数  $\zeta_X^{(i)}(s)$  在点  $s = \dim X - 1$  处的零点的阶等于 Picard 簇 (Picard variety)  $\text{Pic}(X)$  的有理点群的秩 (由 Mordell-Weil 定理, 此秩是有限的). 于是, 这个猜想本身也假定了  $\zeta$  函数的半纯开拓的可能性, 正如原来所猜想的那样.

Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想的最原始的形式曾对于域  $\mathbf{Q}$  上的一类具有复乘的椭圆曲线被证明 ([12]), 这是对于一个庞大的一览表的研究的结果. 随后还提出函数  $\zeta_X^{(1)}(s)$  在点  $s = \dim X - 1$  的邻域内的展开式中变量  $s$  的适当方幂的系数的假设值, 此值应当等于

$$\frac{[\text{III}] |\det(a_i, a_j)|}{[\text{Pic } X_{\text{tors}}] [\text{Pic}' X_{\text{tors}}]},$$

其中 [III] 是簇  $\text{Pic } X$  的局部平凡的主齐性空间 (principal homogeneous space) 的 Шафаревич-Tate 群的预



料为有限的阶,  $|\det(a_i, a_j)|$  是由点的高度 (见高度, **Diophantus** 几何中的 (height, in Diophantine geometry)) 得到的簇  $\text{Pic } X$  的有理点群上的双线性型的行列式,  $[\text{Pic } X_{\text{tors}}]$  和  $[\text{Pic}' X_{\text{tors}}]$  是  $\text{Pic } X$  和它的对偶 Abel 簇上的有理点群的扭子群的阶. 这个表达式推广了代数数论中熟悉知的 Dedekind  $\zeta$  函数在点  $s = 1$  处的残数的表达式. 证明 Birch-Swinnerton-Dyer 猜想所包含的困难之一在于任一曲线的 III 群尚未被完全计算出来 (1978). 此假设的类似物对于定义在函数域上的曲线已被证明, 但是, 尽管在这种情形也必须假定起着 III 群作用的 **Brauer 群** (Brauer group) 的有限性.

Tate ([13]) 在研究 Galois 群在簇的代数闭链上的作用时对于偶数  $i$  提出了关于  $\zeta_X^{(i)}(s)$  的极点的猜想, 即函数  $\zeta_X^{(2i)}(s)$  在点  $s = i + 1$  处有极点, 其阶等于余维数为  $i$  的代数闭链群的秩. 这个论断与 Tate 关于代数闭链的猜想密切相关. 有关导致这些猜想的证明的各种途径以及支持这些猜想的各种论证, 见 [5], [7], [12], [13], [17].

除了刚刚描述过的  $\zeta$  函数的概念之外, 作为模形式的 Mellin 变换的  $\zeta$  函数在代数群的自守函数的理论中一直被人们所研究. 1967 年 Weil 指出对于  $\mathbb{Q}$  上的椭圆曲线  $X$ , 关于  $\zeta_X^{(1)}(s)$  的普遍猜想的一个推论是  $X$  被模函数一致化, 此时  $\zeta_X^{(1)}(s)$  是对应于  $X$  上的第一类微分的模形式的 Mellin 变换. 这个见解导致了任意概型  $X$  的函数  $\zeta_X^{(i)}(s)$  都是相应的模形式的 Mellin 变换的设想. 有关这个问题的基本结果是由 E. Jacquet 和 R. Langlands 得到的 ([7], [9]). 特别地, 他们构造了广泛的一类满足一定的函数方程并可以展成 Euler 乘积的 Dirichlet 级数, 这些级数可被表为群  $GL(2)$  上的模形式的 Mellin 变换. 这个定理的条件的被满足直接关系到前面所讨论的有关  $\zeta$  函数的普遍性质的猜想. 这些条件的验证目前仅对于定义于函数域上的曲线才有可能.

从 1970 年起, 在代数数域 ([14]) 的  $p$  进  $\zeta$  函数的影响下, 出现了通往概型——主要是椭圆曲线的  $\zeta$  函数的一条类似的途径. 这里涉及的问题大多与上述所讨论的相似, 它们展现在 [9] 中.  $\mathbb{Q}$  上的椭圆曲线的  $\zeta$  函数与该曲线的一维形式群 (formal group) 密切相关, 二者互相完全决定.

#### 参考文献

- [1] Artin, E., Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen I, II, *Math. Z.*, **19** (1924), 153 – 246.
- [2] Weil, A., Courbes algébriques et variétés abéliennes. sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Hermann, 1948.
- [3] Weil, A., Numbers of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 5, 497 – 508.
- [4] Deligne, P., La conjecture de Weil I, *Publ. Math.*,

*IHES*, **43** (1974), 273 – 307.

- [5] Grothendieck, A., et al. (eds.), Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, 1968.
- [6] Dwork, B., A deformation theory for the zeta-function of a hypersurface, in *Proc. Internat. Congress Mathematicians* (Djursholm, 1963), Almqvist & Weksell, 1963, 247 – 259.
- [7] Jacquet, E. and Langlands, R., *Automorphic forms on  $GL(2)$* , Springer, 1970.
- [8] Манин, Ю. И., «Успехи матем. наук», **26** (1971), 6, 7 – 71.
- [9] Kuyk, A., et al. (eds.), *Modular functions on one variable I – IV*, *Lecture notes in math.*, 349; 350, Springer, 1973.
- [10] Serre, J.-P., Zeta and  $L$ -functions, in O. F. G. Schilling (ed.), *Arithmetical Algebraic Geometry* (Proc. Purdue Conf. 1963), Harper & Row, 1965, 82 – 92.
- [11] Serre, J.-P., Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures), *Sem. Delange - Pisot - Poitou*, **19** (1969/70).
- [12] Swinnerton-Dyer, P., The conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and of Tate, in T. Springer (ed.), *Local Fields* (Proc. Conf. Driebergen, 1966), Springer, 1967, 132 – 157.
- [13] Tate, J., Algebraic cycles and poles of zeta functions, in O. F. G. Schilling (ed.), *Arithmetical Algebraic Geometry* (Proc. Purdue Conf. 1963), Harper & Row, 1965, 93 – 110.
- [14] Шафаревич, И. Р., Дзета-функция, М., 1969.
- [15] Shimura, G., *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton Univ. Press, 1971.
- [16] Honda, T., Formal groups and zeta functions, *Osaka J. Math.*, **5** (1968), 199 – 213.
- [17] Паршин, А. Н., Итоги науки. Алгебра. топология. Геометрия. 1970, М., 1971, 111 – 151.

А. Н. Паршин 撰

【补注】 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想已被 S. Bloch 和 P. Beilinson 推广, 这些推广的猜想把由代数闭链得到的周炜良群的秩和  $\zeta$  函数的极点的阶联系起来, 见 [A6] – [A8].

代数曲线上的某些椭圆曲线的 Tate-Шафаревич 群的阶最近已被计算 ([A3] – [A5]). 正如所预测的那样, 在这些情形下它们是有限群. Weil 猜想和它们的证明已被推广到任意有限型概型的情形 ([A1]).

#### 参考文献

- [A1] Deligne, P., La conjecture de Weil, II, *Publ. Math. IHES*, **52** (1980), 137 – 252.
- [A2] Freitag, E. and Kiehl, R., *Etale cohomology and the Weil conjecture*, Springer, 1988.
- [A3A] Kolyvagin, V., Finiteness of  $E(\mathbb{Q})'$  and  $\text{III}(E, \mathbb{Q})$  for a subclass of Weil curves, *Math. USSR Izv.*, **33** (1989). (*Izv. Akad. Nauk SSSR*, **52** (1988), 552 –

540).

- [A3B] Kolyvagin, V., On the Mordell-Weil group and the shafarevich-Tate group of Weil elliptic curves, *Math. USSR Izv.*, **33** (1989). (*Izv. Akad. Nauk SSSR*, **52** (1988), 1154 – 1180).
- [A4] Kolyvagin, V., On the structure of the Shafarevich-Tate groups, in S. Bloch, et al. (ed.), *Algebraic Geometry, Lecture notes in Math*, Vol. 1479, Springer, 1991, 94 – 121.
- [A5] Rubin, K., The Tate-Shafarevich groups and  $L$ -functions of elliptic curves with complex multiplications, *Invent. Math.*, **89** (1987), 527 – 560.
- [A6] Bloch, S., Algebraic cycles and values of  $L$ -functions I, *J. Reine Angew. Math.*, **350** (1984), 94 – 108.
- [A7] Bloch, S., Algebraic cycles and values of  $L$ -functions II, *Duke Math. J.*, **52** (1985), 379 – 397.
- [A8] Beilinson, A., Higher regulators and values of  $L$ -functions, *J. Soviet Math.*, **30** (1985), 2036 – 2070. (*Itogi Nayk. i Tekhn. Sovr. Probl. Mat.*, **24** (1984), 181 – 238).

【译注】 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想的最早的突破见 [B1], 即证明了定义在  $\mathbf{Q}$  上的有复乘的椭圆曲线的  $L$  函数在点  $s = 1$  处的零点的阶为零蕴含着该曲线上的有理点群的秩为零.

对于某些椭圆曲线已证明了其 Tate-Шафаревич群的阶 (除个别素因子之外) 与 Birch-Swinnerton-Dyer 猜想所预料的相吻合, 在其中的某些特殊情形下该猜想已被完全证实.

#### 参考文献

- [B1] Coates, J., Wiles, A., On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.*, **39** (1977), 223 – 251.
- [B2] Rubin, K., The “main conjecture” of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields, *Invent. Math.*, **103** (1991), 25 – 68. 赵春来 译

#### Жегалкин 代数 [Zhagalkin algebra; Жегалкина алгебра]

特殊代数  $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ , 其中

$$A = \{0, 1\}, \Omega = \{x \cdot y, x + y \pmod{2}, 0, 1\},$$

$x \cdot y$  是乘法运算.  $\Omega$  在  $A$  上作用的克隆 (clone)  $F$  是有趣的.  $F$  中每一个运算是一个 mod 2 的多项式, 称为 Жегалкин 多项式 (Zhagalkin polynomial), 因为最初研究这种克隆的是 И. И. Жегалкин ([1]). 他证明了  $A$  上每个有限运算包含在  $F$  中. 于是对  $F$  的性质的研究, 就包含了对任意  $\Omega'$  的所有代数  $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega' \rangle$  的研究.

#### 参考文献

- [1] Жегалкин, И. И., «Матем. сб.», **34** (1927), 1.

9 – 28.

- [2] Cohn, P. M., *Universal algebra*, Reidel, 1986.
- [3] Яблонский, С. В., Гаврилов, Г. П., Кудрявцев, В. Б., *Функции алгебры логики и классы Поста*, М., 1966. В. Б. Кудрявцев 撰

【补注】 换句话说, Жегалкин 代数是二元 Boole 环 (Boolean ring), 域  $\mathbf{Z}/(2)$  或零个生成元的自由 Boole 代数. 因此在西方文献中一般不另起名字. 例如见, Boole 代数 (Boolean algebra); Boole 方程 (Boolean equation). 对所有代数  $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega' \rangle$  的研究是 E. Post 论著 [A1] 的主题.

#### 参考文献

- [A1] Post, E., *The two-valued iterative systems of mathematical logic*, Princeton Univ. Press, 1941.

卢景波 译

#### Жуковский 函数 [Zhukovskii function; Жуковского функция]

复变量  $z$  的有理函数

$$w = \lambda(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

它在流体力学中的应用很重要, 这是 Н. Е. Жуковский (见 [1], [2]) 基本上为构造和研究 Жуковский 剖面 (Zhukovskii profile) (Жуковский 翼 (Zhukovskii wing)) 而发现的. 假设在  $z$  平面上给定一个通过点  $z = \pm 1$  的圆  $K$  (图 1) 和一个从  $K$  外部与之相切于  $z = 1$  的圆心为  $\alpha$  半径为  $\rho$  的圆  $K'$ . 在变换  $w = \lambda(z)$  作用下,  $K'$  的图象变为一条于点  $w = 1$  处有一尖点的封闭曲线  $L'$ , 它与圆弧  $L$  ( $K$  的映象) 相切于该点, 此图象示于图 2, 这就是 Жуковский 剖面.

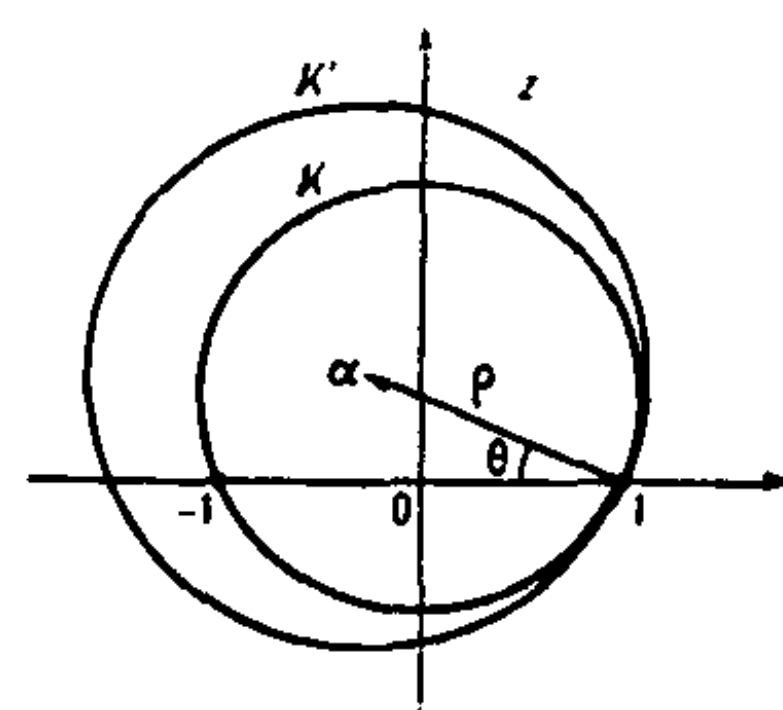


图 1

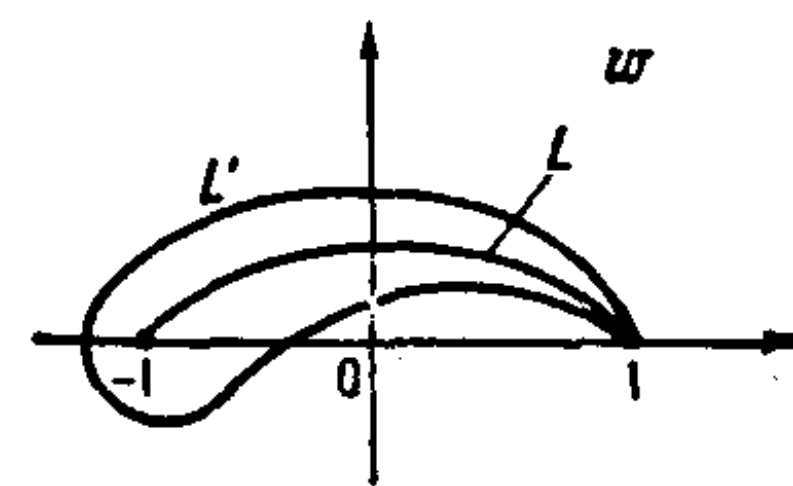


图 2

函数  $w = \lambda(\rho t + \alpha)$  将  $t$  平面上单位圆的外表映变为  $L'$  的外表. 为获得更一般形状和布局的 Жуковский 剖面, 使用广义 Жуковский 函数 (generalized Zhukovskii function) (见 [3], [4], [5]):

$$w = \frac{1}{2} (a - b)z + \frac{1}{2} (a + b) \frac{1}{z}, \quad a > b > 0.$$

#### 参考文献

- [1] Жуковский, Н. Е., *Гидродинамика*, Собр. соч., М.-Л., т. 2, 1949.



- [2] Жуковский, Н. Е., Теоретические основы воздухоплавания, Собр. соч., М.-Л., т. 6, 1950.
- [3] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1-2, М., 1967-1968 (英译本: Marku, shevich, A. I., The theory of functions of a complex variable, 1-2, Chelsea).
- [4] Седов, Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 2 изд., М., 1966 (英译本: Sedov, L. I., Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics, Acad. Press, 1965).
- [5] Кочин, Н. Е., Кибель, И. А., Розе, Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1, 6 изд., М., 1963. Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 Жуковский 剖面 (或 Жуковский 翼剖面 (Zhukovskii aerofoils)) 具有缺陷, 即如上所指的它们在后缘有一尖点. 这意味着, 如果不得不用这种剖面建造机翼, 就将得到一个非常薄的从而是易损坏的机翼后部. 由于这个理由, 已采用了在后缘有一个带清晰切线的奇点的更普遍的剖面 (von Kármán-Trefftz 剖面 (von Kármán-Trefftz profiles)). Жуковский 剖面的另一种推广在沿着扩充参量数目的方向发展 (von Mises 剖面 (von Mises profiles)).

Жуковский 翼剖面在西方文献中通常称为 Kutta-Zhukovskii 翼剖面 (Kutta-Zhukovskii aerofoils), 在西方文献中 Жуковский 常被拼写为 "Joukowski".

#### 参考文献

- [A1] Birkhoff, G., Hydrodynamics, Princeton Univ. Press, 1960.
- [A2] Lighthill, J., An informal introduction to theoretical fluid mechanics, Clarendon Press, 1986.
- [A3] Mises, R. von, Theory of flight, Dover, reprint, 1959. 李维新 译

#### Жуковский 定理 [Zhukovskii theorem; Жуковского теорема]

由 Н. Е. Жуковский 于 1906 年应用复变函数理论的方法得到的不可压缩理想流体的流体力学基本定理之一: 在流体 (气体) 的平面平行定常流中机翼的升力 (机翼单位长度的) 垂直于无穷远处流的速度并在数量上等于这速度与速度旋度和流体密度的乘积. 当应用 Жуковский 定理时必须记住, 速度旋度的大小是由关于翼的尖后缘处流体速度的有限性的 Жуковский 条件 (Zhukovskii condition) 唯一确定的 (见 Жуковский 函数 (Zhukovskii function) 条目中的图 2 和文献). Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 在西方文献中此定理通常称为 Kutta-Zhukovskii 定理 (Kutta-Zhukovskii theorem), "Zhukovskii" 也拼写为 "Joukowski".

#### 参考文献

- [A1] Ландау, Л. Д. и Лифшиц, Е. М., Гидродинамика, Физматгиз, 1958 (中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席兹, 连续介质力学, 人民教育出版社, 1958).
- [A2] Birkhoff, G., Hydrodynamics, Princeton Univ Press, 1960.
- [A3] Lamb, H., Hydrodynamics, Cambridge Univ Press, 1932.
- [A4] Milne-Thompson, L. M., Theoretical hydrodynamics, McMillan, 1957.
- [A5] Prandtl, L. and Tietjens, O. G., Applied hydro- & aeromechanics, Dover, reprint, 1934.
- [A6] Prandtl, L. and Tietjens, O. G., Fundamentals of hydro- & aeromechanics, Dover, reprint, 1934.

李维新 译

#### 带球面函数 [zonal spherical functions; зональные сферические функции]

见球面调和函数 (spherical harmonics).

#### 正态吸引带 [zone of normal attraction; нормального притяжения зона]

形如  $0 \leq x \leq \psi(n)$  的区域, 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\frac{P\{Z_n \geq x\}}{P\{Y \geq x\}} \rightarrow 1 \text{ 或 } \frac{P\{Z_n \leq -x\}}{P\{Y \leq -x\}} \rightarrow 1,$$

其中  $\{\psi(n)\} \uparrow \infty$ ,  $\{Z_n\}$  是随机变量序列, 而  $Y$  是有正态分布 (normal distribution) 的随机变量. 正态吸引带已经就如下情形进行了研究:

$$Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (X_j - a),$$

其中  $\{X_n\}$  是有数学期望  $a$  和有限正方差  $\sigma^2$  的独立同分布的随机变量序列.

#### 参考文献

- [1] Ибрагимов, И. А., Линник, Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965 (英译本: Ibragimov, I. A., Linnik, Yu. V., Independent and stationary sequences of random variables, Wolters-Noordhoff, 1971). В. В. Петров 撰

【补注】 这个大偏差问题的更加一般的陈述如下 ([A3]): 假设对于一族随机过程  $\xi^a(t)$ , 某个大数律型的结果成立 (见大数律 (law of large numbers)), 当  $a \rightarrow \infty$  时,  $\xi^a \rightarrow x$ . 对于大的  $a$  值, 过程  $\xi^a(t)$  与其最可能轨道  $x(t)$  的大偏差问题, 和  $a \rightarrow \infty$  时可测集  $A$  的无穷小概率  $p^a(\xi^a \in A)$  的极限性态有关, 其中  $A$  与非随机极限函数  $x$  保持一个正的距离 (在适当的函数空间 (轨道空间) 中). 有关形如  $E^a[f^a(\xi^a)]$  的期望当  $a \rightarrow \infty$  时渐近性质的问题, 如果对于大的  $a$  值这些期望的主部来自  $\xi^a$  的低概率值, 则也构成大偏差理论的一部分.

## 参考文献

- [A1] Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975 (译自俄文).  
 [A2] Serfling, R. J., Approximation theorems of mathematical statistics, Wiley, 1980.  
 [A3] Wentzell, A. D., Limit theorems on large deviations for Markov stochastic processes, Kluwer, 1990 (译自俄文).  
 [A4] Saulis, L., Statulevičius, V. A., Limit theorems for large deviations, Kluwer, 1991 (译自俄文).

潘一民 译

## 全对称多面体 [zonohedron; зоноэдры]

一个可以表示为有限多条线段的向量和的多面体 (polyhedron).  $n$  维空间中的全对称多面体有时称为全对称多胞形 (zonotopes). 全对称多面体是凸多面体; 全对称多面体自身和它的 (所有维数的) 所有面都有对称中心. 一个凸多面体成为全对称多面体的充分条件是它的所有二维面有对称中心. 任一全对称多面体是一个充分高维的立方体的射影. 全对称多面体的极限情形——广环 (zonoids) 在中心对称凸体类中具有特殊的作用; 它们允许有支撑函数的一种特殊积分表示, 并且是 Banach 空间  $L_1$  中球面的有限维截面.

## 参考文献

- [1] Bolker, E., A class of convex bodies, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **145** (1969), 323 – 345.  
 [2] Weil, W., Kontinuierliche Linearkombination von Strecken, *Math. Z.*, **148** (1976), 1, 71 – 84.

B. A. Залгаллер 撰

【补注】全对称多面体或全对称多胞形在凸性 (射影体, 铺砌)、分析 (Radon 变换, 向量值测度,  $L_1$  的子空间) 和随机几何学 (点过程) 中具有重要作用. 现代的综合评述有 [A1] 和 [A2].

## 参考文献

- [A1] Schneider, R. and Weil, W., Zonoids and related topics, in P. M. Gruber and J. M. Wills (eds.): *Convexity and Its Applications*, North-Holland, 1983, 296 – 317.  
 [A2] Goodey, P. and Weil, W., Zonoids and generalisations, in P. M. Gruber and J. M. Wills (eds.), *Handbook of Convex Geometry*, North-Holland, 1992.

陆珊年 译

## Zorn 引理 [Zorn lemma; Цорна лемма], 极大原理 (maximal principle)

如果非空偏序集 (partially ordered set)  $X$  的每一全序子集 (见全序集 (totally ordered set)) 都具有上界, 则  $X$  含有极大元. 称元素  $x_0$  是子集  $A \subset X$  的上界 (upper bound), 如果对任意  $x \in A$  有  $x \leq x_0$ .

如果集合  $A$  的上界存在, 则称  $A$  是上有界的 (bounded above). 称元素  $x_0 \in X$  在  $X$  中是极大的 (maximal), 如果没有  $x \in X, x \neq x_0$ , 使得  $x_0 \leq x$ .

该引理是 M. Zorn 在 [1] 中表述和证明的. 它与选择公理 (axiom of choice) 等价.

## 参考文献

- [1] Zorn, M., A remark on a method in transfinite algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **41** (1935), 667 – 670.  
 [2] Kelley, J. L., *General topology*, Springer, 1975.

Б. А. Ефимов 撰

【补注】一些数学家曾独立地引入了极大原理的早期形式, 最早的是 F. Hausdorff 于 1909 年引入的. 这些早期形式与上述的极大原理虽在细节上有差异, 但在逻辑上是等价的. 关于极大原理的历史, 见 [A1] – [A3].

## 参考文献

- [A1] Campbell, P. J., The origin of Zorn's lemma, *Historia Math.*, **5** (1978), 77 – 89.  
 [A2] Moore, G. H., Zermelo's axiom of choice, Springer, 1982.  
 [A3] Rubin, J. and Rubin, H., *Equivalents of the axiom of choice*, 1 – 2, North-Holland, 1963 – 1985.

赵希顺 译

## Zygmund 函数类 [Zygmund class of functions; Зигмунда класс функций]

令  $M$  是一正实数. Zygmund 函数类  $Z_M$  是由周期为  $2\pi$  的连续函数  $f$  组成的类, 具有性质: 对所有  $x$  和  $h > 0$ , 不等式

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq Mh$$

成立. 类  $Z_M$  是由 A. Zygmund 引进的 ([1]). 利用类  $Z_M$ , 可以获得函数逼近论中有关正、逆定理的 Jackson-Бернштейн 问题的确定解 (见 Бернштейн 定理 (Bernstein theorem); Jackson 定理 (Jackson theorem)). 例如, 对某个  $M > 0$ , 一个周期为  $2\pi$  的连续函数  $f$  属于 Zygmund 类  $Z_M$ , 当且仅当次数不高于  $n$  的三角多项式对该函数的最佳一致逼近误差  $E_n(f)$  满足不等式

$$E_n(f) \leq \frac{A}{n},$$

其中  $A > 0$  是某个常数. 对任何函数  $f \in Z_M$  的连续模  $\omega(\delta, f)$ , 估计

$$\omega(\delta, f) \leq \frac{M}{2\ln\sqrt{2}+1} \delta \ln \frac{\pi}{\delta} + O(\delta)$$

均成立, 而且常数  $M/2\ln(\sqrt{2}+1)$  在整个类  $Z_M$  中不可能再改善 ([3]).



## 参考文献

- [1] Zygmund, A., Smooth functions, *Duke Math. J.*, 12 (1945), 47 – 76. (Also: Selected papers of Antoni Zygmund, Vol. 2, Kluwer, 1989, 184 – 213).
- [2] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969 (英译本: Nikol'skii, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975).
- [3] Ефимов, А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 21 (1957), 2, 283 – 288. А. В. Ефимов 撰
- 【补注】 对周期为  $2\pi$  的函数  $f$  而言, 量

$$\omega_f^*(h) = \sup_x \sup_{|\delta| \leq h} |f(x + \delta) - 2f(x) + f(x - \delta)|$$

是  $f$  的 Zygmund 模 (Zygmund modulus). 利用这种模, 上述 Zygmund 定理 (Zygmund theorem) 也可以叙述为: 对某个  $A$ , 一个周期为  $2\pi$  的函数  $f$  满足  $E_n(f) \leq n^{-1}A$ , 当且仅当对某个  $B$ ,  $\omega_f^*(h) \leq Bh (h > 0)$  成立.

## 参考文献

- [A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982, p. 203 ff.

王仁宏、檀结庆 译

# 索 引

中 文 索 引

英 文 索 引

俄 文 索 引



# 使 用 说 明

## 一、中 文 索 引

1. 本索引收录了正文中的全部条目、给出定义的名词术语以及其他一些比较重要的词语。
2. 本索引中用黑体字排的是本书条目,其中加\*号的,是一些条目的逆排。
3. 本索引排列的次序是:
  - (1) 首先是以汉字起首的单词和复合词,依汉语拼音字母顺序排列;
  - (2) 其次是以西文字母起首的复合词,依拉丁字母顺序排列;
  - (3) 再次是以俄文字母起首的复合词,依俄文字母顺序排列;
  - (4) 最后是以数字和符号起首的复合词。

## 二、英 文 索 引

1. 本索引收录了正文中全部条目的英文名称。
2. 本索引依英文字母顺序排列。

## 三、俄 文 索 引

1. 本索引收录了正文中全部条目的俄文名称。
2. 本索引依俄文字母顺序排列。

# 中文索引

以汉字起首的单词和复合词

## A

阿代尔 1:39  
阿代尔环 1:40;3:5  
阿代尔群 1:39  
阿拉伯数系 2:18  
阿拉伯数字 1:217  
阿列夫,  $\aleph$  1:65  
阿列夫零,  $\aleph_0$  1:65  
爱尔兰根纲领 2:385  
埃及分数 1:137  
埃及数系 3:1008  
埃及象形文字 1:589  
埃及象形文字记数制 1:589  
艾达尔上同调 2:393  
艾达尔上同调函数 2:393  
艾达尔上同调维数 1:643  
艾达尔态射 2:393  
艾达尔拓扑 2:393  
艾达尔  $p$  可除群 4:58  
爱奥尼亚记数制 1:589  
安全策略 4:303  
安全扩张 4:841  
安全水平 4:303  
鞍(鞍点) 4:705  
鞍点(对策论中的)\* 4:706  
鞍点法 4:707  
鞍点(光滑曲面的) 4:706  
鞍点(函数的) 4:707  
鞍点(矩阵对策的) 3:675  
鞍点(可微函数的) 4:706  
鞍点扇形 4:740  
鞍点(微分方程的) 4:706  
鞍点(无穷远的)\* 4:705  
鞍点型奇点(微分方程的) 4:860  
鞍点(自治系统的) 4:705

鞍结点 4:705  
鞍形曲面 4:708  
鞍状结构(曲面的) 3:881  
鞍状曲面 3:884  
凹泛函 1:844  
凹函数 1:730  
凹算子 1:730  
凹算子与凸算子 1:730

## B

“八分之三”求积公式 3:901  
八角星 4:225  
八进制数 2:576  
八面体 3:1015  
八面体空间 3:1015  
八面体罗 5:462  
八面体群 3:1015  
八维数 4:444  
八元数 4:444  
巴比伦数系 3:1009  
巴比伦数字 1:589  
靶(态射的) 1:502  
坝递归 3:562  
坝归纳 1:309  
白洞 4:734  
白噪声 5:488  
白噪声分析 5:489  
白噪声  $\delta$  函数 5:491  
百分位数 4:119  
柏原-河井 Holmgren 型定理 3:739  
柏原-Malgrange 滤过 5:482  
柏原等价 2:2  
柏原定理(关于完整  $D$  模的 de Rham 复形的) 2:2  
柏原定理(关于  $b$  函数的) 2:3  
柏原例子 3:739  
摆动方程 4:118

摆线 1:923  
板块构造学 3:1014  
半本原环 4:294  
半变差(向量测度的) 5:415  
半标准  $\kappa$  表( $\lambda$  型的) 5:534  
半不变量(表示的) 4:768  
半不变量(二次曲面的) 5:85  
半不变量(二次曲线的) 4:738  
半不变量(随机向量的) 4:769  
半不变量(向量空间的) 4:768  
半测地坐标 4:756  
半代数集 4:750  
半单半群 4:296  
半单表示 4:779  
半单表示(结合代数的) 4:594  
半单纯复形 4:780  
半单纯集 4:837  
半单代数 4:777  
半单代数群 4:778  
半单调范数 1:739  
半单分量(自同态的 Jordan 分解的) 3:229  
半单环 4:779  
半单矩阵 4:779  
半单模 4:779  
半单群 4:779  
半单线性变换 4:779  
半单性(群环的) 2:784  
半单有限维结合代数 4:470  
半单元 4:778  
半单元(抽象 Lie 代数的) 4:778  
半单元(代数的 Lie 代数的) 3:230;4:778  
半单元(代数群的) 3:230  
半单元(线性代数群的) 4:778  
半单元(Lie 代数的) 3:416  
半单秩(代数群的) 4:491  
半单秩(Lie 代数的) 4:490  
半单子类(代数数的) 4:471  
半单自同态 4:779



- 半单 Artin 环 1:238  
 半单 Banach 代数 1:300  
 半单 Lie 代数 3:416  
 半单 Lie 代数的有限维表示的特征标 1:551  
 半单 Lie 群 3:430  
 半递归集 2:62  
 半典范标架 3:841  
 半定型 4:755  
 半堆 2:844  
 半对数纸 3:554  
 半二面体群 4:425  
 半范数 4:772  
 半范数族(生成局部凸拓扑的) 3:547  
 半非 Euclid 空间 4:756  
 半格 4:769  
 半轨道 4:396  
 半环 4:777  
 半环(集合的) 3:698  
 半基本微分形式 1:777;3:469  
 半极集 5:165  
 半角公式 4:172  
 半解析集 4:750  
 半近性空间 5:202  
 半经典近似 4:751  
 半经典近似(广义的) 4:752  
 半经验理论(湍流的) 5:288  
 半径 4:472  
 半径(测地圆的) 2:700  
 半径函数(宇宙的相对论模型的) 4:734  
 半径(球的) 1:299  
 半径(球面的) 4:936  
 半径(双纽线的) 3:387  
 半径(图的) 1:393  
 半径(图的连通分支的) 1:393  
 半径(圆的) 1:590  
 半局部环 3:536  
 半开区间 3:150  
 半连续分解 4:753  
 半连续函数 4:753  
 半连续集值映射 4:754  
 半连续矩阵 4:754  
 半连续求和法 4:754  
 半连续算子 3:821  
 半连续映射 4:753  
 半链环 4:751  
 半链模 4:751  
 半模格 4:772  
 半内四分位数距离 3:127  
 半平面 2:804  
 半群 4:757  
 半群把(半群的带) 1:309  
 半群不变性质的判定问题 1:131  
 半群簇 5:401  
 半群簇(有限指数的) 5:401  
 半群代数 4:759  
 半群的表示 4:590  
 半群的带 1:309  
 半群的核 3:255  
 半群的扩张 2:424  
 半群的平移 5:253  
 半群的嵌入 3:15  
 半群的生成算子 2:693  
 半群的特征标 1:553  
 半群(等距的) 1:823  
 半群(多项式增长的) 4:763  
 半群(非线性算子的)\* 4:759  
 半群(具有对合的) 2:845  
 半群(具有孤立群部分的) 3:176  
 半群(具有零乘法的) 3:914  
 半群(具有幂奇异性的) 4:763  
 半群(具有升零化子序列的) 3:914  
 半群(具有有限性条件的)\* 4:766  
 半群(具有右除法的) 4:831  
 半群(具有右可逆性的) 4:831  
 半群(可分解成带的) 1:309  
 半群类中的根(根基) 4:469  
 半群生成的基本定理 4:760  
 半群(算子的)\* 4:762  
 半群(有限宽的) 4:767  
 半群(有限秩的) 4:767  
 半群(右零的) 3:5  
 半群元(无限阶的) 3:816  
 半群(自动机的) 1:256  
 半群(左零的) 3:5  
 半群作用 1:497  
 半群( $\omega$  型的) 4:760  
 半三次抛物线 4:754  
 半收敛级数 2:371  
 半双曲空间 4:768  
 半双线性化 4:372  
 半双线性形式(关于反自同构的) 4:798  
 半双线性型 4:797  
 半双线性映射 4:797  
 半素环 4:291  
 半素理想(半群的) 1:606  
 半椭圆空间 4:755  
 半拓扑半群 5:197  
 半完满环 4:775  
 半伪 Euclid 空间 4:775  
 半伪 Riemann 空间 4:775  
 半稳定代数向量丛 5:410  
 半稳定极限环 3:445  
 半稳定性 3:445  
 半线性变换 4:346  
 半线性偏微分方程(二阶的) 4:70  
 半线性算子 3:947  
 半线性映射 4:770  
 半线性自同态 4:770  
 半辛空间 4:780  
 半形式公理体系 3:57  
 半形式理论 3:57  
 半形式系统 5:115  
 半序空间 4:772  
 半旋量 4:951  
 半旋量表示 4:951  
 半亚纯形式 4:604  
 半鞅 4:770  
 半鞅 2:804  
 半鞅的定义 5:7  
 半遗传环 4:767  
 半阴影区 4:69  
 半有补格 3:359  
 半有界算子 4:751  
 半有限迹( $C^*$  代数上的) 5:238  
 半有限迹(von Neumann 代数上的) 5:441  
 半有限 von Neumann 代数 5:441  
 半右遗传环 3:83  
 半圆形域 2:839  
 半约化线性代数群 4:532  
 半整特征(矩阵的) 5:162  
 半正定核 4:249  
 半正多边形 4:224  
 半正多面体 4:776  
 半正合调序列 4:918

- 半正则环面 4:556  
 半正则拓扑空间 3:128  
 半正则置换群 4:131  
 半直积 4:755  
 半直积(群的) 4:755  
 半直积(子群的) 4:956  
 半直线(射线) 2:804  
 半周长(三角形的) 4:172  
 半周期 3:214  
 半周期边界条件 5:49  
 半周期谱(Hill 算子的) 2:883  
 半轴(双曲面的) 2:951  
 半轴(椭球面的) 2:342  
 半准素环 1:238  
 半自反局部凸拓扑向量空间 5:214  
 半自反空间 2:297;3:997  
 半自由理想环 2:568  
 半 Dedekind 格 4:755  
 半 Euclid 空间 4:756  
 半 Euclid 平面 4:366  
 半 Fredholm 算子 3:991  
 半 Riemann 空间 4:777  
 半 Thue 系统 5:172  
 半 Марков 过程 4:770  
 半 Марков 跳过程 3:235  
 半  $\theta$  特征 5:162  
 伴随 1:503  
 伴随本征值问题 1:43  
 伴随边界条件 1:43  
 伴随边值问题 1:43  
 伴随变换(Lie 代数中的) 3:403  
 伴随变量(控制理论中的) 4:243  
 伴随标架 3:841  
 伴随表示 1:46  
 伴随表示(代数群的) 1:46  
 伴随表示(Lie 代数的) 1:46  
 伴随表示(Lie 群的) 1:46  
 伴随方程(组) 5:259  
 伴随方程(Fredholm 积分方程的) 2:563  
 伴随分次环 3:535  
 伴随函数 2:290  
 伴随函子 1:44  
 伴随函子定理 1:383  
 伴随函子对 1:44  
 伴随焦点 3:829  
 伴随矩阵 1:45  
 伴随空间 1:47  
 伴随联络 1:42  
 伴随模 1:45  
 伴随奇异积分方程 4:850  
 伴随奇异积分算子 4:850  
 伴随曲面 1:47  
 伴随群 1:45  
 伴随算子 1:46  
 伴随算子半群 4:765  
 伴随微分方程 1:42  
 伴随微分方程组 1:42  
 伴随无穷可分分布 3:60  
 伴随线性变换 1:45  
 伴随线性算子 3:493  
 伴随线性映射 1:45  
 伴随线性 Lie 代数 1:46  
 伴随性条件(热传导理论中的) 1:799  
 伴随循环 1:462  
 伴随元(对合代数中的)  
 伴随 Chevalley 群 1:583  
 伴随 Fredholm 核 2:562  
 瓣(玫瑰线的) 4:687  
 蚌线 1:731  
 棒构造 4:979  
 包含 3:82  
 包含(多值映射的) 3:853  
 包含(幂等元的) 3:5  
 包含(求和法的)\* 3:30  
 包含问题 2:516  
 包核拓扑 4:932;5:532  
 包括图形 2:469  
 包括图形(指标为  $N$  的) 2:469  
 包络 2:369  
 包络代数 5:483  
 包络级数 2:370  
 包络极分解(泛函的) 4:215  
 包络极分解( $C^*$  代数中元素的) 4:215  
 包络(平面上曲线族的) 2:369  
 包络(曲面族的) 2:370  
 包络(曲线族的) 2:154  
 包络同痕(覆盖同痕) 3:200  
 包络同痕类(链环的) 3:273  
 包络(依赖于参数的子流形族的) 2:370  
 包络坐标 5:134  
 包装  $\Phi_{OK}$  空间 5:503  
 胞腔 1:531  
 胞腔逼近定理 1:532  
 胞腔度 5:88  
 胞腔度(拓扑空间的) 1:473  
 胞腔复形 1:531  
 胞腔空间 1:532  
 胞腔剖分 1:916  
 胞腔上链 1:628  
 胞腔同伦 1:532  
 胞腔(拓扑空间中的) 1:562  
 胞腔映射 1:532  
 胞腔 Постников 系统 4:258  
 饱和闭包 4:841  
 饱和逻辑系统 3:786  
 饱和素理想序列 2:411  
 饱和态射类 4:841  
 饱和现象 1:209  
 保闭包覆盖 1:882  
 保闭包集族 4:76  
 保测变换 3:705  
 保测动力系统 2:310;1:194  
 保测映射 3:705  
 保长映射 4:655  
 保持函数集合的函数(逻辑中的) 3:607  
 保持类(逻辑中函数的正则集的) 3:607  
 保持谓词的函数 3:607  
 保持约束 2:892  
 保递邮件 1:893  
 保核收缩 4:615  
 保核收缩(范畴中的) 1:614  
 保角变换 1:751  
 保角性 1:753  
 保密密钥密码体制 1:893  
 保密学 1:893  
 保区域性 4:288  
 保区域原理 4:287  
 保守闭覆盖 4:76  
 保守覆盖 1:882  
 保守函子 2:449  
 保守集族 1:882;4:76  
 保守算子 2:250  
 保守系统 2:809  
 保守向量场 5:407



- 保序算子 1:430;3:947  
 保序映射 3:199  
 保域原理 1:155  
 北极 4:218  
 背包密码体制 1:896  
 背包问题 5:153  
**倍立方问题 2:302**  
**倍数 3:857**  
 倍元(环元素的) 2:268  
**悖论 1:186**  
 被乘数 3:860  
 被除数 2:268  
 被动力 2:312  
 被动密码分析员 1:896  
 被动算法 3:1049  
 被覆盖场(几何对象的) 2:712  
 被覆盖集 1:879  
 被覆盖几何对象 2:711  
 被加数 1:33  
 被减数 5:69  
 本构方程(介质的) 3:694  
 本轮(周转圆) 3:648  
 本原闭包 1:111  
 本原闭链 3:381  
 本原变换 4:199  
 本原变换伪群 4:369  
 本原标架(点格的) 5:443  
 本原表示(二次型的) 4:383  
 本原表示空间 3:25  
 本原部分(代数簇的( $n-k$ )上同调的) 3:381  
 本原代数上同调类 1:81  
 本原单位根 4:294  
 本原单项式 3:818  
 本原调和形式空间 2:827  
**本原多项式 4:292**  
**本原环 4:294**  
 本原类(代数系统的) 1:111;  
 4:291  
**本原类(原始类) 4:291**  
 本原离差集 5:234  
**本原理想 4:292**  
 本原幂等元 1:704  
 本原群 3:25  
 本原群表示 3:25  
 本原群(线性变换的) 3:25  
 本原上同调类 3:381  
 本原型(近环的) 3:879  
 本原型(近环模的) 3:879  
 本原域扩张 2:422  
 本原元定理 2:627  
 本原元(双代数的) 2:927  
 本原元(微分域的) 2:421  
 本原元(Hopf代数的) 2:927  
 本原(原始)代数运算 1:105  
 本原正则半群 4:553  
**本原置换群 4:291**  
 本原子群 5:100  
 本原自同构(测度空间的) 4:907  
 本原 Dirichlet 特征标 2:209  
 本原 Fano 簇 2:451  
 本原  $n$  次单位根 4:682  
**本征函数 2:322**  
 本征函数(对应于本征值的) 3:95  
 本征函数(二阶线性常微分方程的) 3:499  
 本征函数(积分算子的) 2:325  
 本征函数(齐次线性积分方程的) 3:95  
 本征函数(齐次线性积分方程的核的) 3:95  
 本征函数(微分算子的) 2:323  
 本征函数展开 2:327  
 本征函数展开式 5:51  
 本征函数(属于本征值的) 3:95  
 本征函数系(齐次对称积分方程的) 3:99  
 本征函数(Sturm-Liouville问题的) 5:50  
 本征空间(算子的) 2:327  
 本征频率(谐和振动的) 2:322;  
 2:835  
 本征算子(线性定常控制系统的) 5:243  
 本征系(齐次对称积分方程的) 3:100  
**本征向量 2:327**  
 本征向量(矩阵的) 3:672  
 本征向量(算子的) 2:327  
 本征向量(算子方程的) 3:961  
 本征向量(线性变换的) 3:512  
 本征向量(线性算子的) 3:492  
 本征元 2:327  
 本征元(非线性算子的) 3:948  
**本征振动 2:322**  
**本征值 2:322**  
 本征值(变换的) 2:322  
**本征值的部分问题 4:99**  
**本征值的完全问题 1:696**  
 本征值(二阶线性常微分方程的) 3:499  
 本征值(负型的) 3:294  
 本征值(核的) 4:135  
 本征值(积分算子的) 2:325  
 本征值(矩阵的) 1:563;2:323;  
 3:672  
 本征值(齐次对称积分方程的) 3:99  
 本征值(齐次线性积分方程的) 3:95  
 本征值(齐次线性积分方程的核的) 3:95  
 本征值(算子的) 2:322;4:934  
 本征值(算子方程的) 3:961  
 本征值(微分算子的) 2:323  
 本征值(线性算子的) 3:492  
 本征值(正型的) 3:294  
 本征值(Hermite核的) 2:857  
 本征值(Laplace算子的) 2:850  
 本征值(Sturm-Liouville问题的) 5:50  
 本征子空间 4:923  
 本质变元(Boole函数的) 1:394  
 本质补(子模的) 4:888  
**本质不可判定理论 2:392**  
 本质不适定问题 3:7  
 本质测度(循环的) 2:904  
 本质抽样算法 3:823  
 本质点(分布的) 5:81  
 本质点(广义函数的) 5:81  
 本质非线性偏微分方程 3:950  
 本质非线性系统 3:948  
 本质赋值 2:270;3:301  
 本质函数(逻辑中的) 3:608  
 本质阶(微分多项式的) 2:98  
 本质扩张(度量空间的) 3:730  
 本质扩张(模的) 2:424  
 本质理想扩张(半群的) 2:424  
 本质满态射 4:333  
 本质谱 4:911  
**本质奇点 2:392**

- 本质奇点(常微分方程的) 1:179  
 本质奇点(多复变解析函数的)  
 2:392  
 本质奇点(多复变量函数的)  
 4:856  
 本质奇点(解析函数的) 1:154  
 本质上确界 1:841  
 本质完全的决策规则类 4:990  
**本质映射 2:391**  
 本质右理想 4:749  
 本质元素(模格中的) 4:888  
 本质状态(Марков 链的) 3:615  
 本质子模 4:888;5:65  
 本质自伴扩张(算子的) 2:427  
 本质自伴微分算子 4:928  
 本质自共轭性问题(偏微分算子理论中的) 2:427  
 绷紧性(关于同调理论的) 2:908  
 泵引理 2:515  
**逼近 1:194**  
 逼近的可能性(复函数的) 1:210  
 逼近定理(殆周期函数的) 1:139  
 逼近定理(赋值的) 5:365  
 逼近定理(横截映射的) 5:260  
 逼近定理(域上的范数的) 3:968  
 逼近度(函数族对函数的) 1:210  
**逼近函数的偏差 2:67**  
 逼近集(函数的) 1:199  
**逼近阶 1:215**  
 逼近阶(边界问题用网格方程的)  
 3:466  
 逼近阶(差分格式到微分问题的)  
 2:86  
**逼近紧集 1:193**  
**逼近紧性 1:191**  
**逼近论 1:215**  
 逼近维数 3:1000  
 逼近问题(对一类线性算子的)  
 3:492  
 逼近问题(紧线性算子的) 3:492  
 逼近误差的研究和估计 1:200  
 逼近误差度量 1:199  
 逼近性质 3:545  
 逼近性质(核型空间的) 3:997  
 逼近性质(局部凸空间的) 5:215  
 逼近性质(线性算子空间中的)  
 3:995  
 逼近序列(区域的) 2:416  
 比较 1:825  
**比较定理(代数几何学中的)**  
**1:689**  
 比较定理(良序集的) 5:480  
 比较定理(同伦群的) 2:926  
**比较定理(微分方程论中的)**  
**1:688**  
 比较定理(真态射下模的) 4:351  
 比较定理( $l$  进上同调的) 3:314  
 比较定理(Riemann 流形的)  
 4:651  
 比较(覆盖的) 5:200  
**比较函数 1:687**  
 比较(函数的) 4:7  
 比较函数(对于反常积分的) 3:27  
 比较函数(对于整函数的) 1:687  
 比较检验法(反常积分的) 3:26  
 比较检验法(反常积分收敛性的)  
 1:687  
 比较检验法(级数的收敛性的)  
 4:792  
 比较检验法(正项级数收敛性的)  
 1:687  
**比较判别法(收敛的)\* 1:687**  
 比较(收敛性的) 1:836  
 比较(统计估计量的) 4:993  
**比较(拓扑的)\* 1:687**  
 比较秩 2:98  
 比例尺(地图投影的) 1:493  
 比例中项 2:710  
 比率遍历定理 4:20  
 比内能 3:369  
 比能 3:369  
**比特 1:371**  
 比体积 5:160  
 比值 2:268  
 比值检验法 2:4  
**必然事件 1:540**  
**必然性 1:540**  
**必要充分统计量 3:880**  
 必要的边界条件 5:391  
**必要和充分条件 3:880**  
 必要拓扑 1:562  
 闭半平面 2:804  
 闭半直线 2:804  
 闭包 5:199  
 闭包(辩的) 1:433  
 闭包代数 1:614  
 闭包(度量空间中集合的) 3:727  
 闭包(复形元素的) 1:707  
 闭包公理 5:199  
**闭包关系 1:613**  
**闭包(集合的)\* 1:613**  
 闭包(逻辑学中函数集合的)  
 3:605  
 闭包(拟阵子集的) 3:678  
 闭包(偏序集元素的) 1:613  
 闭包谱(算子的) 4:934  
**闭包(算法的)\* 1:613**  
 闭包(算子的) 1:610  
 闭包算子(关于偏序集的) 1:614  
 闭包算子(关于 Boole 代数的)  
 1:614  
**闭包条件 1:612**  
 闭包(拓扑空间中集合的) 1:613  
 闭包系 1:614  
 闭包有限复形 1:707  
 闭包运算 1:613;5:199  
 闭包(子概形的) 1:611  
 闭包(Pfaff 方程组的) 1:482  
 闭辩 1:433  
**闭测地线 1:608**  
 闭等参数子流形 5:176  
 闭点(拓扑空间的) 4:909  
 闭动态部门间平衡模型 3:637  
**闭范畴 1:607**  
 闭覆盖 1:881  
 闭概形态射 4:351  
**闭公式 1:608**  
 闭规范正交函数系 4:36  
 闭轨道 4:128  
**闭函数系 1:611**  
 闭环控制 1:827  
 闭基 1:312  
 闭极大理想( $L_1(G)$  的) 4:924  
**闭集 1:611**  
 闭集(相对另一集合的) 4:564  
 闭结点扇形 4:740  
 闭解析曲线 1:151  
 闭开集 2:249  
 闭可定向二维流形 5:294  
 闭控制系统 1:918  
**闭类系统 5:120**



- 闭理想 4:924  
**闭链 1:922**  
 闭链(复形的) 1:710  
 闭链(强同调于零的) 5:458  
 闭链群(复形的) 1:708  
 闭链(弱同调于零的) 5:458  
 闭链(同调于零的) 2:911  
 闭链(在一点上消灭的) 3:813  
 闭链(指数为零的) 3:989  
 闭流动形 4:188  
 闭流形 1:610  
 闭路定理 2:39  
 闭路(动力系统中的) 3:447  
**闭路空间 3:566**  
**闭路(拓扑学中的) 3:566**  
 闭偏微分方程组 1:699  
 闭嵌入 1:611  
 闭嵌入(仿射概形的) 1:58  
 闭球 1:299  
**闭区间 3:151**  
 闭区间套 1:808  
 闭曲面 5:294  
 闭曲线 1:185  
 闭射线 2:804  
 闭射影度量空间 4:338  
**闭算子 1:610**  
 闭态射 1:691  
 闭凸包 1:845  
 闭凸泛函 1:845  
 闭凸函数 2:297  
**闭图象定理 1:609**  
 闭拓扑 5:201  
 闭完全凸曲面 1:849  
 闭微分形式 2:144;4:188  
 闭微分(Riemann 曲面上的)  
     2:164  
 闭伪流形 4:370  
 闭无界子集(基数的) 5:88  
 闭线性包 1:698  
 闭项 2:521  
 闭星形(三角剖分中单形的)  
     4:269  
 闭形式(Riemann-Hilbert 问题的解  
     的) 4:625  
 闭序列(图中的) 2:760  
 闭驯顺拓扑嵌入 5:222  
 闭一阶偏微分方程组 2:129  
**闭映射 1:610**  
 闭宇宙模型 1:869  
 闭域 1:462  
 闭元(偏序集的) 1:614  
**闭元素(函数)系 1:611**  
 闭子代数(Banach 代数的) 1:299  
 闭子复形 1:707  
**闭子概形 1:611**  
 闭子集(代数系统的) 1:105  
 闭子集(拟阵的) 3:678  
 闭 Hermite 核 2:857  
 闭  $n$  维流形 2:76  
 闭 Newton-Cotes 公式 3:902  
 闭 Pfaff 方程组 1:482  
 闭 Riemann 曲面 4:634  
 闭 Леонтьев 模型 3:637  
 闭  $\lambda$  项 3:310  
 边 2:752  
 边(边界)(流形的) 3:600  
 边(超图的) 2:959  
 边的度(超图的) 2:959  
**边界 1:409**  
 边界(半平面的) 2:804  
**边界变分方法 1:429**  
 边界测度 3:118  
**边界层 1:411**  
 边界层方法 4:879  
 边界层方程(活动柱形机翼的)  
     1:413  
 边界层函数 4:879  
 边界层级数 2:142  
 边界层(空气流体力学中的)  
     1:413  
**边界层理论 1:412**  
 边界层问题 4:143  
 边界层项 2:142  
 边界层效应 4:144  
 边界(带边界的 Riemann 曲面的)  
     4:634  
 边界点(流形的) 1:415  
 边界点(区域的) 2:275  
 边界点(线汇中射线的) 1:766  
 边界点(一维流形的) 3:1016  
 边界点(有限  $q$  型的) 4:361  
 边界点(有限(1)型的) 4:361  
**边界对应(共形映射下的) 1:410**  
**边界对应原理 1:409**  
 边界泛函 2:448  
 边界(复形的) 1:710  
 边界(复形的元素的) 1:707  
 边界估计(椭圆型边值问题的)  
     1:638  
**边界积分法 3:719**  
 边界积分法(单叶函数论中的)  
     5:346  
 边界积分方程法 5:459  
 边界(集合的) 1:682  
 边界(交换 Banach 代数的) 1:410  
 边界结构 1:841  
 边界解原理(线性不等式的)  
     3:489  
**边界紧空间 4:129**  
 边界紧性 1:682  
 边界聚值集 1:615  
**边界(流形的) 1:414**  
 边界奇点(函数在带边界的流形上  
     的) 4:867  
 边界(区域的) 2:275  
 边界曲面(线汇的) 1:766  
 边界(四维流形的) 2:526  
**边界条件 1:409**  
 边界条件(常微分方程的) 2:108  
 边界条件(对称算子的) 2:425  
 边界条件(扩散方程的) 2:174  
 边界条件(偏微分方程的) 1:424  
 边界条件(物理过程的) 3:650  
 边界条件(Sturm 型的) 5:49  
 边界(凸多边形的) 1:846  
 边界唯一性质(解析函数的)  
     5:335  
 边界(吸引区域的) 1:266  
 边界象征(算子的) 5:93  
**边界性质(共形映射的)\* 1:757**  
**边界性质(解析函数的)\* 1:415**  
 边界性质(区域函数的) 3:719  
**边界(一致代数理论中的) 1:410**  
 边界元 1:754  
 边界元(开 Riemann 曲面的)  
     4:639  
 边界元(区域的) 3:445  
 边界折射问题 5:504  
 边界值(对称算子的) 2:425  
 边界值(沿非切线路径的) 1:183  
 边连通度数 2:756

- 边群(图的) 2:754
- 边色数 2:759
- 边图 2:753
- 边(完全四角形的) 4:379
- 边(网络的) 3:893
- 边细分(图的) 2:758
- 边心矩 1:189**
- 边心距(正多边形的) 1:189
- 边心距(正棱镜的) 1:189
- 边序列 2:753;2:755
- 边缘闭链 2:911
- 边缘分布 3:614**
- 边缘覆盖 1:401
- 边缘集(拓扑空间中的) 3:992
- 边缘紧拓扑空间 4:129
- 边缘空间 4:129
- 边缘群(复形的) 1:708
- 边缘算子 1:708;2:914;2:919
- 边缘算子(单纯对象的) 4:836
- 边缘算子(单纯集的) 4:837
- 边缘算子(单纯谱的) 4:840
- 边缘态射 2:907;2:912
- 边缘同态 2:919
- 边缘映射 1:627
- 边缘子群 3:271
- 边缘( $\epsilon$ 单形的) 5:422
- 边值表示(超函数的) 2:953
- 边值条件(物理过程的) 3:650
- 边值问题 2:162;3:126;5:392
- 边值问题(薄板弯曲的) 2:332
- 边值问题(差分格式的) 1:422
- 边值问题(常微分方程的)\***  
1:423
- 边值问题的广义提法 3:652
- 边值问题的经典提法 3:652
- 边值问题(二维 Monge - Ampère 方程的) 3:810
- 边值问题,复变方法 1:418**
- 边值问题(解析函数论的)\***  
1:427
- 边值问题(具有斜导数的) 1:426
- 边值问题(具有自由边界的)  
1:420
- 边值问题(抛物型方程的) 5:436
- 边值问题(偏微分方程的)\***  
1:424
- 边值问题,偏微分方程的数值解法**  
1:421
- 边值问题(椭圆型方程的)\***  
1:419
- 边值问题(位势论中的)\* 1:426**
- 边(Weil 区域的) 5:479
- 编码 1:632;3:76;3:78
- 编码定理 3:80
- 编码定理(信息源的) 3:76
- 编码理论 1:632
- 编码(算法的) 1:126
- 编码问题 2:388
- 编码与译码 1:631**
- 编码(正规算法的) 1:126
- 编码(字母表的)\* 1:630**
- 编时序 4:408
- 编译程序 1:129
- 编译程序(编译程序的) 5:252
- 编译程序构造系统 5:252
- 扁峰概率密度 2:414
- 变差(负荷的) 1:837
- 变差(函数的)\* 5:374**
- 变差距离 3:73
- 变差系数 1:635**
- 变差(向量测度的) 5:415
- 变差(映射的)\* 5:376**
- 变分 5:373**
- 变分不等式 1:368
- 变分参数法 5:379**
- 变分差分法 2:81
- 变分差分格式 2:81**
- 变分(单叶函数的)\* 5:377**
- 变分(泛函的)\* 5:375**
- 变分(泛函自变量的) 5:373
- 变分方程 5:389**
- 变分方程组 5:389
- 变分方法 2:215
- 变分方法(单叶函数论中的)  
5:347
- 变分方法(求解边值问题的)  
5:267
- 变分方法(求解极值问题的)  
1:842
- 变分公式(关于极值问题的)  
1:648
- 变分公式(关于  $S$  类全纯函数的)  
3:132
- 变分(混合 Hodge 结构的) 5:379
- 变分(集合的)\* 5:376**
- 变分(加性函数的) 4:803
- 变分(尖锐链的余向量的) 4:802
- 变分数值方法 5:391**
- 变分问题 5:398**
- 变分问题(含偏导数的) 3:848
- 变分问题(具有固定端点的)  
5:398
- 变分问题(具有可移动端点的)  
5:398
- 变分问题(具有自由端点的)  
5:398
- 变分学 5:380**
- 变分学(大范围的)\* 5:384**
- 变分学的数值方法 5:385**
- 变分学与锥理论之间的联系  
5:383
- 变分原理 3:8
- 变分原理(复变函数论中的)**  
5:393
- 变分原理(接近于 d'Alembert -  
Lagrange 原理的) 2:5
- 变分原理(拓扑动力学中的)  
5:191
- 变分 Hodge 猜想 2:884
- 变分(Hodge 结构的)\* 5:378**
- 变函数 5:391
- 变号多值映射 3:856
- 变化点侦察 5:290
- 变换 5:246**
- 变换半群 5:246**
- 变换代数(遗传代数的) 2:695
- 变换的代数群 1:91**
- 变换公式(Jacobi  $\theta$  函数的) 3:212
- 变换群 5:246**
- 变换文法 2:752**
- 变量 3:67;4:404
- 变量变换(广义函数中的) 2:685
- 变量变换(积分中的) 3:92,124
- 变量数学建立的时期 3:666
- 变量数学时期 3:665
- 变量替换公式(积分中的) 3:90
- 变列(顺序统计量序列) 5:399**
- 变迁(到 Марков 子过程的)  
2:605
- 变态(集合的) 2:723
- 变态(距离函数的) 2:723



- 变形算子 5:48
- 变形(修正)对数积分 3:110
- 变形(修正)Korteweg-de Vries 方程 3:291
- 变形(修正)Korteweg-de Vries 型方程 4:846
- 变形(修正)Newton 法 3:904
- 变形指数积分 3:104
- 变形柱函数 1:341;1:927;3:588
- 变形 Bessel 函数 3:289
- 变形 Euler 法 2:403
- 变形 Struve 函数 5:44
- 变元 4:353
- 变元冲突 4:285
- 变元命题 1:73
- 变元碰撞 5:69
- 遍历保测变换 1:194;2:53
- 遍历测度 2:53;3:161
- 遍历定理 2:382
- 遍历定理(非交换的)\* 2:384
- 遍历分解 3:161
- 遍历集 2:382
- 遍历矩阵 1:274
- 遍历理论 2:382
- 遍历流(环面上的) 2:134
- 遍历平稳过程 4:988
- 遍历随机序列 4:454
- 遍历信息源 3:76
- 遍历性 2:385
- 遍历性(保测变换的) 3:238
- 遍历性(动力系统的) 2:385
- 遍历自同构(测度空间的) 1:194
- 遍历 Марков 链 3:617
- 辨识系统 1:922
- 辩论 1:431
- 辩群 1:432
- 辩群(空间的) 1:434
- 辩群(作为构形空间的) 1:432
- 辩群(作为同胚合痕群的) 1:432
- 辩自同构 1:432
- 辩( $n$  根绳的) 1:431
- 标号(程序中的) 1:129
- 标记部件树 5:113
- 标记(复数的)\* 1:61
- 标记展形 4:958
- 标记(字母表上链的部件的) 5:113
- 标架 2:550
- 标架场 2:550
- 标架丛 2:550;4:666;5:130
- 标架(空间的) 4:332
- 标架流形 4:666;4:939;5:131
- 标架(流形的) 4:666;4:939
- 标架配边理论 1:622
- 标架同态 3:540
- 标架(微分流形的) 2:550
- 标量 4:712
- 标量倍数 4:712
- 标量部分(四元数的) 4:443
- 标量场 4:712
- 标量(关于向量空间的) 5:417
- 标量积 3:84
- 标量积(两个三向量的) 5:282
- 标量积(Hilbert 空间中的) 2:871
- 标量矩阵 4:712
- 标量扩张 2:509;3:796;4:712
- 标量量子场 4:406
- 标量密度 5:145
- 标量平方(向量的) 3:84
- 标量曲率 4:712
- 标量三重积 3:774
- 标量算子 4:712
- 标量位势 4:260
- 标量 Laplace 方程 3:340
- 标签空间 1:896
- 标识部分(Cobol 语言中的) 1:621
- 标识(词位中的) 1:129
- 标识定义(Algol 语言中的) 1:118
- 标识符(算法语言中的) 1:129
- 标形(Finsler 度量的) 2:485
- 标值随机点过程 5:11
- 标准测量方法 4:999
- 标准差 4:979
- 标准乘法层 4:160
- 标准程序 4:979
- 标准单形 4:980
- 标准单值化 5:328
- 标准二次变换 1:887
- 标准构造 4:979
- 标准过程 2:415
- 标准恒等式 4:157
- 标准化和统一化中的数学问题 4:980
- 标准化问题 4:980
- 标准基(四元数结构的) 4:445
- 标准可测空间 3:704
- 标准空间 2:62
- 标准理想 3:2
- 标准量子 Brown 运动 4:416
- 标准脉络 5:197
- 标准模型(泛代数的) 5:349
- 标准抛物子代数 4:74
- 标准平坦  $G$  结构 2:619
- 标准平坦  $\Gamma$  结构 4:369
- 标准嵌入 4:17
- 标准圈积 5:524
- 标准生成元(四元数结构的) 4:445
- 标准生成元(Fuchs 群的) 2:582
- 标准同构(典型群的) 1:601
- 标准线性多重回归模型 4:543
- 标准线性回归分析模型 4:543
- 标准形式(信息表示的) 1:630
- 标准诣零代数 3:413
- 标准正态分布函数 3:534
- 标准子代数系统 3:606
- 标准子集(Cobol 语言的) 1:621
- 标准 Gauss 函数的唯一性 5:499
- 标准 Gauss 函数(Hilbert 空间上的) 5:500
- 标准  $H^\infty$  控制问题 2:795
- 标准 Laguerre 多项式 3:332
- 标准 Legendre 多项式 3:383
- 标准 Wiener 过程 2:415
- 标准 Young 表 5:534
- 标准 Марков 过程 3:623
- 标准 Постников 系统 4:259
- 表 4:132
- 表处理(Cobol 语言中的) 1:621
- 表达式(算法语言中的) 1:129
- 表达式(Lisp 语言中的) 3:522
- 表达式(Refal 语言中的) 4:534
- 表达形式 2:521
- 表观误差 2:390
- 表函数值 4:1026;4:1045
- 表结构(Lisp 语言中的) 3:522
- 表面球面调和函数 4:944
- 表面圆环调和函数 5:227
- 表示(半群的)\* 4:590
- 表示测度 1:411;5:320
- 表示(超群代数的) 2:682

- 表示(带最高权向量的)\* 4:601  
 表示的补系列(补系列(表示的))\* 1:690  
 表示的不变子空间 3:166  
 表示的离散系列 2:229  
 表示的连续系列 1:818  
 表示的收缩 1:822  
 表示的退化系列 2:37  
 表示的子表示 5:68  
 表示(典型群的)\* 4:596  
 表示点(动力系统中的) 2:309  
 表示定理(关于 Mellin 变换的) 3:709  
 表示(对称群的)\* 4:598  
 表示对象 4:586;5:354  
 表示对象(反变可表示函子的) 2:610  
 表示对象(共变可表示函子的) 2:610  
 表示对象(函子的) 4:586  
 表示(广义位移算子的) 2:682  
 表示函数 4:586  
 表示函数(Lie 群的) 3:427  
 表示(函子的) 5:354  
 表示环 4:670  
 表示(环的) 3:794  
 表示(箭图的) 4:457  
 表示(结合代数的)\* 4:593  
 表示(结合环的) 2:358  
 表示截面 4:587  
 表示(紧群的)\* 4:587  
 表示空间 3:505  
 表示空间(群的) 2:710  
 表示理论(关于 Banach 代数的) 2:594  
 表示论 4:600  
 表示模 3:794  
 表示(偏序集的)\* 4:590  
 表示(群的)\* 4:588  
 表示(数的二次型的) 2:196  
 表示(算子半群的) 4:762  
 表示(拓扑群的)\* 4:591  
 表示(无限群的)\* 4:596  
 表示系列 4:796  
 表示(序数的) 4:15  
 表示(用二次型的) 4:382  
 表示有限箭图 4:459  
 表示有限结合代数 4:594  
 表示(Lie 代数的)\* 4:588  
 表示(Lie 群的) 3:51  
 表现 4:287  
 表现(群的) 4:287  
 表现(投射  $p$  群借助自由投射  $p$  群的) 4:307  
 表征 4:821  
 表征(代数系统的) 4:821  
 表征定理 1:564  
 表征定理(飛田分布的) 5:491  
 表征定理(Witt 向量的) 5:520  
 表征(逻辑语言的) 1:783  
 表(Lisp 语言中的) 3:522  
 冰透镜 2:699  
 冰岩学中的数学问题 2:699  
 并 1:695;4:102  
 并半格 4:769  
 并串网络 1:800  
 并(单形的) 4:164  
 并(多值映射的) 3:853  
 并发程序设计 4:80  
 并集定理(算法的) 1:134  
 并集公理 1:291;5:333  
 并(集合的)\* 5:333  
 并集问题(调和分析的) 2:825  
 并集问题(关于谱综合集的) 4:924  
 并集问题(关于 Helson 集的) 1:478  
 并(事件的) 4:313  
 并算子(偏序集上的) 1:614  
 并(投影的) 4:347  
 并(投影算子的) 4:347  
 并(图的) 2:753  
 并向量 2:303  
 并程序设计 4:80  
 并行化问题 4:80  
 并行计算论题 1:124;3:591  
 并(字的) 4:545  
 波 5:456  
 波的扩散 3:317  
 波动方程 5:453  
 波动算子 2:5  
 波动位势 3:653  
 波前集 5:453  
 波向量 5:455  
 波阵面(波前集) 5:453  
 博弈论问题 5:152  
 薄度(集合的)\* 5:164  
 薄集 5:164  
 薄壳理论 4:808  
 薄翼 5:514  
 薄  $h$  配边定理 5:293  
 补偿法 2:83  
 补偿(随机测度的) 3:235  
 补偿元 5:10  
 补偿元(缺的) 4:771  
 补格元 3:359  
 补集 4:199  
 补集(域的加法子群的) 2:238  
 补角 1:182  
 补解析集 1:455  
 补连续系列(表示的) 1:818  
 补模数(椭圆积分的) 3:802  
 补模数(Jacobi 椭圆函数的) 3:213  
 补模(椭圆积分的) 2:349  
 补同态 2:570  
 补图 2:753  
 补退化系列(表示的) 2:37  
 补系列表示 1:690;4:796  
 补系列(表示的) 1:690  
 补子集(余子集) 1:690  
 补子模 4:888  
 补足展形定律 4:958  
 不变测度 3:160  
 不变的概率分布族 2:466  
 不变点 3:164  
 不变点(动力系统中的) 2:309  
 不变度量 3:162  
 不变对象 3:163  
 不变分支(Klein 群的) 3:266  
 不变函数 4:270  
 不变积分 3:160  
 不变基性质 4:978  
 不变基元素个数性质 4:489  
 不变集 3:164  
 不变集(动力系统的相空间的) 3:164  
 不变集(动力系统中的) 1:538; 5:449  
 不变集(在群下的) 1:902  
 不变几何对象 2:899  
 不变检验 3:166



- 不变可测分解 3:238
- 不变量 3:157**
- 不变量的几何理论 3:168
- 不变量(二阶齐次线性常微分方程的) 3:499
- 不变量(二维流形的) 5:295
- 不变量理论 3:166**
- 不变量(群的线性表示的) 3:167
- 不变量(群作用的) 4:1
- 不变量(线性表示的)\* 3:506**
- 不变量(线性双曲型偏微分方程的) 1:497
- 不变量(线性微分方程的) 4:729
- 不变量(型的) 3:167
- 不变量(有限生成 Abel 群的) 1:13
- 不变量(自同态族的) 4:768
- 不变列 3:987
- 不变流形 3:111;3:164
- 不变流形(相空间中的) 2:309
- 不变判决程序 3:156
- 不变平均 3:158**
- 不变平均泛函(殆周期函数的) 1:141
- 不变平均(群上的) 3:158
- 不变平均值 3:158;5:342
- 不变嵌入 3:159**
- 不变嵌入法 4:91
- 不变曲面 3:164
- 不变曲线 3:164
- 不变群类 1:132
- 不变群元(中心元) 1:539
- 不变式 3:157;2:711
- 不变损失函数 2:466
- 不变统计量 3:165**
- 不变微分算子 3:159**
- 不变维数性质 4:489
- 不变性定理(对拓扑不变量的) 5:195
- 不变性方程组(几何对象的) 2:711
- 不变性(分式线性映射下对称点的比的) 2:545
- 不变性(共变导数对微分同胚的) 1:483
- 不变性(函数的微分形式的) 2:101
- 不变性论题 1:124
- 不变性(群上积分的) 3:160
- 不变性(统计程序的)\* 3:156
- 不变性原理 3:156**
- 不变性原理(相对论中的) 4:567
- 不变因子(多项式矩阵的) 3:672
- 不变因子(矩阵的) 3:977;2:334
- 不变因子(模的) 4:300
- 不变子半群 3:165
- 不变子集 3:165**
- 不变子集(群的) 3:165
- 不变子集(相空间的) 4:396
- 不变子集(映射的) 3:610
- 不变子空间 3:166**
- 不变子空间(表示的)\* 3:166**
- 不变子空间问题 2:594;3:492;3:997
- 不变子空间(线性变换的) 3:512
- 不变子空间(线性算子的) 3:492
- 不变子群 3:165**
- 不变子群列 5:60
- 不变 Haar 测度 2:797
- 不变 Laplace 算子 4:210
- 不变 Lie 楔 5:198
- 不变 Poisson 核 4:210
- 不等式 3:49**
- 不等式(关于函数类的) 3:49
- 不等式(关于和的) 3:49
- 不等式(关于积分的) 3:49
- 不等式(关于绝对值的) 3:49
- 不等式(关于平均值的) 3:49
- 不等式(关于数的幂的) 3:49
- 不等式(关于序列类的) 3:49
- 不等式(Minkowski 型的) 3:762
- 不等式(Чебышев 型的) 1:569
- 不定标量积 2:811
- 不动点 4:215
- 不动点(解析函数的) 1:249
- 不定度规 3:35**
- 不定度规空间 4:904**
- 不定度规 Hilbert 空间(带不定度规的 Hilbert 空间) 2:876**
- 不定度规 Hilbert 空间(度规等价的) 2:876
- 不定二次型 4:382
- 不定方程 3:38**
- 不定方程组 3:38
- 不定积分 3:34**
- 不定积分的强微分法 5:34**
- 不定极限和不定式的求值 3:34**
- 不定内积 3:293
- 不定内积空间 2:877
- 不定问题(运筹学中的) 3:1023
- 不定线性代数方程组 3:461
- 不定性点(多复变量亚纯函数的) 4:856
- 不定性秩( $J$  度规的) 2:876
- 不定性秩( $J$  空间的) 2:876
- 不定重积分 3:859
- 不动点 2:492**
- 不动点(常微分方程组的) 2:494;3:580
- 不动点定理 5:215
- 不动点定理(对定义函数的模式的) 1:134
- 不动点(非自治系统的) 2:377
- 不动点(分式线性变换的) 2:494
- 不动点(线性算子的) 2:494
- 不动点性质 4:614
- 不动点(映射的) 3:610
- 不动点(映射在集合上的) 2:492
- 不动点(映射族的) 4:715
- 不动点原理 2:492
- 不动奇点 2:494**
- 不分支 Weierstrass 元 1:692
- 不共轭区间 3:956
- 不合格品漏检率 4:711
- 不后 4:324
- 不可避免的误差 1:726
- 不可辨模型(语言的) 1:293
- 不可辨元集 4:976
- 不可测集 3:955**
- 不可达边界点(区域的) 2:275
- 不可达集(偏序集中的) 1:815
- 不可定向多面体 4:228
- 不可定向流形 3:955**
- 不可定向球面映射 4:947
- 不可分次数(域扩张的) 4:781
- 不可分的初等理论 2:338
- 不可分的集合(自然数的) 2:338
- 不可分多项式 4:781
- 不可分解表示 3:33**
- 不可分解表示(结合代数的) 4:594

- 不可分解表示(拓扑群的) 4:591
- 不可分解二次曲线 1:767
- 不可分解分布 3:33
- 不可分解环元素 1:251
- 不可分解矩阵 3:243;4:135
- 不可分解连续统 3:33
- 不可分解模 3:301
- 不可分解拓扑空间 3:268
- 不可分解元素(半群的) 3:682
- 不可分解 Cartan 矩阵 1:481
- 不可分解 Coxeter 群 1:884
- 不可分解 S 空间 4:590
- 不可分解 Марков 链 3:618
- 不可分量法 3:44
- 不可分拓扑空间 1:305
- 不可分域扩张 4:781
- 不可分元素(域的) 4:781
- 不可公度量 3:30
- 不可光滑流形 3:965
- 不可计算度 2:39
- 不可解初等理论 1:131
- 不可解度 1:132;1:133
- 不可解结合演算 1:237
- 不可解判定问题 5:357
- 不可解算法问题 1:120
- 不可解性 5:356
- 不可能事件 3:25
- 不可判定度 2:38
- 不可判定公式 2:17
- 不可判定命题 5:357
- 不可判定算法问题 2:19
- 不可判定性 5:316
- 不可数集 5:316
- 不可数微分方程组 2:133
- 不可缩表示(理想的) 1:39
- 不可缩同态 2:513
- 不可微函数 3:932
- 不可压缩流动 5:513
- 不可压缩曲面 5:170
- 不可延拓的解 4:347
- 不可余子空间(Banach 空间中的) 1:307
- 不可约表示 3:182
- 不可约表示(半单 Lie 代数的) 1:486
- 不可约表示(结合代数的) 4:594
- 不可约表示(拓扑群的) 4:591
- 不可约表示(Lie 代数的) 4:589
- 不可约簇 3:183
- 不可约代数簇 1:52
- 不可约代数方程 1:82
- 不可约的半群元素 4:289
- 不可约点(解析集的) 1:173
- 不可约多项式 3:182
- 不可约多项式(代数数的) 1:95
- 不可约多项式(域上的) 3:182
- 不可约仿射代数簇 1:52
- 不可约仿射代数集 1:52
- 不可约仿射概形 1:57
- 不可约分式 4:496
- 不可约分数(既约分数) 2:543
- 不可约分支(解析集的) 1:173
- 不可约分支(解析空间的) 3:181
- 不可约分支(拓扑空间的) 3:183
- 不可约复空间 4:1027
- 不可约覆盖 1:395;3:183
- 不可约格(Lie 群中的) 2:231
- 不可约根系 4:683
- 不可约基(半群簇中恒等式的) 5:401
- 不可约解析集 1:173
- 不可约解析空间 3:181
- 不可约解析空间芽 3:181
- 不可约紧半群 5:197
- 不可约局部对称 Riemann 空间 5:103
- 不可约矩阵群 3:181
- 不可约连续统 3:181
- 不可约连续映射 5:200
- 不可约模 3:182
- 不可约平面实代数曲线 4:169
- 不可约群表示 1:141
- 不可约三维流形 5:170
- 不可约拓扑空间 3:183
- 不可约析取范式 2:16
- 不可约析取范式(终极析取范式) 2:16
- 不可约性(点之间的) 1:780
- 不可约映射 3:181
- 不可约映射(模的) 4:595
- 不可约有理函数 4:496
- 不可约有限维表示(连通 Lie 群的) 2:477
- 不可约酉表示的分类 4:2
- 不可约元(整环中的) 2:447
- 不可约整体对称 Riemann 空间 2:732
- 不可约正交对称 Lie 代数 2:732
- 不可约准素分解 4:288
- 不可约子环 1:537
- 不可约字 2:567;5:152
- 不可约 Feller 过程 2:457
- 不可约  $n$  元运算 4:430
- 不可约  $R$  模 3:682
- 不可约 Riemann 空间 4:531
- 不可约 Riemann 流形 3:163
- 不可重正化模型(量子场论的) 4:408
- 不可自应用的算法 1:126
- 不连通集(图的) 3:288
- 不连通图 2:753
- 不平坦楔 1:739
- 不平坦锥 1:739
- 不前 4:324
- 不确定答案(Turing 机上计算问题的) 1:724
- 不确定带 2:241
- 不确定集(对应的) 1:866
- 不确定集(关系的) 1:866
- 不确定集(上同调运算的) 1:655
- 不确定矩问题 3:804
- 不确定性点集(亚纯函数的) 3:713
- 不确定性集(亚纯函数的) 3:713
- 不确定性集(亚纯映射的) 3:715
- 不确定性原理 5:315
- 不容许的统计估计 4:993
- 不弱于拓扑 1:687
- 不适当输入(对算法的) 1:119
- 不适定矩问题 3:804
- 不适定问题 3:6
- 不适定问题(复变函数论中的)\* 3:11
- 不适定 Volterra 方程 5:436
- 不同点(构造度量空间的) 1:791
- 不同值(随机变量的) 4:315
- 不完全矩阵 3:14
- 不完全可控对象 1:265
- 不完全可控系统 1:265
- 不完全拉丁方 3:354
- 不完全偏好 5:363



不完全商(连分数的) 1:806  
 不完全数据问题(断层照相法中的) 5:185  
 不完全双圆形域 2:276  
 不完全松弛法 4:570  
 不完全椭圆积分(第二类) 2:349  
 不完全椭圆积分(第一类) 2:349  
 不完全信息控制的对策问题 2:151  
 不完全形式 2:196  
 不完全性 1:289;4:293  
 不完全 Cholesky 因子分解 1:772  
 不完全 Hermite 核 2:857  
 不完全 Reinhardt 区域 2:276  
**不完全 B 函数 3:30**  
**不完全  $\Gamma$  函数 3:31**  
 不完整网 3:891  
 不稳定方法 1:30  
 不稳定分界线(鞍点的) 4:705  
 不稳定流形 2:861;4:784  
 不稳定流形(一点的) 2:950  
 不稳定流形(一轨道的) 2:950  
 不稳定逻辑理论 4:974;4:976  
 不稳定问题 3:9  
 不稳定性 2:247  
 不稳定性(解析容量的) 1:211  
 不稳定性问题(泛函极小化中的) 3:9  
 不稳定子空间(切空间的) 2:950  
 不相关随机变量 1:861;1:865  
 不相交表示(析取表示) 2:243; 3:149;4:427  
 不相交并(集合的) 5:333  
 不相交补(格的子集的) 4:662  
 不相交补( $K$  空间中的) 4:774  
 不相交格元素 4:662  
 不相交基 1:312  
 不相交集(向量格中的) 4:773  
 不相交集族 4:76  
 不相交轮换 4:133  
 不相交余 1:691  
 不相交元素(向量格中的) 4:773  
 不相容控制问题 3:1044  
**不相容类 3:32**  
 不相容逻辑公式 4:807  
 不相容求和法 1:689  
 不相容事件的概率相加的性质

4:414  
 不相容事件的振幅相加的性质 4:414  
 不相容线性代数方程组 3:461  
 不相容形式系统 1:781;3:32  
**不相容性 3:32**  
 不相容元素(偏序集的) 5:88  
 不中断的 Марков 过程 3:622  
 不中断齐次 Марков 过程 3:622  
 不重叠性(凸曲面上最短曲线的) 1:850  
 布置(由超平面集合确定的) 2:709  
 步长(格点分布的) 3:357  
 步长(数值解法的) 4:6  
 步长(网格的) 2:81  
 步长因子(数值方法中的) 3:687  
 步进法 2:319  
 步骤(Turing 机的) 5:290  
**部分本征值问题(本征值的部分问题) 4:99**  
 部分变换 5:247  
 部分标识符(Алгамс 语言中的) 1:68  
 部分等距 4:214  
 部分等距算子 1:695  
**部分递归函数 4:100**  
 部分递归函数码 1:127  
**部分递归算子 4:100**  
 部分多重运算 3:842  
 部分辐射条件 4:466  
 部分负载储备 4:577  
 部分观测过程的控制 1:834  
 部分广群 2:791  
 部分归谬律 4:252  
 部分函数 3:367;4:524  
 部分和(二重级数的) 2:285  
 部分和(函数级数的) 4:794  
 部分和(级数的) 4:792  
 部分和(数项级数的) 4:792  
 部分和(数项级数的  $n$  阶的) 4:792  
 部分横截 3:677  
 部分横截(拉丁方的) 3:354  
 部分横截(子集族的) 5:121  
 部分积 2:465  
**部分极限 4:99**

**部分(集合的) 4:247**  
**部分几何 4:98**  
 部分计算 5:252  
 部分计算机 5:252  
 部分加细(集合族的) 4:536  
 部分可计算函数 3:367  
 部分拉丁方 3:354  
 部分链环 3:273  
 部分逻辑演算 3:558  
 部分密钥(DES 中的) 1:895  
 部分平衡不完全区组设计(具有  $m$  类型关系的) 1:376  
 部分实现问题(对动态系统行为的) 5:118  
 部分同构问题 3:193  
 部分完整网 3:891  
 部分谓词演算 3:559  
 部分稳定性 4:965  
 部分信息 1:896  
 部分有补格 3:359  
 部分约化空间 4:533  
 部分增量(多元函数的) 5:232  
 部分正确的程序 5:156  
 部分正确性 5:156  
 部分主元法(消元法) 2:657  
 部件对(控制系统的) 2:379  
 部件树 5:113  
 部件系统 5:113  
 部件(字母表上链的) 5:113

## C

《猜度术》(Jacob Bernoulli: 著) 1:333  
**裁决方案 1:217**  
 参考标架 2:550;1:857;4:666  
 参考标架系 3:840  
 参考标架(Minkowski 空间中的) 3:763  
**参考系 4:535**  
 参模 3:799  
 (参)模(代数曲线的) 3:799  
 (参)模(带  $n$  级结构的代数曲线的) 3:799  
 (参)模方法 2:437  
**(参)模理论 3:799**

- 参模(模) 3:800  
 (参)模问题 3:798  
 (参)模问题(代数曲面的) 1:104  
 (参)模问题(矩阵论中的) 3:979  
 (参)模问题(曲线族的) 2:436  
 (参)模问题(Riemann 曲面的)  
 4:636;4:640  
 (参)模(Riemann 曲面的)\*  
 3:797  
 (参)模(Riemann 曲面的类的)  
 4:636  
 参数 4:88  
 参数变易法 4:86  
 参数表示(单叶函数的)\* 4:91  
 参数表示法 4:90  
 参数表示(函数的)\* 4:90  
 参数(差集的) 2:89  
 参数方程 4:88  
 参数方程(空间中点集的) 4:88  
 参数方程(曲线的) 3:454  
 参数共振 2:812;3:510;4:92  
 参数共振的数学理论 4:92  
 参数估计 3:658  
 参数规划 4:89  
 参数化(集合的) 1:565  
 参数化曲面 2:554  
 参数化(曲面的) 3:20  
 参数化(问题的) 3:600  
 参数化(Fréchet 曲面的) 2:554  
 参数积分表示法 4:88  
 参数邻域 3:538  
 参数邻域(Riemann 曲面上的)  
 1:759  
 参数(逻辑公式的) 4:285  
 参数(抛物线的) 4:66  
 参数谱估计量 4:917  
 参数强迫阻尼摆 4:118  
 参数(区组设计的) 1:376  
 参数曲线 4:88  
 参数算子函数 3:1022  
 参数维持振动 4:93  
 参数问题(运筹学中的) 3:1023  
 参数(瓮模型的) 5:360  
 参数(线性积分方程的) 3:94  
 参数项目评估技术-费用问题  
 4:325  
 参数引入法 4:85  
 参数映射 3:538  
 参数与积分限的置换定理(Abel 积  
 分中的) 1:15  
 参数圆盘 3:538  
 参数 Diophantus 逼近 2:191  
 参数( $\theta$  函数的) 5:162  
 残差 1:697  
 残数(单复变解析函数的) 4:604  
 残数定理 4:604  
 残数公式 4:603  
 残数(解析函数的)\* 4:604  
 残数(解析函数关于基闭链的)  
 4:606  
 残数(解析函数在无穷远点上的)  
 4:605  
 残数(解析函数在一点上的)  
 1:154  
 残数(解析微分的) 4:605  
 残数类(闭微分形式的) 4:603  
 残数理论(多复变解析函数的)  
 4:605  
 残数理论(解析函数的) 4:604  
 残数流动形 4:603  
 残数形式 4:603  
 仓西定理(关于局部解析形变)  
 2:26  
 仓西空间 5:226  
 操作方式(保密学中的) 1:894  
 操作符模式 5:155  
 操作系统 4:889;5:124  
 操作语义 5:155  
 槽谷 5:283  
 侧边(棱柱的) 4:304  
 侧面(棱柱的) 4:304  
 侧面(柱体的) 1:926  
 侧面(锥的) 1:738  
 侧平面 2:59  
 侧投影 2:59  
 侧完全  $K$  空间 4:774  
 测地变换(联络的) 2:704  
 测地带 5:33  
 测地地图投影 1:494  
 测地多边形 4:225  
 测地法向量 5:33  
 测地法坐标 4:756  
 测地极坐标 2:700;2:704;4:756  
 测地几何学 2:702  
 测地距离 2:701  
 测地流 2:701  
 测地流形 2:704  
 测地挠率 2:705  
 测地喷射 4:958  
 测地区域 2:705  
 测地曲率 2:701  
 测地三角形 2:705  
 测地凸区域(Riemann 空间中的)  
 4:646  
 测地完全流形 2:931  
 测地完全 Riemann 流形 1:698;  
 4:647  
 测地网 2:705  
 测地线 2:702  
 测地线(不变度量的) 3:162  
 测地线假设 2:702  
 测地线(曲面上的) 2:155  
 测地线(射影联络的) 4:331  
 测地线(Riemann 空间中的)  
 4:646  
 测地映射 2:704  
 测地圆 2:700  
 测地子流形 2:704  
 测地坐标 2:700  
 测度 3:698  
 测度代数 1:75  
 测度代数(群的) 2:823  
 测度的定义 3:698  
 测度的能量 2:359  
 测度的收敛 1:837  
 测度的一般性质 3:698  
 测度的支集 5:81  
 测度(函数空间中的) 2:595  
 测度核 4:270  
 测度(积空间的) 3:701  
 测度(集合的) 3:698  
 测度(具有紧支集的) 5:81  
 测度(具有有限能量的) 2:278  
 测度空间 3:705  
 测度空间投射系 3:704  
 测度(三向量的) 5:282  
 测度同构定理(Boole 代数的)  
 4:552  
 测度(拓扑空间中的) 3:702  
 测度(拓扑向量空间中的)\*  
 3:704



- 测度(由可测映射生成的) 3:699  
 测度(由外测度导出的) 3:700  
 测度(与下调和函数关联相伴的)  
   2:831;4:664  
 测度(正交于一致代数的) 5:320  
 测度值偏微分方程 5:20  
 测度(Boole 代数上的) 4:552  
 测角函数 2:739  
**测角术 2:739**  
**测试 5:150**  
 测试函数 1:381  
 测试(函数值表的) 5:151  
 测试(控制论中的) 5:150  
 策略对策 2:635  
**策略(对策论中的) 5:29**  
**策略构形 5:127**  
 策略品质(微分对策中的) 2:147  
 策略(受控 Марков 过程中的)  
   1:829  
 策略(微分对策中的) 2:147  
 策略形式(对策的) 2:637  
**层 4:803**  
 层化 4:539  
 层(解析集的) 1:173  
 层(类型论中的) 5:304  
 层流 4:204  
**层论 4:803**  
 层模型 2:862  
 层(群的) 1:564;2:492;5:66  
 层上同调 2:494  
 层同态 4:804  
 层(样本中的) 5:30  
 层(Постников 系统的) 4:258  
**叉积 1:889**  
 叉积范数 3:993  
 插入(字母向字中的) 1:630  
**插值 3:133**  
 插值逼近方法 1:200  
 插值(单位根上的) 3:143  
 插值定理(模型论中的) 4:526  
 插值多项式 3:903  
 插值多项式(线性无关函数组的)  
   3:137  
**插值法(计算数学中的)\* 3:137**  
 插值泛函多项式 3:140  
 插值方法 1:208  
**插值公式 3:135**  
**插值过程 3:143**  
 插值函数 3:137  
 插值函数(最小平方意义下的)  
   3:137  
 插值函子 3:141  
 插值级数 3:143  
 插值结点 2:432;3:133;3:143  
 插值矩阵 2:854;3:136  
 插值空间 3:141  
 插值空间三元系(关于一个空间三  
   元系的) 3:141  
 插值求积公式 4:391  
 插值求体积公式 1:901  
**插值(算子的)\* 3:140**  
 插值问题(逻辑中的) 1:148  
 插值性质(中间逻辑中的) 3:130  
 插值序列 3:134  
**插值样条 3:144**  
 插值余项 3:143  
 查问 1:897  
 差 3:6;5:69  
 差比(算术比) 1:232  
 差分 2:472  
 差分的有界展开( $n$  阶的) 3:948  
**差分法 2:79**  
**差分方程 2:77**  
 差分方程( $m$  阶的) 2:77  
**差分格式 2:80**  
**差分格式(变分的)\* 2:81**  
 差分格式的精度 2:86  
**差分格式的稳定性 4:970**  
 差分格式的要求 2:86  
**差分格式的粘性 2:84**  
**差分格式理论 2:85**  
 差分公式(数值微分的) 2:171  
**差分算子 2:79**  
 差积(覆盖映射的) 4:626  
 差积(极大序模的) 2:238  
 差积(理想的) 2:238  
 差积(域的) 2:238  
 差积(域的元素) 2:238  
 差积(域扩张的) 2:238  
**差集 2:89**  
 差矩阵 4:29  
 差距(内蕴度量) 3:723  
**差(两集合的)\* 2:79**  
 差(剩余类的) 1:760  
 差(实数的) 4:512  
 差(数列的) 1:232  
 差(析取范式的) 1:396  
 差(向量的) 5:404  
 差异(两个提升决定的) 4:259  
**差异上链 2:76**  
**差异元素( $K$  理论中的)\* 2:77**  
 差族(广义差集) 2:89  
 产生泛函 1:862  
 产生关系 2:514  
**产生集 4:320**  
 产生器 1:276  
 产生式 2:514  
**产生算子 1:886**  
 长波绕射 2:173  
 长程有序 2:233  
**长度 3:388**  
 长度(次正规子群列的) 5:66  
 长度单位 5:337  
 长度(道路的) 4:108  
 长度泛函 3:834  
 长度(功能元图中链的) 2:72  
 长度(集合上解析关系的) 2:64  
 长度(简单弧的) 3:388  
 长度(可求长曲线的) 3:388  
 长度(空间曲线的) 3:388  
 长度(连续可微曲线的) 3:388  
 长度(码的) 1:629  
**长度面积原理 3:388**  
**长度(偏序集的)\* 3:389**  
 长度(平面曲线的) 3:388  
 长度(曲线的) 4:518  
 长度体积原理 3:388  
 长度(网络规划中路径的) 3:895  
 长度(文法中推导的) 2:750  
 长度(向量的) 5:404  
 长度形变(地图投影中的) 1:489  
 长度(折线的) 3:388  
 长度(直线段的) 3:388  
 长度(子群列的) 3:987;5:60  
 长度(字的)(字长) 2:514;2:567;  
   5:522  
 长度(自动机试验的) 1:259  
 长度(Boole 函数的) 1:393  
 长度(Hilbert 空间中元素的)  
   2:871  
 长度(Young 图中钩形的) 5:533

- 长短辐(圆)内摆线 2:962;5:282  
 长短辐圆外摆线 2:371  
 长方体 1:84  
 长幅摆线 1:923  
 长幅次摆线 5:282  
 长幅外摆线 2:371  
 长辐内摆线 2:962  
 长期摄动 1:598  
 长期项 4:610  
 长上同调正合序列 2:411  
 长寿命 4:576  
 长塔逐步语义系统 4:1034  
 長田 - Смирнов 度量化准则 3:729  
 長田 - Смирнов 准则 3:737  
 长正合序列 2:915  
 长正合序列(上同调群的) 1:646  
 长轴(椭圆的) 2:341  
 常层 4:803  
 常返性(Марков 链的) 2:457  
 常返状态类(Марков 链的) 3:615  
 常返 Марков 链 3:619  
 常规排队系统 4:446  
 常量变差公式 2:615  
 常曲率空间 1:783  
 度量相等算子 3:192  
 常数变易法 5:378  
 常数变易公式 4:139;5:378  
 常数(微分环中的) 2:169  
 常数映射 3:609  
 常数域 1:84  
 常数域(微分环的) 2:143  
 常微分方程 2:106  
 常微分方程边值问题 1:423  
 常微分方程(带偏差滞后的) 2:140  
 常微分方程的近似解法 2:135  
 常微分方程(分布自变量的)\* 2:139  
 常微分方程(具有集中滞后的) 2:139  
 常微分方程(具有偏差变元的) 2:139  
 常微分方程理论中的扇形 4:740  
 常微分方程(先导型的) 2:139  
 常微分方程(延迟的)\* 2:138  
 常微分方程(延滞型的) 2:139  
 常微分方程(已解出最高阶导数的) 2:108  
 常微分方程(滞后型的) 2:139  
 常微分方程(中立型的) 2:139  
 常微分方程组 2:107  
 常微分方程组(推迟(延迟)型的) 2:139  
 常微分方程组(先导型的) 2:139  
 常微分方程组(滞后型的) 2:139  
 常微分方程组(中立型的) 2:139  
 常系数齐次线性常微分方程 3:500  
 常系数线性常微分方程 3:500  
 常项(常量) 1:783  
 常项(集合中的) 1:100  
 常项(数理逻辑中的) 1:783  
 常秩态射(向量丛的) 5:409  
 场 2:867  
 场论(变分法中的) 4:547  
 场论(向量分析) 5:407  
 场算子 2:468  
 场所 3:540  
 场(微分 - 几何对象的) 2:712  
 超八面体群 5:524  
 超边 2:959  
 超不可达基数 1:475  
 超超单集 4:529  
 超代数 5:78  
 超单纯递归可枚举集 3:21  
 超单集 4:529  
 超定(方程)组 4:54  
 超定线性微分方程组 3:476  
 超定一阶偏微分方程组 2:129  
 超度量除环 3:543  
 超度量范数 3:968  
 超度量赋值 5:135  
 超渡 5:247  
 超渡关系 1:651  
 超渡上同调类 5:247  
 超渡映射 1:650  
 超渡元 5:247  
 超对数 2:581  
 超复变函数 2:951  
 超复变函数(Fueter 意义下解析的) 2:951  
 超复变函数(Hausdorff 意义下解析的) 2:952  
 超复变函数(Scheffers 意义下解析的) 2:952  
 超复数 2:952  
 超复数系 2:280  
 超复系(超复数系, 结合代数) 1:481;2:681;2:952  
 超复系的加倍 2:952  
 超复系(秩  $n$  的) 2:952  
 超覆盖 2:926  
 超构造命题演算 4:352  
 超函数 2:953  
 超函数(包含在 0 的实解析参数的) 3:739  
 超函数层 2:953  
 超函数(单变数的) 2:953  
 超函数(多变量的) 2:953  
 超换位子差分 5:78  
 超积 1:108;3:786  
 超积定理 1:108  
 超积基本定理 3:787  
 超极大算子 4:748  
 超几何方程 2:955  
 超几何分布 2:955  
 超几何分布的方差 2:955  
 超几何函数 2:956  
 超几何函数的推广 2:958  
 超几何函数(第二类) 2:957  
 超几何函数(第一类) 2:957  
 超几何函数(矩阵变元的) 2:959  
 超几何级数 2:958  
 超尖点 1:915  
 超交换超子代数 5:78  
 超禁集 2:204;3:21  
 超距作用原理 2:766  
 超可解群 5:80  
 超可解 Lie 代数 3:420  
 超可解 Lie 群 3:432  
 超可重正化理论 4:581  
 超空间(拓扑空间上的) 2:960  
 超空间(域上的) 5:77  
 超空间(Hilbert 空间中的) 2:873  
 超流形 5:77  
 超滤子 5:307  
 超滤子(Boole 代数上的) 5:26  
 超幂 5:308  
 超幂零扭根 4:471  
 超纽结构 3:844



- 超抛物型偏微分方程 2:36
- 超平面 2:960**
- 超平面布置 2:709
- 超平面(拟阵中的) 3:678
- 超平面区分集合 1:666
- 超平面(向量空间中的) 2:960;  
5:418
- 超平面(Hilbert 空间中的) 2:873
- 超平行体 4:84**
- 超平行线(双曲平面上的) 4:196
- 超平行线(Лобачевский 几何学中的) 3:524
- 超奇异代数曲线 2:841
- 超奇异曲面 3:241
- 超奇异椭圆曲线 2:344
- 超强算子拓扑 3:1030
- 超球 -1:299
- 超球多项式 5:309**
- 超球面 4:936
- 超区域 5:77
- 超曲面 2:961**
- 超曲面(概形中的) 2:961
- 超群 5:76**
- 超群代数 2:682
- 超群(广义位移算子) 2:680
- 超弱算子拓扑 3:1030
- 超上同调函子 2:960
- 超声超流动 5:513
- 超实数 5:87**
- 超双曲型二阶偏微分方程 2:130
- 超双曲型偏微分方程 3:487
- 超双曲型线性偏微分方程 2:111
- 超松弛法 2:960**
- 超算术关系 2:863
- 超算术集 5:90
- 超调和层 4:268
- 超调和的函数层 2:834
- 超调和函数 2:278;4:219;5:359
- 超同调函子 2:960**
- 超桶型空间 5:307**
- 超凸空间 3:730
- 超凸域 2:775
- 超图 2:959**
- 超椭圆积分 2:940**
- 超椭圆曲面 2:355;4:641
- 超椭圆曲线 2:940**
- 超椭圆域 2:940
- 超完全局部凸拓扑向量空间  
5:214
- 超稳定逻辑理论 4:974
- 超吸引点 3:234
- 超限递归 5:245**
- 超限归纳法 5:245**
- 超限数 5:245**
- 超限序列 5:246**
- 超限直径 5:243**
- 《超行列式的研究报告》(Cayley 的)  
3:166
- 超需函数 3:639
- 超循环 2:953**
- 超循环(Лобачевский 几何学中的)  
2:376
- 超友矩阵 3:978
- 超有界型局部凸拓扑向量空间  
5:214
- 超有界型空间 5:307**
- 超有限的  $C^*$  代数表示 3:993
- 超有限因子 5:442
- 超有限 von Neumann 代数 5:442
- 超有效点 5:79
- 超有效估计量 5:79**
- 超有效统计估计量序列 5:79
- 超语言 2:513
- 超原子 Boole 代数 4:713
- 超越次数 1:92
- 超越次数(亚纯函数域的) 3:714
- 超越度(超越性的度量) 5:239**
- 超越方程 2:374
- 超越分支点 5:240**
- 超越函数 5:241**
- 超越基 5:240
- 超越扩张 5:240**
- 超越曲线 5:240**
- 超越数 5:241**
- 超越数域 3:1004
- 超越系数 2:414**
- 超越性的度量 5:239**
- 超越性度量(数的) 2:193
- 超越域扩张 2:422
- 超越域元素(在子域上的) 5:240
- 超越元(微分域上的) 2:421
- 超越元(域扩张中的) 2:422
- 超越整函数 4:855
- 超直觉主义命题演算 4:352
- 超指数分布 4:448
- 超中心 2:951**
- 超中心(群的) 2:492
- 超子空间 5:418
- 超字 1:276
- 超自然数 5:520
- 陈(省身)-Dold 特征标 1:577
- 陈(省身)-Lashof 定理 2:721
- 陈(省身)-Lashof 曲率 2:721
- 陈(省身)多项式 1:577
- 陈(省身)类 1:577**
- 陈(省身)曲率 1:558
- 陈(省身)示性类(陈(省身)类)  
1:577
- 陈(省身)示性数(陈(省身)数)  
1:579
- 陈(省身)数 1:579**
- 陈(省身)特征标 1:577
- 成对积分方程 3:98
- 成对平衡设计 4:1030
- 成对相关函数 4:988
- 成分(补解析集的) 3:577
- 成分概念(算法语言中一个概念的)  
1:129
- 成批处理 4:889
- 成员问题 2:516
- 承载集(代数系统的) 1:105
- 承载集(构造度量空间的) 1:791
- 承载集(关于 Cauchy 问题初始条件的)  
1:520
- 乘法 3:860**
- 乘法半群 3:863**
- 乘法(闭链的) 3:148
- 乘法定理的函数方程 2:599
- 乘法定理(关于函数的) 2:599
- 乘法定理(关于 Bernoulli 多项式的)  
1:330
- 乘法(二元关系的) 1:365
- 乘法分解(正规算子的) 3:985
- 乘法赋值 3:968
- 乘法格 3:862**
- 乘法关于加法的分配性质 4:512
- 乘法广群 3:863
- 乘法广群(环的) 3:863;4:669
- 乘法基定理 4:459
- 乘法基(自然数集的) 2:256
- 乘法(级数的) 4:793

- 乘法(绝对同伦群中的) 2:919  
 乘法(幂级数的) 4:280  
 乘法(谱上的) 4:935  
**乘法群 3:862**  
 乘法群概形 1:675;2:789  
 乘法(三元域中的) 5:150  
 乘法(数的) 3:860  
 乘法算子 3:980  
 乘法算子(乘以一个函数的)  
   3:1026  
 乘法形式群律 2:512  
 乘法(形式语言的) 2:512  
 乘法序列(多项式的) 1:558;  
   4:821  
 乘法序列(由幂级数所定义的)  
   4:821  
 乘法(么半群中的) 3:817  
 乘法(用标量去乘张量的) 5:145  
 乘法(张量的) 5:145  
 乘法 Jordan 分解(自同构的)  
   3:229  
 乘方和 5:101  
 乘数 3:860  
 乘性闭包算子 4:358  
 乘性边界(函数的) 2:910  
**乘性遍历定理 3:861**  
 乘性度量同构 3:726  
 乘性二次型 4:383  
 乘性泛函(结合代数的) 1:553  
 乘性泛函(Марков 过程的) 2:605  
 乘性概率测度 5:320  
 乘性广义上同调论 2:677  
**乘性函数系 3:863**  
 乘性集合(交换环的) 3:541  
 乘性谱 4:935  
 乘性上边界(函数的) 2:910  
**乘性算术函数 3:861**  
 乘性(塔中域的差积的) 2:238  
 乘性拓扑性质 4:555  
 乘性系统(交换环的) 3:541  
 乘性系统(态射的) 2:54  
 乘性子集(层的) 4:1027  
 乘性子集组 4:555  
 乘性 Cousin 问题 1:873  
 乘性 1 上循环 1:873  
 乘元(双循环半群中的) 1:353  
**乘子 3:865**  
 乘子(第二类) 3:865  
 乘子(第一类) 3:865  
 乘子(典范方程的) 3:865  
 乘子定理(差集的) 2:89  
 乘子法则 3:322  
 乘子(分式线性映射的) 2:546  
**乘子理论 3:865**  
**乘子群 3:865**  
 乘子型 2:812  
 乘子(周期解的) 4:128  
 乘子(周期系数的线性微分方程组  
   的) 3:508  
 乘子(Hamilton 方程的) 2:812  
 乘子( $(v, k, \lambda)$  差集的) 2:89  
 惩罚 4:117  
 惩罚策略 2:633  
 程度问题(关于微分对策的)  
   2:147  
**程函方程 2:327**  
 程函方法 4:752  
**程序 4:321**  
 程序包 4:889  
 程序变换 5:124  
 程序长度的复杂性 1:121  
 程序的编译 5:252  
 程序的地带 4:322  
**程序的翻译 5:252**  
 程序的语法分析 1:129  
 程序分段(Cobol 语言中的) 1:621  
 程序控制 1:265  
 程序库(Cobol 语言中的) 1:621  
**程序模式 4:322**  
**程序设计 4:323**  
 程序设计处理程序 1:129  
 程序设计问题(控制理论中的)  
   1:265  
**程序设计语言 4:323**  
**程序设计中的语句 4:983**  
 程序生成程序 1:129  
 程序文法 2:747  
 程序吸收集(微分对策中的)  
   2:149  
 程序验证 5:124  
**程序最优化变换 4:322**  
 程序(Turing 机的) 1:724;5:290  
 弛豫 4:1007  
 持久性(闭轨道的) 2:110  
 持久性(平衡的) 2:110  
**持续作用扰动下的稳定性 4:966**  
 尺度(标度) 3:922  
 尺度(标度)因子 4:67;4:75  
 尺度(标度)因子(正交曲线坐标系  
   的) 3:335  
**尺度参数 4:712**  
**尺规作图(几何作图) 2:708**  
 赤道 4:943  
 赤道面(环面的) 5:231  
 充分条件(弱极小值最优性的)  
   3:1047  
**充分统计量 5:70**  
 充分拓扑 1:562  
 充分准则(可微性的) 2:94  
 充分  $j$  节 4:866  
 充分  $\sigma$  代数 5:71  
 充实范畴 1:504  
 充足矩阵(模态逻辑中的) 3:782  
 冲波过渡区 4:813  
 冲击波 4:811  
 冲击波波后的介质 4:812  
 冲击波波前的介质 4:812  
 冲击波的产生 4:814  
**冲击波的数学理论 4:811**  
 冲击绝热曲线 4:812  
 冲突(对策论中的) 2:634  
 冲突排列 3:172  
**重比 2:284**  
**重点 3:859**  
 重点(实曲线的) 4:862  
**重对数律 3:365**  
 重复定理(算法的) 1:134  
 重根 4:682  
 重构算法(断层照相法中的)  
   5:185  
 重结点插值 1:200  
**重模  $f(x)$  的同余式 1:764**  
 重平衡法 5:257  
 重数(本征值的) 2:557  
 重数(多项式的根的) 1:82  
 重数(覆盖的) 2:184;4:5  
 重数(根的) 4:682  
 重数(函数的极点的) 4:218  
 重数(函数临界点的) 4:866  
 重数函数(Banach 指标) 1:302  
 重数(极限环的) 3:445



- 重数(集合的覆盖的) 2:184  
 重数(集族的) 2:184  
 重数(焦点的) 3:829  
 重数(解析函数的极点的) 1:154  
 重数(解析函数的零点的) 1:154  
 重数(局部环的) 3:863  
**重数(模的)\* 3:863**  
 重数(平面实代数曲线上点的) 4:169  
 重数(齐次方程解的) 1:350  
**重数(奇点的)\* 3:864**  
**重数(权的)\* 3:864**  
 重数(三角剖分的二维流形在一点的分支的) 5:297  
 重数(椭圆曲面的纤维的) 2:354  
 重数(新息过程的) 5:17  
 重数(映射的) 2:179  
 重数(有限覆盖的) 3:373  
 重数(自动机的试验的) 1:259  
 重数(Lebesgue 谱的) 3:377  
 重随机 Poisson 过程 5:6;5:11  
**重图 3:854**  
 重写法则 2:514  
 重写系统 2:514  
**重言式 5:139**  
**重正化 4:581**  
 重正化单粒子态 4:407  
 重正化理论 4:581  
 重正化群 4:408  
 重正化真空 4:407  
 抽奖(抽彩) 2:630  
 抽象代数簇 1:116  
**抽象代数几何学 1:24**  
 抽象代数系统类 1:110  
 抽象殆周期函数 2:673  
 抽象单纯复形 1:707;4:834  
**抽象调和分析 2:822**  
 抽象调和分析(局部紧 Abel 群上的) 2:823  
**抽象多面体 4:230**  
 抽象范数(算子的) 4:661  
 抽象复形 4:163  
 抽象函数 2:673  
 抽象核(群扩张的) 2:423  
 抽象机器 3:589  
 抽象积分论 4:662  
**抽象计算机 1:729**  
**抽象解析函数 1:25**  
 抽象抛物型微分方程 2:106; 3:472  
**抽象(潜在可实现性的)\* 1:27**  
 《抽象群论》(O. Ю. Шмидт 著) 2:782  
 抽象三角剖分(多面体的) 4:163  
**抽象(实无穷的)\* 1:27**  
 抽象实现问题 5:348  
**抽象(数学的)\* 1:26**  
 抽象双曲型微分方程 2:106  
 抽象特征(变换半群类的) 5:246  
 抽象椭圆型算子 2:106  
 抽象椭圆型微分方程 2:106  
**抽象微分方程 2:105**  
**抽象位势论 4:267**  
 抽象物理量 2:186  
 抽象相关关系 3:488  
 抽象星形重分(复形的) 4:164  
 抽象 Riemann 区域 4:645  
 抽象 Riemann 曲面 4:633  
 抽象 Riemann 曲面(函数域的) 1:86  
 抽象 Volterra 算子 5:436  
**抽样法 4:710**  
**稠密点 2:48**  
 稠密点(遍历集中的) 2:382  
 稠密度(上下文无关文法的) 2:747  
 稠密度(树的) 2:747  
 稠密泛函 3:702  
**稠密集 2:44**  
 稠密集(拓扑空间中的) 2:408  
 稠密集(在开集中的) 2:44  
 稠密理想 2:549  
 稠密理想扩张(半群的) 2:424  
 稠密嵌入理想 2:424  
 稠密区间(运动群理论中的) 3:318  
 稠密填装码 1:880  
 稠密性(线序集的) 5:88  
 稠密域(二次微分的) 2:732  
 稠密元(伪补格中的) 5:25  
 稠密子范畴 1:9;3:542  
 稠密子集(偏序集的) 2:507;5:88  
 稠密子集(全序集的) 5:236  
 出度(出次数)(图的) 2:753  
 出度(出次数)(图的顶点的) 2:753;3:597  
 出度(顶点的) 2:760  
 出现 3:13  
 出现(在殆周期函数的 Fourier 级数中表示的) 1:141  
 出现(字的) 3:13  
 初边值问题 1:423  
 初步追赶法(初步双搜索法) 2:287  
 初等 $(-1)^k$  构造 5:447  
 初等变换(半群的) 1:131  
 初等变换(代数方程组和不等式组的集合的) 2:340  
 初等变换(矩阵列的) 3:462  
 初等变换(矩阵行的) 3:462  
 初等变换(整数矩阵的) 3:462  
 初等代数子系统 2:338  
 初等等价代数系统 2:337  
 初等等价模型(语言的) 1:293  
 初等地图投影 1:489  
 初等对称多项式 5:101  
 初等对称函数 5:473  
 初等多面体坍缩 4:231  
 初等范畴(范畴文法的) 2:746  
 初等方法(素数理论中的) 2:258  
 初等概率论 4:313  
 初等更新定理 4:581  
**初等公理系统 2:334**  
 初等关系(汇合型超几何函数的) 1:747  
**初等函数 2:335**  
 初等函数(积分理论中的) 2:7  
 初等合取 1:397  
 初等积分 2:7  
 初等几何学 4:348  
 初等矩阵 5:493  
 初等可料随机过程 5:8  
 初等扩充(语言模型的) 1:293  
 初等扩张(代数系统的) 3:785  
 初等类(代数系统的) 1:110  
**初等理论 2:337**  
 初等理论(代数系统的) 2:337  
 初等理论(基数范畴性的) 2:337  
 初等理论(实数的) 4:350  
 初等理论(一阶语言模型的) 3:784

- 初等理论( $p$  进数的) 4:350  
 初等理想 3:275  
 初等临界点 4:193  
 初等平移 5:252  
 初等群 2:479  
 初等群论 4:350  
 初等数论 2:335  
 初等数论的基本定理 4:290  
 初等数学 3:665  
 初等数学时期 3:666  
 初等算术 2:334  
 初等突变 1:358  
 初等图表(代数系统的) 3:785  
 初等图表(一阶语言模型的)  
 3:784  
 初等拓扑斯 5:225  
 初等析取 1:397  
 初等行与列变换(矩阵的) 3:977  
 初等因式(模的) 4:300  
 初等因子 2:334  
 初等因子(矩阵的) 2:334;3:977  
 初等因子(模的) 4:300  
 初等映射(集合的) 3:786  
 初等约化(矩阵的) 4:744  
 初等运算(矩阵的) 3:672  
 初等展开 4:744  
 初等指标公式 3:39  
 初等子系统(代数系统的) 3:785  
 初等自同构群(Lie 代数的) 4:73  
 初等 Abel 群 2:334  
 初等 Fuchs 群 2:582  
 初等 Klein 群 3:266  
 初始边值问题 3:767  
 初始标记(Petri 网中的) 4:146  
 初始代数 4:416  
 初始点(相应积分曲线的) 2:107  
 初始点(Cauchy 问题解的) 3:81  
 初始动力系统的行为 5:118  
 初始段(良序集的) 5:480  
 初始符(生成文法中的) 2:750;  
 3:643  
 初始集(常微分方程的值的)  
 2:139  
 初始集(连续统的) 3:82  
 初始间断(液体运动的) 4:811  
 初始结构 5:202  
 初始紧拓扑空间 1:685  
 初始紧性 1:685  
 初始曲面(Cauchy 问题的) 1:520  
 初始条件 3:81  
 初始条件(常微分方程的) 2:107  
 初始条件(扩散方程的) 2:174  
 初始条件(物理过程的) 3:650  
 初始完全的具体范畴 5:206  
 初始微分多项式 2:98  
 初始位置(对策中的) 4:247  
 初始相位(自由谐振动的) 2:567  
 初始项(谱序列的) 4:922  
 初始形式(齐次多项式的) 5:131  
 初始形式(形式幂级数的) 2:518  
 初始序数 4:15  
 初始置换(数据加密标准的)  
 1:895  
 初始状态 2:515  
 初始状态集 2:516  
 初始状态(Turing 机器的) 5:290  
 初始字母 2:514  
 初始自动机 1:276  
 初始( $\kappa$ )紧性 1:685  
 初值问题 3:81;2:107;1:523  
 初值问题(反应扩散方程的)  
 4:507  
 除法 2:268  
 除法(带余数的) 2:268;4:233  
 除法(复数的) 1:713  
 除法(幂级数的) 4:280  
 除环 4:870  
 除环(四元数的) 1:532  
 除数 2:268  
 除数的个数 3:1004  
 除数问题 2:273  
 除数问题(算术级数中的) 2:274  
 除子 2:269  
 除子(代数簇上的微分形式的)  
 2:146  
 除子(环中的) 2:270;2:275  
 除子(具有正规交的) 4:607  
 除子类群 2:272  
 除子理想 2:275  
 除子理想(环中的) 2:270;2:275  
 除子链条件 1:252  
 除子(Abel 微分的) 1:11  
 储备 4:577  
 处处稠密集 2:408  
 处处定义的对应 1:866  
 处处定义的关系 1:866  
 处处定义的算子 3:1025  
 触点(基本中继的) 4:573  
 触点模式 1:800  
 触点网络 1:800  
 触点网络(关于输出分离的)  
 1:800  
 触点网络(关于输入分离的)  
 1:800  
 触点网络(实现函数的) 1:800  
 触点线路 1:800  
 触点(中间继电器的) 4:573  
 触点( $\gamma, s$ )端点网络 1:800  
 传播(奇点的) 5:454  
 传导率(触点网络的链的) 1:800  
 传导率矩阵 1:800  
 传导率(通导性)(中继触点电路的  
 绕组的) 4:572  
 传递闭包 2:514  
 传递变换伪群 4:368  
 传递表示(半群的) 4:590  
 传递点(遍历集中的) 2:382  
 传递二元关系  
 传递非本原表示 3:25  
 传递函数 5:242  
 传递函数(动态系统的) 5:118  
 传递函数(纤维丛的) 2:618  
 传递集 2:506  
 传递集(置换群的) 4:131  
 传递竞赛图 5:236  
 传递(可迁)结构 2:159  
 传递膨胀(仿射平面的) 4:169  
 传递嵌入定理 3:17  
 传递求和法 5:254  
 传递群 5:250  
 传递群在流形上的作用 4:1  
 传递性 5:252  
 传递性(求和法的)\* 5:254  
 传递性(区域的) 5:210  
 传递性区域(置换群的) 5:250  
 传递性(实数序的) 4:512  
 传递运动群 2:788  
 传递置换群 4:131  
 传递子群 5:100  
 传染过程 2:371  
 传输速率 1:631



- 传输速率(信道的)\* 5:255  
 传输条件 5:254  
 传输系数 3:290  
 传输性质(伪微分算子的) 5:93  
 船山-中山定理 3:356  
 串的族(语言中的) 1:166  
 串行机器 3:590  
 串行交错机器 3:591  
 串值递归 4:521  
 创造集 1:886  
 垂线 4:135  
 垂心 4:23  
 垂心三角形 2:449;4:23  
 垂心(三角形的) 4:23  
 垂直切子空间 1:777  
 垂直性 4:40  
 垂直直线 4:135  
 垂直轴测投影法 1:293  
 垂足曲面 4:115  
 垂足(曲面的) 4:115  
 垂足曲线 4:115  
 纯闭包(Pfaff 方程组的) 1:482  
 纯辫 1:431  
 纯辫群(空间的) 1:434  
 纯不可分域扩张 4:781  
 纯不可分元素(域的) 4:781  
 纯策略 2:34;4:247  
 纯策略(动态对策中的) 2:304  
 纯超越的域扩张 5:241  
 纯抽象 1:26  
 纯粹的谓词演算 3:558  
 纯[粹]Hodge 结构 2:885  
 纯点谱(动力系统的) 4:933  
 纯多向量 4:220  
 纯非确定性过程 3:516  
 纯复极化 4:3  
 纯接触间断(运动的) 4:812  
 纯解析集 1:173  
 纯扩张(半群的) 2:424  
 纯生过程 1:371;5:250  
 纯态射(向量丛的) 5:409  
 纯通信信道 1:545  
 纯微分 2:165  
 纯无限 von Neumann 代数 5:441  
 纯相 4:1006  
 纯虚复数 1:713;3:13  
 纯子半群(群的) 4:667  
 纯子模 4:375  
 纯子群 4:375  
 纯组合子理论 1:667  
 纯  $k$  维解析集 1:173  
 词函数 3:643  
 词汇单位 1:129  
 词素 5:41  
 词位 1:129  
 磁力勘探 2:725  
 磁流体动力学中的数学问题 3:594  
 次 4:4  
 次摆线 5:282  
 次摆线玫瑰线 5:282  
 次不变子群 5:66  
 次不变子群列 5:66  
 次法线 5:69  
 次加性函数 2:803  
 次加性线性算子 3:142  
 次解析集 4:751  
 次切线和次法线 5:69  
 次全聚值集 3:708  
 次射影空间 5:68  
 次数(闭链的) 3:148  
 次数(变换的 Lie 伪群的) 4:368  
 次数(表示的) 4:600  
 次数(除子的) 1:78;2:271;3:713  
 次数(代数超曲面的) 2:961  
 次数(代数方程的) 1:82  
 次数(代数曲线的) 4:4  
 次数(代数线束的) 5:123  
 次数(单项式关于变元的) 3:818  
 次数(多项式的) 2:363;4:233  
 次数(多项式的项的) 4:233  
 次数(多项式关于一个变元的) 4:233  
 次数(二元型的) 1:363  
 次数(阶)(光滑动力系统的积分不变量的) 3:109  
 次数(流动形的) 2:146  
 次数(平面实代数曲线的) 4:184  
 次数(平面实代数曲线的) 4:169  
 次数(齐次算子的) 2:898  
 次数(射影簇的) 3:148  
 次数(射影代数簇的) 1:461  
 次数(同余方程的) 1:762  
 次数(同余方程关于变量组的) 1:762  
 次数(同余方程关于变数的) 1:762  
 次数(外形式的) 2:432  
 次数(域扩张的) 2:422;2:627  
 次数(域扩张的不可分性的) 4:781  
 次数(张量的共变变换的) 1:876  
 次数(置换群的) 5:251  
 次数(子簇的) 1:529  
 次随机矩阵 3:676  
 次特征 1:352  
 次特征带 1:352  
 次特征曲线 1:353  
 次特征曲线(一阶偏微分方程的) 2:128  
 次特征射线 1:353  
 次梯度 5:58  
 次微分 5:58  
 次序正则的插值矩阵 2:854  
 次正规解(线性常微分方程的) 4:491  
 次正规列 5:66  
 次正规形式级数( $p$  级的) 4:491  
 次正规子群 5:66  
 次正规子群列 5:60  
 次正规子群系统 5:61  
 次正则幂幺元 5:333  
 次直不可约代数 5:58  
 次直分解定理 5:349  
 次直和(代数系统的) 5:58  
 次直积 5:58  
 次秩(线性常微分方程的) 4:491  
 次秩(线性常微分方程的奇点的) 4:492  
 次秩(线性常微分方程组的) 4:492  
 次秩(线性常微分方程组奇点的) 4:492  
 次 AB 正规子群 1:17  
 次 Марков 转移函数 5:247  
 从配极条件 1:55  
 从切平面 4:518  
 从属单位划分 3:548  
 从属(覆叠的) 5:352  
 从属覆盖 5:352  
 从属关系(解析函数的) 5:66

从属关系(语法的) 5:113  
 从属函数 5:66  
 从属(解析函数的) 5:66  
 从属树 5:113  
 从属原理 5:66  
 丛 1:449  
 丛空间(代数向量丛的) 5:410  
 丛配极网 1:188  
 丛同构 3:940  
 丛( $m$  节的) 3:475  
 粗糙参模概形 3:799  
 粗糙度(图的) 2:758, 759  
 粗系统 4:692  
 簇 1:60  
 簇(范畴中的)\* 5:399  
 簇论 5:349  
 存储 5:155  
 存储费用函数 1:122  
 存储量 1:126  
 存储修改机器 3:591  
 存储元件 1:262  
 存取(Cobol 语言中的) 1:621  
 存在和唯一性定理(常微分方程解的) 2:107  
 存在和唯一性定理(空间中曲面的) 1:389  
 存在量词 2:417  
 存在问题(二次型合成的) 1:528  
 存在性(初始结构的) 5:202  
 存在性定理(常微分方程解的) 2:107  
 存在性定理(范子群的) 1:595  
 存在性定理(类域论的) 1:595  
 存在性定理(理想的准素分解的) 1:38  
 存在性定理(随机过程的最优控制的) 1:833  
 存在性定理(最佳算法的) 1:125  
 存在性(概形的提升的) 2:27  
 存在性(概形的形式形变的) 2:27  
 存在性(解的) 3:652  
 存在性(形式模概形的) 2:27  
 存在性(在一个概率空间上独立随机变量的) 3:36  
 存在性(自治系统解的) 1:281  
 存在性(最短曲线延伸的) 2:487  
 存在性(最始结构的) 5:204

存在性(Steiner 系的) 4:1029  
 存在域 1:692  
 存在域(解析函数的) 1:156  
 错误(第二类) 3:836; 4:1003; 4:1017  
 错误(第一类) 3:836; 4:1003; 4:1017  
 错误寻觅(电路中的) 5:152  
 错坐问题 3:172

## D

打把法 4:815  
 大地测量学中的数学问题 2:706  
 大典范 Gibbs 统计系综 2:730  
 大二十面体 4:549  
 大范围变分学 5:384  
 大范围几何学 2:717  
 大范围 Riemann 几何学 4:650  
 大归纳维数 2:184; 3:47  
 大基数 5:308  
 大集 4:712; 4:865  
 大集(Steiner 系的) 4:1029  
 大紧子群 5:341  
 大粒子方法 3:349  
 大联盟 1:621  
 大魔群 4:957  
 大偏差的概率 4:311  
 大前提 3:802  
 小参数方法(微分方程理论中的) 4:875  
 大筛法 3:351  
 大十二面体 4:549  
 大数律 3:362  
 大数律(量子概率论中的) 4:415  
 大星形十二面体 4:549  
 《大衍术》或《代数法则》(G. Cardano 著) 1:714  
 大元素(模格中的) 4:888  
 大圆 4:937; 4:943  
 大圆地图投影 1:489; 1:494  
 大圆(射影空间中的) 4:338  
 大圆线 1:496  
 大子模 4:888; 5:65  
 大子群 3:52  
 大  $O$  4:7

大  $O$  符号 4:7  
 大  $O$  关系 4:7  
 大 Seifert 纤维化 4:743  
 大 Witt 向量 1:503  
 大 Witt 向量环 5:520  
 代表(集合的) 4:745  
 代表(商对象的) 4:461  
 代表样本 5:151  
 代表子空间 4:601  
 代换法则 5:69  
 代换积分法 3:124  
 代换密码 1:894  
 代换群 2:478  
 代换性质(生成算子的) 1:315  
 代入(级数到级数中的) 4:280  
 代入(形式语言中的) 2:514  
 代入运算 2:514  
 代数 1:68  
 代数包(Lie 子代数的) 3:407  
 代数闭包 1:78  
 代数闭链 1:80  
 代数闭链的标准猜想 3:838  
 代数闭链族 1:81  
 代数闭域 1:117  
 代数闭子域 2:422  
 代数变换空间 1:92  
 代数变换群(变换的代数群) 1:91  
 代数表示 3:52  
 代数不等式 2:340  
 代数不可表示性(复数的) 1:92  
 代数不可约表示 3:182  
 代数不可约表示(拓扑群的) 4:593  
 代数不可约集 5:235  
 代数插值 4:390  
 代数超曲面 2:961  
 代数簇 1:116  
 代数簇(带有理奇点的) 4:857  
 代数簇的算术 1:115  
 代数簇的自同构 1:116  
 代数单位 1:96  
 代数导数 3:1022  
 代数的代数 1:77  
 代数的代数(有界次的) 1:77  
 代数的上同调 1:646  
 代数的 Lie 代数 3:407



- 代数等价表示 2:378  
 代数等价(除子的) 2:270  
 代数等价代数闭链 1:81  
 代数等距同构(von Neumann 代数的) 5:440  
**代数对数奇点 1:95**  
 代数(对于三元组的) 1:503  
 代数多项式 2:363  
**代数多项式(最佳逼近的)\* 1:101**  
 代数范畴 1:504  
 代数范数 3:967  
**代数方程 1:82**  
 代数方程(根式可解的) 1:83  
 代数(非交换算子环上的) 4:675  
**代数分支点 1:77**  
 代数分支点(无穷远的) 1:77  
 代数分支元 1:692  
 代数概率空间 4:414  
 代数概率论 4:414  
**代数格 1:95**  
 代数个数(解析地不同的平稳点的) 5:385  
 代数关系定理(关于自守函数的) 1:279  
**代数函数 1:84**  
**代数函数的亏格 2:699**  
 代数函数(泛代数中的) 4:301  
 代数函数域 1:86  
 代数函子 5:349  
 代数化定理(关于真概形上的凝聚层的) 4:351  
**代数环面 1:115**  
 代数积分 1:14  
 代数基 5:418  
 代数基(向量空间的) 1:316  
 代数集 2:340  
**代数几何学 1:87**  
 代数加法定理(对于椭圆函数的) 2:347  
 代数(交错数的) 1:147  
 代数(交换环上的) 4:672  
**代数结构的形式 2:509**  
 代数结构(范畴对象上的) 2:787  
 代数紧纯 Abel 群 4:375  
 代数精(确)度(求积公式的) 3:901;4:391  
**代数空间 1:101**  
 代数类似(映射锥构造法的) 3:610  
 代数理论(不变量的) 3:166  
 代数理论(程序设计的) 5:157  
 代数理论(单子型的) 1:504  
 代数理论(二次型的) 4:382  
 代数理论(范畴上的) 1:504; 5:349  
 代数理论(分圆域的) 1:924  
 代数理论(克隆型的) 1:504  
 代数理论(自动机的) 1:255; 4:757  
 代数螺线 4:952  
 代数幂级数 2:851;3:24  
 代数纽结 3:844  
 代数奇点 1:77;1:435  
**代数曲面 1:102**  
 代数曲面(代数非闭域上的) 1:104  
 代数曲面的分类 1:104  
 代数曲面(二次的) 1:162  
 代数曲面(一般型的) 2:672  
 代数曲面(一次的) 1:162  
**代数曲线 1:78**  
 代数曲线(二次的) 1:162  
 代数曲线(基本型的) 1:79  
 代数曲线(一次的) 1:162  
**代数群 1:91**  
 代数群的齐性空间 2:901  
 代数群的形式 2:508  
 代数群的秩 4:491  
 代数群的 Lie 代数 3:413  
 代数商群 1:91  
**代数上的空间 4:902**  
 代数上同调类 1:81;3:382  
**代数数 1:95**  
**代数数论 1:97**  
 代数数域 1:96;3:1004  
**代数数域的调整子 4:560**  
 代数同调类 1:81  
 代数同态(代数群的) 1:91  
 代数同余式 1:762  
 代数椭圆曲面的分类 2:355  
**代数拓扑学 1:113**  
 代数网 4:430  
**代数维数 1:82**  
 代数维数(拓扑空间的) 1:82  
 代数维数(向量空间的) 1:315  
**代数无关度 1:92**  
 代数无关复数 1:92  
**代数无关性 1:92**  
**代数无关性度量(代数无关度) 1:92**  
 代数无关域元素(在子域上的) 5:240  
 代数无关元 2:420  
**代数无理数 1:92**  
 代数无穷小对称 3:918  
**代数系统 1:105**  
**代数系统簇 1:111**  
 代数系统的类 2:337  
 代数系统的描述 3:785  
 代数系统的图表 3:785  
**代数系统的自同构 1:109**  
**代数系统类 1:110**  
 代数系统类(同态闭的) 1:110  
**代数系统拟簇 1:111**  
 代数系统(同表征的) 3:786  
 代数系统(同型的) 1:105  
 代数系统(有限型的) 1:105  
 代数线束 5:123  
 代数相关复数 1:92  
 代数相关亚纯函数 3:714  
 代数相关元 2:420  
**代数向量丛 5:410**  
 代数形变 2:28  
 代数形式(复数的) 1:713  
 代数形式(Gauss-Manin 联络的) 2:655  
**代数学 1:68**  
**代数学基本定理 1:71**  
 《代数学引论》(Euler 著) 1:69  
 《代数学》(Bombelli 著) 3:1002  
 《代数学》(Mohammed Al-Khwarizmi 著) 1:69  
 代数(由带关系的箭图定义的) 4:459  
 代数余子空间 1:690  
**代数余子式 1:638**  
 代数语言学 1:166  
 代数域扩张 2:422  
 代数(域上的) 3:457  
 代数元(代数的) 1:77

- 代数元(域扩张的) 2:422;2:627  
**代数运算** 1:100  
 代数整数 1:95;97;3:104  
 代数直和 1:690  
 代数值(复数域中的根的) 1:232  
 代数值(实数域中的根的) 1:232  
 代数中的态 2:384  
 代数重构技术 5:185  
 代数重数(本征值的) 2:323  
 代数子簇族 1:81  
 代数子群(代数群的) 1:91  
 代数  $K$  变换群 1:91  
**代数  $K$  理论** 1:92  
 代数 Lie 代数 4:585  
 代数 Poincaré 复形 4:191  
 代数 Riccati 方程 4:618  
 代数 Weil 上同调类环 1:81  
 代谢向量空间 5:517  
**带** 5:33  
 带边流形 1:415  
**带(广义的)** 5:33  
 带号测度 1:564  
 带号容度 1:564  
 带迹的算子 3:995  
 带基点单纯集 4:839  
**带基点的空间** 4:203  
 带基点的么半群 4:552  
**带基点对象** 4:203  
 带基点集合 2:918  
 带角球面(Alexander 的) 3:233  
**带禁忌的转移** 5:250  
 带禁忌状态的转移 5:250  
**带拒绝的排队** 4:452  
 带宽 1:659  
 带球面调和函数 4:944  
**带球面函数** 5:550  
 带网空间 5:215  
 带(向量空间中的) 1:691  
**带小参数的微分方程** 2:141  
 带形 3:449  
 带形定理 2:904  
 带形法 3:115  
**带形法(积分方程)** 5:34  
**带形法(解析函数)** 5:33  
 带形方程 2:128  
 带形条件 2:128  
 带形(围绕紧统的) 2:904  
 带形( $n-k$  维的) 2:904  
 带状纽结 3:274  
 带子(Turing 机的) 5:290  
**带最高权向量的表示** 4:601  
 带(Archimedes 半群的) 1:219  
 带( $K$  空间中的) 4:774  
 带( $K$  空间中由集合生成的) 4:774  
 带(Riesz 空间中的) 4:661  
**待定系数法** 3:722  
**待定系数法(构造数值算法的)** 5:317  
 殆不变函数 4:586  
 殆不变元 4:145  
 殆代数的 Lie 代数 3:407  
 殆单代数群 4:828  
 殆分裂序列 4:595  
**殆复结构** 1:137  
 殆复流形 1:625  
 殆复配边理论 1:622  
 殆回复点 3:748  
 殆开集 1:296  
 殆可和性 5:74  
 殆幂零群 1:223  
**殆素数** 1:142  
 殆同构测度空间 4:121  
 殆线性双曲型方程组 4:434  
**殆辛结构** 1:143  
**殆周期** 1:138  
 殆周期点 3:748  
 殆周期动力系统 2:311  
 殆周期轨道 2:252  
**殆周期函数** 1:139  
 殆周期函数(变换群上的) 2:674  
 殆周期函数(关于广义移位算子族的) 2:673  
**殆周期函数(群上的)\*** 1:141  
 殆周期解的问题 1:424  
**殆周期解析函数** 1:138  
 殆周期流 2:311  
**殆周期系数的线性微分方程组** 3:507  
 殆周期性 4:400  
 殆周期性(点的) 3:748  
 殆周期运动 1:140  
 殆 Hamilton 结构 5:112  
 殆 Hermite 结构 2:859  
 殆 Hermite 联络 2:856  
 殆 Kähler 结构 2:859  
 殆 Чебышев 集 1:575  
 袋形定理 2:904  
 袋形(围绕紧统的) 2:904  
 戴环范数 3:967  
**戴环空间** 4:672  
**单半群** 4:831  
 单胞算子 3:961  
**单比** 4:830  
 单边滑动平均过程 3:839  
 单边生成元(动力系统的) 2:364  
 单边 Diophantus 逼近 2:191  
**单表示** 4:831  
 单表示(结合代数的) 4:594  
**单参数半群** 3:1017  
**单参数变换群** 3:1018  
 单参数群(算子的) 3:1028  
**单参数子群** 3:1017  
 单参数子群(赋范域上 Lie 群的) 3:1017  
 单参数子群(环面(看作 Lie 群)的) 2:134  
 单参数 Lie 子群 4:896  
 单侧半切线(曲线的) 2:100  
 单侧逼近 1:201  
 单侧超曲面 3:1019  
**单侧导数** 3:1019  
**单侧极限** 3:1019  
 单侧假设 5:108  
 单侧连通图 2:761  
 单侧曲面 3:1018  
**单侧曲面与双侧曲面** 3:1018  
 单侧统计检验 4:1017  
 单侧约束 2:892  
 单侧 Laplace 变换 3:346  
 单层次标准化问题 4:980  
 单层对数位势 3:555  
 单层密度 2:685  
 单层热位势 4:830  
 单层推迟位势 3:262  
 单层位势 4:829  
 单层位势一阶导数定理 3:587  
 单层 Newton 位势 3:905  
 单传递置换群 4:131  
 单纯逼近 4:835  
 单纯逼近定理 4:835



- 单纯对象(范畴中的)\* 4:836  
 单纯分解 4:841  
 单纯复形 4:834  
 单纯复形的几何模型(在 Giever-  
 胡(世桢)意义下的) 4:835  
 单纯复形的几何模型(在 Milnor 意  
 义下的) 4:835  
 单纯概形 4:837  
 单纯集 4:837  
 单纯剪切运动 5:430  
 单纯空间 4:841  
 单纯谱 4:840  
 单纯区间 4:980  
 单纯同构 4:163  
 单纯同伦 4:836  
 单纯形法 4:833  
 单纯形搜索 4:834  
 单纯映射 4:836  
 单纯映射(带特异子复形的)  
 1:708  
 单纯子复形 4:834  
 单纯子集 4:837  
 单纯  $n$  上链 1:628  
 单代数 4:826  
 单代数群 4:778  
 单代数向量丛 5:411  
 单代数域扩张 2:626  
 单递归可枚举集 3:21  
 单点紧化 1:65;5:201  
 单调变换(控制系统的) 2:380  
 单调等价动力系统 2:383  
 单调等价瀑布 2:383  
 单调等价自同构 2:383  
 单调函数 3:820  
 单调函数(关于偏序的) 3:820  
 单调函数(逻辑代数的) 1:75  
 单调函数(在一点处的) 3:821  
 单调函数( $k$  值逻辑的) 3:820  
 单调基数不变量 1:473  
 单调连续范数 1:740  
 单调连续映射 1:721  
 单调收敛定理 3:378  
 单调算子 3:821  
 单调算子定理 1:335  
 单调算子(算法语言中的) 4:522  
 单调算子(在集合上的) 3:821  
 单调序列 3:821  
 单调映射 3:821  
 单调 Boole 函数 3:819  
 单调 Boole 函数求值问题 3:820  
 单对数纸 3:554  
 单泛代数 5:348  
 单分次代数 3:409  
 单分次 Lie 代数的分类 3:409  
 单分数 1:137;2:543;3:1001  
 单峰分布 5:331  
 单峰分布函数 5:331  
 单峰概率分布 3:783  
 单峰函数(区间上的) 2:74  
 单峰奇点 4:858  
 单服务台排队 4:453  
 单根(多项式的) 1:82  
 单根图 4:683  
 单根系(Lie 代数的) 3:416  
 单根(由房定义的) 4:683  
 单环 4:831  
 单极 4:894  
 单极点(函数的) 4:218  
 单集 4:832  
 单阶段问题(随机规划的) 5:23  
 单结合么拟群 3:565  
 单径双曲线 4:170  
 单块 3:747  
 单块群 3:747  
 单类语言 2:512  
 单粒子分布函数 1:385  
 单连导数 2:607  
 单连通包络(覆叠) 3:882  
 单连通单纯集 4:839  
 单连通复叠 4:950  
 单连通空间 4:841  
 单连通区域 4:841  
 单连通群 4:842  
 单连通拓扑空间 2:614  
 单连通 Chevalley 群 1:583  
 单连通 Riemann 曲面 4:635  
 单列环 5:337  
 单列模 4:751  
 单模 3:182  
 单奇点 4:501  
 单奇点(超曲面的) 4:858  
 单奇点(微分方程组的) 4:860  
 单群 4:828  
 单群(带算子域的) 3:1028  
 单射半径(Riemann 流形上一点的)  
 4:652  
 单射(内射) 3:82  
 单射 von Neumann 代数 3:993  
 单生半群 5:197  
 单生成拓扑群 3:300  
 单生成微分域扩张 2:420  
 单收敛 1:308  
 单输入流(呼唤的) 4:448  
 单速方程 5:256  
 单台机器问题 4:717  
 单态射 3:819  
 单态射(范畴中的) 3:819  
 单态射(向量丛的) 5:409  
 单同伦等价 5:229  
 单同伦型 4:828  
 单拓扑的范畴 5:205  
 单拓扑的具体范畴 5:206  
 单拓扑群 4:828  
 单位 5:337  
 单位胞腔 1:531;5:337  
 单位表示 5:337  
 单位除子 5:337  
 单位多圆盘 4:223  
 单位分解 4:608  
 单位分解(从属于一个覆盖的)  
 4:75  
 单位分解(分划) 3:548;5:83  
 单位分支 1:485  
 单位根 4:682  
 单位函子(恒等函子) 2:610  
 单位(函子添加的) 1:44  
 单位阶梯函数 5:243  
 单位立方体 5:337  
 单位脉冲函数 5:242  
 单位球 5:337  
 单位球面 5:337  
 单位权的方差 3:369  
 单位态射 5:337  
 单位态射(范畴的) 1:500  
 单位态射(恒等态射) 1:502;  
 2:611;5:337  
 单位向量 5:337  
 单位向量(伪 Euclid 空间中的)  
 4:366  
 单位因子 5:337  
 单位元 5:337

- 单位元的连通分支 1:774  
 单位元的连通分支( $p$  可除群的)  
     4:58  
 单位元(分式域的) 5:337  
 单位元分支 1:774  
 单位元(环中的) 4:673  
 单位元(拓扑群中的) 3:537  
 单位元(么元)(格的) 5:337  
 单位元(么元)(偏序集中的)  
     4:101  
 单位元(么元)(群中的) 2:781  
 单位圆 5:337  
 单位圆盘 5:337  
 单位正方形上的对策 2:631  
 单位子群 5:59  
 单位  $n$  立方体 5:337  
 单位  $n$  球 5:337  
 单位  $\Omega$  系统 1:108  
 单向函数 1:895  
 单向陷门函数 1:895  
 单向字问题 5:317  
 单项变换 3:817  
 单项表示 3:818  
 单项代换的群 3:819  
 单项范畴 3:817  
 单项矩阵 3:818  
 单项群 3:45;3:818  
 单项式 3:818  
 单项式向量 1:482  
 单项样条 3:819  
 单行曲线 5:319  
 单形 4:832  
 单形(抽象的) 4:832  
 单形(抽象复形的) 4:163  
 单形(单纯复形的) 4:834  
 单形的  $s$  维面 1:707  
 单型定理 1:852  
 单型凸曲面 1:852  
 单演半群 3:816  
 单演函数 3:815  
 单演函数(无处稠密集上的)  
     3:815  
 单演函数(在集合上的) 3:815  
 单演函数(在区域中的) 3:815  
 单演函数(在一点上的) 1:524;  
     3:815  
 单演集 3:814  
 单演逆半群 3:176  
 单演性 2:607  
 单样本 Student 检验 5:45  
 单叶函数 5:345  
 单叶函数的变分 5:377  
 单叶函数的参数表示 4:91  
 单叶双曲面 3:1018  
 单叶星形函数 4:982  
 单叶性半径 5:344  
 单叶性定理 5:343  
 单叶性条件 5:343  
 单叶映射 2:586  
 单叶状 Riemann 曲面 4:653  
 单一元代数 5:311  
 单应变换 1:191  
 单有理簇 5:337  
 单余自反子范畴 4:539;5:204  
 单域扩张 2:422  
 单元(有限元法中的) 5:392  
 单直纹簇 2:884  
 单值变换 3:813  
 单值定理 3:812;1:151;5:378  
 单值反函数 3:169  
 单值分支(解析函数的) 1:435  
 单值函数 3:811  
 单值化 5:327  
 单值化参数 2:234  
 单值化定理 2:583  
 单值化(多值解析函数的) 5:327  
 单值化(集合的) 5:327  
 单值化问题(关于 Riemann 曲面的)  
     4:636  
 单值化原理(逻辑中的) 3:155  
 单值化(Riemann 曲面的) 5:328  
 单值解析函数 1:155  
 单值矩阵 3:812  
 单值奇点 4:855  
 单值群 3:812  
 单值群(代数函数的) 1:86  
 单值算子 3:812  
 单值性(覆叠的) 1:879  
 单值性(全纯映射族在一点的)  
     3:813  
 单值性问题(关于算子迹的)  
     3:995  
 单值映射 3:609;3:853  
 单指令多数据机 1:730  
 单众数分布(单峰分布) 5:331  
 单周期函数 4:842  
 单子 1:503;4:979;5:279  
 单子的伴随 1:504  
 单子的函子 1:504  
 单 Lie 代数 3:404  
 单 Lie 代数(Cartan 型的) 3:406  
 单 Lie 群 3:424;3:430  
 淡拓扑 5:364  
 淡中 - Artin 问题 3:269  
 淡中 - Крейн 对偶定理 4:241  
 导出变换 4:199  
 导出层 4:805  
 导出长度(群的) 4:897  
 导出常微分方程 2:578  
 导出单纯复形 5:59  
 导出法则 2:56  
 导出范畴 2:53  
 导出函子 2:55  
 导出集 2:56  
 导出集(集合的) 1:31  
 导出几何对象 2:712  
 导出列(Lie 代数的) 3:413  
 导出群(群的) 1:676  
 导出数(沿罗的) 5:461  
 导出数(Dini 导数) 2:188;3:814  
 导出正合偶 4:921  
 导出自同构 2:53  
 导出自同构(遍历理论中的) 2:53  
 导出自同构(测度空间的) 2:53  
 导出 Lie 群 3:427  
 导出  $t$  设计 5:127  
 导数 2:52  
 导数(多项式的) 2:236  
 导数(非线性算子的  $k$  阶的)  
     3:948  
 导数(函数关于一个集合的)  
     2:607  
 导数(函数沿罗的) 5:460  
 导数(函数沿向量场的) 5:413  
 导数(函数在集合上的) 2:53  
 导数(函数在向量场方向上的)  
     5:413  
 导数(函数在一点处的) 2:52;  
     2:99  
 导数算子(微分环的) 2:98  
 导数(随机过程的) 5:16



- 导数(沿动力系统的流的) 2:170  
 导数(映射的) 2:171  
 导数(有限决定函数的) 2:482  
 导数(Weyl 意义下的) 2:453  
 导子(超代数的) 5:78  
 导子分歧定理 1:738  
 导子(环中的)\* 2:49  
 导子(类群的) 1:98  
 导子模 2:51  
 导子(拟特征标的) 4:420  
 导子(特征标的)\* 1:737  
 导子(椭圆曲线的) 2:345  
 导子(微分) 1:647;1:674  
 导子(张量场的) 1:876  
 导子(整闭包的)\* 1:738  
 导子(Abel 扩张的)\* 1:738  
 导子(Abel 域扩张的) 1:738  
 导子(Dirichlet 特征标的) 2:209  
 倒数 4:512  
 到达间隔时间分布 4:448  
 道路 4:108  
 道路代数 4:458  
 道路积分 4:109  
 道路空间 4:109  
 道路连通空间 4:108  
 道路连通拓扑空间 1:780  
 道路连通性 1:780  
 道路纤维空间 4:109  
 道路追踪法 4:87  
 等比数列 2:713  
 等边半正多边形 4:225  
 等边三角形 2:338  
 等部件图形 2:372  
 等参元(有限元法中的) 5:393  
 等差数列 1:232  
 等差数列(一阶的)\* 1:232  
 等差数列( $m$  阶的) 1:232  
 等待制的单通道排队 4:453  
 等待制的多通道排队 4:449  
 等待制系统 4:446  
 等度可分解集合 5:135  
 等度可分解性 4:393  
 等度连续函数集 2:376  
 等度连续算子半群 4:765  
 等度连续性 2:376  
 等度连续 Schauder 基 1:318  
 等度收敛 4:929  
 等度收敛级数 2:376  
 等度收敛性 2:537  
 等度有界的函数序列 1:814  
 等对向量 4:80  
 等仿射变换 5:158  
 等仿射弧长 1:54  
 等仿射几何学 2:375  
 等仿射空间 1:55  
 等仿射联络 2:375  
 等仿射挠率 1:55  
 等仿射平面 2:376  
 等仿射曲率 1:54  
 等仿射群 1:59  
 等高线 3:391  
 等化子 3:254  
 等积映射 5:158  
 等基数量词 4:403  
 等级部件系统(字母表上一条链的) 5:114  
 等级非退化条件 4:439  
 等价 2:377  
 等价变换 2:379  
 等价变换(触点模式的) 2:380  
 等价变换(代数学中的) 2:379  
 等价变换(功能元图的) 2:380  
 等价变换(控制系统的) 2:379  
 等价变换(算法的) 2:380  
 等价变换(自动机的) 2:380  
 等价表示 2:378  
 等价表示(Lie 代数的) 4:589  
 等价乘子(Hamilton 方程的) 2:812  
 等价除子 2:270  
 等价(除子的) 2:270  
 等价触点网络 1:801  
 等价弹性系数 2:826  
 等价的局部 Lie 群 3:428  
 等价(等面积)地球投影 1:489; 1:494  
 等价(等势)集合 1:474;1:475  
 等价递归表示 4:525  
 等价度量 5:252  
 等价多项式矩阵 3:672;5:123  
 等价二次型 4:382  
 等价(二元二次型的) 3:627  
 等价范畴 2:378  
 等价(范畴的)\* 2:278  
 等价范数 3:966  
 等价方程组 2:374  
 等价赋值 5:365  
 等价覆盖 1:644  
 等价关系 1:626;1:760;4:350  
 等价关系(解析函数元素的) 1:150  
 等价关系(竞赛图中的) 5:237  
 等价函数 4:7  
 等价(合痕)拉丁方 3:354  
 等价基 1:317  
 等价基本序列 3:727  
 等价基(有限生成模的) 5:495  
 等价基(Banach 空间中的) 1:308  
 等价几何对象 2:710  
 等价记号 1:247  
 等价紧化 1:683  
 等价浸入(流形的) 3:20  
 等价晶体群 1:898  
 等价局部同态 3:537  
 等价局部同态(局部 Lie 群的) 3:428  
 等价矩阵 3:977;2:334  
 等价矩阵束 5:123  
 等价扩张(群的) 2:422  
 等价扩张(拓扑空间的) 1:683  
 等价类 2:377  
 等价类(一致性结构的) 5:324  
 等价链环 3:273  
 等价链环图 3:270  
 等价链(区域的截线的) 3:445  
 等价(逻辑的) 2:378  
 等价枚举 2:366  
 等价模式(定义函数的) 1:135  
 等价纽结 3:273  
 等价平衡解 3:931  
 等价求和法 2:378  
 等价(求和法的) 5:74  
 等价曲线(关于解析延拓的) 4:854  
 等价全纯函数芽(在 0 处的) 4:866  
 等价群表示 1:141  
 等价扰动法 1:30  
 等价生成文法 2:750  
 等价算法(关于字母表的) 1:134  
 等价态射(范畴中的) 4:461

- 等价投影(属于 von Neumann 代数的) 5:441  
 等价拓扑嵌入 5:221  
 等价伪群结构 4:370  
 等价文法 2:514  
 等价问题 2:516  
 等价问题( $C^\infty$  函数类的) 4:559  
 等价问题( $G$  结构的) 2:620  
 等价下配边 4:179  
 等价(纤维化的) 1:295  
 等价线性力 2:826  
 等价(向量丛映射的) 1:295  
 等价形式系统 2:520  
 等价形式形变(代数的) 2:29  
 等价型(随机变量的) 5:5  
 等价型(随机过程的) 5:5  
 等价性定理(差分格式的收敛性和稳定性的) 2:86  
 等价性原理(系综的) 4:1006  
 等价性( $C^\infty$  函数类的) 4:559  
 等价(映射芽的) 2:482  
 等价有理函数(代数簇上的) 4:497  
 等价有理数基本序列 4:513  
 等价语言 1:75  
 等价语义 3:130  
 等价整数对 4:498  
 等价(自动机状态的) 1:258  
 等价阻尼系数 2:826  
 等价  $C^*$  图册 2:90  
 等价 Cauchy 序列(基本序列) 3:727  
 等价 Heegaard 分解 2:846  
 等价 Heegaard 图 2:846  
 等价 Hermite 型 2:856  
 等价(Hermite 型的) 2:856  
 等价  $L/k$  形式 2:508  
 等价 Petri 网 4:147  
 等间隔的地图投影 1:494  
 等角半正多边形 4:224  
**等角多面体和等面多面体 3:187**  
**等角轨道 3:187**  
 等角圆 1:753  
 等距 3:192  
 等距变换 1:851;3:192  
 等距(等度量)坐标系 1:493  
 等距地图投影 1:489;1:494  
 等距对应 3:192  
 等距结构 1:627  
 等距结构(配边于零的) 1:627  
**等距浸入 3:188**  
 等距浸入(二维流形的) 3:190  
 等距空间 3:192  
**等距离集 2:376**  
 等距嵌入 3:188  
**等距曲面 3:193**  
 等距曲面的配比曲面 1:642  
 等距曲面(Лобачевский 空间中的) 3:525  
 等距曲线(Лобачевский 几何学中的) 3:525  
 等距群 3:162  
 等距群(具有仿射联络的空间的) 3:318  
 等距双线性型 1:360  
**等距算子 3:192**  
 等距同构对称双线性型 5:516; 5:518  
 等距同构(双线性型的) 1:360  
 等距同构斜对称双线性型 4:871  
 等距同构 Banach 代数 1:300  
 等距同构(Hermite 空间的) 2:856  
 等距同构 Hilbert 空间 2:871  
 等距线(椭圆空间中的) 4:624  
 等距线性变换 3:513  
**等距形变 2:30**  
 等距形变(带边界的非闭曲面的) 2:31  
 等距形变(负曲率的曲面的) 2:31  
 等距形变(曲率变号的曲面的) 2:31  
 等距形变(凸曲面的) 2:30  
 等距形变(正亏格闭曲面的) 2:30  
 等距形式 2:490  
**等距映射 3:192**  
 等距映射(Riemann 空间的) 4:649  
 等距中性双线性型 5:516  
 等距 Hermite 空间 2:856  
 等距 Hermite 型 2:856  
 等距(Hermite 型的) 2:856  
 等距 Riemann 空间 4:646  
 等距(Riemann 空间的) 4:657  
 等距(Лобачевский 几何学中) 3:525  
 等宽曲线 1:310  
**等离子体双液体模型 5:300**  
 等面多面体 3:187  
 等面积(等价)地图投影 1:489  
 等谱方程 3:290  
 等谱流 3:290  
 等强度的偏微分算子 4:301  
**等倾线 3:185**  
 等倾线法 2:208;3:186  
**等容与等部件的图形 2:372**  
 等时曲线 1:923  
 等时问题 1:7  
 等式(代数中的) 2:379  
 等式集 4:257  
 等势集 1:475  
 等势(集合的) 4:799  
**等视曲线 3:185**  
**等维数理想 2:376**  
 等维数(理想的) 2:376  
**等温曲面 3:199**  
**等温网 3:199**  
 等温形式 2:490  
 等温跃变 4:814  
**等温坐标 3:198**  
 等效原理(引力理论中的) 2:766  
 等信息量的信息元素 1:125  
 等腰梯形 5:264  
 等中心仿射弧长 1:55  
 等中心仿射空间 1:55  
 等中心仿射曲率 1:55  
 等周比 3:197  
**等周不等式 3:194**  
**等周不等式(经典的)\* 3:197**  
 等周差 3:197  
**等周问题 3:198**  
 等轴测投影法(等测法) 1:293  
 等轴双曲线 2:941  
 低亏格(链环的) 3:278  
 低密度奇偶校验码 2:389  
 低幂定理(微分代数学中的) 2:96  
 底(代数向量丛的) 5:410  
 底(对数的) 3:551  
 底对象(代数理论的模型的) 5:349  
 底(多面体的)  
 底(管状区域的) 5:286



- 底函子 5:206  
 底(环柄的) 2:814  
 底空间(概形的) 4:718  
 底空间(拓扑空间上锥的) 1:738  
 底空间(纤维丛的) 2:169  
 底空间(纤维空间的) 2:466  
 底(棱柱的) 4:304  
 底(棱锥的) 4:376  
 底(幂的) 2:419  
 底球面(环柄的) 2:814  
 底(数系的) 4:201  
 底(梯形的) 5:264  
 底(柱面的) 1:926  
 底(锥的) 1:738  
 底(自然对数的) 2:418  
 底(Лобачевский 几何中线束的) 3:525  
 地平线 2:768  
 地球物理学中的数学问题 2:725  
 地热学中的数学问题 2:727  
 地图投影 1:489;1:493  
 地图投影(等面积的) 1:494  
 地图投影类 1:494  
 地图坐标 1:496  
 地心模型 3:648  
**递归 4:520**  
 递归表示 4:525  
 递归表示模型 4:525  
 递归表示模型论 4:524  
 递归不可分集(自然数的) 2:338  
 递归不可分逻辑理论 1:886  
**递归等价类型 4:523**  
 递归等价(模型的) 4:525  
**递归定义 4:522**  
 递归度量空间 1:791  
**递归对策 4:524**  
 递归方法(构造区组设计的) 1:376  
 递归分析 1:785  
**递归(高阶的)\* 4:522**  
 递归公理化类(语言模型的) 1:293  
**递归估计 4:523**  
**递归关系 4:527**  
 递归归纳公理 3:47  
**递归函数 4:523**  
 递归函数(相对于一函数) 2:39  
 递归级数 4:527  
 递归集 4:528  
**递归集合论 4:527**  
 递归集(自然数的) 2:17  
 递归矩阵 Riccati 方程 4:617  
 递归可分集(自然数的) 2:338  
 递归可枚举的不可判定度 2:39  
 递归可枚举集 2:62  
 递归可枚举集的标准类 2:367  
 递归可枚举集(相对另一集合的) 2:39  
 递归可枚举文法 2:514  
 递归可枚举语言 2:514  
 递归可实现性 4:526  
 递归模式 1:134  
 递归模型 4:526  
**递归模型论 4:524**  
 递归偏序关系 5:480  
**递归事件 4:518**  
 递归算术函数 2:465  
**递归算子 4:526**  
 递归同构集 1:886  
**递归谓词 4:526**  
 递归稳定模型 4:525  
**递归序列 4:527**  
 递归序数 5:246  
 递归子集 1:132  
**递减函数 2:20**  
 递减函数(在一点处的) 3:821  
 递减几何数列 2:713  
 递减失效率 4:576  
 递减实数序列 3:439  
**递减序列 2:21**  
**递推公式 4:519**  
 递推公式(Bernoulli 数的) 1:329  
 递推公式(Bessel 函数的) 1:342  
**递推关系 4:518**  
**递推函数 4:519**  
 递增等比数列 2:713  
**递增函数 3:32**  
 递增函数(在一点处的) 3:821  
 递增可测分划 2:364;3:238  
 递增失效率 4:576  
**递增序列 3:32**  
**第二边值问题 4:736**  
 第二二次形式(流形的) 2:718  
 第二二次形式(曲面的) 4:390  
 第二范畴集 1:506  
 第二范畴拓扑空间 3:992  
 第二分离原理 2:60;4:787  
 第二混合边值问题 3:767;3:770  
 第二机器类 1:124  
 第二基本定理(不变量理论的) 3:167  
 第二基本定理(射影几何学的) 1:659  
 第二基本假设(由特征标所诱导的群表示上的) 4:3  
**第二基本形式 4:737**  
 第二基本形式(流形的) 2:718  
 第二基本形式(曲面的) 2:612  
 第二基本张量 2:718  
 第二基本张量形式 2:718  
 第二极线 1:903  
**第二可数公理 4:736**  
 第二可数拓扑空间 5:364  
 第二类本征值(辛矩阵的) 2:811  
 第二类本征值( $J$  酉矩阵的) 2:811  
 第二类典范联络(殆 Hermit 流形上的) 2:856  
 第二类群 1:900  
 第二类周期变换逼近 1:194  
 第二类 Euler 积分 2:401;3:117  
 第二清单(映射的) 1:664  
 第二曲率 5:228  
 第二速端曲线变换 2:887  
 第二唯一性定理(准素分解的) 4:288  
 第二小平曲面 2:356  
 第二因子(类数的) 1:924  
 第二张量形式 2:718  
 第二中值定理 1:389;3:375  
 第二中值公式(Riemann 积分的) 4:628  
 第二轴(椭圆的) 2:341  
 第二自然正规形式(矩阵的) 3:978  
 第二 Baire 范畴 2:671  
 第二 Beltrami 微分参数 3:339  
 第二 Bertini 定理 1:339  
 第二 Bianchi 恒等式 1:351;1:911;4:642  
 第二 Brauer-Thrall 猜想 4:595

- 第二 Cartan - Kähler 存在定理 4:152  
 第二 Cousin 问题 1:873  
 第二 Cousin 问题(用除子表述的) 1:873  
 第二 Cousin 问题(在上同调表述下的) 1:873  
 第二 Euler 代换 2:405  
 第二 Korn 不等式 3:289  
 第二 Laplace 律 2:654;3:340  
 第二 Stiefel - Whitney 类 1:556  
 第二 Колмогоров 方程 3:284  
 第二 Стеклов 问题 4:1031  
 第二 Чаплыгин 变换 2:887  
**第三边值问题 5:165**  
 第三二次形式(曲面的) 4:390  
 第三分解(Noether 环的) 3:301  
 第三根 5:150  
 第三混合边值问题 3:767;3:770  
 第三基本形式(超曲面的) 4:946  
 第三基本形式(曲面的) 2:613  
**第三理想 5:150**  
 第三 Euler 代换 2:405  
 第十判别问题 2:191  
**第五公设 2:468**  
**第一边值问题 2:488**  
 第一边值问题(Laplace 方程的) 2:220  
 第一陈(省身)类 1:556  
 第一次返回时刻 2:53  
 第一次拓展( $G$  结构的) 2:620  
 第一次延长 1:482  
 第一二次形式(流形的) 2:718  
 第一二次形式(曲面的) 4:390  
 第一范畴集 1:506  
 第一分离公理 3:446  
 第一分离原理 2:60;4:780  
 第一混合边值问题 3:767;3:770  
 第一机器类 1:124  
 第一基本定理(不变量理论的) 3:167  
 第一基本定理(射影几何学的) 4:346  
 第一基本假设(由特征标所诱导的群表示上的) 4:3  
**第一基本形式 2:489**  
 第一基本形式(流形的) 2:718  
 第一基本形式(曲面的) 2:489; 2:612  
 第一基本张量 2:489  
 第一基本张量形式 2:718  
 第一极线 1:903  
**第一可数公理 2:488**  
 第一类本征值(辛矩阵的) 2:811  
 第一类本征值( $J$  酉矩阵的) 2:811  
 第一类典范联络(殆 Hermite 流形上的) 2:856  
 第一类基本问题(弹性平面理论中的) 2:332  
 第一类群 1:900  
 第一类周期变换逼近 1:194  
 第一类 Euler 积分 1:349;2:401; 3:117  
 第一速端曲线变换 2:886  
 第一唯一性定理(准素分解的) 4:288  
 第一象限谱序列 4:921  
 第一小平曲面 2:356  
 第一因子(类数的) 1:924  
 第一正则 Poincaré 问题 2:581  
 第一轴(椭圆的) 2:341  
 第一自然正规形式(矩阵的) 3:978  
 第一 Baire 范畴 2:671  
 第一 Baire 类 1:296  
 第一 Beltrami 微分参数 3:339  
 第一 Bertini 定理 1:339  
 第一 Bianchi 恒等式 1:351; 1:911;4:619  
 第一 Brauer - Thrall 猜想 4:595  
 第一 Brillouin 带 5:444  
 第一 Cartan - Kähler 存在定理 4:152  
 第一 Cousin 问题 1:872  
 第一 Cousin 问题(在上同调表述下的) 1:872  
 第一 Euler 代换 2:405  
 第一 Korn 不等式 3:289  
 第一 Laplace 律 3:340  
 第一 Stiefel - Whitney 类 1:556  
 第一 Колмогоров 方程 3:284  
 第一 Стеклов 问题 4:1031  
 第一 Чаплыгин 变换 2:886  
 第  $i$  次合冲模 2:880  
 第  $i$  次拓展( $G$  结构的) 2:620  
 第  $i$  非正则性(完全线性系的) 3:185  
 第  $i$  相继最小值(距离函数在点格上的) 2:723  
 第  $i$  中间继电器 4:573  
 第  $i$  Betti 数 3:314  
 第  $k$  标准角形 4:980  
 第  $k$  陈(省身)类 1:585  
 第  $k$  结构丛(由伪群结构决定的) 4:370  
 第  $k$  顺序统计量 4:7  
 第  $p$  层质量 3:777  
 第  $p$  积分曲率 3:777  
 第  $p$  截面测度 3:777  
 第  $p$  Понтрягин 幂 4:245  
 第  $q$  陈(省身)类 1:556  
 第 0 Baire 类 1:296  
 缔括线(直纹曲面的) 4:698  
 《蒂迈》(Plato 著) 4:182  
 典范闭集 1:462;2:303  
 典范变量 4:204  
 典范标架 3:841  
 典范表示(半鞅的) 4:771  
 典范表示(随机过程的) 4:915  
 典范表示(自伴算子的) 3:980  
 典范表示(自然数的) 2:256  
 典范测度系 3:696  
 典范除子类(代数簇的) 2:147  
 典范丛 1:461  
 典范代数曲线 1:79  
 典范多项式矩阵 3:672  
 典范二次形式(Hermite 流形的) 2:859  
 典范方程 3:865  
 典范方程(自动机的) 1:262; 1:276  
 典范分解 4:804  
 典范分解(不定度规空间的) 4:905  
 典范分解(素数的) 4:290  
 典范分解(压缩算子的) 1:821  
 典范赋值 5:365  
 典范覆盖 4:328  
 典范环 3:279  
 典范基(遗传代数的) 2:695



- 典范集** 1:462  
 典范截线(二维流形的) 5:296  
 典范开集 1:462  
**典范类** 1:460  
 典范类(代数簇的) 2:146  
 典范联络 4:532  
 典范率形式 5:110  
 典范满同态 4:460  
 典范平移(单纯复形的) 4:835  
 典范奇点 4:501  
**典范嵌入** 1:461  
**典范曲线** 1:460  
 典范曲线(Fano 簇的) 2:451  
 典范生成元(半单 Lie 代数的)  
 1:481;1:486  
 典范同态(半群的) 1:553  
 典范图册 2:529  
 典范图式(构造自动机的) 1:262  
 典范椭圆积分(第二类) 2:348  
 典范椭圆积分(第三类) 2:348  
 典范椭圆积分(第一类) 2:348  
 典范拓扑(层范畴上的) 4:869  
 典范网络模型 3:894  
 典范维数 3:280  
 典范维数(椭圆曲面的) 2:355  
 典范问题法 2:173  
 典范线丛 3:240  
 典范线性假设 3:488  
 典范形式定理(关于常微分方程组  
 的) 3:983  
 典范形式定理(关于共和积的)  
 1:149  
 典范形式(二阶偏微分方程的)  
 2:130  
 典范形式(矩阵的) 3:979  
 典范形式(偏微分方程的) 3:774  
 典范形式(曲面的) 2:490  
 典范形式(双曲型偏微分方程的)  
 3:487  
 典范映射 1:461  
 典范周期矩阵(Abel 微分的)  
 5:163  
 典范自由分解 1:648  
 典范左微分形式 3:680  
 典范坐标(解析么拟群上的第一类)  
 3:566  
 典范坐标(辛形式的) 4:150  
 典范坐标(Lie 群的) 2:419  
 典范 Fredholm 方程 3:919  
 典范 Gauss 映射 4:947  
 典范 Hermite 联络 2:858  
 典范 Hermite 形式 2:896  
 典范 Martin 表示 3:628  
 典型半单 Lie 代数 3:417  
 典型表示(超代数的) 5:79  
 典型代数 3:434  
 典型单紧 Lie 代数 3:427  
 典型单 Lie 代数的分类 3:417  
 典型单 Lie 代数(特征为  $p$  的)  
 3:405  
 典型分解(切空间关于和乐群的)  
 3:163  
 典型割线 1:462  
 典型割线(解析函数的) 4:605  
 典型共形映射 1:754  
 典型广义四边形 4:55  
 典型广义随机场 4:482  
 典型函数元 1:151  
**典型积** 1:461  
 典型积(无穷格的) 1:462  
**典型截线** 1:462  
**典型群** 1:600  
 典型群的表示 4:596  
**典型实函数** 5:305  
 典型实函数( $p$  阶的) 3:868  
 典型实正则函数 1:635  
**典型相关** 1:460  
**典型相关系数** 1:460  
 典型域(共形映射下的) 1:754  
 典型元(基本拓扑类的) 2:61  
 典型 Abel 积分 1:14  
 典型 Lie 代数系列 3:403  
 典型 Wiener-Hopf 因式分解(函数  
 的) 3:98  
 点 5:202  
 点到集合的映射 3:853  
**点的度** 2:38  
 点的和(射影代数中的) 4:329  
 点的和(射影空间中的) 5:526  
**点的特殊化** 4:909  
 点(第 1 类中的) 5:423  
 点(第 2 类中的) 5:423  
 点对称群 1:900  
 点格 2:721;3:358  
 点(构造度量空间的) 1:791  
 点估计 4:995  
**点估计量** 4:201  
 点过程 5:10  
 点积(内积) 3:84  
 点可数基 1:312;1:473;3:729  
 点类(设计的) 5:261  
 点谱 3:493;4:923  
 点谱(算子的) 4:934  
 点(区组设计的) 1:375  
 点群(晶体群的) 1:900  
 点群(设计的) 5:261  
 点(射影空间的) 4:344  
 点(射影平面的) 4:340  
 点事件 4:568  
 点(随机点过程的) 5:11  
**点态剩余** 4:203  
**点态收敛** 4:203  
**点态收敛拓扑** 4:203  
 点态收敛(逐点收敛)(Fourier 级数  
 的) 2:11  
 点态稳定化子 4:131  
 点(拓扑空间的) 5:198  
 点微分 1:675  
**点窝** 5:526  
 点(向量空间中的) 5:417  
**点(小数点,浮点)** 4:201  
 点序列(构造度量空间中的)  
 1:791  
 点映射法 3:949  
 点有限覆盖 1:882  
 点有限基 1:313  
 点源法 3:653  
 点源函数(常系数微分算子的)  
 2:686  
 点状剩余(拓扑空间的) 4:203;  
 4:579  
 点状拓扑空间 4:119;4:579  
 点(字母表上链的) 5:113  
 点坐标 1:857  
 点 Jacobi 迭代 3:217  
 电报方程 5:141  
 电报信号 1:861  
 电磁勘探 2:725  
 电磁学 2:714  
 电动力学 2:230  
 电感 3:894

- 电荷 3:340;4:406
- 电荷守恒定律 3:694
- 电容 3:894
- 电容器 1:466
- 电容器容量 1:466
- 电网络 3:893
- 电位(网络结点的) 3:893
- 电子码本 1:894
- 电子扑克 1:893
- 电阻 3:894
- 迭代 3:202**
- 迭代逼近法 3:203
- 迭代闭包(形式语言的) 2:513
- 迭代法 3:204**
- 迭代法(带有 Чебышев 参数的) 5:258
- 迭代法(高阶的) 3:943
- 迭代法(求解完全本征值问题的) 3:459
- 迭代法(求解线性代数方程组的) 3:459
- 迭代法(线性代数中的) 3:458
- 迭代法(应用于矩阵本征值问题的) 3:204
- 迭代过程 3:459
- 迭代(函数的) 3:202
- 迭代换位子 4:361
- 迭代(积分核的) 3:202
- 迭代算法 3:203**
- 迭代网络 1:273
- 迭代序列 3:203
- 迭代(字的) 4:545
- 叠对数律(重对数律) 3:365**
- 叠合 1:780
- 叠核(迭代核) 3:202**
- 叠积分 4:584
- 叠加法 3:822
- 叠加(函数的)\* 5:80**
- 叠加(逻辑中函数集合上的) 3:605
- 叠加算子 3:947
- 叠加(映射的) 3:609
- 叠加( $n$  阶的) 4:333
- 顶点(超图的) 2:959
- 顶点(抽象单形的) 1:707
- 顶点(抽象复形的) 1:707
- 顶点(抽象复形中单形的) 4:163
- 顶点(单纯复形的) 4:834
- 顶点(单形的) 4:832
- 顶点的度(超图的) 2:959
- 顶点的度(图的) 2:753;3:597
- 顶点(多边形的) 4:223
- 顶点(多面角的) 4:227
- 顶点(多面体的) 4:228
- 顶点分离(图中的) 2:756
- 顶点覆盖(图的) 3:288
- 顶点(角的)(角顶) 1:181
- 顶点连通度数 2:756
- 顶点(卵形线的) 4:53
- 顶点(抛物线的) 4:66
- 顶点(平面曲线的) 2:156
- 顶点群(图的) 2:754
- 顶点(双曲抛物面的) 2:944
- 顶点算子 3:243
- 顶点(凸多面体的) 1:846
- 顶点(凸锥的) 1:842
- 顶点(椭圆的) 2:341
- 顶点(椭圆抛物面的) 2:352
- 顶点(拓扑空间上的锥的) 1:738
- 顶点(完全四边形的) 4:379
- 顶点(网络的) 3:893
- 顶点(锥的)(锥顶) 1:738
- 顶点(锥面的) 1:769
- 顶点(Euclid 单形的) 1:707
- 顶集 5:175
- 定常轨道(经济发展的) 3:637
- 定常浸渐不变量 1:41
- 定常流动 5:513
- 定常问题(反应扩散方程的) 4:507
- 定常约束 2:891
- 定点系统 4:694
- 定点运算 4:201
- 定额对策 1:856
- 定发散序列 3:254
- 定核 2:25**
- 定积分 2:25**
- 定积分(Cauchy 意义下的) 1:513
- 定宽曲线 1:784**
- 定宽体 1:784**
- 定理 5:154**
- 定理 A(H. Cartan 和 J. - P. Serre 的) 1:874
- 定理 B(H. Cartan 和 J. - P. Serre 的) 1:874
- 定亮度体 1:784
- 定量的 Tauber 定理 5:139
- 定律(法则) 5:399;5:401
- 定倾曲线 1:912**
- 定时对策(涉及时刻选择的对策) 2:630
- 定双线性型 5:516
- 定向 4:16**
- 定向闭链 4:17
- 定向(闭流形的) 4:18
- 定向层(同调流形的) 2:909
- 定向(丛的) 4:17
- 定向单形 1:707;4:16
- 定向的变换(复形的) 1:707
- 定向复形 1:707
- 定向覆叠(流形的) 4:17
- 定向(古典数学中的) 4:16
- 定向(广义上同调论中的) 4:17
- 定向类 2:397
- 定向类(连通流形的) 2:612
- 定向(流形的) 4:17
- 定向面积 1:221
- 定向拟阵 3:678
- 定向配边 1:623
- 定向配边理论 1:622
- 定向上同调理论 1:624
- 定向图 2:760**
- 定向图册 4:16
- 定向下配边 1:402
- 定向下配边流形 1:401
- 定向纤维化 4:17
- 定向(纤维化的) 4:17
- 定向(向量丛的) 5:166
- 定性方法(变分学中的) 5:383
- 定性方法(非线性振动的) 3:949
- 定性理论(非线性方程组的) 4:396
- 定性理论(微分方程的)\* 4:395**
- 定性理论(微分算子的谱的) 4:929
- 定性理论(线性微分方程组的) 4:395
- 定性理论(Banach 空间上的微分方程的)\* 4:400**
- 定义出现(词位的) 1:129
- 定义方程 2:24**



- 定义方程(二阶线性常微分方程解的) 3:499
- 定义关系** 2:24
- 定义函数(超函数的) 2:953
- 定义函数的函数等价模式 1:134
- 定义函数集(超函数的) 2:953
- 定义集(函数的) 2:585
- 定义理想(adic 拓扑的) 1:41
- 定义算子** 2:24
- 定义伪群(流形上伪群结构的) 4:369
- 定义序列(开 Riemann 曲面上的区域的) 4:639
- 定义域** 2:276
- 定义域(对应的) 1:865
- 定义域(函数的) 2:276
- 定义域(解释的) 3:145
- 定义域(算子的) 3:1025
- 定义域(态射的) 1:502
- 定义域(映射的) 3:609
- 定义域(Cauchy 问题解的) 1:521
- 定周长体 1:784
- 定子空间(不定度规空间的) 4:905
- 定子空间(内积空间的) 2:877
- 東屋代数 1:444
- 动力学方程** 3:260
- 动力学位势 3:322
- 动力控制系统 1:264
- 动力系统** 2:309
- 动力系统的度量理论** 2:312
- 动力系统的轨道 1:539;1:542
- 动力系统的谱** 4:932
- 动力系统的熵理论** 2:364
- 动力系统的同调** 2:910
- 动力系统的状态 2:309
- 动力系统(对应于切触形式的) 1:801
- 动力系统(具有离散时间的) 2:311
- 动力系统中的万有性态** 5:350
- 动力学** 2:312
- 动力学的普遍方程 5:395
- 动力学方程 5:395
- 动力学方法(稳定性的) 4:968
- 动力学解释(常微分方程组的) 2:309
- 动力学问题(弹性理论的)\*** 2:304
- 动力学问题(断裂力学中的) 5:298
- 动力学问题(关于弹性系统稳定性的) 4:968
- 动力学问题(塑性理论中的) 4:176
- 动力学(物理系统的) 4:991; 4:1005
- 动力学系统(输入-状态-输出形式的) 1:921
- 动量 2:309
- 动量(力学中的) 2:806
- 动能 4:567;5:395
- 动态对策** 2:304
- 动态规划** 2:307
- 动态规划方程(Bellman 方程) 1:323
- 动态过程 3:1030
- 动态逻辑 5:156
- 动态问题(运筹学中的) 3:1023
- 动态系统(实现行为的) 5:118
- 动态响应率 4:724
- 动态序列 5:179
- 动质量 3:631
- 动作者 4:843
- 冻结积分** 2:578
- 冻结系数法 3:473
- 冻结系数(偏微分算子的) 2:125
- 逗号范畴 1:503
- 独立补(可测分解的) 3:38
- 独立测度** 3:38
- 独立的(无关的)赋值 5:365
- 独立点集(射影空间中的) 4:344
- 独立公理 3:37
- 独立公理系统 3:37
- 独立函数系** 3:37
- 独立集(无关集) 1:315
- 独立集(无关集)(群中的) 2:824
- 独立集(无关集)(Boole 代数中的) 1:391
- 独立集(组合几何中的) 1:666
- 独立可测分划 3:38
- 独立可测分解** 3:38
- 独立事件 3:35;4:314
- 独立事件类 3:35
- 独立试验 4:314
- 独立数(图的) 2:759
- 独立随机变量 3:70;3:72;4:315
- 独立随机变量系 3:38
- 独立随机变量(作为其他概形的来源的) 3:36
- 独立推导法则 3:37
- 独立(无关)元素组(模格中的) 3:793
- 独立性** 3:35
- 独立性(独立随机变量的函数的) 3:36
- 独立性(概率论中的) 3:35
- 独立性(公理系统的)\*** 3:37
- 独立性检验问题 3:956
- 独立性(事件的) 3:35
- 独立性(事件类的) 3:35;4:314
- 独立性(试验的) 4:313
- 独立性(数论中的) 3:36
- 独立性(随机变量的) 3:35;4:315
- 独立性(随机事件的) 3:35
- 独立性(Cantor 的连续性假设的) 4:349
- 独立元素集(向量空间中的) 3:38
- 独立元(向量格中的) 2:242
- 独立增量随机过程 5:17
- 独立子集(拟阵的) 3:677
- 赌徒的破产问题(输光问题) 2:630;4:486
- 度** 2:38
- 度(超图的边的) 2:959
- 度(超图的顶点的) 2:959
- 度(点的)\*** 1:38
- 度规等价的不定度规 Hilbert 空间 2:876
- 度(角的度量) 1:182
- 度(连续映射的) 2:38
- 度量不变量(保测变换的) 1:194
- 度量不可分解性 3:736
- 度量稠密集(弧上的) 5:335
- 度量稠密性 3:575
- 度量传递平稳随机过程 4:986
- 度量传递性 3:735
- 度量传递性(测度空间的分划的) 3:736
- 度量传递性(具有不变测度的动力系统的) 3:735

- 度量传递性(具有拟不变测度的动力系统的) 3:735
- 度量的射影定义** 4:333
- 度量等价的二次曲线 4:738
- 度量函数论(函数的度量理论)** 3:731
- 度量核型空间 3:998
- 度量化定理 5:199
- 度量化问题 5:218
- 度量阶 3:724
- 度量结构 1:360
- 度量结构(Riemann 流形的) 4:650
- 度量(具有指定曲率的) 4:652
- 度量空间** 3:726
- 度量空间的拓扑理论 3:727
- 度量空间的一般理论 3:726
- 度量空间理论(与代数结构相容的) 3:727
- 度量理论(动力系统的) 2:312; 2:382
- 度量理论(独立变量的 Diophantus 逼近的) 2:189
- 度量理论(连分数的) 1:807
- 度量理论(曲面的) 5:158
- 度量理论(相关变量的 Diophantus 逼近的) 2:190
- 度量联络** 3:723
- 度量连续性 1:811
- 度量平面 4:168
- 度量熵** 3:724
- 度量射影** 3:726
- 度量数论(数的度量理论)** 3:733
- 度量算法(构造度量空间的) 1:791
- 度量同构** 3:725
- 度量同构型 3:726
- 度量同态(测度空间的) 3:725
- 度量拓扑半群 5:197
- 度量外测度 1:470;4:53
- 度量维数** 3:724
- 度量系数(正交曲线坐标系的) 3:335
- 度量线性空间 5:252
- 度量形式 2:489;3:731
- 度量型 3:726
- 度量性质 3:726-727
- 度量张量** 3:731
- 度量正多边形 4:224
- 度量直线 4:337
- 度量自同构(测度空间的) 3:725
- 度量自同构(模的) 1:360
- 度量自同态(测度空间的) 3:725
- 度量 Boole 代数 4:552
- 度(图的顶点的) 2:753;3:597
- 度(映射的)\*** 1:38
- 端点 1:845
- 端点(闭凸集的) 3:545
- 端点(道路的) 4:108
- 端点(曲线的) 3:456;4:6;4:826
- 端点(椭圆几何学中线段的) 4:622
- 端点(中继触点电路的) 4:573
- 端对导纳矩阵 3:894
- 端对阻抗矩阵 3:894
- 端(拓扑空间的) 3:446
- 端子集(闭凸集的) 3:545
- 短波近似 4:752
- 短波绕射 2:173
- 短程有序 2:233
- 短幅摆线 1:923
- 短幅次摆线 5:282
- 短幅内摆线 2:962
- 短幅外摆线 2:371
- 短浸入 3:873
- 短嵌入 3:873
- 短塔逐步语义系统 4:1034
- 短语结构文法 2:514
- 短正合序列 2:411
- 短轴(椭圆的) 2:341
- 段(部分)(字的) 3:13
- 段(通信信道的) 1:669
- 段(信息的) 3:76
- 段(字母表上链的) 5:113
- 断层照相法** 5:184
- 断层照相法的应用 5:186
- 断触点 1:800
- 断裂的数学问题** 2:549
- 断裂力学中的二维问题** 5:298
- 断言** 1:236
- 断言语句 1:236
- 堆和半堆 2:844
- 堆(与群相关联的) 2:845
- 对比(对照)** 1:825
- 对边点(对角点)(完全四角形的) 4:330;4:379
- 对边点(四边形的) 2:450
- 对边(完全四角形的) 4:379
- 对部分变量的稳定性** 4:964
- 对策 2:634
- 对策(策略形式的) 2:637
- 对策(单位正方形的)\*** 2:631
- 对策的分类 2:634
- 对策的核** 3:254
- 对策的核子** 3:1000
- 对策轨线 4:247
- 对策(划分函数形式的) 1:856
- 对策局势** 2:632
- 对策(具有分层结构的)\*** 2:632
- 对策(具有激励结构的) 2:634
- 对策(具有“生命线”的) 4:376
- 对策(具有完全信息的) 4:247
- 对策(具有信息滞后的) 2:304
- 对策(扩充形式的) 4:248
- 对策论** 2:634
- 对策论的历史 2:634
- 对策论的应用 2:636
- 对策论中的鞍点** 4:706
- 对策论中的核心** 1:858
- 对策论中的解** 4:895
- 对策论中的稳定性** 4:965
- 对策(涉及时刻选择的)\*** 2:630
- 对策(图上的)\*** 2:631
- 对策位置 2:635
- 对策问题(不完全信息控制的) 2:151
- 对策(无旁支付的) 1:856;2:635
- 对策(正规形式的) 2:637;5:29
- 对策  $\Gamma_1$  2:632
- 对策  $\Gamma_2$  2:632
- 对策  $\Gamma_3$  2:632
- 对称** 5:106
- 对称半群 4:757
- 对称半双线性型 1:860
- 对称表示(对合代数的) 2:785
- 对称差 1:398;4:98
- 对称差度量 1:849
- 对称差分( $n$  阶的)** 5:97
- 对称差(集合的)\*** 5:98
- 对称乘法(张量的) 5:106



- 对称代数 5:96**  
 对称代数(有限维 Lie 代数上的) 3:409  
**对称导出数 5:97**  
 对称导出数( $n$  阶的) 5:97  
**对称导数 5:97**  
 对称导数( $n$  阶的) 5:97  
 对称度量 3:729  
 对称度量空间 2:487  
 对称(度量空间的) 2:487  
 对称度( $n$  维流形的) 3:319  
 对称多线性映射 3:856  
**对称多项式 5:101**  
 对称多项式的基本定理 5:101  
 对称二元关系 1:365;4:107  
 对称公理(关于度量的) 3:722  
 对称(关于圆的) 3:172  
 对称(关于直线的  $n$  阶的) 5:106  
 对称广义 Cartan 矩阵 4:459  
**对称函数 5:99**  
 对称函数代数 1:72  
 对称核 3:99;3:774  
**对称化 5:103**  
 对称化多项式 5:104  
 对称化多重线性映射 3:856  
**对称化方法 5:105**  
 对称化方法(单叶函数论中的) 5:347  
 对称化(关于半空间的) 5:104  
 对称化(关于半平面的) 1:593  
 对称化(关于子空间的) 5:104  
 对称化积(算子的) 5:93  
 对称化随机积分 5:30  
 对称化形式(作用在向量空间上的群的元素的) 5:104  
 对称化原理 5:105  
 对称化张量 5:104  
**对称化(张量的) 5:105**  
 对称化子(由群的特征标和子群定义的) 5:104  
 对称环 1:454  
 对称积 3:855  
 对称积分核 3:95  
**对称矩阵 5:100**  
 对称距离函数 2:725  
**对称空间 5:102**  
 对称空间的分类 2:895  
 对称空间(非紧型的) 2:723  
 对称空间(紧型的) 2:723  
 对称空间(Löös 意义下的) 5:102  
 对称理想 3:179  
 对称幂(代数曲线的) 3:220  
 对称拟线性双曲型方程组 4:434  
 对称逆半群 3:175  
 对称配极 4:217  
 对称平衡不完全区组设计 1:662  
 对称平面 5:106  
 对称平面(Hartogs 区域的) 2:839  
 对称齐性空间 5:102  
**对称区域 5:98**  
 对称区组设计 1:376  
**对称群 5:99**  
**对称群的表示 4:598**  
 对称群( $n$  次的) 5:524  
 对称射线函数 4:504  
 对称收敛空间 5:203  
 对称双曲型偏微分方程 4:434  
 对称双曲型偏微分方程组 3:486  
 对称双线性型 1:360;4:1;  
 4:100  
 对称双线性型代数 3:227  
**对称算子 5:101**  
 对称算子的扩张 2:425  
 对称随机游动 3:617;3:619  
 对称同态 3:179  
 对称微分算子 4:927  
 对称线性变换 4:748  
 对称线性算子 3:294  
**对称信道 5:96**  
 对称形晶体群 1:899  
**对称性(关系的) 5:107**  
**对称性(集合上的)\* 5:107**  
**对称性检验 5:108**  
 对称性检验问题 3:956  
 对称性质(Bergman 核函数的) 1:325  
 对称性(Shapley 值的) 4:801  
 对称一致代数 5:320  
 对称有界域 2:895  
 对称有界域( $C^n$  中的) 2:859  
**对称原理 5:108**  
 对称原理(关于调和函数的) 2:831  
**对称张量 5:103**  
 对称中心 5:106  
 对称轴 5:106  
 对称轴(二次曲线的) 1:768  
 对称轴(椭圆抛物面的) 2:351  
 对称 Fredholm 核 2:562  
 对称 Schur 环 4:727  
 对称  $\Phi_{OK}$  空间 2:501  
 对等的求和法 3:30  
 对顶角 1:182  
**对分法 2:74**  
**对合 3:177**  
 对合变换 5:106  
**对合表示 3:179**  
**对合代数 3:178**  
 对合(代数簇的) 3:178  
 对合代数(具有对合的代数) 1:301;1:454;2:243  
 对合(代数中的) 3:177  
 对合的偏微分方程组 2:700;3:179  
 对合反自同构 1:860;4:217  
**对合范畴(具有对合的范畴的)\* 1:506**  
**对合方程组 3:179**  
 对合方法(线性不等式组的) 3:490  
**对合分布 3:180**  
 对合分布(旗的) 2:496  
 对合赋范代数 3:178  
 对合公理 3:177  
**对合积分 3:122**  
 对合集 3:178  
 对合偏微分方程组 3:179;4:98  
 对合偏微分方程组( $r$  阶的) 4:98  
 对合(群的) 3:177  
 对合(射影几何学中的) 3:177  
 对合系 4:151  
 对合性定理 5:481  
 对合性(特征理想的) 5:481  
 对合映射 3:178  
**对合子簇 5:69**  
 对合子空间 5:69  
 对合自同构 5:102  
 对合组 3:123  
 对合(Banach 代数中的) 1:301  
 对换 4:132

- 对几乎所有的(几乎处处) 1:138  
 对角代数 2:69;2:70  
 对角点(完全四角形的) 4:379  
**对角环 2:70**  
**对角积 2:70**  
**对角矩阵 2:68**  
**对角连分数 2:68**  
**对角群 2:68**  
**对角算子 2:68**  
**对角线 2:68**  
 对角线(多边形的) 4:224  
 对角线法(对角线方法) 2:69;  
 4:521  
**对角线方法(对角线过程) 2:69**  
**对角线过程 2:69**  
 对角线化(算法的输入的) 5:317  
 对角线(矩阵的) 2:69  
 对角线论证(对角线过程) 1:466;  
 2:69  
 对角线(完全四角形的) 4:330  
 对角线原理 4:547  
 对角线(Padé 表的) 4:60  
 对角线(ТИХОНОВ 积的) 5:360  
 对角映射 2:70  
 对角约化 3:147  
 对角直线(多边形的) 4:224  
**对角子群 2:70**  
**对径点 1:188**  
 对抗策略(微分对策中的) 2:149  
 对抗对策 5:301  
 对立假设 4:1002  
 对面(单形的) 1:707  
 对(偶) 2:585  
 对偶变换 1:74  
 对偶表示 4:594  
 对偶不等式(偏微分算子的)  
 2:125  
 对偶超图 2:959  
**对偶代数 2:289**  
 对偶单纯形法 3:504  
 对偶定理(半群的) 1:553  
 对偶定理(代数拓扑学中的)  
 2:291  
 对偶定理(拓扑半群的) 5:197  
 对偶定理(拓扑群与其特征标群之  
 间的) 4:240  
 对偶定理(线性极值问题中的)  
 2:297  
 对偶定理(Abel 簇的) 2:299  
 对偶定理(U 积的) 1:651  
 对偶度量的局部凸空间 3:998  
 对偶度量核型空间 3:998  
**对偶对 2:290**  
 对偶对(对不定度规的 Hilbert 空间  
 的子空间的) 2:876  
 对偶对(拓扑向量空间的) 2:296  
 对偶对(向量空间的) 5:39  
 对偶对应 1:866  
 对偶对(Крейн 空间的子空间的)  
 3:294  
 对偶多面体 4:549  
**对偶范畴 2:289**  
 对偶范畴(范畴的) 2:289  
 对偶分划 3:596;5:124  
 对偶概念(偏序集中的) 4:101  
 对偶根系 4:683  
 对偶公理 1:291  
 对偶构形 1:742  
 对偶关系(对偶对应) 1:865  
 对偶关系(流形中的) 3:147  
 对偶广义四角形 4:378  
 对偶规划问题 2:290  
**对偶函数 2:290**  
 对偶化层 2:55  
 对偶环柄分解 2:815  
 对偶积分方程(成对积分方程)  
 3:98  
**对偶基 2:289**  
 对偶基对 1:618  
 对偶基(共基) 1:360;1:618  
 对偶级数方程法 4:273  
 对偶极值问题 2:296  
 对偶可料投影(随机测度的)  
 3:235  
 对偶空间(伴随空间) 1:47  
 对偶空间(群的) 5:340  
 对偶空间(Banach 空间的) 2:593  
 对偶类(集合的) 2:62  
 对偶理论基本定理(拓扑空间中的)  
 2:296  
 对偶理想(滤子) 2:469;3:2  
 对偶逻辑公式 2:299  
 对偶码 1:629  
 对偶模(伴随模) 1:45;1:824  
 对偶(模态的) 3:783  
 对偶拟椭圆空间 4:427  
 对偶拟阵 3:678  
 对偶偏序集 4:101  
 对偶平面触点网络 1:800  
 对偶平面实代数曲线 4:169;  
 4:184  
 对偶齐性凸锥 2:897  
 对偶群 4:924  
 对偶射影空间 4:344  
 对偶射影平面 4:340  
 对偶数 2:279  
 对偶数代数 2:279  
 对偶双代数 2:927  
 对偶算子 1:46  
 对偶算子(Radon 算子的) 5:184  
 对偶随机化 4:1008  
 对偶凸体 1:848  
 对偶图 2:761  
 对偶(拓扑向量空间的) 5:213  
 对偶伪 Euclid 空间 1:619  
 对偶伪 Galilei 空间 1:620  
 对偶线性规划问题 3:503  
 对偶线性算子 5:418  
 对偶线性映射 1:45  
 对偶向量丛 3:475  
 对偶向量空间 3:457;3:483  
**对偶性 2:291**  
 对偶性(代数的) 5:57  
 对偶性(代数几何学中的) 2:291  
 对偶性(代数拓扑学中的) 2:291  
 对偶性(范畴理论中的) 3:828  
 对偶性(函数论极值问题中的)  
 2:296  
 对偶性(极值问题中的) 2:297  
 对偶性(解析函数空间的) 2:295  
 对偶性(解析函数空间中的)  
 2:295  
 对偶性(解析函数论中的) 2:295  
 对偶性(解析空间理论中的)  
 2:294  
 对偶性(链环理论中的) 3:275  
 对偶性(同调和上同调之间的)  
 2:292  
 对偶性(凸分析中的) 2:297;  
 1:841  
 对偶性(凸几何学中的) 1:841



- 对偶性(拓扑向量空间理论中的)  
2:296;5:214
- 对偶性(完全性与唯一性定理之间的)  
2:295
- 对偶性(有限 Abel 群的)  
2:298
- 对偶映射  
4:169
- 对偶余代数  
1:617
- 对偶原理 2:299**
- 对偶原理(触点网络的)  
1:800
- 对偶原理(范畴理论中的)  
1:501
- 对偶原理(观测问题的)  
3:1043
- 对偶原理(几何学中的)  
2:299
- 对偶原理(偏序集中的)  
2:300
- 对偶原理(上伪 Euclid 空间中的)  
1:619
- 对偶原理(射影几何学中的)  
2:299
- 对偶原理(数理逻辑中的)  
2:299
- 对偶原理(椭圆几何学中的)  
2:299
- 对偶原理(椭圆空间中的)  
4:624
- 对偶原理(椭圆平面中的)  
4:623
- 对偶原理(唯一性和完全性问题的)  
2:295
- 对偶运算  
1:74
- 对偶(正交对称 Lie 代数的)  
2:732
- 对偶锥  
4:212
- 对偶自同构  
1:824
- 对偶 Euclid 空间(上 Euclid 空间)  
1:618
- 对偶 Hahn 多项式  
5:512
- 对偶 Harnack 不等式(Harnack 不等式)  
2:837
- 对偶 Hopf 代数  
2:927
- 对射变换 1:860**
- 对射变换(射影平面上的)  
1:767
- 对手集  
4:965
- 对数 3:551**
- 对数残数 3:555**
- 对数残数定理  
4:605
- 对数残数(亚纯函数关于围道的)  
3:556
- 对数导数 3:552**
- 对数的底  
3:551
- 对数的首数  
3:552
- 对数的主值  
3:553
- 对数多重下调和函数  
4:187
- 对数范数  
5:364
- 对数方程  
2:374
- 对数分支点 3:552**
- 对数赋值(环的)  
5:364
- 对数赋值(域的)  
3:968;5:364
- 对数高  
2:846
- 对数函数 3:552**
- 对数核  
3:554
- 对数积分  
3:110;5:72
- 对数积分函数  
1:747
- 对数(基数的)  
1:474
- 对数螺旋线 3:556**
- 对数平均值  
3:557
- 对数求和法 3:557**
- 对数曲线  
3:553
- 对数容量 3:552**
- 对数收敛准则 3:552**
- 对数似然函数  
3:69
- 对数凸函数  
1:853;2:821
- 对数凸性 1:853**
- 对数凸正则化  
4:559
- 对数凸 Reinhardt 区域  
4:561
- 对数位势 3:554**
- 对数下调和函数 3:557**
- 对数线性型 3:481**
- 对数小平维数  
3:280
- 对数(形式群律的)  
2:511
- 对数(一个数对给定的底的)  
3:551
- 对数映射  
4:560
- 对数正态分布  
3:553
- 对数正态分布 3:553**
- 对数纸 3:554**
- 对数质量位势  
4:263
- 对数周期(第三类典范椭圆积分的)  
2:348
- 对数周期(第三类正规椭圆积分的)  
2:349
- 对数最优方法(极小化计算费用的)  
3:758
- 对象变元  
3:44
- 对象的范畴(在另一对象上的)  
1:503
- 对象的范畴(在另一对象下的)  
1:503
- 对象(范畴的)  
1:500
- 对象(范畴中的)\* 3:1011**
- 对象(仿射联络)  
1:53
- 对象类  
3:828,1011
- 对象类(Simula 语言中的)  
4:843
- 对象理论  
3:716
- 对象(数理逻辑的)  
3:645
- 对象(数理统计的)  
3:657
- 对象语言 3:1011**
- 对象族(以概形参量化的)  
3:799
- 对易关系(湮没算子和对易算子的)  
1:184
- 对易和反对易关系的表示 1:670**
- 对易式括号  
3:517
- 对应 1:865**
- 对应(代数几何学中的)  
1:866
- 对应理论(模态逻辑的)  
3:782
- 对应(两集合之间的)  
1:865
- 对应毗联  
4:256
- 对应(射影簇之间的)  
1:866
- 对应(Lie 群与 Lie 代数之间的)  
3:423
- 对映射  
4:410
- 对映体(双代数的)  
2:928
- 对照 1:825**
- 多半径  
4:223
- 多胞形  
4:230;4:549
- 多边形 4:223**
- 多边形函数  
4:730
- 多边形(么半群上的) 4:225**
- 多变量同余式 1:767**
- 多步法  
1:33
- 多步 Runge-Kutta 法  
1:523
- 多重本原群  
4:292
- 多重比较 3:857**
- 多重闭测地线  
1:608
- 多重插值条件  
3:143
- 多重尺度法  
4:877
- 多重传递群  
5:250
- 多重代数 3:842**
- 多重递归 3:860**
- 多重典范嵌入  
1:461
- 多重典范系  
1:102
- 多重典范映射  
1:461
- 多重点(链环的投影中的)  
3:269
- 多重调和函数 3:854**
- 多重调和函数 4:186**
- 多重根(多项式的)  
1:82

- 多重回归 4:541  
 多重混合 3:779  
 多重积分 3:858  
 多重积分变换 3:121  
 多重级数 3:860  
 多重极集 2:430;2:776  
 多重可分性(集合的) 4:780  
 多重亏格 3:280  
 多重亏格(代数曲面的) 1:102  
 多重幂级数 1:157;4:280  
 多重上调和函数 4:188  
 多重时间尺度 1:414  
 多重特征 3:485  
 多重条件自动机试验 1:258  
 多重图(重图) 2:752  
 多重网格法 2:88;4:207  
 多重位势论 2:775  
 多重无条件自动机试验 1:258  
 多重下调和函数 4:186  
 多重下调和穷举函数 2:775  
 多重纤维(椭圆曲面的) 2:354  
 多重线性代数 3:854  
 多重线性函数 3:855  
 多重线性恒等式 4:157  
 多重线性算子 3:855  
 多重线性型 3:855  
 多重线性型(单式  $A$  模上的)  
     3:855  
 多重线性型( $n$  次的) 3:855  
 多重线性映射 3:855  
 多重相关系数 3:857  
 多重向量 4:872  
 多重性集 5:275  
 多重序列 3:860  
 多重 Cauchy 积分 1:515  
 多重 Fourier 积分 2:529  
 多重 Fourier 级数 2:537  
 多重 Hilbert 空间 3:996  
 多重 Laurent 级数 3:360  
 多重 Lebesgue 积分 3:859  
 多重 Weyl 和 5:276  
 多重  $\theta$  级数 5:162  
 多带 Turing 机 5:291  
 多点边值问题 2:12  
 多度量几何学 3:106  
 多方向信道 1:545  
 多峰分布 3:856  
 多峰分布(多众数分布) 3:856  
 多服务台排队 4:449  
 多服务台排队系统 4:447  
 多复变函数(多复变量复函数)  
     2:587  
 多复变函数(在区域内解析的)  
     1:156  
 多复变函数(在区域内全纯的)  
     1:156  
 多复变函数(在一点处全纯的)  
     1:156  
 多复变可微函数 1:156  
 多复变全纯函数(在区域内的)  
     1:156  
 多复变全纯函数(在一点处的)  
     1:156  
 多机器流水车间问题 4:717  
 多级可控系统 3:1032  
 多极矩 3:852  
 多极位势 3:852  
 多极值问题 3:849  
 多角闭道路 4:224  
 多角定向闭道路 4:224  
 多角链环 3:269  
 多角链环(位于正则位置的)  
     3:269  
 多角曲线 4:223  
 多角形数 4:226  
 多角形图 4:223  
 多阶段受控过程 2:307  
 多节 4:865  
 多解析函数 4:219  
 多解析函数( $m$  阶的) 4:219  
 多孔点 4:246  
 多孔集 1:616;4:246  
 多孔性系数 2:174  
 多类语言 2:521  
 多连通空间 3:866  
 多连通区域 3:866  
 多连通区域(道路连通空间中的)  
     3:866  
 多连通 Riemann 曲面 4:635  
 多幂零长度 4:220  
 多幂零列 4:220  
 多幂零群 4:220  
 多面角 4:226  
 多面体 4:228  
 多面体闭链 4:227  
 多面体(抽象的)\* 4:230  
 多面体的棱 4:616  
 多面体的同调 2:911  
 多面体度量 4:227  
 多面体分析法 4:718  
 多面体复形 4:227  
 多面体集 1:847  
 多面体(几何复形的) 2:708  
 多面体链 4:227  
 多面体穷竭(区域的) 2:416  
 多面体区域 2:416  
 多面体群 4:232  
 多面体同调流形 5:223  
 多面体( $\mathfrak{S}_k$  类的) 2:373  
 多目标决策问题 3:842  
 多球坐标 4:119  
 多区域 4:223  
 多群近似法 3:851  
 多时标分析 3:1013  
 多实变函数逼近 1:213  
 多速方程 5:256  
 多算子群 3:851  
 多算子  $\Omega$  代数 3:851  
 多调和方程 4:219;4:660  
 多调和函数 4:219  
 多通道排队系统 4:447  
 多通道损失制排队系统 4:447  
 多维变分问题 3:848  
 多维标度 3:847  
 多维残数 1:158  
 多维分布 3:843  
 多维环面 5:231  
 多维积分变换 3:121  
 多维扩散过程 2:176  
 多维罗 5:462  
 多维纽结 3:843  
 多维奇异积分方程 4:853  
 多维奇异积分算子 3:112-113  
 多维色散关系 2:249  
 多维随机过程 5:13  
 多维统计分析 3:845  
 多维网络模型 3:894  
 多维问题(大范围变分学中的)  
     5:385  
 多维 Gauss 过程 2:663  
 多维 Plateau 问题 4:178



多位函子 3:850  
 多向量 4:220  
 多项分布 3:856  
 多项式 4:232  
 多项式的边 4:223  
 多项式的分裂域 4:956  
 多项式的极值性质 2:441  
 多项式的 Morse 化 4:859  
 多项式对策 2:34  
 多项式多面体 1:172  
 多项式(泛代数中的) 4:301  
 多项式分配 4:477  
 多项式关系 4:751  
 多项式(关于权规范正交的)  
     5:474  
 多项式函数 4:236  
 多项式恒等式 4:156  
 多项式环 4:669  
 多项式回归 4:73  
 多项式矩阵 3:672;5:123  
 多项式均方回归 4:541  
 多项式可归约性( $p$  可归约性)  
     1:133  
 多项式可归约语言 1:720  
 多项式时间算法 3:765  
 多项式系数 3:856  
 多项式序列(二项型的) 5:310  
 多项式序列(Sheffer 型的) 5:310  
 多项式样条 1:199;4:952  
 多项式有界非确定性 Turing 机  
     1:720  
 多项式有界 Turing 机 1:720  
 多项式与指数增长(群和代数中的)  
     的)\* 4:234  
 多项式(最小零偏差的)\* 4:237  
 多循环列 4:222  
 多循环群 4:222  
 多循环维数 4:222  
 多叶函数 3:866  
 多叶区域 3:853  
 多叶域 2:277  
 多一可归约性 4:528;5:285  
 多用户通信信道 1:545  
 多余参数 3:1000  
 多余子模 4:333  
 多余坐标 1:858  
 多元分布 3:843

多元函子 3:850  
 多元控制论系统 1:918  
 多元统计分析 3:845  
 多元统计分析(多元分布的)  
     3:845  
 多元统计分析(几何结构的)  
     3:847  
 多元统计分析(在实践中的)  
     3:847  
 多元运算 3:1021  
 多元正态分布 3:974  
 多元属性 3:845  
 多元组 5:286  
 多圆盘 4:223  
 多圆型区域 4:223  
 多圆域 4:561  
 多圆柱 4:223;1:354  
 多圆柱域 1:354;1:157  
 多正流动形 2:430  
 多值表示 3:854  
 多值反函数 3:169  
 多值函数 3:853  
 多值解析函数 1:155;5:327  
 多值逻辑 3:605  
 多值逻辑函数 3:609  
 多值逻辑(连续函数的) 3:608  
 多值逻辑中的问题 3:606  
 多值奇点 4:855  
 多值算子 3:1026  
 多值微分方程(微分包含) 2:160  
 多值性(反三角函数的) 3:171  
 多值映射 3:853  
 多值(Algol 语言中的) 1:118  
 多指标运输问题 5:259  
 多指令多数据(MIMD)机 1:730  
 多终端通信信道(多方向信道)  
     1:545  
 多种类翻译 1:271  
 多种类逻辑演算 3:558  
 多众数的概率分布 3:783  
 多众数分布 3:856  
 多锥顶地图投影 1:493  
 多准则问题 3:842  
 多  $\Gamma$  函数 2:640

## E

俄罗斯记数制 1:589

二部图 2:754  
 二部图的部分 2:754  
 二测轴测投影法 1:293  
 二常数定理 5:292  
 二重点 2:284  
 二重点(代数簇上的) 2:284  
 二重点(链环的投影中的) 3:269  
 二重点(实曲线的) 4:862  
 二重点数(曲线上集中于奇点处的)  
     4:859  
 二重分划定理(向量格元素的)  
     4:773  
 二重复形(双复形) 1:353  
 二重孤立子 4:894  
 二重函数对应 1:866  
 二重函数关系 1:866  
 二重积分 2:280  
 二重级数 2:285  
 二重极限 2:281  
 二重极限(函数的) 2:281  
 二重极限(序列的) 2:281  
 二重模(双重模) 2:282  
 二重平面 2:283  
 二重切面(曲面的) 3:304  
 二重数 2:279  
 二重数和对偶数 2:279  
 二重向量积 5:406  
 二重象征(伪微分算子的) 4:363  
 二重序列 2:284  
 二重有理奇点 4:858  
 二重正交补定理 4:905  
 二次变差(半鞅的) 4:771;5:8  
 二次变换(Jacobi 多项式的) 5:309  
 二次插值 1:137  
 二次超曲面 4:394  
 二次超曲面(代数几何学中的)  
     4:394  
 二次超曲面(三维空间中的)  
     4:394  
 二次超曲面束 2:9  
 二次代数线束 5:123  
 二次对偶 1:305  
 二次对偶空间 4:737  
 二次方程 4:380  
 二次非剩余 1:761  
 二次非剩余(模  $m$  的) 4:390  
 二次规划 4:389

- 二次互反律 4:389  
 二次积分形式 1:361  
 二次理想 3:228  
 二次量子化 1:670;2:501  
 二次量子化表示 2:462  
 二次量子化方法 1:184;2:501  
 二次量子化形式体系 1:670  
 二次模 4:382  
 二次内积空间 1:225  
 二次偏差(根方偏差) 4:379  
 二次平均值 4:389  
 二次曲面 5:84  
 二次曲面按不变量的分类 5:85  
 二次曲面形式 4:390  
 二次曲线 1:767  
 二次曲线 4:737  
 二次曲线(抛物型的) 1:767  
 二次曲线(双曲型的) 1:767  
 二次曲线(椭圆型的) 1:767  
 二次剩余 4:390  
 二次剩余(模  $m$  的) 4:390  
 二次特征(秩的) 3:630  
 二次微分 4:379  
 二次微分(属于有限 Riemann 曲面的) 4:380  
 二次微分(Riemann 曲面上的) 4:379  
 二次微局部化 3:740  
 二次无理数 4:388  
 二次误差 4:381  
 二次向量空间 5:517  
 二次辛空间(代数上的) 4:903  
 二次形式(具有对合的环上的) 5:446  
 二次型 4:382  
 二次型的几何理论 3:384  
 二次型的类 4:382  
 二次型的类型群(域上的) 5:517  
 二次型的约化 4:386  
 二次型的 Minkowski 约化 4:386  
 二次型(具有合成的) 4:383  
 二次型(可用二次型表示的) 4:382  
 二次型(链环的) 3:278  
 二次型(模上的) 4:382  
 二次型(扭结图的) 3:278  
 二次型(有恒等元的交换环上的) 4:382  
 二次映射 4:694  
 二次映射(模上的) 4:382  
 二次域 4:381  
 二次圆锥面 1:769  
 二次锥面 1:769  
 二次准则(绝对稳定性的) 4:961  
 二次 Dirichlet 特征标 2:209  
 二次 Hilbert 符号 2:840  
 二次 Minkowski 不等式 3:777  
 二分性 2:73  
 二角形 2:177  
 二阶变分 4:738  
 二阶变分(泛函的) 5:375  
 二阶变分(集合的) 5:376  
 二阶变元 4:286  
 二阶差分 2:472  
 二阶差分算子 2:80  
 二阶导数(函数的) 2:100  
 二阶递归 4:522  
 二阶段问题(随机规划的) 5:23  
 二阶对称导数 4:732  
 二阶逻辑语言 3:930  
 二阶偏导数(多元函数的) 2:101  
 二阶偏微分方程 2:129  
 二阶偏微分方程(广义抛物型的) 2:130  
 二阶平稳随机过程 4:985  
 二阶谱密度 4:916  
 二阶切丛 5:130  
 二阶上同调运算 1:654  
 二阶双曲型偏微分方程 3:317  
 二阶算术 2:518  
 二阶退化椭圆型偏微分方程 2:33  
 二阶微分参数 2:168  
 二阶微分(函数的) 2:101  
 二阶问题 2:924  
 二阶线性常微分方程 3:498  
 二阶延拓几何对象(几何对象场的) 2:712  
 二阶周期图 4:129  
 二阶 Peano 算术 2:518  
 二进不连续统 2:303  
 二进紧统 2:303  
 二进空间 2:304  
 二进拓扑空间 1:680  
 二进制 1:362  
 二进制单位 1:365  
 二进制计算系统 1:362  
 二进制码 2:388  
 二进制码(具有低密度奇偶校验的) 2:389  
 二进制算术 1:363  
 二进制线性码 2:289  
 二进制 BCH 码 2:388  
 二进制 Hamming 码 2:388  
 二聚物问题 1:665;4:130  
 二面角 2:177  
 二面角的直线角 3:465  
 二面体群 2:177  
 二难推理(对角线化的) 3:664  
 二人非零和矩阵对策 3:676  
 二人零和对策 5:301  
 二十面体 3:1  
 二十面体空间 3:1  
 二体问题 5:292  
 二维胞腔 5:293  
 二维变分问题 3:848  
 二维多边形 4:223  
 二维复解析流形  
 二维晶体群 1:899  
 二维流形 5:294  
 二维流形(有界曲率的)\* 5:297  
 二维纽结 5:293  
 二维上闭链 2:424  
 二维射影空间 4:340  
 二维圆环 5:293  
 二维 de Sitter 度量 3:885  
 二维 Reeb 分支 3:268  
 二维 Toda 格 3:291  
 二项方程 5:304  
 二项分布 1:366  
 二项级数 1:366  
 二项式 1:365  
 二项式定理(关于 Wick 幂的) 5:498  
 二项式微分 2:98  
 二项式系数 1:365  
 二项式系数三角形 4:107  
 二项式展开(产生算子和湮没算子的) 5:500  
 二项同余式 5:303  
 二因子方案(方差分析中的) 2:244



二元代数运算 1:100  
 二元对称信道 5:96  
 二元二次型 1:364  
 二元二次型的种类 1:364  
**二元关系 1:364**  
 二元关系范畴 1:507  
 二元关系范畴(集合间的) 1:500  
**二元函子(双函子) 1:356**  
 二元四面体群 5:154  
 二元问题(关于整数的) 1:37  
**二元型 1:363**  
 二元域(算图法中的) 3:923  
 二元运算 3:1021  
 二元 Goldbach 问题 2:46  
**二元 Lie 代数 1:363**  
**二元  $p$  进群 1:363**  
 二择一性(微分对策中的) 2:148  
**二值逻辑 5:304**

## F

发散二重级数 2:285  
 发散反常积分 3:26  
 发散轨道 3:447  
**发散积分 2:266**  
**发散级数 2:266**  
**发散级数的求和 5:75**  
 发散抛物线 4:170  
 发散束变换 5:184  
 发散数项级数 4:792  
 发散行列式(无穷矩阵的) 2:66  
**发散序列 2:266**  
 发散直线(双曲平面中的) 4:196  
**发展方程 2:409**  
 发展矩阵 3:508  
 发展矩阵(线性 Hamilton 方程的)  
 2:811  
**发展算子 2:409**  
 罚函数 4:117  
**罚函数法 4:117**  
**法层 3:987**  
 法层(态射的) 3:987  
 法层(子概形的) 3:987  
 法层(子空间的) 3:988  
 法层(子流形的) 3:987  
**法丛 3:972**

**法截线 3:987**  
 法截线(光滑曲面在一点的某个方向的) 1:908  
**法空间(曲面的) 3:989**  
**法平面 3:986**  
 法平面(第二类) 4:335  
 法平面(第一类) 4:335  
 法球面映射 4:946  
**法曲率 3:973**  
 法曲率(曲面在一方向的) 1:908  
**法曲率椭圆 2:341**  
 法曲率向量 2:341  
 法曲率(正则曲面的) 3:973  
 法射影联络 4:331  
**法线 3:969**  
 法线(曲面的) 3:969;2:154  
 法线(曲线的) 3:969;2:153  
 法线线汇 1:766  
 法线象(平面 Borel 集的) 3:809  
**法向导数 3:973**  
 法向导数第二定理(双层位势的)  
 3:587  
 法向导数第一定理(双层位势的)  
 3:586  
 法向地图投影 1:489  
 法映射 4:947  
 法则(对控制系统类的) 2:379  
 法则方案(控制系统的) 2:379  
 法则(规则) 1:51  
 法坐标 2:700;2:704  
 法坐标(二阶线性微分方程的)  
 2:568  
**翻滚数 5:525**  
 翻滚数(纽结的) 3:277  
 翻译程序 1:129  
 翻译对应 1:271  
 翻译模式 1:130  
 翻译(数理逻辑中的) 3:21  
 翻译型语义 1:129  
 樊畿定理 5:215  
 反比例 4:277  
 反变变换 1:59  
 反变变换(群的) 1:668  
 反变变换(张量的) 1:875  
 反变度量张量 5:146  
 反变函子 1:503;2:610  
 反变几何微分不变式 2:163

反变价(张量的) 5:145  
 反变可表示函子 2:610  
 反变双代数 2:928  
**反变向量 1:826**  
 反变斜对称张量 4:872  
**反变张量 1:825**  
 反变张量场 1:825  
 反变张量代数 5:142  
 反变 Hopf 代数 2:928  
 反常层 5:379;2:3  
 反常(非正常)本征函数 2:327  
 反常(非正常)点 3:4;4:335  
 反常(非正常)平面 4:335  
 反常(非正常)线 4:335  
**反常分布 3:26**  
**反常积分 3:26**  
 反常积分(第二类的) 4:85  
 反常积分(第一类的) 4:85  
 反常可积函数(在区域上的) 3:27  
 反常相似 4:824  
 反常旋转 4:687  
 反常元 3:58  
 反常运动 3:836  
 反垂足曲线(一曲线关于一点的)  
 4:115  
 反导数 4:291  
 反对称半双线性型 1:860  
 反对称二元关系 1:365  
 反对称关系 5:107  
 反对称函数代数 1:72  
 反对称双线性型 1:360  
 反对称性  
 反对称性集(对于函数代数的)  
 1:72  
 反对称一致代数 5:320  
**反对称张量 1:186**  
 反对称  $\Phi_{OK}$  空间 2:501  
**反对数 1:186**  
 反对数(数的) 1:186  
 反对易关系 4:134  
 反对易关系(湮没算子和对易算子的)  
 1:184  
 反多胞形 4:232  
 反二次型 4:387  
 反反演(负反演) 3:172  
 反分叉 5:287  
**反共形映射 1:185**

- 反函数** 3:169  
 反函数导数定理 2:100  
 反函数定理 1:812;3:169  
 反函数法 3:822  
 反极限 3:443;4:337;5:120  
 反极限(函子的) 4:337  
 反交换变量 2:431  
**反交换代数** 1:185  
 反交换环 3:435  
 反交换条件 3:435  
 反结合代数 4:594  
 反解析表示 1:172  
 反解析函数 1:185  
 反距离 4:197  
 反馈 1:254;1:257  
 反馈对策 2:637  
 反馈规律 1:266  
 反馈环 1:922  
 反馈控制 3:1031  
 反馈群 3:597;5:123  
 反馈通信信道 1:544  
 反馈线性化 4:194  
 反馈综合 3:1042  
**反棱柱** 1:186  
**反离散空间** 1:185  
**反离散拓扑** 1:185  
 反模型(逻辑中的) 2:734  
**反平行四边形** 1:185  
**反平行线** 1:185  
 反平行线(关于给定直线的) 1:185  
 反平行线(关于角的) 1:185  
 反平行线(关于直线的) 1:185  
**反全纯函数** 1:185  
 反权(伪张量的) 4:374  
**反三角函数** 3:171  
 反三角形不等式 4:569  
**反射** 4:536  
 反射边界(随机游动中的) 4:486  
 反射的镜 4:536  
 反射(对象的) 4:538  
**反射(范畴对象的)\*** 4:538  
 反射焦散线 1:526  
**反射群** 4:537  
 反射(群的) 1:142  
 反射系数 3:159;3:290  
**反射原理** 4:538  
 反射原理(逻辑理论中的) 4:898  
**反射子** 4:539  
 反射子(范畴的对象的) 4:538  
 反射子(范畴中的) 5:204  
**反双曲函数** 3:169  
 反瞬子 5:530  
 反四元数 1:147  
 反同构 1:860  
**反同构(环的)\*** 1:185  
**反同构(偏序集的)\*** 1:185  
 反同态 3:356  
 反投影算子 5:184  
 反威胁(联盟的) 4:965  
 反问题(数学模型化的) 3:648  
 反问题(天体物理学中的) 1:243  
 反问题(值分布论的) 5:367  
 反问题(制图学的) 1:496  
 反问题(Laplace 方程的) 4:271  
 反问题(Newton 位势的) 4:271  
 反线性映射 4:770  
 反向对称三角形 4:943  
 反向箭图 4:458  
 反向联系的原则(微分对策中的) 2:148  
 反向向量 5:404  
 反序算子 3:947  
**反序映射** 1:188  
 反序(字符串的) 2:747  
**反演** 3:172  
 反演变换(逆半径的) 4:538  
 反演定理(Mellin 变换的) 3:709  
 反演法 3:611  
 反演公式(格点分布的) 3:357  
 反演公式(广义 Fourier 变换的) 2:682  
 反演公式(积分变换的) 3:121  
 反演公式(取遍除数的有限和的) 3:780  
 反演公式(Gauss 变换的) 2:661  
 反演公式(Gegenbauer 变换的) 2:664  
 反演公式(Hardy 变换的) 2:821  
 反演公式(Hilbert 变换的) 2:882  
 反演公式(Hilbert 奇异积分的) 2:871  
 反演公式(Jacobi 变换的) 3:219  
 反演公式(Laguerre 积分变换的) 3:332  
 反演公式(Lambert 积分变换的) 3:334  
 反演公式(Laplace 积分变换的) 3:346  
 反演公式(Legendre 积分变换的) 3:386  
 反演公式(Watson 变换的) 5:452  
 反演公式(Конторович-Лебедев 积分变换的) 3:289  
 反演公式(Лебедев 积分变换的) 3:371  
**反演(级数的)\*** 3:174  
 反演几何学(共形几何学) 1:753  
 反演空间 5:153  
 反演(幂级数的) 4:280  
 反演(逆变换)公式(Hermite 变换的) 2:855  
 反演平面 3:779;5:153  
 反演(平面关于圆的) 1:325  
 反演(球面的) 3:252  
**反演(椭圆积分的)\*** 3:175  
 反演问题 3:30  
 反演旋转 1:900  
 反演(圆的) 5:153  
**反演(组合学中的)** 3:172  
 反应对流扩散方程 4:506  
**反应扩散方程** 4:506  
 反余切 1:870  
 反余弦 1:867  
 反圆函数 3:171  
**反运动** 1:185  
 反运动(伪 Euclid 空间) 4:366  
**反照率法** 1:64  
 反正切 5:129  
 反正弦 4:844  
**反正弦分布** 1:220  
**反正弦律** 1:220  
 反正弦律(更新理论中的) 1:220  
 反证法 2:282;1:841  
 反周期边界条件 5:49  
 反周期谱(Hill 算子的) 2:883  
 反转定向的闭路 4:17  
 反转定向的单形链 4:17  
 反自对偶联络 5:530  
 反自同构 4:797  
 反自同构(除环的) 2:300



- 反 Hermite 型 2:856  
 反 Wich 象征(算子的) 5:93  
 返弧(运输网络中的) 3:893  
 返回概率(Bernoulli 随机游动中的)  
 1:331  
 返回函数(最优控制中的) 3:1042  
 返回时间 3:616  
**泛包络代数 5:352**  
 泛闭概形态射 4:351  
 泛闭映射 4:351  
 泛簇 1:223  
**泛代数 5:348**  
**泛代数簇 5:402**  
 泛代数曲线 5:240  
**泛点 2:694**  
 泛点(遍历集中的) 2:382  
 泛点(拓扑空间的) 4:909  
**泛函 2:592**  
**泛函的变分 5:375**  
**泛函的完全集 1:699**  
**泛函分析 2:592**  
 泛函分析方法(偏微分方程的)  
 2:123  
 泛函分析在物理学中的应用  
 2:595  
 泛函极小化问题(自变量上的)  
 3:9  
 泛函上同调运算 1:656  
 泛函维数 3:999;3:997  
**泛函(Марков 过程的)\* 2:604**  
 泛解析形变 2:26  
 泛链环 2:411  
 泛日本环 2:411  
 泛问题 5:353  
 泛形变(概形的) 2:27  
 泛性问题(概形的) 2:27  
**泛性质 5:354**  
 泛性质(范畴和的) 5:333  
 泛性质(范剩余符号的) 3:969  
 泛性质(概形态射的) 4:719  
 泛性质(直积的) 2:206  
 泛性质(直积的自然投射的)  
 2:205  
 泛性质(自由结合代数的) 2:566  
 泛性质(Grothendieck 群的) 2:779  
 泛性质(Moufang 么拟群的)  
 3:565  
 泛一致结构 5:325  
 泛映射 2:779  
 泛元 5:354  
 泛元(代数的) 2:237  
 泛正方形(泛方) 2:465  
 泛 Chevalley 群 1:583  
 泛 Horn 类 4:443  
 泛  $\lambda$  环(一个生成元上的) 4:600  
**范 3:966**  
**范畴 1:500**  
**范畴的等价 2:378**  
**范畴的对象的反射 4:538**  
**范畴的骨架 4:869**  
**范畴的零对象 3:1000**  
**范畴的嵌入 3:14**  
**范畴的生成对象 2:693**  
**范畴的生成元 2:694**  
**范畴的投射对象 4:339**  
**范畴的整对象 3:111**  
 范畴定理 1:194  
 范畴(范畴文法的) 2:746  
 范畴公理 4:111  
**范畴公理系统 1:499**  
 范畴积 5:354  
**范畴(集合的)\* 1:506**  
 范畴(具有足够内射对象的) 3:83  
 范畴类( $\Omega$  系统的) 1:108  
 范畴拓扑学 5:202  
**范畴文法 2:746**  
**范畴性(对于基数  $\kappa$  的)( $\kappa$  范畴  
 性) 1:499**  
 范畴一阶理论 1:499  
 范畴张成 5:42  
**范畴中的簇 5:399**  
**范畴中的单纯对象 4:836**  
**范畴中的对象 3:1011**  
**范畴中的局部化 3:541**  
**范畴中对象的纤维积 2:465**  
**范畴中对象族的积 4:320**  
**范畴中态射的核 3:254**  
 范畴  $Ens$  4:800  
 范畴  $Me$  4:800  
 范畴  $\mathfrak{S}^*$  4:800  
 范畴  $Set$  4:800  
**范畴(Люстерник - Шнирельман 意  
 义下的) 1:505**  
 范群 3:968  
 范(群的) 3:967  
 范剩余 3:969  
**范剩余符号 3:969**  
 范式(递归函数的) 3:980  
 范式(多重递归的) 3:860  
**范数 3:966**  
 范数(测度的) 1:690  
 范数(除子的) 4:516  
 范数(代数中元素的) 2:237  
**范数收敛 3:972**  
 范数收敛反常积分 3:973  
 范数收敛(反常积分的) 3:973  
 范数收敛级数 3:972  
 范数收敛(级数的) 3:972  
 范数(四元数的) 4:443  
 范数(算子的) 1:430  
 范数(向量空间元素的) 3:966  
 范数(域元素的) 3:967  
 范数(Cayley - Dickson 代数中元素  
 的) 1:528  
 范数(Hilbert 空间中元素的)  
 2:871  
 范拓扑 4:901  
 范围(偏序集) 1:815  
 范形式 2:194  
**范映射 3:967**  
 范子群 3:968  
**方差 2:243**  
**方差比 2:249**  
 方差比分布 2:491  
 方差的记号 1:874  
**方差分析 2:244**  
 方差分析(数理统计中的) 2:244  
 方差(概率论中的) 2:243  
 方差曲线 4:540  
 方差中心 4:711  
**方程 2:374**  
 《方程的代数解纪要》(Lagrange 著)  
 2:781  
 方程组 2:374  
 方法论误差 3:948  
 方法偏倚 3:369  
 方格(排列中的) 1:234  
 方位地图投影 1:489  
 方向变分(泛函的) 5:373  
**方向场 2:207**  
 方向场(流形上的) 3:268

- 方向导数(斜导数) 3:1011  
 方向空间(在一点上的) 4:655  
 方向曲率张量 5:485  
 方向余弦(曲面余法线方向的)  
 2:730  
 方向余弦(向量的) 5:405  
 方向(在一点的) 4:655  
 方向锥(Monge 锥) 3:811  
 方阵的迹 5:238  
 方阵(域上的) 3:671  
 方阵( $n$  阶的) 3:670  
 房 1:543  
 房(根系的) 4:683  
 房系 1:543  
 仿八元数代数 3:401  
 仿复数 2:279  
 仿紧度量空间 3:728  
 仿紧近性空间 5:205  
 仿紧空间 4:75  
 仿紧统 4:75  
 仿紧拓扑空间 3:548;3:548  
 仿紧性 1:682  
 仿紧性条件 5:201  
 仿紧性准则 4:77  
 仿切方程 1:803  
 仿射 1:61  
 仿射包 1:56  
 仿射变换 1:59  
 仿射标架 1:54  
 仿射参数 1:57  
 仿射参数(测地线的) 1:57  
 仿射参数化(测地线的) 1:57  
 仿射簇 1:60  
 仿射代数 3:243  
 仿射代数簇 1:52  
 仿射代数集 1:51  
 仿射代数集的方程 1:51  
 仿射代数  $k$  集 1:51  
 仿射等温坐标 1:773  
 仿射法线 1:57  
 仿射概形 1:57  
 仿射概形的点 1:57  
 仿射弧长 1:57  
 仿射基 1:54  
 仿射极小曲面 1:56  
 仿射几何学 1:56  
 仿射结构( $W$  型的) 5:42  
 仿射矩阵 3:243  
 仿射距离 1:56  
 仿射空间 1:58  
 仿射空间(域上的) 1:51  
 仿射联络 1:52  
 仿射联络空间 1:52  
 仿射量 1:61  
 仿射率空间 1:55  
 仿射挠率 1:59  
 仿射平面 4:168  
 仿射平行移动子群 1:58  
 仿射球面 1:59  
 仿射曲率 1:54  
 仿射曲面理论 5:158  
 仿射群 1:56  
 仿射态射 1:56  
 仿射体积 5:439  
 仿射同构 1:58  
 仿射完全泛代数 5:349  
 仿射微分几何学 1:54  
 仿射伪距离 1:57  
 仿射厦 5:180  
 仿射型代数 4:667  
 仿射型空间 4:667  
 仿射么模群 1:60  
 仿射映射 1:58  
 仿射有限几何学 1:376  
 仿射运算 3:5  
 仿射张量 1:59  
 仿射直射变换 1:59  
 仿射直线 5:28  
 仿射子空间 1:58;3:513  
 仿射坐标 1:54  
 仿射坐标系 1:54  
 仿射 Coxeter 群 1:884  
 仿射  $N$  宽度 5:501  
 仿射  $S$  概形 1:56  
 仿射 Weyl 群 4:683;5:486  
 仿样(代数系统的) 4:585  
 仿样满类(代数系统的) 4:585  
 仿样(自同态的)\* 4:585  
 仿真模型 1:919  
 放大因子(有限差格式的) 2:948  
 放回抽样 4:710  
 放射性勘探 2:725  
 飛田导数 5:490  
 飛田广义函数 5:490  
 飛田检验泛函 5:490  
 飛田检验函数 5:490  
 非保持约束 2:892  
 非本原表示空间 3:25  
 非本原的变换伪群 4:368  
 非本原群 3:25  
 非本原线性变换群 3:25  
 非本原线性群表示 3:25  
 非本原性系 3:25  
 非本原性系(群表示的) 3:25;  
 3:45  
 非本原域 3:25  
 非本原 Dirichlet 特征标 2:209  
 非本质映射 3:50  
 非本质映射(映入球面中的) 3:51  
 非本质状态(Марков 链的) 3:615  
 非本质子模 5:65  
 非闭的一阶偏微分方程组 2:129  
 非标准分析 3:965  
 非标准逻辑 4:350  
 非标准模型 3:965  
 非标准模型(算术的) 4:112  
 非标准同构(典型群的) 1:601  
 非标准效用 5:363  
 非参数方法(统计学中的)\*  
 3:956  
 非参数检验 3:959  
 非参数统计检验 3:959  
 非策略对策 2:634  
 非常返状态类(Марков 链的)  
 3:615  
 非传递运动群 2:788  
 非传递置换群 4:131;5:250  
 非代数椭圆曲面的分类 2:355  
 非等度可分解多面体 5:438  
 非典型表示(超代数中的) 5:78  
 非典型 Wiener-Hopf 因式分解(函  
 数的) 3:99  
 非迭代的逻辑公式 3:607  
 非定常约束 2:891  
 非定向配边 1:623  
 非定向配边理论 1:622  
 非定向图 2:752  
 非定向下配边 1:402  
 非对称簇 1:244  
 非对称图 2:754  
 非对称系数 1:244



- 非对称性(分布的)\* 1:245  
 非分裂表示(拓扑群的) 4:591  
 非分裂二次曲线 1:767  
 非分歧环扩张 2:234  
 非分歧理想 5:356  
 非分歧拟特征标 4:420  
 非分歧态射 2:393  
 非分歧特征标 5:356  
 非分歧域扩张 4:476  
 非分歧正则元(解析函数的)  
   1:161  
 非分歧 Riemann 区域 4:645  
 非负定二次型 4:755  
 非负定核 2:25;4:249  
 非负定积分核 2:25  
 非负积分核 2:25  
 非负矩阵 4:135  
 非负流形(Крейн 空间中的)  
   3:294  
 非负元素(Крейн 空间中的)  
   3:294  
 非负自伴线性变换 4:748  
 非负 Hermite 矩阵 2:857;2:745  
 非共振环面 4:438  
**非合作对策 3:931**  
 非合作非原子对策 3:929  
 非幻定理 5:427  
 非混合理想 2:376  
 非混合性定理 1:639  
 非减函数 3:32  
 非减序列 3:32  
**非交换遍历理论 2:384**  
 非交换多项式代数 4:156  
 非交换概率论 4:412  
 非交换整环 3:94  
 非焦流形(圆锥曲线的) 3:604  
**非结合环与非结合代数 3:927**  
 非紧不可约 Hermite 对称空间  
   2:859  
 非紧测度(集合的) 2:493  
 非紧型代数 2:732  
 非经典逻辑演算 2:735  
 非经典模型论 3:930  
**非经典模型论 3:930**  
 非局部问题(振动理论的) 4:47  
 非绝对位值数系 3:1009  
 非扩张算子 2:493  
 非扩张映射 3:730  
 非临界集(代数函数的) 1:85  
 非逻辑公理 4:285  
 非逻辑公理(简单类型论的)  
   5:305  
 非迷向二次型 4:382  
**非迷向核 1:183**  
 非迷向核(二次型的) 4:383  
**非迷向群 1:183**  
 非迷向群(域上的) 3:684  
 非迷向双线性型 5:516  
 非迷向 Hölder 条件 2:887  
 非纽结 3:844  
 非平凡的代数系统类 2:565  
 非平凡零点(Dirichlet  $L$  函数的)  
   2:212  
 非平凡零点(Riemann  $\zeta$  函数的)  
   5:542  
 非平凡零点( $\zeta$  函数的) 2:257  
 非平凡群类 1:132  
 非平凡收敛序列 2:443  
 非破坏性试验 5:186  
 非谱综合集 4:924  
 非齐次波动方程 5:453  
 非齐次估计量 1:535  
 非齐次扩散方程 2:174  
 非齐次切线坐标 5:134  
 非齐次双调和方程 2:332  
 非齐次算术最小值 2:724  
 非齐次问题(数的几何中的)  
   2:724  
 非齐次问题(消元理论中的)  
   2:339  
 非齐次线性常微分方程 3:496  
 非齐次线性常微分方程(周期系数的)  
   3:509  
 非齐次线性常微分方程组 3:497  
 非齐次线性积分方程 3:94  
 非齐次 Bessel 方程 1:341  
 非齐次 Cauchy - Riemann 方程  
   1:160  
 非齐次 Cauchy - Riemann 方程  
   3:390  
 非齐次 Diophantus 逼近 2:191  
 非齐次 Galileo 变换 2:623  
 非齐次 Helmholtz 方程 2:850  
 非齐次 Lorentz 代数 1:822  
 非齐次 Lorentz 群 4:195  
 非齐次 Марков 链 3:614  
 非齐次  $\bar{\partial}$  方程 1:160  
 非奇点(解析空间的) 1:174  
 非奇点全纯映射 2:891  
 非奇点(Lagrange 流形的) 2:530  
**非奇异边界点 3:964**  
 非奇异不动点 3:379  
 非奇异不可约二次曲面 5:85  
 非奇异化 4:607;4:857  
 非奇异极值曲线 2:398;3:382;  
   4:546  
 非奇异解(微分多项式方程的)  
   2:98  
**非奇异矩阵 3:965**  
 非奇异零点(微分多项式的) 2:98  
 非奇异实代数簇 4:508  
 非奇异双线性型 1:360;2:289  
 非奇异随机过程 5:6  
 非奇异透射(几何学中的) 2:907  
 非奇异线性变换 3:671  
 非奇异正则完全交 4:509  
 非歧义上下文无关文法 2:747  
 非歧义上下文无关语言 2:747  
 非歧义文法 2:515  
 非歧义语言 2:515  
 非切向边界值 1:183;1:415;  
   3:453  
 非球面流形 4:896  
 非球面拓扑空间 3:271  
 非球面性定理(纽结的) 2:40  
 非确定性机器 3:590  
 非确定性选择(算法的) 1:134  
 非确定性自动机 1:272  
 非确定性 Turing 机 1:720;5:291  
 非确性多项式时间类 1:124  
 非伸长映射 4:655  
 非生成元素(模的) 5:66  
**非剩余 3:960**  
 非剩余( $n$  次模  $m$  的) 3:960;  
   4:279  
 非算法程序设计语言 1:128  
 非随机化统计检验 4:1017  
 非特殊除子 1:79  
 非特殊正交变换 4:40  
 非特征曲面(Cauchy 问题的)  
   1:521

- 非同余半群 4:831  
 非退化半双线性型 1:860  
**非退化表示 3:932**  
 非退化表示( $C^*$ 代数的) 4:250  
 非退化常微分方程组 4:571  
 非退化超平行体 4:84  
 非退化代数系统类 2:565  
 非退化代数线束 5:123  
 非退化的平稳点(函数的) 4:985  
 非退化的全纯映射 2:890  
 非退化的 Hermite 型 2:856  
 非退化调和层 4:268  
 非退化二次曲面 4:394  
 非退化二次曲线 1:767;4:737  
 非退化二次型 4:382  
 非退化二次型(环上的) 5:446  
 非退化分布(Euclid 空间中的)  
   2:33  
 非退化极空间 4:216  
 非退化矩阵 3:671;3:965  
 非退化连续主系列(表示的)  
   1:818  
 非退化联络(流形上的) 1:779  
 非退化临界点(光滑映射的)  
   1:889  
 非退化临界点(函数的) 4:866  
 非退化内积空间 2:877  
 非退化平面网 3:890  
 非退化奇点(微分方程组的)  
   4:860  
 非退化奇点(向量场的) 4:859  
 非退化射影二次曲线 4:738  
 非退化双线性函数 2:296  
 非退化双线性型 2:289;1:360;  
   5:39  
 非退化双线性映射 1:361  
 非退化条件(双线性型的) 2:877  
 非退化线性映射 3:671  
 非退化相函数(Fourier 积分算子  
   的) 2:531  
 非退化圆网 3:890  
 非退化 Abel 函数 1:11  
 非完满域 4:119  
 非完整(和乐)空间(具有基本群的)  
   1:779  
**非完整系统 3:936**  
 非完整约束 2:313  
 非完整坐标 2:892  
 非唯一性集 5:336  
 非位值数系 3:1008  
 非线性本征值问题(积分算子的)  
   2:326  
**非线性边值问题 3:937**  
**非线性边值问题,数值方法 3:937**  
 非线性波动方程 3:654  
 非线性差分方程 2:78  
 非线性常微分算子 2:166  
 非线性二阶偏微分方程 2:130;  
   3:951  
 非线性发展方程(数学物理中的)  
   5:50  
**非线性泛函 3:944**  
**非线性泛函分析 3:945**  
**非线性方程,数值方法 3:941**  
 非线性高阶偏微分方程 3:952  
**非线性规划 3:954**  
 非线性回归 4:541  
**非线性积分方程 3:945**  
 非线性积分算子 3:112  
 非线性积分微分方程 3:126  
 非线性计算算法 1:726  
 非线性阶(几何对象的) 2:711  
 非线性扩散方程 2:175  
**非线性联络 3:940**  
 非线性联络( $p$  阶的) 3:941  
 非线性滤波 1:834  
 非线性滤波问题 5:19  
 非线性抛物型偏微分方程 3:951  
**非线性偏微分方程 3:950**  
 非线性偏微分方程的精确解的理论  
   3:953  
 非线性偏微分算子 2:166  
 非线性曲线回归 4:541  
 非线性双曲型方程和方程组  
   4:435  
 非线性双曲型偏微分方程 3:952  
**非线性算子 3:946**  
**非线性算子半群 4:759**  
 非线性算子方程 3:904  
 非线性椭圆型偏微分方程 3:951  
**非线性微分方程 3:941**  
**非线性位势 3:954**  
 非线性问题(小除数的) 4:874  
 非线性一阶常微分方程 3:941  
 非线性一阶偏微分方程 3:941;  
   3:951  
 非线性真空 2:230  
**非线性振动 3:948**  
 非线性振动理论 4:47  
 非线性 Diophantus 逼近 2:191  
 非线性 Schrödinger 方程 3:654  
 非线性 Volterra 方程 5:436  
 非线性 Volterra 积分算子 5:437  
 非协调有限元 4:393  
**非形式公理方法 3:68**  
 非驯多面体 5:129  
 非驯分歧 4:626  
 非驯箭图 4:459  
 非驯结合代数 4:594  
**非驯纽结 5:510**  
**非驯嵌入 5:510**  
 非驯嵌入(多面体的) 5:510  
 非驯嵌入(局部紧空间的) 5:510  
 非驯嵌入(拓扑流形的) 5:510  
**非驯球面 5:511**  
 非循环网络中的项目评估技术 - 费  
   用问题 4:325  
 非严格极大点 3:689  
 非严格极小点 3:689  
 非一致编码 1:630  
**非游荡点 3:966**  
 非游荡集 1:538;2:311  
 非预料时 5:27  
**非原子测度 3:929**  
 非原子测度空间 3:699  
**非原子对策 3:929**  
 非增函数 2:20  
 非增序列 2:21;3:821  
 非真商对象 4:461  
 非振荡(常微分方程解的) 2:12  
 非振动常微分方程 2:811  
**非振动区间 3:956**  
 非振动向量微分方程 2:811  
 非振动 Hamilton 微分方程 2:811  
 非正常赋值 5:365  
 非正常子群 5:59  
 非正定二次型 4:755  
 非正定积分核 2:25  
 非正规恒等式(半群簇中的)  
   5:401  
 非正规元素对(半群的) 4:14



- 非正规子群(AB 正规子群)  
   1:17  
 非正积分核 2:25  
 非正交正则型(逻辑中的) 4:975  
 非正则边界点 3:183  
 非正则簇 3:185  
 非正则代数曲面 1:102  
 非正则点 4:267  
 非正则度(簇的) 4:161  
 非正则度(非正则性) 3:185  
 非正则模型 3:784  
 非正则奇点 3:184  
 非正则奇点(矩阵函数的) 1:178  
 非正则曲面理论的基本定理  
   1:102  
 非正则素数 3:183  
 非正则性 3:185  
 非正则性(代数曲面的) 1:102  
 非正则性(完全光滑代数曲面的)  
   2:698  
 非正则性指标 3:185  
 非正则性指数(素数的) 3:184  
 非正则性(Albanese 簇的) 1:64  
 非直谓定义 3:960  
 非直谓分析 2:518  
 非直谓形式理论 2:518  
 非直谓性质 3:960  
 非中心曲面 5:85  
 非中心 Hotelling  $T^2$  分布 2:933  
 非中心  $\chi^2$  分布 3:930  
 非终止符(生成文法中的) 2:750  
 非终止符(算法语言中的) 1:129  
 非周期随机矩阵 5:9  
 非周期自同构 1:188  
 非周期 Марков 链 3:615  
 非自伴算子 3:960  
 非自伴微分算子 4:930  
 非自由集(向量空间中的) 2:571  
 非 Abel de Rham 复形 3:925  
 非 Abel 上链复形 3:924  
 非 Abel 上同调 3:924  
 非 Abel 上同调理论 1:648  
 非 Abel 数域 3:926  
 非 Archimedes 除环 3:543  
 非 Archimedes 范数 3:968  
 非 Archimedes 几何学 3:926  
 非 Archimedes 数系 3:926  
 非 Archimedes 直线 3:926  
 非 Desargues 几何学 3:932  
 非 Desargues 平面 3:932  
 非 Desargues 系统 3:932  
 非 Euclid 波动方程 1:281  
 非 Euclid 的 Лобачевский 几何学  
   2:525  
 非 Euclid 几何学 3:933  
 非 Euclid 几何学的综合理论  
   3:933  
 非 Euclid 几何学(有关群论的)  
   3:935  
 非 Euclid 几何学(有关微分几何的)  
   3:934  
 非 Euclid 距离(单位圆盘上的)  
   4:162  
 非 Euclid 空间 3:936  
 非 Fredholm 积分方程 3:936  
 非 Hopf 群 3:937  
 非 Pappus 几何学 4:106  
 非 Pappus 平面 4:106  
 非 Pascal 几何学 3:959  
 费用(编码的) 1:631  
 费用(成本) 4:787  
 费用函数 1:122;1:719;1:832;  
   4:716  
 费用(微分对策的) 2:147  
 分 3:765  
 分瓣正弦投影 1:493  
 分布 2:253  
 分布半群 4:764  
 分布半群((Hausdorff)局部凸空间  
   中的) 4:765  
 分布导数 4:886  
 分布的非对称性 1:245  
 分布的收敛性 2:262  
 分布函数 2:253  
 分布函数(随机变量的) 2:253  
 分布函数(动态对策中的) 2:304  
 分布(集函数) 3:805  
 分布空间(广义函数空间) 2:689  
 分布律 2:254  
 分布律(概率论中的) 2:254  
 分布式计算 1:893  
 分布型 2:262  
 分布(圆盘内亚纯函数值的)  
   5:368  
 分布(整点的)\* 3:114  
 分布自由检验 3:959  
 分步法 2:548  
 分步构造演算 1:456  
 分部积分法 3:123  
 分部积分法公式 3:90  
 分部求和法 1:8  
 分部求和公式 2:21  
 分层 2:862  
 分层 5:29  
 分层(层化)(光滑流形的子集的)  
   5:30  
 分层(层化)(解析集的) 1:173  
 分层(层化)(空间到其不可约分支  
   的) 3:181  
 分层抽样法 3:823  
 分层公式 1:291  
 分层(类型的) 5:304  
 分层样本 5:30  
 分层 Morse 理论 3:835  
 分岔理论(流体动力学系统的)  
   5:287  
 分拆 4:104  
 分拆(分解)问题(整数的) 1:36;  
   1:37  
 分拆(数的) 1:579  
 分拆(正整数的) 4:104  
 分次代数 2:742  
 分次导子 2:95  
 分次对象 1:710  
 分次对象(下有界的) 1:710  
 分次环 2:742  
 分次交换超代数 5:78  
 分次交换性 2:432  
 分次交换性条件 2:144  
 分次模 2:742  
 分次双代数 2:928  
 分次态射 2:742  
 分次投射维数 2:905  
 分次微分子层 4:151  
 分次 Abel 群 1:627  
 分次 Hopf 代数 2:928;4:599  
 分次 Lie 代数 3:408  
 分次 Lie 积 3:410  
 分次 Lie 括号 3:410  
 分段确定性的 Марков 过程  
   1:834

- 分段粘合定理(广义函数的)  
2:684
- 分割 1:915**
- 分割(全序集的) 5:236
- 分割(实数的) 1:807
- 分割完全化 1:705
- 分割(有理数系的) 4:513
- 分划 4:104**
- 分划(拓扑空间的) 4:437
- 分划(由等价关系定义的) 2:377
- 分级多元属性 3:845
- 分解 2:19**
- 分解 4:607**
- 分解(半鞅的) 4:771
- 分解(测度的) 5:12
- 分解(超函数的奇异谱的) 3:739
- 分解(单纯集的) 2:923
- 分解点(割点) 2:221
- 分解(对象的) 4:607
- 分解(多边形的) 4:225
- 分解(关于拓扑基的) 1:316
- 分解函数 4:872
- 分解空间 4:461;4:462
- 分解(空间的) 2:20
- 分解理论 3:301
- 分解链环 3:273
- 分解(模一素数的) 2:925
- 分解(奇点的)\* 4:607**
- 分解(群对于正规子群的) 1:867
- 分解群(素理想的) 3:50
- 分解(拓扑空间的) 2:924,4:461
- 分解问题(逻辑中的) 3:606
- 分解(无限长度的) 2:181
- 分解系(射影簇的) 3:538
- 分解(线性规划问题中的限制系统的) 3:504
- 分解性质(有序的 Banach 空间中的) 4:664
- 分解域(素理想的) 3:50
- 分界流形 4:784
- 分界围道 4:784
- 分界线 4:784**
- 分界线(鞍点的) 4:705
- 分界线(鞍结点的) 4:706
- 分界线图形 4:859
- 分块对角矩阵 3:671
- 分块对角算子 1:377**
- 分块对角形式(矩阵的) 1:702
- 分块过程(矩阵的) 1:401
- 分块矩阵 3:670
- 分块(空间的) 5:443
- 分块映射族(拓扑空间的) 2:70
- 分块友典范形式 3:979
- 分类定理(关于多面体映射的)  
1:654
- 分类合并(Cobol 语言中的) 1:621
- 分类空间 1:603**
- 分类空间(拟群结构的) 4:370
- 分类空间(群的) 1:603
- 分类空间(Haefliger 结构的)  
2:504
- 分类问题 2:240
- 分类学问题 4:109
- 分离边界条件 5:49
- 分离变量法 4:783**
- 分离超平面(凸集的) 1:848
- 分离点(估计量的) 4:679
- 分离定理(逻辑中的) 2:375
- 分离法则 3:802**
- 分离概形 4:719
- 分离公理 4:783**
- 分离公理模式 1:291
- 分离公理  $T_0$  4:783
- 分离公理  $T_1$  4:783
- 分离公理  $T_2$  4:783
- 分离公理  $T_3$  4:783
- 分离公理  $T_4$  4:783
- 分离基 5:241
- 分离集(范畴的) 2:694
- 分离集(可分随机过程的) 4:782
- 分离集(连续线性泛函的) 1:305
- 分离集(线性泛函的) 5:232
- 分离集族 2:242**
- 分离连续表示(Lie 群的) 3:51
- 分离率 2:696
- 分离双线性泛函 2:296
- 分离态射 4:782
- 分离条件(数列的) 3:134
- 分离调和函数 3:854
- 分离同余族 3:529
- 分离拓扑环 5:196
- 分离一致结构 5:324
- 分离原理 2:60
- 分离原理(关于控制问题的)  
3:1044
- 分离原理(控制论中的) 1:922
- 分离子(范畴的) 2:694
- 分量(带的) 1:309
- 分量(关于拓扑基分解的) 1:316
- 分量(群的) 5:66
- 分量文法(上下文相关文法)  
2:748
- 分量(无穷可分分布因子分解中的)  
3:61
- 分量(向量的)\* 1:721**
- 分量(向量空间元素的) 1:316
- 分量(向量在给定基下的) 5:405
- 分量映射 3:609
- 分量(张量的) 1:825
- 分量(张量关于基的) 5:145
- 分量(Kronecker 符号的) 3:300
- 分量(Riesz 空间的) 4:661
- 分裂半单 Lie 代数 3:417
- 分裂表示(拓扑群的) 4:951
- 分裂表示(Lie 代数的) 5:475
- 分裂代数环面 1:115
- 分裂代数(线性变换的)  
5:475
- 分裂单射 4:800
- 分裂定理( $B$  集的) 2:60
- 分裂短正合序列 4:956
- 分裂法 2:234;3:823
- 分裂复数 2:279
- 分裂格式 2:548
- 分裂基本  $k$  代数 4:459
- 分裂集(线性变换的) 5:475
- 分裂晶体群 1:899
- 分裂可对角化代数群 2:70
- 分裂可解 Lie 代数 3:419
- 分裂扩张(群的) 4:755;4:956
- 分裂链环 3:273
- 分裂群 4:955**
- 分裂群扩张 4:956
- 分裂群(域上的) 3:684
- 分裂算子 2:235
- 分裂向量空间 5:517
- 分裂序列 4:956**
- 分裂引理 1:577
- 分裂域 1:83;2:627
- 分裂域(不可约表示的) 2:479



- 分裂域(多项式的)\* 4:956  
 分裂域(有限群的) 2:479  
 分裂原理 1:557  
 分裂正合序列 4:956  
 分裂 Cartan 子代数 4:956  
 分裂 Jacobson - Witt 代数 5:515  
 分裂 Lie 代数扩张 2:423  
 分裂 Lie 代数(线性变换的)  
   5:475  
 分裂 Lie 代数(域上的) 4:956  
 分裂 Постников 系统 4:259  
**分母 2:44**  
 分母(代数分式的) 2:44  
 分母(分数的) 2:543  
 分母(算术分数的) 2:44  
**分配 4:801**  
 分配二元运算 2:265  
**分配格 2:263**  
 分配广环 4:672  
 分配恒等式(拟群中的) 4:429  
 分配律 1:73;2:264  
**分配拟群 2:264**  
 分配生成近环 3:880  
 分配问题 1:600  
**分配性 2:264**  
 分配性(乘法对加法的) 3:1003  
 分配性(对称差运算的) 5:98  
 分配性质 2:264  
 分片(段)线性配边 1:624  
 分片(段)线性微分形式 2:145  
 分片(段)线性子流形 5:64  
 分片(段)线性 Haefliger 结构  
   2:803  
 分片解析的浸没 5:65  
 分片可微的浸没 5:65  
 分片线性的浸没 5:65  
 分片线性流形 5:223  
 分片线性流形的光滑化 3:965  
 分片线性纽结 3:844  
 分片线性同痕 3:200  
**分片线性拓扑学 4:163**  
 分片线性微丛 3:738  
 分片线性映射 4:163;4:230  
**分歧 1:357**  
 分歧点 1:357  
 分歧点(非线性方程的) 1:436  
 分歧点(曲线的) 3:456  
 分歧度(拟特征标的) 4:420  
 分歧对象的生成 1:357  
 分歧法则(关于表示的限制的)  
   4:599  
 分歧方程 1:436  
 分歧(非线性方程的解的) 1:436  
 分歧(非线性算子的本征元的)  
   3:948  
 分歧分析 2:518  
 分歧覆盖 5:170  
 分歧集 5:166  
 分歧理论(非线性积分方程的)  
   3:946;3:946  
**分歧素理想 4:476**  
 分歧形式理论 2:518  
 分歧语言 2:506  
 分歧值 1:357  
 分歧指数(赋值的) 5:366  
 分歧指数(曲线在一点上的)  
   3:455  
 分歧指数(素理想的) 4:476  
 分歧 Riemann 区域 4:645  
 分散法 3:686  
 分散拓扑空间 1:780  
 分时 4:889  
 分式除子(环中的) 2:270  
 分式范畴 2:54;3:542  
**分式合同 2:544**  
**分式环 2:548**  
**分式理想 2:544**  
 分式线性变换 2:545;3:791;  
   4:733  
**分式线性函数 2:545**  
**分式线性映射 2:545**  
**分式有理函数 2:548**  
 分式域(绝对可积函数集的)  
   3:1021  
**分数 2:542**  
**分数部分 2:547**  
 分数传递置换群 5:251  
 分数次积分 2:544  
**分数次积分与微分(分数阶积分与  
 微分) 2:544**  
 分数次微分 2:544  
 分数次演算 1:456  
 分数阶导数 2:544;3:17  
 分数阶积分法(分数次积分法)  
   2:544;3:1022  
**分数阶积分与微分 2:544**  
 分数阶微分 2:544  
 分数阶微分算子 5:270  
 分数阶 Riemann - Liouville 积分  
   ( $\mu$  阶的) 2:406  
 分数阶 Weyl 积分( $\mu$  阶的) 2:407  
**分数幂 2:547**  
 分数幂(复 Banach 空间上的线性算  
   子的) 2:547  
 分数幂(算子的) 2:250  
 分数特征(矩阵的) 5:162  
 分数  $\theta$  特征 5:162  
**分位数 4:403**  
 分位数( $p$  阶的) 4:403  
 分析的问题(自动机的) 4:546  
 分析静力学 4:983  
 《分析力学》(Lagrange 著) 5:394  
 分析(齐性空间上的) 2:900  
 分析(推导的) 1:455  
 分析(推导树的) 2:51  
 分析问题(控制理论中的) 1:266  
**分形集 2:542**  
**分形维数 2:542**  
 分圆单位 1:924  
**分圆多项式 1:925**  
 分圆方程 1:925  
**分圆扩张 1:923**  
 分圆问题 1:924  
**分圆域 1:924**  
 分圆域扩张 1:923  
 分圆  $\Gamma$  扩张 1:924  
 分支的阶(代数函数的) 1:86  
**分支点 1:435**  
 分支点(代数函数的) 1:86  
 分支点(非线性方程的) 1:436  
**分支点(极小曲面的) 1:437**  
 分支点(曲线的) 4:6  
 分支点(三角剖分二维流形的)  
   5:297  
 分支点(无穷阶的) 1:435  
 分支点(有限阶的) 1:435  
 分支点(Ray 预解式的) 4:504  
 分支定界法 4:718  
 分支定理(算法的) 1:134  
 分支定理(微分代数学中的)  
   2:96

- 分支方程 1:436  
 分支过程 1:438  
 分支过程的正则性 1:443  
 分支过程(具有扩散的)\* 1:441  
 分支过程(具有迁移的)\* 1:442  
 分支过程(具有随机介质的)\* 1:441  
 分支过程(具有有限种粒子的)\* 1:440  
 分支过程(离散时间的) 1:438  
 分支过程(年龄相关的)\* 1:439  
 分支过程(无迁移的) 1:371  
 分支阶(分支解析函数元的) 1:161  
 分支(解的)\* 1:436  
 分支(解析函数的)\* 1:435  
 分支解析函数元 1:161  
 分支界限法 2:228  
 分支(链环的) 3:273  
 分支命令 4:321  
 分支(平面实代数曲线的) 4:196  
 分支(曲线的) 1:914  
 分支曲线(二重平面的) 2:283  
 分支条件 1:438  
 分支指数 1:434  
 分支指数(代数函数的) 1:86  
 分支 Weierstrass 元 1:692  
 分子 3:1009  
 分子(代数分式的) 3:1009  
 分子(分数的) 2:543  
 分子(算术分数的) 3:1009  
 分组编码 1:633  
 分组码 1:630  
 丰富层 1:149  
 丰富除子 3:177  
 丰富解析丛 4:254  
 丰富紧子群 5:341  
 丰富可逆层 3:177  
 丰富向量丛 1:149  
 丰富子群 3:52  
 豐田定理 4:429  
 风险 4:675  
 风险函数 4:675  
 风险(统计程序的)\* 4:675  
 封闭性(解析函数类的) 1:152  
 峰点 1:71;1:411;5:320  
 峰度 2:414  
 峰度系数 2:414  
 峰集 1:72  
 峰值(概率分布的) 5:331  
 蜂巢形 5:444  
 蜂巢(形) 4:84;5:444  
 否定 3:880  
 否定分离法则 3:802  
 夫妻围桌入座问题 3:172;3:353  
 夫妻问题(夫妻围桌入座问题) 1:599;3:172;3:353  
 夫妻问题(夫妻围桌入座问题) 1:599;3:353  
 服部定理 1:623  
 服务过程 4:457  
 服务时间分布 4:448  
 服务子群 3:375  
 俘获 1:254  
 浮点 4:201  
 浮点记号 4:201  
 浮点系统 4:694  
 浮点运算 4:201  
 浮点运算量 2:657  
 浮雕(解析函数的)\* 4:578  
 符号表示 3:596  
 符号表示(对称群的) 4:598  
 符号差 4:821  
 符号差(对称双线性型的) 4:821  
 符号差(二次型的) 3:362;4:821  
 符号差(链环的) 3:278  
 符号差(流形的) 2:527;4:821  
 符号差(伪 Euclid 空间的) 4:366  
 符号差(Fuchs 群的) 2:583  
 符号动力学 5:94  
 符号公式操作 1:729  
 符号公式(Euler 多项式的) 2:404  
 符号公式(Euler 数的) 2:404  
 符号检验 4:820  
 符号逻辑 3:644  
 符号模 2:168  
 符号算子 3:964  
 符号系统 5:40  
 符号  $o, O$  1:247  
 辐角 1:225  
 辐角(复数的) 1:225;1:714  
 辐角余弦 1:867  
 辐角原理 1:225  
 辐角原理(关于多复变量函数的) 1:226  
 辐角增量 5:512  
 辐角正切 5:130  
 辐角正弦 4:844  
 辐射条件 4:466  
 辐射转移方程 1:242  
 辐射转移理论 4:467  
 俯仰矩系数 5:514  
 辅助点(素端的) 3:446  
 辅助符号(生成文法中的) 2:750  
 辅助函数法 1:335  
 辅助谱(Hill 算子的) 2:883  
 辅助推导 2:22  
 辅助谓词 1:125  
 负半槽谷 5:283  
 负半定二次型 4:755  
 负变差(负荷的) 1:564  
 负部(格序群的元素的) 3:358  
 负超几何分布 3:887  
 负超越系数 2:414  
 负递归集 5:449  
 负定二次型 3:362;4:382  
 负定 Hermite 核 2:857  
 负多项分布 3:887  
 负二次微分 4:380  
 负二项分布 3:880  
 负非对称性 1:244  
 负分次模 2:742  
 负根(根系的) 4:683  
 负惯性指数 4:383;4:707  
 负惯性指数(二次型的) 4:383  
 负荷 1:564  
 负后退轨道 3:448  
 负渐近点 3:447  
 负偏斜度 1:244  
 负曲率曲面 3:881  
 负实数 4:513  
 负相关 3:881  
 负向量丛 3:888  
 负序列 4:253  
 负有理数 4:499  
 负有理数基本序列 4:513  
 负元(内积空间中的) 2:877  
 负元(序广群中的) 4:12  
 负增量(函数的) 3:888  
 负指数分布 3:887  
 负子空间(不定度规空间的)



- 4:905  
 负 Hermite 核 2:857  
 负 Lagrange 稳定性 3:329  
 负 Poisson 稳定点 3:447;5:449  
 负 Poisson 稳定集 5:449  
 负 Poisson 稳定性 3:447  
**附加噪声(可加噪声) 1:35**  
 附着问题 4:130  
 复包(Lie 代数的) 1:718  
**复变函数逼近 1:210**  
**复变函数论 2:606**  
**复变函数论中的不适定问题 3:11**  
 复变量 2:587  
 复定向广义上同调论 1:625  
 复多维 Monge-Ampère 方程  
   3:810  
 复分析 1:160  
 复共轭矩阵 3:671  
 复共轭数 1:713  
 复函数或实函数的分类 2:588  
 复合 数学归纳法 3:642  
**复合域 1:724**  
 复合残数形式 4:603  
 复合代数 3:402  
 复合(道路的) 4:108  
 复合(递归论中函数的) 4:523  
 复合定理(伪微分算子的) 4:363  
 复合(对应的) 1:866  
 复合概率定理 4:414  
 复合(关系的) 1:866  
**复合函数 1:721**  
 复合函数导数定理 2:102  
 复合(函数的) 1:721  
 复合函数微分定理 2:103  
**复合假设 1:723**  
**复合理想 1:723**  
 复合名称 3:872  
 复合试验 3:314  
 复合算图 3:923  
 复合梯形公式 5:264  
 复合图 2:59  
 复合映射 3:609  
 复合(映射的) 3:609;4:757  
 复合(域的) 2:467  
 复合(运算的) 1:607  
 复合振幅定理 4:414  
 复合整数 1:896  
 复合 Poisson 分布 3:205  
 复合 Simpson 公式 4:842  
 复化(切丛的) 1:137  
 复化(实代数簇的) 4:509  
 复化(实解析子集的芽的) 4:511  
**复化(向量空间的)\* 1:718**  
 复化(Galileo 代数的) 1:822  
**复化(Lie 代数的)\* 1:718**  
**复化(Lie 群的)\* 1:718**  
**复环面 1:717**  
 复环面(作为复 Lie 群的) 3:427  
**复积分法 1:711**  
 复角(两螺旋间的) 2:848  
**复结构 1:716**  
 复结构场 1:137  
 复结构(实向量空间上的) 2:91  
 复解析结构 2:91  
 复解析空间 1:174  
 复解析流形 1:164  
 复解析流形( $C^n$  上的) 4:645  
 复解析平面 1:171  
 复解析曲面 1:177  
 复解析曲线 1:177  
 复解析叶状结构 2:503  
 复紧 Lie 群 3:427  
 复可微性 1:153  
**复空间 1:715**  
 复空间(在一点上不可约的)  
   4:1027  
 复空间(在一点上约化的) 4:1027  
 复空间(在一点上正规的) 4:1027  
**复流形 1:713**  
 复流形( $C^n$  上的) 4:645  
 复模(螺旋的) 2:848  
 复配边 1:402  
 复配边理论 1:622  
 复平面 1:713  
 复伸缩(在一点上的) 4:421  
**复数 1:713**  
 复数乘法 1:905  
 复数乘法代数 2:358  
**复数的标记 1:61**  
 复数的矩阵解释 1:714  
 复数的向量解释 1:714  
 复数域 1:713  
 复特征(在一点上的) 4:421  
 复同构(代数数域的) 2:219  
 复微分算子 1:525  
 复维数(解析平面的) 1:171  
 复向量空间 5:417  
 复向量空间的实形式 1:718  
**复形 1:706**  
**复形的上同调 1:646**  
**复形的同调 2:910**  
 复形范畴 1:9  
 复形(具有相同  $n$  伦型的) 2:923  
 复形群 5:111  
**复形(同调代数中的) 1:710**  
**复序列的核 3:254**  
 复余维数(解析平面的) 1:171  
 复杂度(译码器的) 2:389  
 复杂度(中继触点电路的) 4:572  
 复杂控制论系统 1:919  
 复杂索 3:273  
 复杂位移系统 5:94  
**复杂系统 1:716**  
 复杂性 1:717  
 复杂性(编码和译码的) 1:634  
 复杂性(程序长度的) 1:121  
 复杂性(触点网络的) 1:801  
 复杂性(递归可枚举集的) 1:122  
 复杂性度量 1:719  
 复杂性度量(机器的) 1:121  
 复杂性度量(试验的) 1:259  
 复杂性(对象的) 1:127  
 复杂性(范式的) 1:394  
 复杂性函数 1:719  
 复杂性函数(生成文法的) 2:750  
 复杂性(合取范式的) 1:397  
 复杂性(机器的) 1:121  
 复杂性界(判定算法的) 4:350  
 复杂性(进度安排理论的) 4:715  
 复杂性(可判定算法的) 4:350  
 复杂性(控制论中测试的) 5:150  
 复杂性类 1:123  
**复杂性理论 1:719**  
 复杂性(逻辑公式的) 3:606  
 复杂性(枚举模型的) 2:366  
 复杂性(通用正规算法的) 5:353  
 复杂性(问题的) 1:719  
 复杂性(析取范式的) 1:397  
 复杂性(译码方法的) 1:631  
 复杂性(有穷对象的) 1:122  
 复杂性(字的) 1:127

复杂性(字的解的) 1:127  
 复杂性(字对的) 1:127  
 复直线 1:171  
 复值函数 2:587  
 复 C 代数化子空间 1:716  
 复 Dirichlet 特征标 2:209  
 复 Euclid 向量空间 2:858  
 复 Gauss 过程 2:663  
 复 Green 函数 2:775  
 复 Green 函数(域上的) 4:731  
 复 Hesse 式 3:393  
 复 Hesse 式(函数的) 2:860  
 复 K 理论 3:239  
 复 Laplace 算子 1:326  
 复 Lie 代数的实形式 1:718  
 复 Lie 群 3:54  
 复 Lie 群的实形式 1:718  
 复 Monge-Ampère 算子 2:775  
 复  $n$  次方根(复的) 1:232  
 复 Stiefel 流形 1:556  
 复  $z$  平面 1:713  
 副法线 1:367  
 赋范代数 3:991  
 赋范格 4:773  
 赋范格(有界元素的) 1:303  
 赋范环 3:991  
 赋范空间 3:991  
 赋范线性空间 1:611  
 赋范域 3:991  
 赋范 Boole 代数 1:391  
 赋范 Riesz 空间 1:303;4:661  
 赋权(关于集合组的) 3:678  
 赋值 5:364  
 赋值函数(范畴文法的) 2:746  
 赋值环 5:365  
 赋值理想 5:365  
 赋值映射 1:47;5:207  
 覆盖 1:879  
 覆盖变换 3:813  
 覆盖变换群 2:787  
 覆盖变换群(正则覆盖的) 2:226  
 覆盖层数(三角剖分了的二维流形的) 5:297  
 覆盖空间 4:803  
 覆盖曲面 1:882  
 覆盖群 3:415  
 覆盖射影 1:879

覆盖同痕 3:200  
 覆盖同伦 1:881  
 覆盖同伦公理 1:881  
 覆盖域 1:880  
 覆盖场(几何对象的) 2:712  
 覆盖定理 1:882  
 覆盖定理( $\mathcal{A}$  集的) 2:60  
 覆盖(范畴对象的) 4:869  
 覆盖概率 1:740  
 覆盖集 1:879  
 覆盖(集合的) 1:881  
 覆盖几何对象 2:711  
 覆盖条件(半模格的) 1:772  
 覆盖图形 2:469  
 覆盖(拓扑空间的) 1:881  
 覆盖(网格上的) 3:849  
 覆盖维数 2:180;3:373;4:536  
 覆盖性质(拓扑学中的) 5:220  
 覆盖与填充 1:879  
 覆盖元 1:881  
 覆盖(组合几何学中的) 1:882

## G

改写问题 1:727  
 概差 4:318  
 概括公理(简单类型论中的) 5:305  
 概率 4:307  
 概率测度 4:310  
 概率测度的弱收敛 5:457  
 概率场 4:312  
 概率乘法定理 4:314  
 概率(大偏差的)\* 4:311  
 概率的限制 5:23  
 概率(第一类错误的) 4:822  
 概率度量空间 2:315  
 概率分布 4:308  
 概率分布的密度 2:46  
 概率分布(同型的) 2:262  
 概率分布( $G$  型的) 2:262  
 概率过程 4:311  
 概率化向量空间 5:503  
 概率机器 3:590  
 概率积分 4:309  
 概率加法定理 4:314  
 概率加密 1:896  
 概率距离 3:399  
 概率空间 4:312  
 概率空间(具有  $\sigma$  流域的) 5:30  
 概率论 4:312  
 概率论中的基本概念 4:313  
 概率密度 2:46;4:484  
 概率密度(负峰度的) 2:414  
 概率密度(零峰度的) 2:414  
 概率密度(正峰度的) 2:414  
 概率(事件的) 4:308  
 概率算法 5:291  
 概率图纸 4:309  
 概率网络模型 3:895  
 概率位势理论 1:427  
 概率相依性 5:2  
 概率(一结果的) 4:313  
 概率自动机 1:278  
 概率 Turing 机 5:291  
 概念(算法语言中的) 1:129  
 概形 4:718  
 概形闭包 1:611  
 概形(复形的) 4:163  
 概形(概形上的) 4:719  
 概形(生成文法的) 2:750  
 概形态射 4:719  
 概形态射(局部有限型的) 4:351  
 概形态射(有限型的) 4:351  
 概形(正规算法的) 3:970  
 干涉项 4:414  
 干预集(状态空间中的) 1:833  
 岡洁-Cartan 理论 3:1015  
 岡洁-Weil 定理 3:1015;4:702  
 岡洁定理 3:1015  
 岡洁凝聚定理 1:641;3:1015  
 岡洁原理 4:1027  
 刚度(域的方程组的) 2:184  
 刚性泛代数 5:348  
 刚性 4:668  
 刚性常微分方程组 4:1040  
 刚性代数 2:28  
 刚性弹性力 2:300  
 刚性定理(关于代数的) 2:28  
 刚性定理(关于周期映射的) 4:123  
 刚性复流形 2:26  
 刚性结构 4:668



- 刚性结合代数 1:647  
 刚性解析空间 4:667  
 刚性矩阵 5:393  
 刚性(空间双曲形式的) 4:423  
 刚性流形 3:66  
 刚性奇点 4:857  
 刚性曲面 2:31  
 刚性曲面(曲面类中的) 3:193  
 刚性算子扩张 2:692  
 刚性(凸曲面的) 1:852  
 刚性微分方程组 4:1039  
 刚性伪群结构 4:370  
 刚性稳定方法 4:1041  
 刚性限制 5:23  
 刚性子流形 4:668  
 刚性 Cauchy 问题 1:522  
 刚性 Steiner 系 4:1029  
**高(初等几何中的) 2:847**  
 高次摆线 1:923  
 高次分歧群 4:476  
 高次正象(层的) 4:806  
 高(代数簇的) 2:846  
 高(代数数的) 1:95  
 高(代数数论中的) 5:368  
 高度函数(流形上的) 5:174  
 高(赋值的) 5:365  
 高(根向量的) 4:686  
 高级 Korteweg-de Vries 方程 3:290  
**高阶递归 4:522**  
 高阶共变导数 1:877  
 高阶连续模 1:808  
 高阶逻辑演算 3:559  
 高阶迷向群 3:201  
 高阶平均曲率 4:296  
 高阶全微分(多元函数的) 2:102  
 高阶谓词演算 4:285  
 高阶无穷公理 3:68  
 高阶 Hopf 不变量 2:930  
 高(棱锥的) 4:376  
 高(离散范数的) 2:228  
**高(理想的)\* 2:847**  
 高频渐近解 4:752  
 高(散射空间的) 4:713  
 高(射影空间的点的) 2:846  
 高(素理想的) 2:847  
 高维变差(函数的) 1:931  
**高维的模 1 分布 2:255**  
 高维符号差 3:240  
**高维几何学 2:863**  
 高维散度定理 5:440  
 高线(三角形的) 1:172  
 高(形式群律的) 2:512  
 高(锥的) 1:738  
 高(自动机试验的) 1:259  
 高(Diophantus 方程的) 2:846  
**高(Diophantus 几何中的) 2:846**  
 高(Young 图中钩形的) 5:533  
 哥尼斯堡桥问题 1:598  
**割补术 5:86**  
 割点 1:915;2:221  
 割点(自动机理论中的) 1:278  
**割迹 1:915**  
 割集(传输网络的) 1:915  
 割集(图的) 3:288  
 割(图中的) 1:915;2:756  
 割(网络中的) 1:915;2:500  
**割线法 4:735**  
 割线(复平面上的) 2:607  
**割圆曲线 4:390**  
 割值函数 4:652  
**格 3:355**  
 格(半群簇的) 5:401  
 格闭代数类 5:57  
 格常数 2:725  
 格(代数数域中的) 2:237  
 格点 3:114;3:115  
**格点分布 3:357**  
 格对称性群 1:899  
 格赋范空间 4:774  
 格基 1:312  
 格可定义代数 5:57  
 格可定义代数类 5:57  
 格论性质(递归可枚举集的) 4:528  
 格铺砌 4:59  
 格填充 4:59  
 格同构 5:40;5:57  
 格同构代数 5:40;5:57  
 格(拓扑群的) 2:230  
 格性质(半群的) 4:758  
 格序半群 4:14  
 格序半群(带除法的) 4:14  
 格序环 4:12  
**格序群 3:358**  
 格序么拟群 3:565  
 格域 4:91  
 格锥 4:248  
**格(Lie 群中的)\* 3:358**  
 格( $\mathbf{R}^n$  中的) 3:358  
 隔离子(集合之间的) 4:104  
**个体变项(个体变元) 3:44**  
**个体变元 3:44**  
**个体遍历定理 3:44**  
 个体遍历定理(信息论中的) 3:724  
**个体常项(个体常元) 3:44**  
 个体常元 3:44  
**个体常元 3:44**  
 个体公理系统 3:562  
 个体合理的构形 4:965  
 个体命题 1:73  
**个体域 2:277**  
 各向低于关系 1:815  
 各向同性的湍流 5:288  
 各向同性应力张量 5:32  
 给定度量 5:488  
**根 4:682**  
 根(半单代数群的) 4:778  
 根代数 4:471  
 根(代数方程的) 1:82  
 根(多项式的) 1:82  
 根方差 4:379  
**根方偏差 4:379**  
 根分解(Lie 代数的) 3:416  
**根(根基)\* 4:468**  
 根(根基)(半群的) 4:226  
**根(根基)(半群类中的)\* 4:469**  
 根(根基)(代数类中的) 4:471  
 根(根基)(代数群的) 4:470  
 根(根基)(二次向量空间的) 5:517  
 根(根基)(二次型的) 3:279  
**根(根基)(环与代数的)\* 4:470**  
**根(根基)(理想的)\* 4:470**  
 根(根基)(模范畴上的) 5:230  
 根(根基)(球面束的) 5:123  
**根(根基)(群的)\* 4:469**  
 根(根基)(准素理想的) 4:288  
 根(根基)(子模的) 4:470  
 根(根基)(Banach 代数的) 1:300

- 根(根基)(Lie代数的) 3:404  
 根(根基)(Мальцев代数的) 3:598  
 根(根系的) 4:683  
 根函数(积分算子的) 2:325  
**根号 4:468**  
**根基 4:468**  
 根(基数的) 1:474  
 根空间 2:326  
 根类(群的) 4:469  
 根理想 4:470  
 根(连通约化群关于环面的) 4:563  
 根平面(球面集的) 2:38  
 根权(根系的) 4:683  
 根式解 1:69  
 根式可解性 1:83  
 根稳定性 3:741  
**根系 4:682**  
 根系的分类 4:683  
 根系的一般性质 4:683  
 根系( $A_n$ 型的) 4:684  
 根系( $B_n$ 型的) 4:684  
 根系( $C_n$ 型的) 4:684  
 根系( $D_n$ 型的) 4:684  
 根系( $E_6$ 型的) 4:684  
 根系( $E_7$ 型的) 4:684  
 根系( $E_8$ 型的) 4:684  
 根系( $F_4$ 型的) 4:684  
 根系( $G_2$ 型的) 4:684  
 根系(Lie代数的) 3:416  
**根向量 4:686**  
 根向量(算子的) 2:250  
 根向量(域上的向量空间的线性变换的) 4:686  
 根性(群环的) 2:784  
 根性质(代数类的) 4:471  
 根(域上的代数方程的) 4:682  
 根中心 4:469  
 根中心(球面罗的) 5:461  
**根轴 4:468**  
 根轴(球面集的) 2:38  
 根轴(球面网的) 3:890  
 根轴(同心圆的) 2:38  
 根子空间 4:686  
 根子空间(Lie代数的) 4:475  
 根子类(代数的) 4:471  
 根(Lie代数的) 3:416  
 更列 3:172  
 更列问题 1:599  
 更列(自由谐振动的) 2:568  
 更新储备 4:577  
 更新方程 4:580  
 更新方法 4:452  
 更新过程 4:580  
 更新函数 4:580  
**更新理论 4:580**  
 更新型方程 4:581  
 弓形 4:225  
 公倍数(自然数的) 3:857  
 公比(几何数列的) 2:713  
 公垂线(相错直线的) 4:870  
 公度(两个量的) 1:668  
 公开加密算法 1:893  
 公[开密]钥分布体制 1:896  
 公[开密]钥密码体制 1:892; 1:893  
**公理 1:286**  
 公理场论 4:409  
 公理定义(算法的描述复杂性的) 1:121  
**公理方法 1:287**  
**公理化类 1:293**  
 公理化类(语言模型的) 1:293  
 公理集(代数系统类的) 2:337  
**公理集合论 1:289**  
 公理类(语言模型的) 1:293  
**公理模式 1:287**  
 公理模式(概括的) 1:290  
 公理上同调论 4:1019  
 公理同调论 4:1019  
 公理位势论 4:270  
**公理系统的独立性 3:37**  
 公理系统(Лобачевский几何学的) 2:879  
 公理 A 流 5:528  
 公理 A 微分同胚 5:95  
 公理 A 吸引子 1:547  
 公设 4:349  
**公式 2:522**  
 公式的推论 1:74  
 公式集 4:786  
 公式(经典谓词演算中的) 3:557  
 公式模型 3:605  
 公式象(矢列式的) 4:787  
 公式(与一个形式系统不相容的) 3:32  
 公式(在模型中为真的) 1:399  
 公式自同构( $\Omega$ 系统的) 1:109  
 公式( $\Omega$ 系统中的) 1:106  
 公制分 3:765  
 公制秒(度量秒) 3:765;4:736  
 功率谱(平稳随机过程的) 4:987  
 功能处理模块(Cobol语言中的) 1:621  
 功能(控制系统的) 1:827  
 功能上等价的程序模式 5:155  
 功能元件(功能元) 1:262;1:277; 2:72  
**功能元图 2:71**  
 功能元图(没有输出分支的) 2:72  
 功能元图(在基上的) 2:72  
 功能元网络(功能元图) 2:72  
 功能(自动机的) 1:276  
**功效函数(检验的)\* 4:278**  
 功效函数(统计检验的) 4:278; 4:1003;4:1017  
**功效(统计检验的)\* 4:278**  
 攻角 5:514  
 宫岗-丘(成桐)-Богомолов不等式 1:105  
**共变变换 1:875**  
 共变变换(群的) 1:668  
 共变变换(张量的) 1:668  
 共变常数场 4:79  
**共变导数 1:876**  
 共变导数(对称的且与度量相容的) 4:647  
 共变函子 1:501  
 共变几何微分不变式 2:163  
 共变价(张量的) 5:145  
 共变可表示函子 2:610  
 共变量 1:874  
**共变微分 1:876**  
**共变微分法 1:876**  
 共变微分法(向量丛上的) 1:878  
**共变向量 1:878**  
 共变斜对称张量 4:872  
**共变张量 1:878**  
 共变张量代数 5:142



- 共轭变量 3:327  
 共轭变量(力学中的) 2:806  
 共轭变量(Понтрягин 最大值原理中的) 3:1035  
 共轭超复数 2:952  
**共轭等温坐标 1:773**  
 共轭点(变分问题中的) 3:211  
 共轭点(变分学中的) 5:382  
 共轭点(测地线上的) 2:703  
 共轭点(关于二次曲面的) 4:394  
 共轭多重调和函数 4:186  
 共轭泛函 1:845  
 共轭方程(Fredholm 积分方程的) 2:564  
**共轭方向 1:770**  
 共轭方向(曲面上的) 2:155  
**共轭函数 1:770**  
 共轭函数(调和函数的) 1:770  
 共轭函数对 2:290  
 共轭函数(复值函数的) 1:770  
**共轭函数类(函数的共轭类) 1:769**  
 共轭函数(以  $2\pi$  为周期并在  $[-\pi, \pi]$  上可和的函数的) 1:770  
 共轭核(求和法的) 3:255  
 共轭划分 3:596  
 共轭集 5:418  
 共轭集(集合的) 1:770  
 共轭交错数 1:147  
 共轭空间 2:289  
 共轭联络 1:42  
 共轭模 2:289  
 共轭曲线 1:339  
**共轭三角级数 1:773**  
 共轭收敛半径(多重幂级数的) 4:281  
 共轭数(代数数的) 1:95  
 共轭数(复数的) 1:713  
 共轭四元数 4:443  
 共轭算子 1:46  
**共轭梯度法 1:771**  
 共轭条件(调和函数的) 1:525  
 共轭条件(多重调和函数的) 1:525  
**共轭调和函数 1:772**  
**共轭网 1:773**  
 共轭微分 2:165  
 共轭线性算子 5:418  
 共轭向量函数 1:826  
 共轭向量空间 5:418  
**共轭元 1:770**  
 共轭元(对合代数的) 3:178  
 共轭元(群元的) 3:990  
 共轭圆束 5:122  
 共轭直径(相对平分弦的) 2:73  
 共轭指数 2:290  
 共轭锥 4:248  
 共轭子群 1:770  
 共轭 Dirichlet 核 2:211  
 共轭 Fourier 级数 2:376  
 共轭 Sylow 基 5:91  
 共轭 Чебышев 网 5:253  
**共合 1:148**  
 共合化问题 1:148  
 共合嵌入(群的) 1:148  
**共合(群的)\* 1:148**  
 共核型空间 3:998  
**共基 1:618**  
 共基(切空间的) 5:228  
**共焦二次曲线 1:748**  
**共焦曲线 1:748**  
 共绝对形拓扑空间 1:17  
 共绝对形 Hausdorff 紧统 1:681  
**共面向量 1:619;5:404**  
 共鸣定理 5:321  
 共生 4:429  
 共生拟群 2:264;4:429  
**共同代表系 5:120**  
 共同代表系定理 4:746  
 共尾度(序数的) 4:16  
 共尾特征标 1:474  
 共尾相似集 4:103  
 共尾型 4:103  
 共尾型集 4:103  
 共线点 1:658  
**共线向量 1:658**  
 共线性(射影几何学中的) 4:335  
**共形半径 1:757**  
 共形半径(紧连通集的) 1:758  
 共形半径(一个区域关于无穷远点的) 1:758  
 共形半径(一个区域关于一点的) 1:757  
**共形变换 1:759**  
 共形变换群 1:751  
**共形不变度量 1:759**  
 共形不变对象 3:164  
 共形不变性定理(关于曲线族模的) 2:435  
**共形测地网 1:751**  
 共形等价区域 1:574  
 共形等价 Riemann 曲面 3:797  
 共形等价(Riemann 曲面的) 4:640  
 共形地图投影 1:489  
**共形几何学 1:751**  
**共形结构 1:758**  
 共形结构(流形上的) 1:758  
 共形结构(向量空间上的) 1:758  
 共形结构(由 Euclid 度量诱导的) 1:758  
**共形空间 1:758**  
**共形联络 1:748**  
 共形平面 1:750  
 共形平坦殆率结构 1:143  
 共形曲率张量 1:749  
 共形群 1:758,759  
 共形容量 1:467  
 共形同胚(上半平面到单位圆盘的) 2:545  
**共形微分几何学 1:750**  
**共形映射 1:753**  
**共形映射的边界性质 1:757**  
 共形映射(第二类) 1:185;1:753  
 共形映射(第一类) 1:753  
 共形映射(区域内的) 1:753  
 共形映射(在一点上的) 1:753  
 共形自同构(单位圆盘的) 2:545  
 共形自同构(上半平面的) 2:545  
 共形自同构( $\mathbb{C}$  的) 2:545  
**共形 Euclid 空间 1:750**  
 共形 Чебышев 网 4:615  
**共振 4:610**  
 共振本征值组 4:193  
 共振单项式 4:193  
 共振方程 3:949  
 共振环面 4:438  
**共振项 4:610**  
 共振形式向量场 4:194  
 贡献(边界对积分的) 4:985  
 贡献(孤立平稳点对积分的)

- 4:985  
**勾股定理**(Pythagoras 定理)  
 4:377  
**钩形**(Young 图中的) 5:533  
**构形** 1:741  
**构形假设** 1:744  
**构形空间** 4:154;2:309  
**构形流形**(流的) 2:701  
**构形**(Turing 机的) 5:290  
**构造不可数性**(构造实数集的)  
 1:785  
**构造的代数系统** 2:367  
**构造度量空间** 1:790  
**构造对象** 1:792  
**构造法则**(系统  $S$  的) 1:288  
**构造方法**(得到码的) 2:388  
**构造分析** 1:785  
**构造过程** 1:792  
**构造函数** 1:786  
**构造函数论** 1:797  
**构造理论** 1:788  
**构造逻辑** 1:787  
**构造码** 2:388  
**构造命题逻辑** 2:861  
**构造命题演算** 1:792  
**构造模型论** 1:792  
**构造趋势**(数学中的) 1:788  
**构造实变函数** 1:787  
**构造实数** 1:794  
**构造数学** 1:788  
**构造算式** 1:787  
**构造谓词逻辑** 2:861  
**构造无限归纳法则** 1:479  
**构造形式数学分析** 2:518  
**构造形式**(Gödel 完全性定理的)  
 2:735  
**构造性量子场论** 1:792  
**构造性无限归纳法则** 3:57  
**构造序列**(有理数的) 1:785  
**构造序列**(自然数的) 1:785  
**构造选择原理** 1:795  
**构造演算** 3:558  
**构造语义学** 1:795  
**构造 Carnap 法则** 1:479  
**构造  $m$  元分数** 1:786  
**构造**( $\epsilon, 1$ ) 典型性 4:478  
**估计迭代偏差的方法** 5:257  
**估计回归系数** 4:542  
**估计量**(谱测度的) 4:917  
**估计量**(无系统误差的) 5:312  
**孤立单位立方体顶点** 1:393  
**孤立点** 3:187  
**孤立点**(实曲面的) 4:863  
**孤立点**(实曲线的) 4:862  
**孤立顶点** 2:753  
**孤立割点**(自动机理论中的)  
 1:278  
**孤立集**(自然数的) 3:187  
**孤立紧集**(动力系统中的) 5:189  
**孤立理想**(半群的) 1:606  
**孤立奇点** 3:187  
**孤立奇点**(代数簇的) 4:857  
**孤立奇点**(单值特征标的) 3:188  
**孤立奇点**(多值特征标的) 3:187  
**孤立奇点**(概形的) 4:857  
**孤立奇点**(解析函数的) 1:154  
**孤立奇点**(解析函数的一个元素的)  
 3:187  
**孤立奇点**(向量场的) 4:863  
**孤立素理想** 4:288  
**孤立凸格子群** 1:849  
**孤立现象**(射线函数的) 2:723  
**孤立现象**(算术最小的) 2:723  
**孤立元** 3:187  
**孤立元的算术** 3:187  
**孤立子** 4:894  
**孤立子方程** 4:895  
**孤立子**(集合的) 3:188  
**孤立子群** 3:188  
**古典代数概率空间** 4:414  
**古典概率** 4:413  
**古典概率的概念** 4:313  
**古典概率基础** 4:414  
**古典概率论公理** 4:414  
**古典恒真逻辑公式** 4:285  
**古典破产问题** 4:486  
**古典真逻辑公式** 4:285  
**谷底** 3:755  
**谷函数** 4:504  
**骨架**(胞腔复形的) 1:532  
**骨架**(单纯复形的) 4:328  
**骨架范畴** 4:869  
**骨架**(范畴的)\* 4:869  
**骨架**(复形的) 4:163  
**骨架**(解析多面体的) 1:172  
**骨架**(框架)(逻辑模型的) 4:975  
**骨架**(区域的) 1:327;3:118  
**骨架子图**(生成子图) 2:753  
**骨架**(Weil 区域的) 5:479  
**固定超滤子** 5:307  
**固定点系**(对凸集的) 3:12  
**固定分支**(线性系的) 3:506  
**固定偏倚** 3:369  
**固定奇点** 4:62  
**固定终止时间最优化问题** 3:1048  
**固定子** 4:131  
**固连 Brown 运动**(受约束 Brown 运  
 动) 3:959;3:1016  
**固体** 3:44  
**固有尺度**(物体的) 4:568  
**固有频率** 2:322  
**固有歧义的上下文无关语言**  
 2:747  
**固有误差** 2:387  
**固有向量** 2:327  
**固有振动** 2:322  
**卦限** 3:1015  
**卦限**(空间的) 1:488  
**挂钩问题** 4:130  
**拐点** 4:202  
**拐点存在的必要条件** 4:202  
**拐点存在的充分条件** 4:202  
**拐点**(平面实代数曲线上的)  
 4:170  
**拐心**(射线的) 1:715  
**怪球面** 4:937  
**怪示性类** 1:559  
**关键路线法**(临界路径法) 3:895  
**关键路线问题**(非循环网络中的)  
 4:324  
**关联** 3:28  
**关联半空间链** 4:26  
**关联**(超图中的) 2:959  
**关联代数** 2:368  
**关联公理**(椭圆几何学的) 4:622  
**关联公理**(Hilbert 公理系统中的)  
 2:878  
**关联关系** 1:879;3:779  
**关联关系**(射影空间中的) 4:344  
**关联函数**(统计力学中的)  
 1:862



- 关联结构 3:29  
 关联结构(点和直线的) 3:892  
 关联矩阵 2:753;2:760;2:959;  
 3:29  
 关联矩阵(区组设计的) 1:376  
 关联(区组设计中的) 1:375  
 关联(射影几何学中的) 4:336  
 关联(图论中的) 2:752  
**关联系数 3:28**  
 关联系数(复形中元素的) 1:706  
 关联系数(图形偶的) 2:469  
**关联系统 3:29**  
 关联元素(复形的) 1:707  
**关系 4:561**  
**关系的对称性\* 5:107**  
 关系符号 4:286  
 关系(箭图上的) 4:459  
 关系结构(同型的) 3:786  
 关系(两集合之间的) 1:865  
 关系(模的生成元之间的) 3:796  
 关系系统 1:105  
 关系系统(投射  $p$  群的) 4:307  
 《关于伙伴游戏理论》(von Neumann  
 著) 2:637  
 《关于紧拓扑空间的备忘录》(Алек-  
 сандров - Урысон 著) 1:679  
 观测对称性(宇宙的) 1:869  
 观测模拟 4:1000  
 观测器 1:922  
 观测问题 3:1043  
**观测值的处理 4:319**  
**冠 1:466**  
 冠(第二类) 1:466  
 冠(第一类) 1:466  
 冠状函数 2:684  
 管 5:286  
**管道曲面 1:459**  
 管状场 4:893  
**管状邻域 5:286**  
 管状纽结 3:273  
**管状区域 5:286**  
 管状曲面 1:459  
 惯性标架 3:50  
 惯性参考系 4:567  
 惯性定律 2:765  
 惯性负指数 4:707  
 惯性矩 3:802  
**惯性律 3:362**  
 惯性律(二次型的) 3:362;4:366  
 惯性区域 5:288  
 惯性群 3:50  
**惯性素数 3:50**  
 惯性素数(域扩张中的) 3:50  
 惯性素数( $K/Q$  中的) 3:50  
**惯性系 3:50**  
 惯性域(素理想的) 3:50  
 惯性指标 2:111  
 惯性指数(惯性指标)(二次型的)  
 2:111;3:362  
 惯性质量 3:631  
 惯性子群(素理想的) 3:50;4:476  
 光滑半群 4:763  
 光滑边界点(凸集的) 5:82  
 光滑不变函数基本定理 5:99  
 光滑丛 3:941  
 光滑点 4:884  
**光滑点(函数的)\* 4:883**  
 光滑点(凸曲面的) 5:131  
 光滑点(完全凸曲面的) 1:850  
 光滑动力系统 2:310;3:109  
 光滑泛函 3:8  
 光滑赋范空间 4:884  
**光滑概形 4:883**  
**光滑函数 4:882**  
 光滑集 4:884  
 光滑结构 2:90  
 光滑解析空间 1:174  
 光滑解析映射 2:25  
**光滑空间 4:884**  
 光滑类 1:597  
 光滑类(流形的) 3:600  
**光滑连续统 4:882**  
 光滑流 1:497  
 光滑流(类  $C^*$  的) 2:499  
 光滑流形 1:194;4:369;5:223  
**光滑模 4:884**  
 光滑模(Banach 空间的) 1:;306  
 光滑网络 3:844  
 光滑瀑布 1:497  
 光滑上链 2:496  
 光滑树形 4:882  
**光滑态射 4:882**  
 光滑同胚 2:75  
 光滑性(关于常微分方程的解的)  
 2:139  
 光滑性(积分流形的) 3:110  
 光滑性(自治方程组的解的)  
 1:281  
 光滑映射 1:889  
 光滑预备定理 5:99  
 光滑支撑点 4:884  
 光滑 Banach 空间 1:306  
 光滑  $y$  概形 4:883  
 光信号 4:568  
 光学长度(路程的) 2:807  
 光学长度(路程的) 2:807  
 光学性质(抛物线的) 4:66  
 光学性质(椭圆的) 2:341  
 光锥 3:201  
 光子 4:567  
**广环 4:672**  
**广群 2:791**  
 广群(具有除法的) 2:791  
 广群(具有消去律的) 2:791  
 广义本征函数 4:426;4:666  
 广义本征向量 2:327;4:912  
 广义本征值 4:426  
 广义本征值问题 1:698  
 广义本征值问题(积分算子的)  
 2:326  
 广义变换 5:452  
 广义波动方程 4:929  
 广义波动算子 1:695  
 广义测度(负荷) 1:564  
 广义差集 2:89  
 广义超几何方程 4:621  
 广义超几何函数 2:897  
 广义超几何级数 2:959  
 广义陈(省身)特征标 1:577  
 广义除数问题 2:273  
 广义次射影空间 5:68  
**广义殆周期函数 2:673**  
 广义单列环 5:337  
**广义导数 2:679**  
 广义导数(广义函数的) 2:685  
 广义导数(函数型的) 2:679;  
 2:688  
 广义导数(Brown 运动的) 5:488  
 广义等度收敛级数 2:376  
 广义对称导数 2:12  
 广义对称群 5:524

- 广义多圆柱 4:223  
 广义反正弦分布 1:220  
 广义范 3:762  
 广义分解(对可和基的) 1:317  
 广义分裂算子 2:235  
 广义辐角原理 1:226  
 广义归纳定义 3:47  
 广义函数 2:683  
 广义函数(白噪声分析中的) 5:490  
 广义函数的变换 2:687  
 广义函数的导数 2:688  
 广义函数的积 2:688  
 广义函数的消没 2:684  
 广义函数的支集 5:81  
 广义函数的 Fourier 变换 2:541  
 广义函数(缓增的) 2:690;3:997  
 广义函数空间 2:689  
 广义函数空间  $D'(O)$  2:684  
 广义函数(有紧支集的) 2:684  
 广义函数(有有限阶的) 2:684  
 广义和(级数的) 1:839  
 广义核 5:452  
 广义基(向量空间的) 1:316  
 广义极小曲面 3:750  
 广义极坐标 4:214  
 广义交叉核实 4:558  
 广义交错群 5:524  
 广义截面空间(向量丛的) 3:475  
 广义解 2:691  
 广义解(边值问题的) 3:652  
 广义解(第二混合边值问题的) 3:771  
 广义解(第三混合边值问题的) 3:771  
 广义解(第一混合边值问题的) 3:771  
 广义解法(Dirichlet 问题的) 2:216  
 广义解(偏微分方程的) 2:691; 2:113  
 广义解析函数 2:674  
 广义解(Dirichlet 问题的) 4:136; 5:358  
 广义可分性(集合的) 4:780  
 广义可解群 2:692  
 广义可解群类 2:692  
 广义控制 3:1030  
 广义拉丁长方 3:353  
 广义类型问题(Riemann 曲面的) 4:639  
 广义离散谱(动力系统的) 4:933  
 广义连续统假设 1:65;1:819; 2:735  
 广义量子 Марков 链 4:415  
 广义流形 2:909;5:223  
 广义孪生素数 5:291  
 广义逻辑网络(不变结构的) 1:273  
 广义逻辑网络(体积元件的) 1:274  
 广义螺线 2:848  
 广义螺旋线 2:849  
 广义幂零群 2:691  
 广义幂零群类 2:691  
 广义幂零元集(Banach 代数中的) 1:300  
 广义逆 4:441  
 广义逆半群元 4:545  
 广义喷射 4:958  
 广义平稳随机过程 3:773; 4:987  
 广义平移曲面 5:253  
 广义谱分解 4:920  
 广义齐性空间 2:710  
 广义奇异算子 4:850  
 广义球面坐标 4:941  
 广义群 2:691  
 广义热方程 4:929  
 广义三角多项式 1:382  
 广义上调和函数 5:358  
 广义上调调论 2:676  
 广义上调调论(可由谱表示的) 2:678  
 广义上调调群 2:677  
 广义射线性质 4:981  
 广义生成算子(半群的) 2:694  
 广义时序机 2:516  
 广义收敛性 1:838  
 广义四边形(广义四角形) 4:98; 4:378  
 广义四元数代数 4:444  
 广义四元数群 4:445  
 广义似然比检验(Wald 检验) 3:439  
 《广义算术》(Newton 著) 3:1002  
 广义随机场 4:481  
 广义随机过程 5:16  
 广义随机函数 5:489  
 广义梯度法 3:656  
 广义条件期望 4:415  
 广义同调论 2:677;2:913  
 广义同调论(对偶于广义上调调论的) 2:678  
 广义同胚(类 $(\alpha, \beta)$ 的) 2:61  
 广义凸对策 1:845  
 广义(推广的)Riemann 假设 2:213;2:220;4:627  
 广义位移算子 2:680  
 广义文法 2:751  
 广义下调和函数 5:358  
 广义相对论 2:714;4:567  
 广义相对论宇宙模型 1:868  
 广义相对论 Klein-Gordon 方程 3:264  
 广义协方差原理(引力理论中的) 2:766  
 广义序列 2:691  
 广义压缩映射原理 2:492  
 广义压缩映射(Красносельский 意义下的) 1:821  
 广义一致等度收敛级数 2:376  
 广义一致结构 5:325  
 广义诣零根 4:472  
 广义预解式 4:765  
 广义预解式(分布半群的无穷小生成元的) 4:765  
 广义展开 4:535  
 广义主系列表示 1:818  
 广义柱面坐标 1:926  
 广义自动机 1:256  
 广义坐标(完整系统的) 2:892  
 广义 Abel 积分方程 1:5  
 广义 Aitken 法 5:258  
 广义 Bochner 定理 2:823  
 广义 Borel 积分表示 1:687  
 广义 Cantor 间断集(不连续统) 1:680;5:26;5:178  
 广义 Cantor 流形 1:463  
 广义 Cauchy-Riemann 条件 2:817;4:219



- 广义 Cauchy 公式 2:116  
 广义 Cauchy 问题 3:652  
 广义 Cauchy 序列 2:615  
 广义 Denjoy 积分 2:43  
 广义 Denjoy 可积函数 2:43  
 广义 Dirichlet 问题 2:831  
 广义 Faber 多项式 2:444  
**广义 Finsler 空间 2:487**  
 广义 Fitting 子群 1:564;2:492  
 广义 Fourier 变换 2:682;3:53  
 广义 Fourier 级数 2:682;2:664;  
 3:53  
 广义 Fredholm 算子(Noether 算子)  
 3:920  
 广义 Freedman-Keller 方程  
 5:287  
 广义 Fresnel 积分 2:573  
 广义 Frobenius 定理 2:576  
 广义  $G$  结构 2:619  
 广义 Gauss 过程 2:663  
 广义 Green 函数 4:267  
 广义 Green 函数(常微分方程的)  
 2:773  
 广义 Green 函数(椭圆型偏微分方  
 程的) 2:773  
 广义 Hadamard 矩阵 2:799  
 广义 Hardy 不等式 2:819  
 广义 Hölder 不等式 2:888  
 广义 Hopf 不变量 2:929  
 广义 Jacobi 簇(代数曲线的)  
 3:221  
 广义 Jacobi 式 5:376  
 广义 Jordan 正规形式(矩阵的)  
 3:978  
 广义 Kirchhoff 公式 3:262  
 广义 Lagrange 坐标 1:31  
 广义 Laguerre 多项式 3:332  
 广义 Laguerre 积分变换 3:333  
 广义 Laurent 级数 1:435  
 广义 Lebesgue 不定积分 3:34  
 广义 Legendre-Clebsch 条件  
 3:1039  
 广义 Lipschitz 条件 2:133  
 广义 Mehler-Фок 变换 3:707  
 广义  $n$  流形 2:909  
 广义 Ohm 定律 5:301  
 广义 Parseval 等式 4:95  
 广义 Peano 导数 4:113  
 广义 Perron-Wiener 解(Dirichlet  
 问题的) 4:266  
 广义 Plancherel 公式 4:166  
 广义 Poincaré 猜想 2:169;  
 2:793;4:191  
 广义 Poisson 分布 4:205  
 广义 Poisson 求和公式 2:824  
 广义 Quillen-Суслин 定理 4:338  
 广义 Riemann-Hilbert 问题  
 1:419;2:676  
**广义 Riemann 假设 4:627**  
**广义 Riemann 空间 4:653**  
 广义 Rodrigues 公式 4:31  
 广义 Scherk 曲面 4:720  
 广义 Stieltjes 变换 4:1039  
 广义 Volterra 方程 5:436  
 广义 Witt 代数 5:516  
 广义 Голубев-Привалов 条件  
 2:739  
 广义 Жуковский 函数 5:549  
 广义 Кострикин-Шафаревич 猜想  
 3:406  
**广义 Марков 链 3:618**  
 广义 Понтрягин 类 4:240  
 广义  $\zeta$  函数 4:557;5:544  
 廣中定理 4:608  
**归谬法 4:531**  
 归谬律 4:252  
 归谬证法 2:282  
 归纳变元 3:46  
 归纳步骤 3:46;3:462  
 归纳参数 3:46;3:642  
**归纳定义 3:47**  
 归纳法(项的结构上的) 3:145  
 归纳法原理 3:46  
**归纳公理 3:46**  
 归纳公式 1:229  
 归纳基础 3:46;3:642  
**归纳极限 3:47**  
 归纳极限(共变函子的) 3:48  
 归纳极限(群族的) 3:48  
 归纳极限(拓扑族的) 5:360  
 归纳假设 3:46;3:642  
 归纳类(代数系统的) 1:111  
 归纳零维拓扑空间 3:1020  
 归纳零维 Hausdorff 紧统 3:1020  
 归纳逻辑 4:285  
 归纳命题 3:46  
 归纳特征化(字的) 5:522  
 归纳条件(偏序集的) 1:542  
 归纳拓扑 2:562;3:547;5:213  
 归纳拓扑(向量空间中的) 5:213  
 归纳拓扑张量积 5:209  
**归纳维数 3:47**  
 归纳维数核 1:463  
 归纳谓词 3:46  
 归纳限的构造(Banach 空间的)  
 2:593  
 归纳语句(理论程序设计中的)  
 5:156  
 归纳张量积 3:995  
 归纳证明 3:47  
 归约策略( $\lambda$  演算中的) 3:311  
 归约定理(关于余解析集的)  
 3:576  
 归约枚举 2:366  
 归约(问题的) 5:317  
 归约原理 4:780  
 归约(约化)定理(描述集合论中的)  
 2:63  
 归约(约化)原理(描述集合论中的)  
 2:62  
 归约自动机 1:258  
 归约( $\lambda$  演算中的) 3:311  
 规避问题 2:148  
**规范变换 2:650**  
 规范变换(第二类) 2:650  
 规范变换(第一类) 2:651  
 规范不变性(场论的) 2:650  
 规范场 2:651;5:529  
 规范过程 4:416  
 规范函数(度规函数) 5:211  
 规范群 2:651;3:164;5:530  
 规范条件 2:650  
 规范正交标架 2:550  
 规范正交多项式 4:30  
 规范正交函数系 4:39;4:44  
 规范正交活动标架 3:841  
 规范正交基 1:367;2:550;4:24;  
 5:405  
 规范正交基(Hilbert 线性子空间的)  
 2:873  
 规范正交集(Hilbert 空间中的)

2:872  
 规范正交系 4:43;1:611  
 规范正交系(连续函数的) 2:551  
 规范正交系(Hilbert 空间中的)  
 2:872  
 规范正交向量系 4:44  
 规范正交序列 1:611  
 规范正交坐标系 1:488  
 规范正交 Laguerre 多项式 3:332  
 规划和控制的网络方法(网络规划)  
 3:895  
**轨道** 4:1  
**轨道** 5:239  
 轨道(变换伪群的) 4:368  
**轨道的极限点** 3:447  
 轨道的极限点(动力系统的)  
 3:447  
**轨道的极限集** 3:447  
**轨道的局部结构** 3:536  
 轨道的局部结构(二次微分的)  
 3:536  
**轨道的整体结构** 2:731  
 轨道等价 2:383  
 轨道等价动力系统 2:383  
 轨道(点在群作用下的) 1:32  
 轨道(点在映射下的) 5:29  
 轨道(动力系统中的) 2:310  
 轨道(对称空间迷向表示的)  
 5:176  
 轨道(对等论中的) 2:635  
 轨道(二次微分的) 4:380  
**轨道方法** 4:2  
 轨道分解 3:168  
 轨道分解问题 4:1  
 轨道(负向发散的) 3:447  
 轨道(环面上流的) 2:134  
**轨道积分** 3:113  
 轨道积分问题(断层照相法中的)  
 5:185  
 轨道空间 1:32;2:690;4:1;  
 4:463  
 轨道空间(动力系统的) 4:705  
 轨道排列 4:705  
 轨道(曲线的) 5:239  
 轨道(受控过程状态的) 2:308  
 轨道(随机过程的) 4:708  
 轨道(随机函数的) 4:483

轨道稳定极限环 3:444  
**轨道稳定性** 4:4  
 轨道(正向发散的) 3:447  
 轨道(置换群的) 4:131  
 轨道(自治系统相空间中的)  
 1:282  
 诡辩 1:186  
 滚动对称化 5:104  
**过程** 4:318  
 过程部分(Cobol 语言中的) 1:621  
 过程的部分 2:415  
 过程调用 1:129  
 过程定义(Algol 语言中的) 1:118  
 过程体 1:129  
 过程型算法语言 1:130  
**过度收敛** 4:53  
 过度收敛定理 4:53  
**过分函数** 2:414  
 过分函数(齐次 Марков 过程的)  
 2:415  
 过分函数(齐次 Марков 链的)  
 2:415  
 过去  $\sigma$  域流( $C^*$  代数上的)  
 4:416  
 过失误差 2:390;4:999

## H

海洋地质学 3:1013  
 海洋光学 3:1014  
 海洋化学 3:1013  
 海洋流体动力学 3:1013  
 海洋生物学 3:1013  
 海洋声学 3:1014  
 海洋物理学 3:1013  
**海洋学中的数学问题** 3:1013  
 含么元环 3:682  
**含算子环** 4:671  
**函数** 2:585  
**函数逼近** 1:199  
**函数逼近的度量(函数逼近度)**  
 1:210  
**函数逼近度** 1:210  
**函数逼近,函数类的极值问题**  
 1:204  
**函数逼近集的选取** 1:199

**函数逼近,线性方法** 1:207  
**函数逼近,正定理和逆定理** 1:202  
 函数边界 1:411  
 函数不等式 2:162  
 函数层 2:834  
 函数常量 1:783  
**函数代数** 1:71  
**函数导数** 2:598  
 函数(到集合上的) 2:586  
 函数(到集合中的) 2:586  
**函数的变差** 5:374  
 函数的表示(用位势的) 4:264  
 函数的表示(用 Fourier 级数的)  
 5:76  
 函数的表示(由超几何函数的)  
 2:957  
 函数的表示(由汇合型超几何函数  
 的) 1:747  
**函数的参数表示** 4:90  
**函数的叠加** 5:80  
**函数的定义域(定义域)** 2:276  
**函数的度量理论** 3:731  
 函数的二元关系 1:365  
**函数的负变差** 3:888  
 函数的高阶导数 2:100  
**函数的共轭类** 1:769  
**函数的光滑点** 4:883  
**函数的极大化和极小化** 3:687  
**函数的极大值和极小值** 3:689  
**函数的极值性质** 2:441  
 函数的计算问题 1:133  
**函数的局部逼近** 3:530  
**函数的均方逼近** 3:696  
 函数的控制序列 2:278  
 函数的历史 3:633  
**函数的全变差** 5:233  
 函数的三角级数展开的唯一性  
 2:288  
**函数的完全变差** 1:701  
**函数的振幅** 4:46  
**函数的正变差** 4:253  
**函数的支集** 5:80  
**函数的周期** 4:124  
 函数等价 2:379  
 函数等价(控制系统的) 2:379  
 函数等价模式(定义函数的)  
 1:134



- 函数对应 1:866  
 函数方程 2:598  
 函数方程(乘法定理的) 2:599  
 函数方程的解法 2:601  
 函数方程的类 2:599  
 函数方程(对椭圆曲线的  $L$  函数的) 2:345  
 函数方程(加法定理的) 2:599  
 函数方程(拟群的) 4:429  
 函数方程(Dirichlet  $L$  函数的) 2:212  
 函数方程(Riemann  $\zeta$  函数的) 1:712  
 函数方程( $\zeta$  函数的) 1:712  
 函数分离 4:783  
 函数分离集(拓扑空间中的) 4:783  
 函数关系 2:605  
 函数(关于另一函数可积的) 4:1038  
 函数过程 4:318  
 函数环 4:12  
 函数积分(泛函积分) 2:463; 2:595; 3:113  
 函数级数 4:794  
 函数级数(在一集合上收敛的) 4:794  
 函数(近似于解析函数的) 3:816  
 函数(具有相同数量阶的) 1:246  
 函数(具有有限支集的) 5:523  
 函数可分离的子集(拓扑空间的) 5:200  
 函数可分离性 2:605  
 函数空间 5:506  
 函数空间(带加权函数的) 5:476  
 函数空间的嵌入 3:14  
 函数空间(具有加权范数的) 5:476  
 函数空间 BMO 2:818  
 函数空间  $C_p(X)$  4:203  
 函数空间  $D(O)$  2:684; 2:690  
 函数空间  $D'(O)$  2:690  
 函数空间  $H^\infty$  2:794  
 函数空间  $H^\infty$  (Hardy 类) 2:816  
 函数空间  $S$  2:690  
 函数空间  $S'$  2:690  
 函数空间  $W_p^r(\Omega)$  2:591  
 函数空间  $W_2^1(\Omega)$  2:574  
 函数扩张 2:861  
 函数类 BMO(有界平均振动函数类) 1:516; 2:818  
 函数类  $B_{p0}^r(\Omega)$  3:17  
 函数类  $C_r$  5:305  
 函数类 DFR 4:577  
 函数类  $H^\infty$  1:416  
 函数类  $H_p^r(\Omega)$  3:16  
 函数类 IFR 4:577  
 函数类  $L$  2:7  
 函数类  $L_0$  2:7  
 函数类  $L^+$  2:7  
 函数类  $L^+(L)$  2:7  
 函数类  $S$  1:354  
 函数类  $S_r$  5:305  
 函数类  $T$  5:305  
 函数类 VMO 2:818  
 函数类  $W_p^1(\Omega)$  3:15  
 函数论 2:592  
 函数(逻辑—数学演算中的) 3:561  
 函数(逻辑代数的) 1:73; 1:392; 4:354  
 函数完全的泛代数 5:349  
 函数完全的逻辑公式序列 3:130  
 函数完全的运算系统 1:75  
 函数完全拓扑空间 2:861  
 函数完全性(逻辑中的) 3:606  
 函数微分方程 2:147; 2:600  
 函数微分方程(超前的) 2:601  
 函数微分方程(推迟的) 2:601  
 函数微分方程(中性的) 2:601  
 函数系的正交化 4:42  
 函数系统 2:606  
 函数行列式 2:598  
 函数型算法语言 1:130  
 函数压缩模型 4:926  
 函数芽(函数族在一点处的) 2:727  
 函数演算 2:596  
 函数演算的应用 2:597  
 函数演算(正规算子的) 4:913  
 函数(与一个平坦链相对应的) 2:496  
 函数(与一函数组相关的) 2:589  
 函数域 1:86  
 函数元的星形 4:982  
 函数元(中心在一点的) 1:85  
 函数(在群之下不变的) 1:902  
 函数(在(自变量)值的一个无穷集上定义的) 3:68  
 函数(在  $[0,1]$  上有 Лузин  $C$  性质的) 3:573  
 函数(自伴微分算子的) 4:929  
 函数(作为最优控制的时间的) 3:1030  
 函数(作为最优控制的时间和现状(位置)的) 3:1030  
 函数 Hausdorff 空间 2:605  
 函数( $m$  值逻辑的) 3:605  
 函子 2:610  
 函子代数 4:979  
 函子的完全化(群的) 3:550  
 函子范畴 1:502; 2:611  
 函子态射 2:611  
 熵 5:159  
 行列式 2:65  
 行列式超曲面 2:67  
 行列式(程序模式的) 5:156  
 行列式丛 5:410  
 行列式簇 2:66  
 行列式(点格的) 2:722  
 行列式(二次型的) 4:382  
 行列式(二元二次型的) 1:364  
 行列式和(矩阵的) 3:14  
 行列式(矩阵的) 2:65  
 行列式理想 2:67  
 行列式(纽结的) 3:279  
 行列式(Hermite 空间的) 2:856  
 行列式(Hermite 型的) 2:856  
 行列式(Levi 函数的) 3:393  
 行有限矩阵 4:697  
 行有限求和法 4:697  
 行秩(矩阵的) 4:489  
 好超滤子 5:308  
 好滤过 2:470; 5:481  
 好滤过(模的) 5:481  
 好约化(椭圆曲线的) 5:137  
 耗散多值算子 2:251  
 耗散非线性算子 2:251  
 耗散函数 2:249  
 耗散扩张(算子的) 2:426

- 耗散算子 2:250  
耗散稳定性准则 2:947  
耗散系统 2:251  
耗散线性算子(Крейн 空间中的) 3:294  
耗散有限差分格式 2:947  
合成 1:723  
合成定理(算法的) 1:134  
合成积 4:938  
合成矩形规则 4:391  
合成列 1:723  
合成列(群的) 1:723  
合成(逻辑的函数集合上的) 3:605  
合成求积公式 4:391  
合成(四元二次型的) 4:443  
合成态射 1:502  
合成(微分域的) 2:420  
合成序列 1:723  
合成因子 4:594  
合成因子(子群序列的) 3:987; 4:60  
合成子(连续统的点的) 3:33  
合成子群列 5:60  
合冲 5:125  
合冲理想 5:125  
合冲链 2:880  
合冲模 2:880  
合冲三角形 1:904  
合冲线束 1:904  
合理下料问题 1:915  
合取 1:774  
合取范式 1:774  
合取项 1:774  
合式公式 3:560  
合数 4:290  
合同簇 5:403  
合同(代数系统中的) 1:763  
合同(代数学中的) 1:763  
合同单泛代数 5:348  
合同点(曲面的形变的) 1:313  
合同(范畴上的) 4:460  
合同公理(椭圆几何学的) 4:622  
合同公理(Hilbert 公理系统中的) 2:879  
合同签署 1:893  
合同(全等)(几何学中的) 1:764  
合同(全等)(椭圆几何学中角的) 4:622  
合同(线段的) 4:334  
合同(Loos 对称空间中的) 5:103  
合同( $\Omega$  系统的) 1:106  
合子代数 2:696  
合作对策 1:855  
合作对策演算 1:855  
合作非原子对策 3:929  
和(带基点空间的范畴中的) 1:619  
和定理(关于维数的) 2:185  
和(二重级数的) 2:285  
和(范畴的对象族的) 1:858  
和(复数的) 1:713  
和函数 5:71  
和(基数的) 1:474  
和(级数的) 5:75  
和(集合的) 5:333  
和(集合沿子空间的) 1:34  
和(矩阵的) 3:670  
和乐定理 1:53;2:892  
和乐群 2:892  
和(累级数的) 4:584  
和(理想的) 3:2  
和(两数项级数的) 4:792  
和(幂级数的) 4:279  
和(群的直谱的) 1:606  
和(剩余类的) 1:760  
和(数的) 1:33  
和(数项级数的) 4:792  
和(算子的) 3:1027  
和(无穷递减几何级数的) 2:714  
和(线性变换的) 3:512  
和(向量的) 5:404  
和谐链环 3:274  
和谐嵌入 3:274  
和谐性 3:274  
和谐性(纽结的) 1:627  
和谐叶状结构 2:504  
和谐 Haefliger 结构 2:504;2:803  
和(序列的) 4:811  
和(序型的) 4:10  
和(一个数的除数的) 3:334  
和(有理数的) 4:499;4:512  
和(置换群的) 4:131  
河口空间 3:248  
核(半群的)\* 3:255  
核(测度空间上的) 5:12  
核层 3:306  
核定理 3:992  
核(对策的)\* 3:254  
核(对应的) 1:866  
核(范畴中态射的)\* 3:254  
核(复序列的)\* 3:254  
核(关系的) 1:866  
核(广义变换的) 5:452  
核函数 3:253  
核合取 1:395  
核(积分算子的)\* 3:255  
核(集合的)\* 3:255  
核(交叉同态的) 1:890  
核(解析函数的积分表示的) 3:116  
核(具有极奇异性的) 5:459  
核(具有弱奇异性的) 5:459  
核(卷积变换的) 1:855  
核理想 3:2  
核(模同态的) 5:65  
核偶 3:256  
核偶(范畴中态射的) 3:256  
核偶(态射的) 3:256  
核(求和法的)\* 3:255  
核(区域序列的) 1:470  
核(区域序列关于点的) 1:469  
核(群作用的) 4:131  
核(实序列的) 3:254  
核(双线性型的) 1:360  
核(算子的) 3:919  
核(态射的) 3:254  
核(同态的) 3:989;4:673  
核同余 3:253  
核(线性泛函的) 3:482  
核(线性积分方程的) 3:94  
核(线性算子的)\* 3:254  
核(向量丛态射的) 5:409  
核(斜双称双线性型的) 4:871  
核心 2:636  
核心程序(Cobol 语言中的) 1:621  
核心(对策的) 2:636  
核心(对策论中的)\* 1:858  
核心(经济的) 3:638  
核心圆盘(环柄的) 2:814



- 核型表示(核型算子的) 3:993;  
3:994
- 核型范数 3:993**
- 核型迹 3:996
- 核型迹(积分算子的) 3:996
- 核型空间 3:997**
- 核型双线性型 3:992**
- 核型算子 3:994**
- 核型算子(零阶的) 3:995
- 核型线性算子 3:994
- 核型映射 3:994
- 核型  $C^*$  代数 3:992**
- 核(序列的) 3:254
- 核(么拟群的)\* 3:254
- 核(一对态射的) 3:254
- 核子(对策的) 3:1000**
- 核( $A$  系统的) 1:3
- 核( $A$  系统的链的) 1:2
- 核(Abel 积分方程的) 1:5
- 核(Bochner - Martinelli 表示的)  
1:378
- 核(Fourier 积分算子的) 2:531
- 核(Fredholm 方程的) 2:556
- 核(Fredholm 积分算子的) 2:562
- 核(Hilbert 奇异积分的) 2:871
- 核(Lie 代数扩张的) 2:423
- 核(Volterra 积分方程的) 5:435
- 核(Суслин 概形的) 2:62
- 黑洞 2:768
- 黑盒表示 5:474
- 恒等变换 1:73
- 恒等变换问题 3:606
- 恒等定理(解析集的) 1:173
- 恒等二元关系 1:364
- 恒等公理(度量的) 3:722
- 恒等函子 2:610
- 恒等式 1:107;2:374
- 恒等式(代数中的) 2:379
- 恒等算子 3:1026
- 恒等态射 1:502;2:611;5:337
- 恒等问题 3:6**
- 恒等问题(有限表现结合系统的)  
2:786
- 恒等线性算子 3:491
- 恒为零的多项式 4:233
- 恒星天文学的数学问题 4:1032**
- 恒真 3:6**
- 恒真逻辑公式 2:672
- 横截 1:662
- 横截(场的) 2:867
- 横截定向丛 1:801
- 横截概形 5:261
- 横截(横截系中的) 5:261
- 横截(拉丁方的) 3:354
- 横截面(流的) 4:197
- 横截拟阵 3:677;5:121
- 横截球面(环柄的) 2:814
- 横截曲面 3:604
- 横截设计 4:23
- 横截椭圆复形 3:40
- 横截椭圆型算子 5:260**
- 横截系 5:261**
- 横截线 1:915
- 横截线(区域的) 3:446
- 横截相交 2:807
- 横截性 5:262**
- 横截性(对叶状结构的) 3:268
- 横截性条件 5:262**
- 横截性(映射的) 4:865
- 横截映射 5:260**
- 横截映射(对胞腔空间的) 5:260
- 横截映射(对流形的) 5:260
- 横截映射(对子流形的) 5:262
- 横截映射(在一点处的) 5:262
- 横截圆盘(环柄的) 2:814
- 横截正则映射 5:260
- 横截(子集族的) 5:121
- 横截子空间 5:262
- 横向地图投影 1:489
- 横组合解析模型(语言的) 1:166
- 横坐标 1:17**
- 横坐标(点的) 1:488
- 横坐标(仿射坐标系的) 1:54
- 横(坐标)轴 1:161;1:488
- 横(坐标)轴(仿射坐标系的) 1:54
- 宏汇编(宏汇编程序) 3:592;  
4:888
- 后继 3:875
- 后继关系(紧化的) 1:683
- 后继函数 4:197
- 后继(序列的项的) 4:784
- 后继(序数的) 4:15
- 后继映射 4:197
- 后继运算 4:350
- 后条件(程序的) 5:156
- 后退轨道 3:448
- 后项规则 2:697
- 后项(矢列式的) 4:786
- 后验分布 1:1**
- 后验概率 1:2**
- 后缀运算 3:1021
- 厚度(图的) 2:758
- 呼吸子 4:894
- 弧 1:218**
- 弧长(曲面上的) 2:489
- 弧度 4:466**
- 弧度(角的度量) 1:182
- 弧函数 1:218**
- 弧连通拓扑空间 1:780;4:109
- 弧连通性 1:780
- 蝴蝶 5:165
- 互补定理(关于 Bernoulli 多项式的)  
1:330
- 互补函数 4:19
- 互补线段(椭圆几何学上的)  
4:622
- 互补性条件 1:636
- 互补性条件(关于微分算子的)  
1:420
- 互补 Lagrange 平面 5:446
- 互补  $N$  函数 4:19
- 互补  $t$  设计 5:127
- 互不相吃的棋子( $n \times n$  棋盘上的)  
1:663
- 互斥事件 4:313
- 互斥析取 2:415**
- 互反多项式 1:627
- 互反方程 4:516**
- 互反核(互易核) 3:871
- 互反核(Fredholm 核的) 2:557
- 互反律 4:516**
- 互逆的半群元 4:545
- 互逆的同伦等价 2:922
- 互(配)极三角形(椭圆平面上的)  
4:623
- 互(配)极图形 4:213
- 互(配)极线(椭圆空间中的)  
4:624
- 互素多项式 4:233
- 互素数 3:871**
- 互通状态类(Марков 过程的)

- 3:625  
 互通状态类(Марков链的) 3:618  
 互通状态(Марков链的) 3:617  
 互相关函数 4:988  
 互相奇异测度 3:871  
 互协方差函数 4:988  
 互易多面体 4:549  
 互易核 3:871  
 互易线性电子网络 3:893  
 滑动等距变形 2:31  
 滑动控制 5:289  
 滑动模态 5:373  
 滑动平均 3:849  
 滑动平均过程 3:839  
 滑动平均随机过程 2:836  
 滑动求和随机过程 2:836  
 滑动系统 3:1034  
 滑动向量 4:873  
 滑动最优控制 1:826  
 化圆为方问题 4:393  
 划分 2:20  
 划分(分解)(测度空间的) 1:194  
 划分函数(分拆函数) 3:864  
 划分(集合之间的) 2:184  
 划分(样本空间的) 1:696  
 画法几何学 2:58  
 坏约化(椭圆曲线的) 5:137  
 环 4:669  
 环柄 5:294  
 环柄分解 5:223  
 环柄分解(紧流形的) 2:814  
 环柄分解(流形的) 2:814  
 环柄分解(下配边的) 2:814  
 环柄理论 2:814  
 环柄理论的应用 3:276  
 环柄体 2:845  
 环柄体理论(环柄理论) 2:814  
 环柄(指标  $k$  的) 2:814  
 环层(空间上的) 3:610  
 环簇 5:401  
 环的反同构 1:185  
 环的可分完全化 4:781  
 环的平方 1:676  
 环的谱 4:933  
 环的嵌入 3:14  
 环的同调分类 2:904  
 环的整扩张 3:104  
 环的中心 1:539  
 环的 Galois 理论 2:629  
 环对象 2:787  
 环(含不变基数的) 3:676  
 环(含算子环的) 4:671;4:673  
 环(含算子域的) 4:671  
 环境部分(Cobol 语言中的) 1:621  
 环境( $\lambda$  演算中的) 3:311  
 环流 1:593  
 环流(速度场沿曲面的) 5:407  
 环流(速度沿闭回路的) 1:907  
 环路测地线 1:608  
 环论性质(Weyl 代数的) 5:481  
 环面 5:231  
 环面链环 3:273  
 环面链环(型  $(p, q)$  的) 5:232  
 环面流形 3:110  
 环面扭结 5:232  
 环面上的微分方程 2:134  
 环谱 4:935  
 环绕数 5:525  
 环绕系数 3:516  
 环上的自由代数 2:564  
 环算法 1:396  
 环索线 5:40  
 环形区域(二次微分的) 2:731  
 环形区域(圆环域) 1:185  
 环与代数 4:673  
 环与代数的根的一般理论 4:471  
 环与代数的根(根基) 4:470  
 环与代数的历史 4:673  
 环元(可被除子整除的) 2:270  
 环元(可被另一环元整除的) 2:268  
 环元(在子环上为整的) 3:104  
 环中的导子 2:49  
 环中的整除性 2:267  
 缓变函数 1:221  
 缓变系数法 4:140  
 缓增分布 3:999  
 幻方 3:593  
 幻影 5:185  
 换底模(对数的) 3:552  
 换基 1:313  
 换基定理 1:313;4:351  
 换基定理(艾达尔上同调中的) 2:393  
 换基态射 1:313  
 换球术 2:43  
 换位(超代数的) 5:78  
 换位子 1:676  
 换位子代数 3:400  
 换位子代数(交错代数的) 3:598  
 换位子理想 1:676  
 换位子理想(环的) 1:676  
 换位子群 1:676  
 换位子群(多算子  $\Omega$  群的) 1:676  
 换位子群(群的) 1:676  
 换位子商群 5:353  
 换元积分法(代换积分法) 3:124  
 换质换位 1:825  
 换质换位定理 1:825  
 换质换位律 1:825  
 荒木生成元 1:626  
 黄金分割 2:738  
 黄金分割法 2:464  
 黄金菱体 4:84  
 回代 2:656  
 回复 3:748  
 回复点 4:519  
 回复轨道 4:520  
 回复运动 1:140  
 回归 4:540  
 回归变量 4:540  
 回归超曲面 4:544  
 回归分析 4:541  
 回归函数 4:540  
 回归矩阵 4:543  
 回归棱(脊线) 2:319  
 回归量 4:540  
 回归平面 4:541;4:544  
 回归谱 4:544  
 回归曲面 4:544  
 回归曲线 1:863  
 回归系数 4:543  
 回归线 4:540  
 回归值集 1:614  
 回路 2:755  
 回路(功能元的) 2:71  
 回路(拟阵的) 3:678  
 回旋曲线 1:614  
 回转抛物面 2:351  
 回转椭球面 2:342



汇编语言 3:592  
 汇点(运输网络的) 3:893  
 汇合型超几何方程 1:746  
 汇合型超几何函数 1:746  
 汇合型超几何函数(第二类)  
   1:747  
 汇合型超几何函数(第一类)  
   1:746  
 汇(树的) 5:266  
 汇(向量场的) 5:414  
 会合数 3:730  
 婚配定理 1:665;4:746  
 婚配问题 1:665  
 混沌 1:546  
 混沌动力系统 1:546  
 混沌分解 5:503  
 混沌瞬态 4:695  
 混沌吸引子 4:694  
 混沌形为(强迫 van der Pol 振子的)  
   5:369  
 混合-杂交有限元 5:393  
 混合 3:778  
 混合半不变量 4:769  
 混合保测变换 1:194  
 混合(保测变换的) 3:238  
 混合边界条件 5:49  
 混合边值问题 3:767;3:774  
 混合测度 5:12  
 混合(测度的) 5:12  
 混合策略 4:303;2:34  
 混合策略(微分对策中的) 2:149  
 混合对策策略 4:247  
 混合多用户信道 1:545  
 混合法 1:523  
 混合方向向量 3:778  
 混合积 3:774  
 混合积分方程 3:773  
 混合基本问题(平面弹性理论中的)  
   2:332  
 混合矩 3:843  
 混合矩( $k$  阶的) 3:803  
 混合偏导数 2:102;4:97  
 混合偏导数定理(多元函数的)  
   2:102  
 混合偏导数(多元函数的) 2:102  
 混合偏微分算子 1:425  
 混合谱(动力系统的) 4:932

混合区域 3:774  
 混合曲面函数 3:777  
 混合群 3:773  
 混合三重标量积 4:374  
 混合随机过程 4:917;4:918  
 混合体积 3:198;3:777  
 混合体积理论 3:777  
 混合微分参数 2:168  
 混合问题 3:774  
 混合型偏微分方程(第二类)  
   3:774  
 混合型偏微分方程(第一类)  
   3:774  
 混合型微分方程 3:774  
 混合序 3:596  
 混合有限元 5:393  
 混合张量 5:145  
 混合张量代数 5:142  
 混合自回归滑动平均过程 3:773  
 混合自同构(测度空间的) 1:194  
 混合 Hodge 结构 2:885  
 混合 Hodge 模 2:885;5:379  
 混合 Петровский 问题 3:770  
 混淆法(保密学中的) 1:894  
 活动标架 3:840  
 活动标架法 3:840  
 活动标架方法(Cartan 的) 3:841  
 活动容量(上下文无关文法的)  
   2:747  
 货物(数理经济学中的) 3:636  
 获胜位置(对策中的) 2:631

## J

击中分布 1:299  
 击中时 5:27  
 机会对策 2:630  
 机器 3:589  
 机器代码 1:128  
 机器翻译 1:271  
 机器可表示的形式语言 2:513  
 机器可识别的形式语言 2:513  
 机器算图 3:924  
 机器指令 1:726  
 机器中断 1:726  
 机械求积法 3:706

机翼理论 5:513  
 积(测度的) 3:701  
 积(测度空间的) 3:701  
 积测度扩张公理 4:535  
 积(道路的) 2:614  
 积(对应的) 1:866  
 积(范畴中对象族的)\* 4:320  
 积分 3:87  
 积分变分原理(经典力学的)  
   5:394  
 积分变换 3:120  
 积分变换法 3:122  
 积分变换(广义函数的) 3:121  
 积分变换链 3:121  
 积分表示 2:595  
 积分表示法(单叶函数论中的)  
   5:345  
 积分表示(解析函数的)\* 3:116  
 积分表示(全纯函数的) 1:378  
 积分表示(柱函数的) 1:928  
 积分表示(Bessel 函数的) 1:342;  
   3:117  
 积分表示(Hadamard 积的) 2:801  
 积分不变量 3:109  
 积分不变量的阶(光滑动力系统的)  
   3:109  
 积分不等式 2:162  
 积分插值法 2:87;2:323  
 积分(常微分方程的) 2:106  
 积分(初等函数上的) 2:7  
 积分代换 2:581  
 积分(带可变上限的) 3:91  
 积分点( $r$  阶偏微分方程组的)  
   4:98  
 积分度量 3:723  
 积分对数 3:110  
 积分法 3:123  
 积分方程 3:94  
 积分方程的数值方法 3:101  
 积分方程(具有对称核的)\* 3:99  
 积分方程(卷积型的)\* 3:96  
 积分方程(位势论的) 4:264  
 积分方程(Гельфанд-Левинтан-  
   Марченко 型的) 4:845  
 积分方法 5:318  
 积分分离条件 3:119  
 积分概念的推广 3:88

- 积分关系方法 3:115  
 积分(关于 Wiener 测度的) 5:506  
 积分管 2:162  
 积分(含参数的) 4:85  
 积分(函数关于体积元的) 2:265  
 积分函数(Stieltjes 积分中的)  
 4:1038  
 积分和 3:120  
 积分核 3:112  
 积分几何面积 1:222  
 积分几何学 3:104  
 积分几何学(常曲率曲面上的)  
 3:107  
 积分几何学的推广 3:108  
 积分几何学(曲面上的) 3:106  
 积分几何学(射影空间中的)  
 3:107  
 积分几何学(射影平面上的)  
 3:107  
 积分几何学(Euclid 空间中的)  
 3:106  
 积分几何学(Euclid 平面上的)  
 3:105  
 积分检验法(数项级数收敛性的)  
 4:793  
 积分解 4:760  
 积分卷积变换 3:936  
 积分卷积(函数的) 2:41  
 积分扩张(微分域的) 2:421  
 积分(类  $L_0$  中函数的) 2:7  
 积分连续模 1:808;2:798  
 积分流形 3:110  
 积分(流形上的)\* 3:125  
 积分幂级数 3:581;5:437  
 积分(漂移方程组的) 2:288  
 积分曲率 1:907  
 积分曲面 3:120  
 积分(曲面面积上的) 5:82  
 积分曲面(一阶偏微分方程的)  
 2:127  
 积分曲线 3:93  
 积分权 4:30;5:475  
 积分(群上的) 3:160  
 积分双曲余弦 3:108  
 积分双曲正弦 3:109  
 积分算子 3:112  
 积分算子的本征函数,数值方法  
 2:325  
 积分算子的逼近 1:318  
 积分算子的核 3:255  
 积分算子(位势型的) 3:112  
 积分通道 3:104  
 积分微分方程 3:126  
 积分(微分方程的)\* 3:111  
 积分微分算子 3:947;1:427  
 积分(微分形式的) 2:144  
 积分(向量值函数的) 3:545  
 积分形式(Taylor 公式中余项的)  
 5:140  
 积分学 3:89  
 积分因子 3:123  
 积分因子(Pfaff 方程的) 4:260  
 积分余弦 3:93  
 积分与求和次序交换定理(非负函  
 数级数中的) 4:795  
 积分与求和次序交换定理(函数级  
 数中的) 4:795  
 积分与求和次序交换定理( $L_p$  函  
 数级数中的) 4:795  
 积分元(分次微分子层的) 4:151  
 积分元(微分形式组的) 4:151  
 积分约束 4:960  
 积分正弦 3:119  
 积分指数函数 3:103  
 积分(主值意义下的) 3:28  
 积分最大值原理 3:1035  
 积分 Stieltjes 变换 4:1039  
 积(复数的) 1:713  
 积公式(矩阵指数的) 5:283  
 积(关系的) 1:866  
 积(广义函数的) 2:685  
 积和式 4:129  
 积和式(矩阵的) 1:663;5:106  
 积积分 4:319  
 积(基数的) 1:474  
 积(集合的) 2:585  
 积(加性关系的) 1:38  
 积(近性空间的) 5:205  
 积(矩阵的) 3:670  
 积(矩阵与标量的) 3:670  
 积(矩阵与数的) 3:670  
 积(可测空间的) 3:701  
 积空间(测度空间的) 3:701  
 积(两数项级数的) 4:793  
 积(射影代数中点的) 4:329  
 积(射影空间中点的) 5:526  
 积(剩余类的) 1:760  
 积(实数的) 4:512  
 积(数的) 3:860  
 积(算子与数的) 3:1027  
 积投射(范畴中的) 4:320  
 积(图的) 2:753  
 积拓扑 5:195  
 积(拓扑群的元素的) 3:537  
 积(纤维空间中的) 2:466  
 积(线性变换的) 3:512  
 积(线性变换与数的) 3:512  
 积(向量与标量的) 2:524  
 积(序数的) 4:10  
 积(序型族的) 4:10  
 积(一致空间的) 5:325  
 积(有理数的) 4:499  
 积(语言的) 2:514  
 积(置换群的) 4:131  
 积( $\sigma$  环的) 3:701  
 基本闭链 2:612  
 基本闭链(奇点的) 4:501;4:858  
 基本闭链( $n$  维流形的) 2:612  
 基本不变量 3:167  
 基本不变量(二次曲面的) 5:85  
 基本不变量(二次曲线的) 4:738  
 基本测度 3:699  
 基本测度(流形集合的) 3:105  
 基本策略(动态对策中的) 2:304  
 基本超几何函数 2:958  
 基本超几何级数 2:959  
 基本初值问题(常微分方程的)  
 2:139  
 基本触点(中继触点模式的)  
 4:572  
 基本代数运算 1:105  
 基本单位 1:97  
 基本单位(代数数域的) 2:219  
 基本单位(阶的) 2:219  
 基本单位(域的) 4:560  
 基本单形 4:980  
 基本调节子 1:785  
 基本度量张量 4:653  
 基本对称算子 3:293  
 基本对称性 4:245  
 基本对合算法 3:490



- 基本方程(浸入流形几何学的) 2:718
- 基本方程组(表面映象理论中的) 1:494
- 基本分解(内积空间的) 2:877
- 基本分式展开 5:317
- 基本符号(生成文法的) 2:750
- 基本公式(不变嵌入的) 4:91
- 基本共振 4:92
- 基本构造序列(有理数的) 1:785
- 基本关系 1:105
- 基本关系(超几何函数自变量的) 2:957
- 基本广群 2:614**
- 基本函数(递归论中的) 4:523
- 基本函数(齐次线性积分方程的) 3:95
- 基本函数(齐次线性积分方程的核的) 3:95
- 基本函数(算子 $(d/dt) - A$ 的) 4:765
- 基本核(广义 Cauchy-Riemann 方程组的) 2:116
- 基本换位子 1:314**
- 基本换位子数 1:314
- 基本积分表示(汇合型超几何函数的) 1:747
- 基本基(二次域的) 4:381
- 基本极限定理(呼唤的输入流的) 4:449
- 基本集 1:314**
- 基本集(开覆盖的) 3:737
- 基本集(拓扑向量空间中的) 5:232
- 基本假设(组合拓扑学的) 4:240
- 基本交换关系 5:529
- 基本结构定理 3:740;5:193
- 基本结果 2:335
- 基本解 2:615**
- 基本解(常系数微分算子的) 2:686
- 基本解(多调和方程的) 4:660
- 基本解(偏微分方程的) 2:111
- 基本解(热传导方程的) 4:261
- 基本解(微分算子的) 5:482
- 基本解(线性偏微分方程的) 2:615
- 基本解(线性椭圆型微分算子的) 3:479
- 基本解组 2:616**
- 基本解组(线性代数方程组的) 3:462
- 基本解组(线性齐次常微分方程组的) 2:616
- 基本解组(有限差分方程的) 2:475
- 基本解(Laplace 方程的) 1:567; 2:280;3:852
- 基本解(Laplace 算子的) 4:261
- 基本局势(动态对策的) 2:304
- 基本矩阵 2:614**
- 基本矩阵关系(区组设计中的) 1:376
- 基本矩阵解 5:378
- 基本括号 4:204
- 基本类 2:611**
- 基本类(闭流形的) 4:18
- 基本类(连通流形的) 2:612
- 基本类(连通拓扑空间的) 2:611
- 基本类(拟群的) 4:429
- 基本粒子的相互作用 4:567
- 基本流 2:335**
- 基本逻辑演算 3:561
- 基本模函数 3:791
- 基本模态 3:783
- 基本模形式 3:789
- 基本模型(多值逻辑的) 3:605
- 基本逆半群 3:176
- 基本频率(环面上流的) 2:134
- 基本球面函数 4:942
- 基本区间 2:335**
- 基本群 2:613**
- 基本群(几何对象的) 2:710
- 基本群空间 2:710
- 基本群(齐性空间的) 2:899
- 基本群(Riemann 流形的) 4:650
- 基本上闭链 2:612**
- 基本事件 2:334**
- 基本事件空间 2:335
- 基本数(齐次线性积分方程的) 3:95
- 基本数(齐次线性积分方程的核的) 3:95
- 基本算图 3:923
- 基本退化系列(表示的) 2:37
- 基本微分运算(向量分析的) 5:407
- 基本系列(表示的) 3:53;5:342
- 基本消灭定理 3:740
- 基本谐波 2:826
- 基本星表 1:240
- 基本形式(曲面的)\* 2:612**
- 基本形式(与 Hermite 对称张量伴随的) 3:247
- 基本序列 2:615**
- 基本序列(有理数的) 4:513
- 基本引理(边界变分方法的) 1:429
- 基本引理(数理统计的) 3:907
- 基本语法 5:113
- 基本域 2:612**
- 基本域(分式线性变换群的) 3:337
- 基本域(复平面中椭圆型偏微分方程的) 2:114
- 基本域函数(区域映射函数) 3:719
- 基本域(离散变换群的) 2:226
- 基本域(离散群的) 2:612
- 基本域(Klein 群的) 3:267
- 基本圆(双曲型圆网的) 3:890
- 基本约化域(正定二次型的) 4:386
- 基本运算符(算法语言中的) 1:129
- 基本张量 3:731
- 基本正则半群 4:553
- 基本直线(圆网的) 3:890
- 基本值(齐次线性积分方程的) 3:95
- 基本值(齐次线性积分方程的核的) 3:95
- 基本秩(代数簇的) 3:928
- 基本秩(代数系统的) 4:489
- 基本周期 4:125
- 基本周期(单周期函数的) 4:842
- 基本周期平行四边形(双周期函数的) 2:283
- 基本周期系(Abel 函数的) 1:11
- 基本状态(Turing 机的) 1:724
- 基本子空间 2:680

- 基本子式 3:764
- 基本子式(线性代数方程的) 3:461
- 基本 Galois 对应 1:97
- 基本 Jacobi 椭圆函数 3:213
- 基本 Lagrange 括号 3:320
- 基本 Lie 容许括号 3:401
- 基本 Lie 容许张量 3:401
- 基本 2 形式 3:345
- 基变换(换基) 1:313**
- 基(出现的) 3:13
- 基础集(代数系统的) 1:105
- 基(代数的) 1:315
- 基(代数数域中的) 2:48
- 基(代数系统簇的) 1:112
- 基(代数系统中恒等式的) 1:112
- 基(殆周期函数的) 1:316
- 基(点格的) 3:358
- 基点(自治系统的) 3:915
- 基(顶点的) 4:833
- 基多面体 4:1035**
- 基范畴 5:206
- 基(功能元图的) 2:72
- 基(关于类型的语句的) 3:311
- 基(核型空间中的) 3:999
- 基(集合的) 1:314
- 基(结合代数的) 2:476
- 基解 4:740
- 基(可数型的) 1:317
- 基(可数序的) 4:76
- 基(理想的) 3:2
- 基(滤子的) 1:315
- 基(模的) 1:315
- 基(拟阵的) 3:678
- 基(射影子空间的) 4:344
- 基数 1:474**
- 基数不变量(拓扑空间的) 1:473
- 基数函数 1:473
- 基数和(偏序集的) 4:15
- 基数(集合的) 1:475
- 基数特征 1:471**
- 基数(拓扑空间的覆盖的) 1:882
- 基(四元数代数的) 1:314
- 基态(系统的) 4:1007
- 基(拓扑的) 1:312;1:315
- 基(拓扑空间的) 1:312**
- 基(拓扑空间中一点的) 1:312
- 基问题(逻辑中的) 3:606
- 基问题(Banach 空间的) 1:308; 1:317
- 基线 2:376
- 基线(柱面的) 1:932
- 基(向量空间的) 1:315;3:488
- 基小波 5:455
- 基(形变的)\* 1:313**
- 基(么模的) 1:315
- 基映射 1:316
- 基(由房确定的根系的) 4:683
- 基(由算子定义的集合的) 1:315
- 基(自然数的  $h$  阶的) 2:47
- 基(自然数序列的) 4:811
- 基(自由代数的) 2:564
- 基(自由 Abel 群的) 2:564
- 基座 4:888**
- 基座(环的) 3:745
- 基座(模的) 4:888
- 基座(模格的) 4:888
- 基(Banach 空间中的) 1:308
- 基(Boole 代数的) 1:315
- 基( $k$  阶自然数的) 1:314
- 基(Lie 代数簇中恒等式的) 3:420
- 基( $\delta$ - $\sigma$  运算的) 2:1
- 箕舌线(Agnesi 的)\* 5:515**
- 畸变定理 2:252**
- 畸变椭圆(地球投影的) 1:489
- 畸变系数(本征值的) 1:697
- 畸变指数(轴测投影法中的) 1:293
- 激励理论 4:895
- 激流系统 5:289
- 吉田-Hewitt 分解定理 5:416
- 吉田表示定理 5:531**
- 吉田算子 3:472
- 级联法 1:497**
- 级联码 2:389
- 级数 4:791**
- 级数的反演 3:174
- 级数的加稀 2:177
- 级数的历史 4:796
- 级数的最大项 3:683**
- 级数序列 4:785**
- 级(秩)(线性常微分方程的) 4:491
- 极半径 4:214
- 极不连通空间 2:443**
- 极不连通拓扑空间 1:17;1:780; 5:532
- 极不连通性 1:780
- 极不连通 Hausdorff 紧统 3:1020
- 极差(顺序统计量序列的) 4:399
- 极差统计量 4:8
- 极差(样本变易的) 4:489**
- 极大遍历定理 3:681**
- 极大超定线性微分算子 3:476
- 极大殆周期群 2:477
- 极大单调算子 3:821
- 极大单调算子(在集合上的) 3:821
- 极大递归可枚举集 4:528
- 极大点和极小点 3:689**
- 极大对偶对(带不定度规的 Hilbert 空间的子空间的) 2:876
- 极大对偶对(Крейн 空间的子空间的) 3:294
- 极大非负子空间(Крейн 空间的) 3:294
- 极大函数 2:817
- 极大耗散算子 2:250;2:426
- 极大化和极小化(函数的)\* 3:687**
- 极大化极小 3:685**
- 极大化极小检验 3:685
- 极大化极小,数值方法 3:685**
- 极大化极小原理 3:687**
- 极大化极小准则 3:685**
- 极大化序列 3:687
- 极大环面 3:683**
- 极大环面(线性代数群的) 3:683
- 极大紧化 1:683
- 极大紧子群 3:681**
- 极大扩张和极小扩张 3:680**
- 极大扩张( $K$  空间的) 4:774
- 极大理想 3:682**
- 极大理想定理 3:682
- 极大理想空间 1:673
- 极大理想(Banach 代数的) 1:300; 4:924
- 极大滤子 5:307
- 极大脉络 1:17;4:328
- 极大脉络(谱中的) 4:437
- 极大谱测度 3:683



- 极大谱(环的) 4:933
- 极大谱(结合代数的) 1:553
- 极大谱型 3:683**
- 极大区间(Boole 函数的) 1:395
- 极大算子和极小算子 3:680**
- 极大算子(由微分算子生成的) 4:928
- 极大条件(对理想的) 1:251
- 极大条件(对偏序集的) 4:102
- 极大条件(关于子半群的) 4:767
- 极大条件(关于子群的) 4:223
- 极大性(滤子的) 5:307
- 极大序模 2:238
- 极大序模(Dedekind 整环上的) 4:6
- 极大元(偏序集中的) 4:101
- 极大元(偏序子集中的) 5:551
- 极大原理 1:286;4:102;5:551
- 极大增生算子 1:821
- 极大正子空间(不定度规空间的) 4:905
- 极大值和极小值(函数的)\* 3:689**
- 极大子代数 1:675
- 极大子群 3:683**
- 极大子群(关于一个性质的) 3:683
- 极点 4:218**
- 极点(超平面的) 4:216
- 极点除子(函数的) 2:270
- 极点(大圆的) 4:944
- 极点(代数函数的) 1:86
- 极点(多维奇异积分方程的) 4:853
- 极点(二次微分的) 4:380
- 极点(反演的) 3:172
- 极点(函数的) 4:218**
- 极点(函数论中的 Green 函数的) 2:775
- 极点集 4:215
- 极点集 4:215
- 极点(解析函数的) 1:154
- 极点(矩阵函数的) 1:178
- 极点(平面关于一个二次曲面的) 4:394
- 极点(球上的) 4:943
- 极点(曲率有固定符号的 2 维 Riemann 流形的) 4:756
- 极点(椭圆空间中的) 4:623
- 极点(椭圆平面上的) 4:623
- 极点(网络的) 3:893
- 极点(圆锥曲线关于三次曲线的) 1:903
- 极点(直线关于圆锥曲线的) 1:767
- 极端测试(控制论中的) 5:152
- 极端单余反射子范畴 5:204
- 极端流形(Diophantus 几何学中的) 2:190
- 极端满态射 3:13
- 极端满自反子范畴 5:204
- 极端形变(曲面的) 2:31
- 极对应 4:214**
- 极分解 4:214**
- 极分解(算子的) 4:214
- 极分解(线性变换的) 4:214
- 极分解( $C^*$  代数中元素的) 4:215
- 极分解(von Neumann 代数上泛函的) 4:214
- 极丰富可逆层 3:177
- 极丰富线丛 5:410
- 极共轭点(关于二次曲线的) 1:767
- 极函数 2:290
- 极函数(广义范的) 3:762
- 极化 3:53;4:2
- 极化次数(代数簇的) 4:217
- 极化代数簇 4:217**
- 极化代数系统簇 1:112
- 极化方法 2:508
- 极化族 3:799
- 极化族(代数簇的) 4:217
- 极化(Hodge 结构的) 2:885
- 极化(Hodge 结构的变分的) 5:378
- 极环元 1:251
- 极积分核 3:112
- 极集 4:212**
- 极集 4:215**
- 极集(解析函数的) 4:215
- 极集(凸集的) 1:849
- 极集(拓扑向量空间中集合的) 2:296
- 极集(位势论中的) 4:215
- 极几何 5:111
- 极角 4:214
- 极距 4:943
- 极空间 4:216**
- 极面(点的) 4:216
- 极面(点关于二次曲面的) 4:394
- 极面(椭圆空间中极点的) 4:624
- 极[平]面 1:767;4:213
- 极奇异性 5:459
- 极奇异性积分算子 5:459
- 极强可和性 5:73
- 极(球面几何学中的) 2:348
- 极透射 1:752
- 极图 2:757**
- 极系统 4:150
- 极线 1:606;1:767
- 极线(点关于一条非退化圆锥曲线的) 4:212
- 极线(椭圆平面上极点的) 4:623
- 极线(椭圆平面上圆的中心的) 4:623
- 极限 3:439**
- 极限阿列夫 1:65
- 极限(超限序列的) 4:15
- 极限代数 2:29
- 极限点 1:731
- 极限点(分式线性变换的离散群的) 2:584
- 极限点(轨道的)\* 3:447**
- 极限点(集合的)\* 3:446**
- 极限(点列的) 3:440
- 极限点群 1:900
- 极限定理 3:448**
- 极限对象(范畴中的) 3:1001
- 极限(多重序列的) 3:441
- 极限(二重序列的) 2:281
- 极限(范畴中的) 1:503
- 极限(函数的) 3:440
- 极限(函子的) 4:337
- 极限环 3:444**
- 极限环(鞍型的) 3:445
- 极限基数 1:475
- 极限集 3:447**
- 极限集(动力系统轨道的) 3:447
- 极限集(轨道的)\* 3:447**
- 极限(集合序列的) 3:442

- 极限集(Fuchs 群的) 2:582
- 极限集(Klein 群的) 3:266
- 极限(紧开拓扑下的) 4:519
- 极限空间 5:203
- 极限空间(谱的) 4:437
- 极限(滤子的) 3:442
- 极限逻辑 3:608
- 极限谱(算子的) 4:934
- 极限球面 2:933**
- 极限球面方法 5:341
- 极限球面(Лобачевский 几何学中的) 3:525
- 极限曲面(Лобачевский 几何学中的) 3:525
- 极限曲线(Лобачевский 几何学中的) 3:525
- 极限数 4:15
- 极限(数学分析中的) 3:632
- 极限(拓扑空间中有向集的) 3:442
- 极限完全法则系统(对一类控制系统的) 2:380
- 极限吸收原理 3:443**
- 极限线 2:932
- 极限(序列的) 3:439
- 极限序数 4:15
- 极限(映射的) 3:440
- 极限(映射关于滤子的) 3:442
- 极限(映射关于序列的) 3:440
- 极限(映射在一点处的) 3:440
- 极限(映射在一点上关于滤子的) 3:442
- 极限有限系统(耗散系统) 2:251
- 极限元 3:445**
- 极限元(良序集的) 5:480
- 极限元(区域的) 3:445
- 极限圆 2:932**
- 极限圆流 2:932**
- 极限振幅原理 3:450**
- 极限锥 3:444**
- 极限 Lie 代数 1:822
- 极限(Постников 系统的) 4:258
- 极限(Постников 系统的态射的) 4:258
- 极小超曲面 2:401
- 极小簇(给定表征的) 1:112
- 极小单纯子集 2:923
- 极小单群 3:749**
- 极小点 3:628
- 极小迭代法 3:745**
- 极小动力系统 3:748
- 极小多面体锥 4:773
- 极小多项式 2:422
- 极小多项式(代数的) 2:237
- 极小多项式(代数数的) 1:95
- 极小多项式(矩阵的) 3:672
- 极小多项式(自同态的) 4:779
- 极小范式(Boole 函数的) 1:394
- 极小覆盖 1:395
- 极小函数 4:519
- 极小函数(压缩算子的) 1:821
- 极小合取范式 1:397
- 极小化方法(强依赖于多个变量的函数的) 3:755**
- 极小化极大 3:753**
- 极小化极大变分问题 4:679
- 极小化极大程序 3:755
- 极小化极大定理 3:754
- 极小化极大风险 4:990
- 极小化极大估计量 3:753**
- 极小化极大规则 2:239;4:990
- 极小化极大滤波理论 3:1044
- 极小化极大判决 3:755
- 极小化极大统计程序 3:754**
- 极小化极大性质 3:754**
- 极小化极大原理 3:754**
- 极小化极大原理(二人零和对策中的) 5:301
- 极小化(计算费用的) 3:758
- 极小化(计算量的) 3:758**
- 极小化(逻辑代数函数的) 1:74
- 极小化(面积的) 3:758**
- 极小化算子 3:367;4:524
- 极小化问题(逻辑中的) 3:607
- 极小化序列 3:760**
- 极小化序列(变分问题的) 2:214
- 极小化序列(算子的) 3:761**
- 极小化(有限个变量的函数的) 3:687
- 极小基 3:889
- 极小集 3:747**
- 极小集(拓扑动力系统中的) 3:747
- 极小集(Riemann 空间中的) 3:747
- 极小理想 3:744**
- 极小逻辑演算 3:558
- 极小螺旋面 2:849
- 极小脉络 4:328
- 极小满单纯集 4:840
- 极小模型 3:746**
- 极小模型(代数曲面的) 1:103
- 极小模型问题 3:746
- 极小拟簇 1:111
- 极小抛物子群 1:818
- 极小抛物  $k$  子群 3:463
- 极小膨胀(压缩半群的) 1:823
- 极小偏差法 3:744**
- 极小曲面 3:749**
- 极小曲面理论的发展 3:751
- 极小曲面(有自由边界的) 3:750
- 极小剩余法 3:744
- 极小算子(由微分算子生成的) 4:928
- 极小条件(对理想的) 1:238
- 极小条件(对偏序集的) 4:102
- 极小条件(关于子半群的) 4:767
- 极小条件(偏序集中的) 1:542
- 极小调和函数 3:628
- 极小投射(环的) 2:568
- 极小稳定性 4:961
- 极小析取范式 1:74;1:397;2:16
- 极小性问题(Artin 群的) 1:234
- 极小性质 3:747**
- 极小性质(正交展开式的部分和的) 3:747
- 极小性(子集的) 1:314
- 极小序列(Banach 空间中元素的) 1:308
- 极小旋转曲面 4:690
- 极小因子分解 5:118
- 极小引力中心 1:538
- 极小右几乎分裂映射(代数的) 4:595
- 极小元(偏序子集中的) 4:101
- 极小正规子群 3:747**
- 极小值 3:761**
- 极小子集 1:314
- 极小子集(相空间的) 4:397
- 极小自动机 1:263
- 极小左几乎分裂映射(代数的)



- 4:595  
 极小 Martin 边界 3:628  
 极小  $r$  度 4:528  
 极形式(二次齐次方程的) 4:394  
 极形式(二次曲线的) 1:767  
 极形式(复数的) 1:714  
 极形式(广义范的) 3:762  
 极映射 4:947  
 极元(分次微分子层的积分元的) 4:152  
**极值 2:443**  
 极值策略(对于桥的) 2:150  
**极值长度 2:435**  
 极值长度(曲线族的) 2:435  
 极值的必要条件(变分问题中的) 5:382  
 极值的充分条件(变分问题中的) 5:382  
 极值点(函数的) 2:743  
 极值点(凸集的) 3:736  
 极值定理(关于 Riemann 流形的) 4:651  
 极值度量(参模问题的) 2:435  
**极值度量法 2:436**  
 极值度量法(单叶函数论中的) 5:347  
 极值(泛函的) 2:443  
 极值构造(对策论中的) 2:150  
 极值(函数的) 3:689  
 极值函数(区域的) 1:325  
 极值瞄准法则(微分对策中的) 2:149  
 极值求积公式 3:1037  
**极值曲线 2:433**  
 极值曲线(变分问题中的) 5:381  
**极值曲线场 2:434**  
 极值曲线场(变分问题的) 2:435  
 极值曲线场的斜率 2:434  
 极值曲线(泛函的) 2:867  
**极值曲线族 2:442**  
 极值容量测度 2:360  
 极值(实值函数的) 2:443  
 极值顺序统计量 4:8  
**极值问题 2:437**  
**极值问题, 数值解法 2:437**  
 极值问题(组合学中的) 1:662  
**极值性质(多项式的)\* 2:441**  
**极值性质(函数的)\* 2:441**  
 极值性质(Bergman 核函数的) 1:325  
 极值原理 2:829  
 极值原理(局部形式的) 2:829  
 极值原理(整体形式的) 2:829  
 极周期(第三类 Abel 积分的) 1:15  
 极周期(Abel 微分的) 1:11  
**极坐标 4:213**  
 急减函数 2:690  
 急减依存关系 4:1005  
**集代数 1:76**  
**集范畴 4:800**  
 集范畴 Ens 1:500  
 集格 2:725  
**集函数 4:799**  
**集合 4:798**  
 集合变分的性质 5:376  
**集合的闭包 1:613**  
 集合的边界 1:682  
**集合的变分 5:376**  
**集合的并 5:333**  
**集合的薄度 5:164**  
**集合的对称差 5:98**  
**集合的范畴 1:506**  
 集合的分类(定义于形式算术语言中的) 3:264  
**集合的核 3:255**  
**集合的极限点 3:446**  
**集合的加法 1:33**  
**集合的交 3:147**  
**集合的可分性 4:780**  
**集合的密度 2:48**  
 集合的描述 4:798  
**集合的内部 3:129**  
**集合的内点 3:129**  
**集合的凝聚点 1:731**  
 集合的严格解释(演算中) 1:455  
 集合的直径(度量空间中的) 2:73  
**集合的置换 4:132**  
 集合(分离度量连续统的) 3:1017  
**集合论 4:799**  
**集合论(公理的)\* 1:289**  
**集合论(描述的)\* 2:59**  
 集合论极限 3:442  
 集合论(自然数的) 4:348  
**集合上的对称性 5:107**  
 集合(在两点之间分离拓扑空间的) 2:221  
 集环 3:698  
 集体紧集(算子的) 2:327  
 集体紧序列(算子的) 2:561  
 集体正规空间 3:989  
 集体正规拓扑空间 3:548  
 集元(由子集生成的) 1:315  
 集值映射 3:853  
**集中函数 1:730**  
 集族 1:540;3:889  
**集族的神经 3:889**  
 几何遍历的 Марков 链 3:618  
 几何表示(平面上代数恒等式的) 1:744  
 几何不等式 3:194  
 几何不可约簇 3:183  
 几何不同平稳点 5:385  
 几何测度论 1:841  
 几何单纯复形 1:707;4:835  
 几何单纯复形(抽象单纯复形的) 4:835  
 几何单形 1:707  
 几何点(仿射代数簇的) 1:60  
**几何动力学 2:714**  
**几何对象 3:1011**  
 几何对象场 2:712;5:42  
 几何对象场(相配于一个群的) 2:712  
 几何对象的变换规律 2:713  
**几何对象理论 2:710**  
 几何(二次型的) 4:385  
**几何分布 2:709**  
**几何复形 2:708**  
**几何概率 2:713**  
 几何格 1:666;4:772  
 几何观点(关于数的) 4:959  
 几何光学 2:328  
 几何光学近似 2:707;4:753  
**几何轨迹 2:710**  
 几何过程 5:6  
**几何环 2:714**  
**几何基础 2:523**  
 《几何基础》(Hilbert 著) 2:716; 3:645  
 几何级数 2:713

- 几何结构丛( $\leq k$  阶的) 5:42  
 几何解释(函数导数的) 2:99  
 几何解释(函数微分的) 2:93  
 几何解释(线性方程组解的)  
   3:461  
 几何解释(自治系统的) 1:282  
 几何近似 2:707  
 几何静力学 4:983  
 几何亏格 2:710  
 几何亏格(代数簇的) 2:146  
 几何亏格(完全光滑代数曲面的)  
   2:698  
 几何扩展 2:708  
 几何链复形 4:191  
 几何量 5:42  
 几何平均值 2:710  
 几何全对称 1:899  
 几何实现(单纯复形的) 4:835  
 几何实现(复形的) 1:708  
 几何实现(Giever-胡(世桢)意义下的  
   单纯集的) 4:838  
 几何实现(Milnos 意义下的单纯集  
   的) 4:838  
 几何数列(等比数列) 2:713  
 几何数论(数的几何) 2:721  
 几何拓扑学 5:217  
 几何网 3:892  
 几何微分不变式 2:163  
 几何纤维 4:719  
 几何纤维(一点上概形的态射的)  
   1:313  
 几何向量 5:404  
 几何形状识别 5:152  
 几何学 2:715  
 几何学(大范围的)\* 2:717  
 几何学的历史 2:715  
 几何学(度量空间的) 5:297  
 几何学(反演半径的) 1:753  
 几何学(浸入流形的)\* 2:718  
 几何学(具有交换乘法的) 4:105  
 几何学(绝对的)\* 1:19  
 几何学(齐性空间的) 2:899  
 几何学(群的) 2:385  
 几何学(三角形的) 4:172  
 几何学(椭圆曲线的) 2:344  
 几何学中的基本概念 2:523  
 几何学(Desargues 空间的) 2:57  
 《几何学》(Descartes 著) 1:161  
 几何学(Hilbert 空间的) 2:872  
 几何学(Minkowski 空间的)  
   4:568  
 几何元素过程 5:6  
 《几何原本》(Euclid 著)\* 2:338  
 几何约化的代数群 3:869  
 几何约化的线性代数群 4:532  
 几何约束 2:891  
 几何直纹曲面 4:698  
 几何直纹曲面(亏格  $g$  的) 4:698  
 几何重数(线性变换的) 2:323  
 几何子对象 2:711  
 几何作图 2:708  
 几何 Goppa 码 2:740  
 几乎必然返回 4:199  
 几乎必然收敛 1:835  
 几乎必然稳定特征指数 4:969  
 几乎处处 1:138  
 几乎处处收敛 1:835  
 几乎处处收敛函数系 4:37  
 几乎等距 Banach 空间 1:306  
 几乎否定算术公式 1:796  
 几乎可简化的线性系统 1:142  
 几乎可约线性系统(几乎可简化线  
   性系统) 1:142  
 几乎正规算术公式 1:796  
 脊线 2:319  
 计步函数 1:122  
 计划集 3:655  
 计量经济学 2:317  
 计数测度 2:842  
 计数过程 5:10  
 计数函数 4:5  
 计数函数(亚纯函数的) 3:900  
 计数理论 2:368  
 计数问题(图论中的) 1:662  
 计数(Steiner 系的) 4:1029  
 计算的历史 1:134  
 计算的数学理论 3:663  
 计算度量 1:122  
 计算断层照相法 5:186  
 计算方法的最优化 3:1048  
 计算过程 4:967  
 计算过程的稳定性 4:967  
 计算机(抽象的)\* 1:729  
 计算机代数学 1:729  
 计算机仿真 1:917  
 计算机辅助断层照相法 5:186  
 计算机辅助设计 2:709  
 计算机化断层照相法 4:186  
 计算机软件 4:888  
 计算机网络 4:889  
 计算机制图学 2:709  
 计算几何学 2:709  
 计算(框架链环的) 3:276  
 计算量的极小化 3:758  
 计算模型 3:783  
 计算难处理性 4:716  
 计算球面的同伦群的方法 4:939  
 计算术 1:226  
 计算数学 1:727  
 计算数学中的插值法 3:137  
 计算算法 1:726  
 计算算法的经济性 1:727  
 计算算法的稳定性 4:966  
 计算算法的最优化 3:1048  
 计算算法精度的控制 1:727  
 计算误差 2:387  
 记号(Snobol 语言中的) 4:885  
 记忆长度(通信信道的) 1:543  
 记忆尺度(通信信道的) 1:543  
 迹 5:237  
 迹(代数的元素的) 2:237  
 迹范数 3:993  
 迹(方阵的)\* 5:238  
 迹公式 3:379  
 迹函数 2:237  
 迹(函数的) 2:211;3:15  
 迹(核型算子的) 3:995  
 迹(集代数的) 3:605  
 迹(集合上的函数的) 2:216  
 迹加法 4:703  
 迹类算子 2:870  
 迹嵌入定理 5:477  
 迹(群上的) 5:341  
 迹容许表示 5:341  
 迹问题 3:16  
 迹(张量的) 3:995  
 迹( $C^*$  代数上的)\* 5:238  
 迹(Fredholm 算子的) 3:995  
 迹(von Neumann 代数上的)  
   5:441  
 既约分数 2:543



- 既约剩余系 4:530  
 继承性质(核型空间中的) 3:998  
 继续观测集 4:788  
 寂静的决斗 2:300  
 加倍(代数的) 2:696  
 加倍算子(对动力系统中混沌的) 5:351  
 加倍(Riemann 曲面的) 2:282  
 加边法 1:400  
 加边(空间的)\* 1:401  
 加边(拓扑空间的) 1:401  
 加边子式 3:764  
 加标的代数系统 2:367  
 加标  $\sigma$  函数 5:469  
 加法 1:33  
 加法代数(广环的) 4:672  
 加法定理 1:34  
 加法定理的函数方程 2:600  
 加法定理(关于函数的) 2:599  
 加法定理(关于零阶 Bessel 函数的) 1:342  
 加法定理(关于同调映射的) 2:915  
 加法定理(关于拓扑空间的权的) 1:34  
 加法定理(关于维数的) 2:183  
 加法定理(关于柱函数的) 1:929  
 加法定理(关于 Abel 函数的) 1:12  
 加法定理(关于 Jacobi 椭圆函数的) 3:213  
 加法分解(正规算子的) 3:985  
 加法公式(正切的) 5:130  
 加法公式(Legendre 多项式的) 3:384  
 加法(环柄的) 2:815  
 加法机(动力系统中的) 5:350  
 加法(集合的)\* 1:33  
 加法(幂级数的) 4:280  
 加法群 1:35  
 加法群概形 2:789  
 加法群(环的) 1:35;4:669  
 加法(三元域中的) 5:150  
 加法(图的模 2 的) 2:753  
 加法形式群律 2:511  
 加法(么半群中的) 3:817  
 加法运算(广环的) 4:672  
 加法子群 2:238  
 加法 Jordan 分解(自同态的) 3:229  
 加密 1:891  
 加密函数 1:891  
 加密数据 1:893  
 加密指数(公开加密密钥的) 1:892  
 加浓(逻辑模型的) 4:976  
 加前缀的分程序(Simula 语言中的) 4:843  
 加权半范数 5:476  
 加权逼近 1:200  
 加权范数 5:476  
 加权根方偏差 4:379  
 加权和 5:474  
 加权几何平均值 1:283  
 加权均方误差 4:379  
 加权均幂逼近 1:195  
 加权可和性 5:138  
 加权空间 5:476  
 加权类 5:476  
 加权匹配问题 5:474  
 加权平方范数 5:474  
 加权平均值 5:476  
 加权平均值(关于实数组的) 1:283  
 加权强对策 1:855  
 加权图 5:474  
 加权最小平方 5:474  
 加速 1:719;4:80  
 加速(并行化的) 4:80  
 加速定理 1:123;1:720  
 加速力 2:313  
 加速(收敛的)\* 1:28  
 加算子 2:876  
 加算子(Крейн 空间中的) 3:294  
 加藤定理(关于算子的连续谱的) 3:444  
 加稀(级数的)\* 2:177  
 加细 4:535  
 加细(复形的) 4:163  
 加细(覆盖的) 3:373  
 加细集(开覆盖的) 3:737  
 加细(集族的) 4:75  
 加细(理想列的) 3:4  
 加细一致结构 5:326  
 加细(子群列的) 5:60  
 加细(子群系统的) 5:61  
 加型 Diophantus 问题 2:201  
 加性边界(函数的) 2:910  
 加性测度 1:35  
 加性差分格式 2:235  
 加性除数问题 1:35  
 加性泛函(Марков 过程的) 2:605  
 加性范畴 1:34  
 加性分拆问题(整数的) 1:36  
 加性关系 1:38  
 加性函数 1:35  
 加性函子 1:35  
 加性集函数 1:35  
 加性理论(理想的)\* 1:38  
 加性上边界(函数的) 2:910  
 加性数论 1:36  
 加性数系 3:1008  
 加性算术函数 1:34  
 加性问题 1:37  
 加性一致结构 1:39  
 加性映射 2:779  
 加性映射性质 2:779  
 加性 Cousin 问题 1:872  
 加盐处理技巧 1:897  
 夹层矩阵 4:534  
 夹角(两球面之间的) 1:752  
 夹角(两相错直线之间的) 4:870  
 夹角(两圆之间的) 1:752  
 夹角(两 Hilbert 子空间之间的) 4:327  
 夹角(流形上两曲线之间的) 1:851  
 夹角(曲面上两曲线之间的) 2:489  
 夹角(凸曲面上两最短曲线之间的) 1:850  
 佳嵌入 5:510  
 家政数 3:353  
 痂 4:708  
 贾宪三角形(Pascal 三角形) 4:107  
 假分数 2:543  
 假设 4:307;4:1002  
 假设分布 4:829  
 假设(公式的) 1:74  
 假设(关于非齐次线性型积的)

- 2:724  
 假设(关于凸体变态的) 2:723  
 假言推理法则 3:156  
 假有理函数(假分式) 4:497  
 假值 3:22  
 价(次)(张量的) 1:59  
 价(反变张量的) 1:825  
 价(张量的) 1:59;1:878  
 价值(迭代法的) 5:257  
**尖点 1:915;1:916**  
 尖点(第二类) 1:914;2:284  
 尖点(第一类) 1:914;2:284  
 尖点(矩阵的离散子群的) 3:791  
 尖点(拟 Fuchs 群的) 2:584  
 尖点(曲线的) 2:100  
 尖点形式 3:789  
 尖峰变分(泛函的) 5:373  
 尖峰概率密度 2:414  
 尖棱(脊棱) 2:67;2:319  
**尖锐范数 4:802**  
 尖锐范数(微分形式的) 4:801  
 尖锐范数( $r$  维多面体链空间中的)  
 4:802  
 尖锐函数 4:801  
 尖锐链 4:802  
 尖锐上链 4:801  
**尖锐形式 4:801**  
 尖锥 1:739  
**间断变分问题 2:222**  
**间断乘子 2:222**  
**间断点 2:221**  
 间断点(带小参数的常微分方程的)  
 2:142  
 间断点(第二类) 2:222  
 间断点(第一类) 2:221  
**间断分解方法 2:20**  
**间断函数 2:222**  
 间断集(Klein 群的) 3:266  
 间断面(流体运动的) 4:811  
 间断现象(带小参数的常微分方程  
 的) 2:142  
 间断振动 4:571  
 间断周期解 4:571  
**间隔 3:149**  
 间隔平方(Minkowski 空间中的)  
 4:569  
 间隔元(Minkowski 空间中的)  
 4:568  
 间接法(最优控制理论中的)  
 2:440  
 间接数值方法(变分学中的)  
 5:386  
 间接证明 2:282  
 间接证明(算法不可判定性的)  
 5:317  
 间隙层 3:530  
 间隙(间断)(全序集中的) 5:236  
 间隙(空隙)(Hilbert 子空间之间的)  
 4:327  
 间隙(偏序集中的) 2:335  
 间隙(Hill 算子的) 2:883  
 艰苦的阶梯(极限过程) 2:372  
 菅原正博构造 3:244  
**减法 5:69**  
 减法(复数的) 1:713  
 减法(幂级数的) 4:280  
 减法(数的) 1:33  
**减函数(递减函数) 2:20**  
 减量(置换的) 4:133  
 减数 5:69  
**减缩图(图的)\* 3:764**  
 剪切层 1:411  
 剪(移位)应变 4:807  
 剪应力 5:32  
 检测(在一关系下不同元素的)  
 3:913  
**检验的功效函数 4:278**  
 检验函数(数值方法中的) 3:688  
 检验空间 2:684  
 检验(控制系统的) 4:573  
**检验统计学 5:150**  
 简单瓣 1:431  
 简单闭测地线 1:608  
 简单闭曲线 2:221  
 简单测度 5:11  
 简单插值结点 3:143  
 简单插值条件 3:143  
 简单单步迭代 4:789  
 简单点(光滑概形的) 4:883  
 简单点(解析空间的) 1:174  
 简单迭代 5:257  
**简单迭代法 4:829**  
 简单迭代法(线性代数方程组的)  
 3:459  
 简单对策 1:855  
 简单多边形 4:224  
 简单二角形 5:195  
 简单函数 1:377  
 简单函数(关于 Lebesgue 积分的)  
 3:374  
 简单函数(积分理论中的) 3:88  
 简单函数级数 4:794  
**简单弧 4:826**  
 简单基(逻辑中函数的) 3:608  
**简单假设 4:829**  
 简单假设(公式的) 1:74  
 简单假设(数理统计中的) 4:829  
 简单竞赛图 5:237  
 简单可和函数(关于 Lebesgue 积分  
 的) 3:374  
 简单空间 3:1013  
 简单类型论 5:304  
 简单类型论模型 5:305  
 简单链 2:753  
 简单两点空间 1:660  
 简单临界点 4:866  
 简单纽结 3:273  
 简单膨胀 4:976  
 简单区间(偏序集中的) 3:150  
 简单区域(Riemann 空间中的)  
 4:649  
 简单圈 2:753  
 简单三维流形 4:170  
 简单收敛拓扑 3:1029  
 简单数项级数 4:791  
 简单随机点过程 5:11  
 简单特征曲面 3:485  
 简单条件自动机试验 1:258  
 简单图形 2:469  
 简单推论(公式的) 1:74  
 简单无条件自动机试验 1:258  
 简单样本 2:666  
 简单移位 4:807  
 简单支配文法 2:750  
 简单转向点(微分方程的) 1:62  
 简单 Bendixson 方程 3:577  
 简单 Lebesgue 谱 3:377  
 简单  $r$  向量 3:632  
 简单 Steiner 系 4:1030  
 简单  $t$  设计 5:128  
 简化常微分方程 2:578



- 简化常微分方程组 2:141  
 简化二次方程 4:381  
 简化范 4:529  
 简化范同态 4:908  
 简化方程 4:144  
 简谐振动 2:567  
 建立估计量的方法 4:994  
 健忘的转让 1:893  
 渐近逼近(函数的) 1:245  
 渐近表示 1:249  
 渐近常值随机变量序列 3:363  
 渐近带 5:33  
 渐近殆周期函数 2:674  
 渐近单演函数(在一点上的)  
     3:815  
 渐近导数 1:245  
 渐近等价性(线性常微分方程组的)  
     3:498  
 渐近等式 1:246  
 渐近点 1:248  
 渐近点(超越曲线上的) 5:240  
 渐近点值 1:249  
 渐近多边形 4:225  
 渐近方法(绕射的数学理论中的)  
     2:173  
 渐近方法(组合计数中的) 1:664  
 渐近方向 1:245  
 渐近分数(连分数的)\* 1:841  
 渐近分析 1:414  
 渐近公式 1:247  
 渐近功效函数(统计检验的)  
     1:251  
 渐近估计 4:7  
 渐近关系 4:7  
 渐近轨道稳定性 4:402  
 渐近轨道稳定性 4:4  
 渐近基 1:245  
 渐近基( $k$  阶的) 1:245  
 渐近级数 1:249  
 渐近极限 1:247  
 渐近集(函数的) 1:614  
 渐近解(波动方程的) 1:526  
 渐近可忽略性 1:248  
 渐近密度 1:245  
 渐近幂级数 1:248  
 渐近幂序列 1:249  
 渐近式 1:247  
 渐近式(数论函数的) 1:251  
 渐近式(算术函数的) 1:251  
 渐近收敛速率 4:496  
 渐近条件稳定点(关于映射族的)  
     1:735  
 渐近条件稳定性 1:736  
 渐近网 1:248  
 渐近稳定差分格式 2:87  
 渐近稳定点(流形的) 1:735  
 渐近稳定集 3:568  
 渐近稳定解 1:250  
 渐近稳定控制系统 1:266  
 渐近稳定线性常微分方程组  
     3:497  
 渐近稳定性 1:735;3:582  
 渐近稳定性(不动点关于映射族的)  
     3:583  
 渐近稳定性(常微分方程解的)  
     3:582  
 渐近稳定性(一点关于映射族的)  
     3:583  
 渐近无偏估计量 1:250  
 渐近无偏函数 1:250  
 渐近无偏检验 1:251  
 渐近无偏谱估计量 4:917  
 渐近线 1:245  
 渐近线(二次曲线的) 1:768  
 渐近线(双曲线的) 1:245  
 渐近线(正则曲面上的) 1:247  
 渐近相等函数 1:246  
 渐近相对效率 1:250  
 渐近相对效率(Bahadur 意义下的)  
     2:320  
 渐近相对效率(Hodges 和 Lehmann  
     意义下的) 2:320  
 渐近相对效率(Pitman 意义下的)  
     2:320  
 渐近效率 2:320  
 渐近效率(统计检验的) 2:320  
 渐近效率(无偏统计估计量的)  
     4:996  
 渐近性质(经典正交多项式的)  
     4:33  
 渐近性状(超几何函数的) 2:957  
 渐近性状(二阶线性常微分方程解  
     的) 3:518  
 渐近性状(统计估计量的) 4:994  
 渐近性状(柱函数的) 1:928  
 渐近序列 1:249  
 渐近有效估计量 1:250  
 渐近有效统计估计量 4:996  
 渐近预解式(线性算子的) 4:765  
 渐近展开 1:246  
 渐近展开(Erdéyi 意义下的)  
     1:246  
 渐近展开(Poincaré 意义下的)  
     1:246  
 渐近值 1:249  
 渐近值(函数在一点上的) 1:616  
 渐近值(解析函数沿 Jordan 弧的)  
     3:453  
 渐近值(与一集合相关的) 1:249  
 渐近锥面(双曲面的) 2:951  
 渐近最优自动机序列 1:275  
 渐近坐标 1:773  
 渐近  $Q$  最优判别规则序列  
     2:240  
 渐近  $y$  稳定性 4:964  
 渐近 Ляпунов 稳定焦点 2:502  
 渐屈面 2:408  
 渐屈面(环面的) 2:408  
 渐屈线(平面曲线的) 2:408  
 渐屈线(曲线的) 1:779  
 渐伸曲面 2:408  
 渐伸线(平面曲线的) 2:410  
 箭图 4:458  
 降链条件 1:542;2:182  
 降滤过 2:470  
 降中心列(Lie 代数的) 3:413  
 交 1:695;3:147  
 交半格 4:770  
 交比 1:890  
 交叉多胞形 2:865  
 交叉冠 1:466  
 交叉可逆么拟群 3:565  
 交叉模 1:891  
 交叉群环 1:890  
 交叉数(图的) 2:758  
 交叉同态 1:890  
 交叉( $G, f$ )模 1:891  
 交错 1:145  
 交错表示 3:596  
 交错除环 1:146  
 交错代数 1:145

- 交错点 1:145  
 交错点集 1:145;1:566  
 交错点列(关于连续函数的) 2:15  
 交错定理 1:145  
 交错多项式 5:101  
 交错多重线性映射 3:856  
 交错否定 4:807  
 交错化(对称群子群元素的)  
     5:104  
 交错化子 5:104  
 交错环 1:145  
 交错环和交错代数 1:145  
 交错积分(对策论中的) 2:150  
 交错积(张量的) 1:145  
 交错级数 1:144  
 交错解析么拟群 3:566  
 交错矩阵 4:148  
 交错链环 1:144  
 交错纽结和链环 1:144  
 交错群 1:144  
 交错数 1:147  
 交错双线性型 1:360  
 交错图(正则位置链环的) 3:270  
 交错网络模型 3:894  
 交错张量 1:145  
 交错(Snobol 语言中模型的)  
     4:885  
 交(多值映射的) 3:853  
 交互翻译程序 1:130  
 交换半群(具有消去律的) 2:424  
 交换超代数 5:78  
 交换超群 2:681  
 交换代数 1:671  
 交换代数的局部化 3:541  
 交换带 4:770  
 交换带(半群的) 1:309  
 交换公理 3:678  
 交换公式(Марков 算子和  $\lambda$  微分算  
     子的) 2:530  
 交换广义位移算子 2:681  
 交换环 1:676  
 交换律 1:73;1:676  
 交换群 1:675  
 交换群对象 2:787  
 交换群概形 1:675  
 交换算子 1:676  
 交换图式 2:902  
 交换图式(范畴中的) 2:71  
 交换形式群 2:510  
 交换性 1:676  
 交换性恒等式 4:156  
 交换性(加法的) 3:1003  
 交换性(绝对形和紧化算子的)  
     1:17  
 “交换”性质 1:666  
 交换中心(交错环的) 1:146  
 交换 Banach 代数 1:673  
 交换  $H$  空间 2:796  
 交换 Lie 代数 3:403  
 交(集合的)\* 3:147  
 交结数 3:149  
 交结数定理(Mackey 交结数定理)  
     3:592  
 交结数公式 3:592  
 交结算子 3:149  
 交截配对 2:678  
 交(事件的) 4:313  
 交替 1:145  
 交替(对策中的) 4:247  
 交替(对策中信息集的) 4:247  
 交替法 3:775  
 交替方向法 1:422  
 交(投影的) 4:347  
 交(投影算子的) 4:347  
 交叉追赶(交叉双搜索) 2:287  
 椒盐卷饼状链环 3:273  
 焦参数(双曲线的) 2:941  
 焦参数(椭圆的) 2:341  
 焦带 2:128  
 焦点 2:502  
 焦点(二次曲面的  $m$  阶的) 3:604  
 焦点(抛物线的) 4:66  
 焦点(曲线的)\* 2:503  
 焦点(双纽线的) 3:387  
 焦点(双曲线的) 2:941  
 焦点(椭圆的) 2:341  
 焦点(线汇的) 1:765;3:604  
 焦点型奇点(微分方程的) 4:860  
 焦点(圆锥曲线的) 1:769  
 焦点(Cassini 卵形线的) 1:498  
 焦距(双曲线的) 2:941  
 焦距(椭圆的) 2:341  
 焦流形(二次曲线的) 3:604  
 焦平面(线汇的) 1:765  
 焦曲面(渐屈面) 2:408  
 焦曲面(线汇的) 1:765;3:604  
 焦曲线(Monge 曲线) 2:128  
 焦曲线(Monge 锥的) 3:811  
 焦散线 1:526  
 焦双曲线 2:941  
 焦网(线汇的)\* 2:501  
 焦轴(椭圆的) 2:341  
 角 1:181  
 角边界点 4:982  
 角边界值 1:183  
 角变量 1:922  
 角的边 1:181  
 角点 1:445;2:705  
 角点(超越曲线的) 5:240  
 角点(曲线的) 2:100  
 角谷不动点定理 4:715  
 角谷等价 2:383  
 角谷定理 3:247  
 角和公式 4:171  
 角畸变(地图投影的) 1:493  
 角腭(三角形的) 5:268  
 角算子 3:294  
 角(凸曲面上扇形的) 1:850  
 角(椭圆平面中的) 4:623  
 角系数 1:634  
 角形(单纯集中的) 4:839  
 角形(可填的) 4:839  
 角盈 2:414  
 角盈(测地三角形的) 2:705  
 角盈(三角形的) 5:268  
 角盈(椭圆平面内三角形的)  
     4:623  
 角子式 3:764  
 角坐标 1:922  
 角坐标(力学中的) 2:810  
 角(Riemann 空间中的) 4:646  
 绞结 4:894  
 较快发散性 1:839  
 较快收敛性 1:839  
 较慢发散性 1:839  
 较慢收敛性 1:839  
 较强收敛 1:838  
 较强拓扑 1:687  
 较弱收敛 1:838  
 较弱拓扑 1:687  
 较小值区域(函数的) 5:384



**阶 4:4**

阶(半群的) 3:816  
 阶(半群元素的) 3:816  
 阶(变换 Lie 伪群的) 4:368  
 阶层曲线(Green 函数的) 5:393  
 阶(差分方程的) 2:77;1:196;  
 1:198  
 阶(超越整函数的) 4:5  
**阶乘 2:447**  
 阶乘矩测度 5:11  
 阶(代数分支点的) 1:77  
 阶(代数函数的极点的) 1:86  
 阶(代数数域的) 2:219  
 阶(代数网的) 4:430  
 阶(代数系统的) 1:105  
 阶(导数的) 4:5  
 阶(典型积的) 1:462  
 阶(点关于闭链的) 4:6  
 阶(反变张量的) 1:825  
 阶(方阵的) 4:5  
 阶(非线性偏微分方程的) 3:950  
 阶(覆盖的) 2:184;3:373;4:5  
 阶(共变张量的) 1:876  
**阶关系 4:7**  
 阶(广义函数的) 2:684  
 阶(函数的极点的) 4:218  
 阶(函数方程的) 2:599  
 阶函数(亚纯函数的) 4:5  
 阶(环上特殊线性群的) 4:908  
 阶(集族的) 2:184  
 阶(渐近基的) 1:245  
 阶(绝对矩的) 1:20  
 阶(连续模的) 4:6  
 阶(链环的投影中点的) 3:269  
 阶(零点的) 4:4  
 阶码(在浮点记号中数的) 4:201  
 阶(模上的微分算子的) 2:168  
 阶(偏微分方程的) 2:111  
 阶(偏微分方程组的) 2:112  
 阶(偏微分算子的) 2:165  
 阶(平衡不完全区组设计的)  
 4:5  
 阶(区组设计的) 4:5  
 阶(曲线上点的) 4:6  
 阶(群的元素的) 4:5  
 阶(群元素的) 4:5;4:125  
 阶(三角多项式的) 5:274

阶(数值解法的) 4:6  
 阶梯函数 1:378  
 阶梯响应(线性定常控制系统的)  
 5:242  
 阶(椭圆函数的) 2:347;4:5  
 阶(椭圆函数的变换的) 2:347  
 阶(微分表达式的) 2:165  
 阶(微分的) 4:5  
 阶(微分方程的) 4:5  
 阶(微分算子的) 2:165;5:481  
 阶(伪微分算子的) 4:363  
 阶(无穷大量的) 4:4  
 阶(无穷小量的) 4:4  
 阶(线汇的) 1:765  
 阶(线性常微分方程的) 3:496  
 阶(线性微分算子的) 3:474  
 阶(小数近似的) 2:18  
 阶(形式幂级数的) 2:518  
 阶(亚纯函数的) 4:5  
 阶(亚纯函数的极点的) 3:713  
 阶(亚纯函数的零点的) 3:713  
 阶(有限群的) 2:478;4:5  
 阶(有限射影平面的) 4:5  
 阶(整函数的) 2:362;1:687;4:5  
 阶(支点的) 4:855  
 阶(直线上的 Dirichlet 级数的)  
 4:6  
 阶(置换的) 4:133  
 阶最优方法(使计算费用极小化的)  
 3:758  
 阶(Bessel 方程的) 1:341  
 阶(Dirichlet 特征标的) 2:209  
 阶(Lie 群的) 4:6  
 阶(Möbius 平面的) 3:780  
 阶(Riemann  $\zeta$  函数在临界带中的)  
 5:543  
 阶(Riemann 曲面上在极点处的亚  
 纯微分的) 2:164  
 阶(Steiner 系的) 4:1028  
 阶( $\theta$  函数的) 5:161  
 阶( $\theta$  级数的) 5:163  
 接触间断(流体流动的) 4:812  
 接触间断条件 5:513  
 接触近性空间 5:203  
 接触面 1:797  
**接触问题(弹性理论的)\* 1:797**  
**接触问题(热传导理论的)\***

1:799

**接合 1:780**

接受器 1:276  
 接受区域(统计检验的) 1:889  
**节 3:226**  
 节丛 4:97;4:864  
 节丛(映射的) 4:97  
 节点(样条的) 1:199  
**结 5:173**  
**结点 3:914**  
 结点(差分格式的) 2:352  
 结点(触点网络的) 1:800  
 结点集 3:136  
 结点(节点)(样条的) 1:199;  
 4:952  
 结点(求积公式的) 4:390  
 结点(曲线的) 3:914  
 结点(实曲线的) 4:862  
 结点数 3:1001  
 结点(网格的) 2:81  
 结点型奇点(微分方程的) 4:860  
 结点(样条的) 1:199  
 结点(有限元法中的) 5:392  
 结点(展形的) 4:958  
 结点(自治系统的) 3:915  
**结构 5:41**  
 结构层 4:933  
 结构层(戴环空间的) 4:672  
 结构层(概形的) 4:718  
**结构常数 5:43**  
 结构常数(代数的) 5:43  
 结构常数(结合代数的) 2:476  
 结构对象 2:713  
 结构方程(仿射联络的) 1:778  
 结构方程(关于联络的) 1:778  
 结构方程(主纤维丛上的) 1:911  
 结构方法(定义自动机的) 1:275  
 结构公理 5:41  
 结构公式(关于单叶函数的)  
 3:118  
 结构(关于语言的) 3:784  
 结构规则 2:697  
 结构函数(G 结构的) 2:620  
 结构函数(G 结构的  $i$  阶的)  
 2:620  
 结构(核型空间的) 3:998  
**结构空间 5:43**

- 结构空间(环的) 4:292
- 结构(控制系统的) 1:918
- 结构(流形上的) 3:602
- 结构群(半群的) 4:534
- 结构群(纤维丛的) 2:618
- 结构同构 5:40**
- 结构稳定动力系统 2:312
- 结构稳定微分方程 2:110
- 结构稳定系统 4:692
- 结构稳定性 4:706
- 结构形式(表示的) 2:711
- 结构形式(几何对象的) 2:711
- 结构性质(解析函数的) 1:152
- 结构序列 1:295
- 结构(与泛代数相关的) 5:348
- 结构语言学 5:40**
- 结构语义学 5:41
- 结构张量 5:145
- 结构值(Algol 语言中的) 1:118
- 结构自动机 1:275
- 结构(自治系统相轨道的) 1:282
- 结构(最小调节域的) 1:266
- 结构( $B, \varphi$ )序列 1:622
- 结构(Lie 代数的) 3:404
- 结构(PL/I 语言中的) 4:183
- 结构(W 型的) 5:42
- 结果(割补术的) 3:832
- 结果集(随机试验的) 2:335
- 结果(算法的) 1:119
- 结果推导 2:22
- 结果(正规算法应用于字的) 3:970
- 结果( $\mathcal{A}$  运算应用于  $A$  系统的) 1:3
- 结合代数 1:237
- 结合代数表示的特征标 1:552**
- 结合代数的表示 4:593**
- 结合代数的表示(有限长的) 4:594
- 结合代数的扩张 2:425**
- 结合代数的特征标 1:553**
- 结合代数(非驯型的) 4:593
- 结合代数(无限表示型的) 4:593
- 结合代数(无限型的) 4:593
- 结合代数(驯顺型的) 4:593
- 结合代数(有限表示型的) 4:593
- 结合代数(有限型的) 4:593
- 结合方案 4:727
- 结合关系(区组设计元素的) 1:376
- 结合环 1:237
- 结合环与结合代数 1:237**
- 结合交换环 1:147
- 结合律 1:73;1:239
- 结合设计 1:376
- 结合双代数 4:412
- 结合性 1:239**
- 结合性(乘法的) 3:1003
- 结合性(对称差运算的) 5:98
- 结合性(加法的) 3:1003
- 结合演算 1:236**
- 结合运算 1:239
- 结合中心(交错环的) 1:146
- 结合子 1:239**
- 结论 3:22
- 结论(逻辑规则的) 2:697
- 结论(推导法则的) 2:51
- 结式 4:611**
- 结式在解方程组中的应用 4:612
- 捷线 1:431**
- 捷线问题 1:431
- 截八面体 4:776
- 截迭代闭包(形式语言的) 2:513
- 截断(函数的) 3:142
- 截断(函数图象的) 3:1022
- 截断奇异值展开 2:561
- 截断误差 2:387
- 截断误差(Euler 法的) 2:136
- 截断相关群 5:114
- 截二十-十二面体 4:776
- 截二十面体 4:776
- 截规则 2:697
- 截几何对象 2:711
- 截口(多值映射的) 3:853
- 截口(映射的)\* 4:739**
- 截口(子空间上映射的) 4:739
- 截棱锥 4:376
- 截立方八面体 4:776
- 截立方体 4:776
- 截面 4:739**
- 截面层 4:803
- 截面(层的) 4:803
- 截面(范畴中的) 4:614
- 截面函子 4:797
- 截面(流的) 4:197
- 截面曲率 4:739**
- 截面曲率(Riemann 空间中的) 4:648
- 截面(纤维化的) 2:466
- 截面(纤维空间的) 2:466
- 截面(向量丛的) 4:97
- 截曲面 4:739
- 截十二面体 4:776
- 截四面体 4:776
- 截尾分布 5:283**
- 截尾正规形式(常微分方程组的) 3:982
- 截尾 Witt 概形 5:519
- 截尾 Witt 向量 5:519
- 截线(二维流形的) 5:296
- 截线链(区域的) 3:445
- 截线(区域的) 3:445
- 截消定理 2:697;4:786
- 截形 4:741**
- 截锥 1:738
- 解(参数规划问题的) 4:89
- 解(常微分方程的) 2:107
- 解的分支 1:436**
- 解的局部性质(自治系统的) 1:281
- 解的可微性(微分方程的) 2:89**
- 解的唯一性 3:652
- 解的无界扩张性(自治系统的) 1:281
- 解(对策的) 2:636
- 解(对策论中的)\* 4:895**
- 解(方程的) 2:374
- 解(方程级的) 2:374
- 解核(Fredholm 核的) 3:557
- 解(可向后无限延拓的) 4:347
- 解(可向后延拓到边界的) 4:347
- 解(可向前无限延拓的) 4:347
- 解(可向前延拓到边界的) 4:347
- 解(可向右无限延拓的) 4:347
- 解(可向右延拓到边界的) 4:347
- 解(可向左无限延拓的) 4:347
- 解(可向左延拓到边界的) 4:347
- 解密 1:891;1:893
- 解密函数 1:891
- 解耦问题 1:270
- 解释 3:145**



- 解释程序 1:129;5:253  
 解释(程序的) 5:155  
 解释(代数理论的) 5:349  
 解释方法 1:288  
 解释(逻辑语言的) 3:145  
 解释(命题演算的) 4:352  
 解释型语义 1:129  
 解释(语言的) 2:521  
 解释域 1:288  
 解数的协方差 1:875  
 解谓词的问题 1:133  
 解析半群 4:764  
 解析表达式 1:152  
 解析表示 1:172  
 解析表示(Lie 群的) 3:51  
 解析波前集 5:454  
 解析补 1:150  
 解析测度 1:150  
 解析层 1:174  
 解析超复变函数 2:951  
 解析超曲面 2:961  
 解析地不同的平稳点 5:385  
 解析多面体 1:171  
 解析二次微分 4:379  
 解析泛函 1:161  
 解析方法(表示函数的) 2:587  
 解析浮雕 1:163  
 解析覆盖 1:173  
 解析工具(解析函数论中的)  
   1:152  
 解析构形 1:693  
 解析函数 1:152  
 解析函数代数 1:71  
 解析函数代数(解析空间上的)  
   1:175  
 解析函数的边界性质 1:415  
 解析函数的残数 4:604  
 解析函数的分支 1:435  
 解析函数的浮雕 4:578  
 解析函数的积分表示 3:116  
 解析函数的唯一性 1:152  
 解析函数的唯一性性质 5:334  
 解析函数(多复变量的) 1:156  
 解析函数积分表示方法 3:116  
 解析函数类的范围足够大性  
   1:152  
 解析函数论的边值问题 1:427  
 解析函数论中的几何观念 1:152  
 解析函数芽的相等 1:693  
 解析函数元 1:160  
 解析函数(在一点处的) 1:153  
 解析函数(在一集合上的) 1:155  
 解析函数(在一区域内的) 1:153  
 解析函数(Riemann 曲面上的)  
   4:635  
 解析弧 1:151  
 解析环 1:172  
 解析环(域上的) 1:172  
 解析级数展开法 5:185  
 解析集 1:172  
 解析集(解析函数论中的) 1:173  
 解析集(解析空间中的) 1:174  
 解析集值函数 4:746  
 解析几何学 1:161;1:162  
 解析结构 2:90  
 解析可约性(环的) 2:714  
 解析空间 1:174  
 解析理论(二次型的) 4:384  
 解析理论(分圆域的) 1:924  
 解析理论(微分方程的)\* 1:178  
 解析流形 1:164  
 解析模型(语言的)\* 1:165  
 解析平面 1:171  
 解析曲面(代数几何学中的)  
   1:177  
 解析曲面的分类 1:177  
 解析曲面(Euclid 空间中的)  
   1:177  
 解析曲线 1:151  
 解析群 1:162  
 解析群的 Lie 代数 3:414  
 解析容量 1:150  
 解析数论 1:166  
 解析算子 1:171  
 解析算子(在区域中的) 1:171  
 解析算子(在一点上的) 1:171  
 解析态射 1:165  
 解析外微分形式层( $p$  次的)  
   2:104  
 解析微分 1:152  
 解析微分形式层(一阶的) 2:104  
 解析微分(Riemann 曲面上的)  
   2:164  
 解析无关元(环的) 2:519  
 解析向量 1:180  
 解析向量场(解析空间上的)  
   1:104  
 解析向量丛 5:411  
 解析向量(无界算子的) 1:180  
 解析形 1:163  
 解析形变(复流形的) 2:26  
 解析性(函数在一区域中的)  
   1:153  
 解析延拓 1:150  
 解析延拓(函数的) 1:150  
 解析延拓(解析函数元的) 1:150  
 解析么拟群 3:565  
 解析叶状结构 2:503  
 解析映射 1:165  
 解析映射(解析空间的) 1:174  
 解析映射(Banach 空间的) 1:25  
 解析元 1:691  
 解析正规性(环的) 2:714  
 解析直线 1:171  
 解析指标(算子的) 3:43  
 解析指标(椭圆复形的) 3:41  
 解析重正化 4:582  
 解析子环 2:182  
 解析子空间 1:175  
 解析子流形 5:64  
 解析子群 1:163  
 解析自同构 1:156  
 解析族(复流形的) 2:25  
 解析族(紧解析子空间的) 2:26  
 解析族(向量空间的) 5:412  
 解析 Haefliger 结构 2:803  
 解析  $k$  代数 1:172  
 解(线性代数方程组的) 1:66;  
   3:459  
 解(线性方程的) 3:480  
 解(Post 对应问题的) 2:516  
 解(Post 对应问题特例的) 4:255  
 介质的物态方程 3:694  
 介子动力学 2:230  
 界定方法 2:876  
 界(函数的) 2:587  
 界线法 2:74  
 仅有形变 5:166  
 紧不可定向二维流形 5:294  
 紧测度 4:121  
 紧等参数子流形

- 紧度 1:473  
 紧多面体 4:230  
 紧格元 1:678  
 紧化 1:682  
 紧化的后继紧化 1:683  
 紧化概念(时空的) 5:319  
 紧化(平面区域的) 1:410  
 紧化问题(参模簇的) 3:800  
 紧基数 3:931  
 紧集类 4:120  
 紧接后元 3:876  
 紧开拓扑 1:678  
 紧开映射 3:1020  
 紧可定向二维流形 4:294  
 紧可解流形 4:896  
 紧可解流形(索引删)  
 紧空间 1:679  
 紧扩张(拓扑空间的) 1:682;  
 2:425  
 紧逻辑变换 3:875  
 紧密  $t$  设计 5:127  
 紧铺砌 4:111  
 紧铺砌空间 4:111  
 紧嵌入(函数空间的) 3:14  
 紧嵌入 Lie 子代数 2:732  
 紧全纯函数族 1:686  
 紧群 1:677  
 紧群的表示(拓扑向量空间中的)  
 4:587  
 紧群的表示(Banach 空间中的)  
 4:587  
 紧生成格 1:95  
 紧生成空间 4:902  
 紧收敛拓扑 5:221  
 紧收敛序列(算子的) 1:836  
 紧算子 1:679  
 紧算子(相对于自伴算子的)  
 4:911  
 紧态射(概形的) 4:720  
 紧统 1:686  
 紧统,  $T_2$  1:687  
 紧凸集 3:545  
 紧拓扑空间 1:881  
 紧拓扑空间(在原始意义下的)  
 1:680  
 紧拓扑群 5:193  
 紧型代数 2:732  
 紧性 1:685  
 紧性定理 1:107  
 紧性定理(狭义谓词演算的)  
 3:599  
 紧性定理(一阶逻辑的) 4:350  
 紧性(度量空间的) 3:728  
 紧性(基数区间中的) 1:685  
 紧性条件 5:200  
 紧性问题 3:930  
 紧性型条件 5:200  
 紧性原理 1:686  
 紧性指数(拓扑空间的) 1:682  
 紧映射 1:678  
 紧支集公理 2:916  
 紧支集函数 2:591  
 紧支集(真闭链的) 4:350  
 紧 Jordan 代数 2:897  
 紧 Lie 代数 3:427  
 紧 Lie 群 3:426  
 近环 3:879  
 近环(0 型本原的) 3:879  
 近环(1 型本原的) 3:879  
 近环(2 型本原的) 3:879  
 《近世代数》(van der Waerden 著)  
 1:69  
 近世数学时期 3:666  
 近似本征值(算子的) 4:934  
 近似表示(函数的) 3:137  
 近似单位元 4:250  
 近似单位元(Banach 代数中的)  
 3:179  
 近似导数 1:192  
 近似的偏差 2:224  
 近似反极限 4:329  
 近似方程(算子方程的) 2:559  
 近似函数方程(Riemann  $\zeta$  函数的)  
 5:543  
 近似极限 1:193  
 近似计算(函数的) 3:137  
 近似解(近似算子方程的) 2:561  
 近似解(微分方程的) 2:473  
 近似解(Fredholm 方程的) 2:556  
 近似解(Navier-Stokes 方程的)  
 3:877  
 近似可微函数 1:192  
 近似可微函数(多元的) 1:193  
 近似可微性 1:192  
 近似连续函数 1:192  
 近似连续性 1:192  
 近似上极限 1:193  
 近似算子 2:560  
 近似微分 1:192  
 近似微分(多元函数的) 1:193  
 近似微分(法)和近似积分(法)  
 2:473  
 近似下极限 1:193  
 近似因子化格式 2:548  
 近似粘性 2:84  
 近似 Dini 导数 1:192  
 近似 Hamilton 量的方法 4:419  
 近凸单叶函数 1:842  
 近性积空间 5:205  
 近性空间 4:76;5:202  
 近性子集族 5:203  
 近性子空间 5:205  
 近域(对角线的) 5:323  
 近 Cross 簇 5:400  
 进程(Simula 语言中的) 4:843  
 进度安排 4:717  
 进度安排理论 4:715  
 进入(一个字到另一个字的) 3:13  
 进拓扑(adic 拓扑) 1:41  
 漫渐不变量(绝热不变量) 1:40  
 淹没 5:65  
 浸入 3:20  
 浸入(具有小余维数的) 2:720  
 浸入类 1:595  
 浸入类(流形的) 3:189  
 浸入流形 3:20  
 浸入(流形的)\* 3:20  
 浸入流形的几何学 2:718  
 浸入运算 3:21  
 浸入子流形 3:972  
 禁集 3:21  
 禁忌概率 5:250  
 禁忌集 5:250  
 经典半单环 1:603  
 经典逼近定理 4:924  
 经典变分学 5:380  
 经典不变量理论 1:904;3:167  
 经典不变量理论中的基本问题  
 3:166  
 经典的 Ascoli 定理的推广 5:325  
 经典等周不等式 3:197



- 经典调和分析 2:822  
 经典动力学 2:312  
 经典反射定律(射线的) 4:504  
 经典概率的推广 4:413  
 经典函数演算(von Neumann-Murray-Dunford 的) 2:596  
**经典力学的变分原理 5:394**  
 经典逻辑 3:152  
 经典命题逻辑 5:420  
 经典命题演算 3:558  
 经典算术演算 4:349  
**经典天体力学中的数学问题 1:597**  
 经典退化原理 5:535  
 经典维数 2:183  
 经典伪微分算子 4:363  
 经典位势论 1:426  
 经典谓词演算 2:734  
 经典谓词演算(带函数符号的) 3:557  
 经典杨(振宁)-Baxter 方程 5:529  
 经典蕴涵命题演算 3:22  
**经典正交多项式 1:602**  
**经典组合问题 1:598**  
 经典 Adams 谱序列 2:922  
 经典 Gibbs 系综 4:992  
 经典 Goppa 码 2:740  
 经典 Krull 维数 2:181  
 经典 Parseval 等式 4:95  
 经典 Stokes 公式 3:126  
 经度 1:496;1:857;4:943  
 经济部分(程序的) 4:322  
 经济差分格式 2:87  
 经济发展的大道轨线 3:637  
 经济均衡 3:638  
 经济数学建模的特色 3:635  
 经济指标 2:318  
**经验分布 2:356**  
 经验分布函数 2:356  
 经验回归曲线 4:542  
 经验矩 2:357  
 经验偏相关系数 4:96  
 经验正交函数法 4:915  
**经验 Bayes 方法 1:320**  
 茎 4:803  
 茎(概形态射的) 4:719  
 晶体点阵 1:900  
**晶体群 1:898**  
 晶体群的类 1:899  
 晶体群的线性部分构成的群 1:898  
 晶体群(一般位置上的) 1:899  
 晶体子群 4:900  
 晶系 1:899  
 精确度(准确度) 2:390  
 精确估计 1:843  
 精确阶(求体积公式的) 1:903  
 精细参模概形 3:799  
 精细代数参模空间 3:799  
 精细的  $C^0$  拓扑 2:894  
 精细度(分解的) 2:9  
 精细分划 4:104  
 精细复参模空间 3:799  
 井草不等式 4:161  
 景 4:868  
**径向边界值 4:465**  
 径向测地线 2:700  
 径向管状区域 5:286  
 径向集 5:211  
**径向量 4:473**  
**竞赛图 5:236**  
 静电问题 4:678  
 静力矩 3:802  
**静力学 4:983**  
 静力学的普遍方程 5:395  
 静力学方法(关于弹性系统的) 4:968  
 静力学问题(断裂力学中的) 5:298  
 静能 4:567  
 静态问题(运筹学中的) 3:1023  
 静止点(动力系统的) 1:538  
 静止点(非自治系统的) 2:377  
 静止点(微分方程的) 1:538  
 静止点(自治系统的) 1:281  
 静质量 3:631;4:567  
 镜面反射 1:900  
 纠错 2:387  
 纠错分组码 2:387  
**纠错码 2:387**  
**九点圆 3:914**  
 九点圆锥曲线 3:914  
 《酒桶的体积测量》(Kepler 著) 3:64  
 局 2:635  
 局部-整体原则 1:100  
 局部-整体 Torelli 问题 3:800  
**局部逼近(函数的)\* 3:530**  
 局部闭子集(代数簇的) 1:784  
 局部编码原理 5:117  
**局部变分方法 3:539**  
 局部变换(微分流形的) 4:367  
 局部遍历定理 3:1028  
 局部不变量 1:444  
 局部参模理论 3:800  
 局部参数 3:538  
 局部参数化(流形的) 3:600  
 局部参数(Riemann 曲面上的) 1:759  
 局部常层 4:803  
 局部常数层(局部常层) 2:394; 4:803  
 局部常  $l$  进层 3:314  
 局部程序最优化变换 4:322  
 局部纯正正则半群 4:554  
 局部大归纳维数 3:532  
 局部代数 4:415  
 局部代数系统类 1:110  
 局部戴环空间 4:672  
 局部单参数变换群 3:1018  
 局部单连通性 3:549  
**局部单值化 3:538**  
**局部单值化参数 3:538**  
 局部单值化定理 3:538  
 局部单值化子 3:538  
 局部单值性 3:813  
**局部道路连通空间 3:551**  
 局部等度连续分布半群 4:764  
 局部等度连续算子半群 4:764  
 局部等距浸入 3:189  
 局部等距形变 2:30  
 局部定理(代数系统的) 1:110  
 局部定律(概率数论中的) 3:1007  
 局部定性理论(微分方程的) 4:397  
 局部动力系统 2:310  
 局部对称仿射空间 5:102  
 局部对称空间 1:783  
 局部对称伪 Riemann 空间 5:102  
 局部对称 Riemann 空间 5:102

- 局部对偶性(对有限型模的上同调的) 2:740
- 局部法则(控制系统类的) 2:379
- 局部泛形变(概形的) 2:28
- 局部方程(Weil 除子的) 2:271
- 局部分割 3:531
- 局部分解 3:531**
- 局部分圆域 1:924
- 局部覆盖 3:599
- 局部函数(统计力学中的) 4:1005
- 局部化 3:15
- 局部化第二 Cousin 问题 1:873
- 局部化第一 Cousin 问题 1:872
- 局部化(范畴中的)\* 3:541**
- 局部化(环关于乘法系的) 1:57
- 局部化(环在素理想处的) 3:535
- 局部化(交换代数的)\* 3:541**
- 局部化上链 4:804
- 局部化原理 3:542**
- 局部化原理(关于收敛性条件的) 2:537
- 局部化原理(一致收敛的) 2:535
- 局部化子范畴 1:9;2:779;3:542
- 局部化 Serre 子范畴 4:797
- 局部环 3:535**
- 局部环绕 3:534**
- 局部环拓扑 1:41;3:535
- 局部环(映射的) 2:482
- 局部基 1:312;2:25
- 局部基(拓扑在一点的) 3:442
- 局部极大点 3:689
- 局部极限定理 3:533**
- 局部极限定理(概率论中的) 3:533
- 局部极小点 3:689
- 局部集合(代数系统的子系统的) 1:110
- 局部加星集(开覆盖的) 3:738
- 局部简化算法 1:395
- 局部结构(轨道的)\* 3:536**
- 局部结构稳定性 3:536**
- 局部解析函数(紧集上的) 2:295
- 局部解析几何 1:175
- 局部解析群(局部 Lie 群) 3:428
- 局部解析么拟群 3:566
- 局部紧场所 3:540
- 局部紧除环 3:543**
- 局部紧空间 3:543**
- 局部紧群 1:299
- 局部紧拓扑空间 5:201
- 局部紧拓扑群 5:193
- 局部紧性 1:682
- 局部紧性(Riemann 空间的) 4:654
- 局部紧 Abel 群 4:924
- 局部可定向同调流形 2:909
- 局部可积函数 3:550**
- 局部可积函数(开集上的) 2:679
- 局部可积函数(在一点上的) 3:550
- 局部可解代数 3:551**
- 局部可解群 3:551**
- 局部可解群类 2:692
- 局部可逆全纯映射 2:890
- 局部可嵌入  $\Omega$  系统 1:107
- 局部可数基 1:312
- 局部扩张映射 4:235
- 局部离散化误差(差分格式中的) 2:86
- 局部连通紧群 1:677
- 局部连通空间 3:544**
- 局部连通连续统 3:544**
- 局部连通拓扑化范畴 2:926
- 局部连通拓扑空间 1:780
- 局部连通性 1:780
- 局部幂零半群 3:911
- 局部幂零代数 3:550**
- 局部幂零群 3:550**
- 局部描述定理(Banach 解析集的) 1:302
- 局部模数(概形的) 2:28
- 局部模型范畴 2:733
- 局部逆正则半群 4:554
- 局部片段和粘合资料的描述 2:733
- 局部漂移 2:176
- 局部平凡丛 3:738
- 局部平凡纤维丛 3:551**
- 局部平凡性条件(向量丛的) 5:408
- 局部平凡主纤维丛 2:618
- 局部平坦共形结构 1:759
- 局部平坦联络 1:911
- 局部平坦旗结构 2:495
- 局部平坦嵌入 3:549**
- 局部平坦嵌入(流形的) 5:64; 5:222
- 局部平坦子流形 5:64
- 局部谱 4:925
- 局部上同调 3:530**
- 局部上同调(其值取自可换群层的) 3:530
- 局部时 5:509
- 局部时(在一点处的) 5:509
- 局部算法 1:124**
- 局部条件(变分问题中极值的) 5:382
- 局部条件(关于 Diophantus 方程在  $p$  进整数中的可解性的) 4:57
- 局部通用形变(概形的) 2:28
- 局部同调 3:533**
- 局部同构 3:537
- 局部同构解析群 3:415
- 局部同构拓扑群 3:537
- 局部同构 Lie 群 3:423
- 局部同胚 3:533**
- 局部同态 3:537
- 局部同态(局部 Lie 群的) 3:428
- 局部凸格 3:544**
- 局部凸集 1:852
- 局部凸空间 3:544**
- 局部凸拓扑 3:547**
- 局部凸拓扑向量空间 5:211
- 局部凸线性拓扑空间 1:310
- 局部凸性模 1:306
- 局部凸张量积 5:214
- 局部拓扑群 3:537**
- 局部拓扑子群 3:538
- 局部完全解析形变 2:26
- 局部微分几何学 3:531**
- 局部唯一分解环 2:272
- 局部维数 3:532**
- 局部维数(代数簇在一点处的) 2:182
- 局部维数(在一点处的) 3:532
- 局部维数(正规拓扑空间的) 3:532
- 局部伪凸空间 5:355
- 局部伪 Euclid 空间 4:367
- 局部无圈曲线 2:41
- 局部误差(数值方法的) 2:138



- 局部相交指数 3:146
- 局部相交重数 3:148
- 局部小范畴 1:502;4:797
- 局部小性(范畴的) 4:797
- 局部性原理 3:541**
- 局部性质 3:534**
- 局部性质(代数的) 3:529
- 局部性质(环的) 3:535
- 局部性质(极小曲面的) 3:751
- 局部性质(交换代数中的) 3:534
- 局部性质(拓扑空间的) 3:530
- 局部性质与剩余性质 3:529**
- 局部循环群 1:13
- 局部延拓公理 2:702
- 局部演算 4:254
- 局部鞅 3:630
- 局部样条 1:200
- 局部叶(叶状结构的) 2:503
- 局部一维差分格式 2:235
- 局部一致凸 Banach 空间 1:306
- 局部映射度 2:38
- 局部有界集(拓扑向量空间中的) 4:437
- 局部有限半群 3:548**
- 局部有限半群簇 5:402
- 局部有限闭和定理 2:182
- 局部有限代数 3:547**
- 局部有限单纯复形 4:834
- 局部有限复形 1:707
- 局部有限覆盖 3:547**
- 局部有限根 3:547
- 局部有限基 1:313
- 局部有限集族 3:548**
- 局部有限集族(拓扑空间中的) 3:548;5:201
- 局部有限可表现的态射(概形的) 4:720
- 局部有限面积原理 3:577
- 局部有限群 3:548**
- 局部有限性(集族的) 4:230
- 局部余可约范畴 3:301
- 局部预解式(Banach 空间元素的) 4:924
- 局部域 3:532**
- 局部约束 4:960
- 局部正规群 3:550**
- 局部锥形映射 4:230
- 局部子代数系统(代数的) 3:529
- 局部子群 3:749;4:59
- 局部自由层 3:550**
- 局部自由模 2:569
- 局部自由模层 3:550
- 局部自由群 3:549**
- 局部最大模原理 1:410
- 局部坐标 1:857
- 局部坐标卡 1:565
- 局部坐标卡(微分流形的) 2:90
- 局部坐标卡(与一个图册相容的) 1:565
- 局部 Bieberbach 猜想 1:354
- 局部 Euclid 空间 2:90
- 局部 Euclid 拓扑群 1:163;5:193
- 局部 Hasse 不变量 2:840
- 局部  $k$  连通空间 3:551
- 局部  $k$  连通性 3:551
- 局部 Laplace 定理 3:345
- 局部 Lie 变换群 3:436
- 局部 Lie 代数 3:411**
- 局部 Lie 群 3:428**
- 局部 Lorentz 不变性 4:566
- 局部 Noether 概形 3:922
- 局部 Torelli 问题 5:226
- 局部 Wick 幂 5:491
- 局法搜索法 4:718
- 局势 2:632
- 局势(对策中的) 2:635
- 局域时空对称性 3:568
- 局中人 4:182**
- 局中人增益 4:248
- 矩 3:802**
- 矩法(概率论中的) 3:808
- 矩量不等式 2:547
- 矩量法 3:808**
- 矩量条件 4:253
- 矩(谱密度估计量的) 4:916
- 矩生成函数 3:803
- 矩(随机过程的) 4:920
- 矩问题 3:803**
- 矩问题(复域内的) 3:806
- 矩问题(实域内的) 3:803
- 矩问题(实直线上的) 3:804
- 矩(相对于一个数的  $k$  阶的) 3:802
- 矩形 4:517**
- 矩形半群 3:5
- 矩形半群的带 1:309
- 矩形部分和(多重级数的) 4:794
- 矩形部分和(二重级数的) 2:285
- “矩形对其底边的”“应用” 1:768
- 矩形法则 4:517**
- 矩形分布 5:322
- 矩形群 1:704
- 矩阵 3:670**
- 矩阵表示 3:818;4:560
- 矩阵表示(半群的) 4:590
- 矩阵表示问题 4:596**
- 矩阵表现的部分问题 4:596
- 矩阵表现的一般问题 4:596
- 矩阵表现问题 4:596
- 矩阵(插值结点的) 1:208
- 矩阵乘法指数 2:748
- 矩阵代数 3:673**
- 矩阵代数的 Riccati 方程 2:572
- 矩阵带(半群的) 1:309
- 矩阵的谱 4:933**
- 矩阵的拓扑相似性 1:282
- 矩阵的转置 3:671
- 矩阵对策 3:675**
- 矩阵对数 3:510
- 矩阵对问题 4:593
- 矩阵(二次型的) 4:382
- 矩阵方程可解性的一般条件 4:383
- 矩阵环 3:676**
- 矩阵迹 3:996
- 矩阵迹(算子的) 3:996
- 矩阵(集合上( $m \times n$ )维的) 3:670
- 矩阵记号(有限维空间上线性算子的) 3:492
- 矩阵具有的性质(A) 4:570
- 矩阵扩张问题 2:427
- 矩阵力学 4:714
- 矩阵(模态逻辑中的) 3:781
- 矩阵前后向代换法 3:675
- 矩阵求和法 3:677**
- 矩阵求逆 3:173**
- 矩阵群 3:676**
- 矩阵束 5:123
- 矩阵(双线性型的) 1:360

- 矩阵(特殊形式的) 3:671  
 矩阵微分方程 3:674  
 矩阵文法 2:747  
 矩阵(线性变换的) 3:457;3:512;  
 3:671  
 矩阵(线性算子的) 3:492  
 矩阵象征(算子的) 5:94  
 矩阵演算 3:670  
 矩阵因子分解法 3:675  
 矩阵元素(拓扑群表示的) 4:591  
 矩阵运算 3:670  
 矩阵周期图 4:129  
 矩阵追赶法 1:422  
 矩阵子(基本矩阵) 2:615;3:508  
 矩阵 Fuchs 方程 2:581  
 矩阵(Hermite 型的) 2:856  
 矩阵(Smith 典范形式的) 3:673  
 矩( $k$  阶的) 3:802  
 矩( $n$  阶的) 3:803  
 巨配分函数 4:992  
 巨统计和 4:992  
 巨正则系综 4:1006  
 巨 Gibbs 分布 2:728  
 具体范畴 1:501  
 具体化符号(Refal 语言中的)  
 4:534  
 具体化规则(Refal 语言中的)  
 4:534  
 具体极小曲面 3:751  
 具体实现问题 5:348  
 具有不定度规的 Hilbert 空间  
 2:876  
 具有对称核的积分方程 3:99  
 具有对合的范畴 1:506  
 具有分布自变量的常微分方程  
 2:139  
 具有分层结构的对策 2:632  
 具有极大条件的群 2:790  
 具有极小条件的群 2:790  
 具有紧支集的同调 2:916  
 具有扩散的分支过程 1:441  
 具有迁移的分支过程 1:442  
 具有随机介质的分支过程 1:441  
 具有唯一开方法的群 2:790  
 具有有限性条件的半群 4:766  
 具有有限性条件的群 2:790  
 具有有限种粒子的分支过程  
 1:440  
 距离 3:727;4:903  
 距离(度量)(集合上的) 3:723  
 距离函数 2:721;4:504  
 距离函数(凸曲面上的) 1:850  
 距离球面 2:700  
 距离(图中的) 2:753  
 距离(相错直线之间的) 4:870  
 距离(Riemann 空间中的) 4:646  
 聚点 1:31  
 聚合分析 1:745  
 聚类分析 4:109  
 聚值 1:614  
 聚值集 1:614  
 卷积 1:854  
 卷积半群(概率测度的) 1:561  
 卷积变换(对合变换) 1:855  
 卷积(概率密度的) 2:46  
 卷积(广义函数的) 2:542  
 卷积(函数的) 3:113  
 卷积积分 4:613  
 卷积积分变换 3:113  
 卷积(积分核的) 5:459  
 卷积积分算子 3:113  
 卷积(模上的) 2:928  
 卷积(算术函数的) 3:779  
 卷积型积分方程 3:96  
 卷积型积分方程(具有两个核的)  
 3:98  
 卷积运算 1:300  
 卷绕(环面的) 4:1  
 卷绕(纽结的) 3:273  
 卷绕数 5:512  
 卷绕数(闭曲线的) 4:689  
 卷绕数(一点关于一曲线的)  
 3:556  
 决策程序 2:19  
 决策法则 4:787  
 决策法则类(本质完全的) 4:900  
 决策函数 2:19  
 决定对策 2:63  
 决定方程(定义方程) 2:24  
 决定函数 2:482  
 决斗 2:300  
 绝对半单自同态 4:779  
 绝对闭包 1:699  
 绝对闭空间 2:793  
 绝对不变量 2:712  
 绝对不变量(模函数论中的)  
 3:790  
 绝对不变量(三次曲线的) 1:905  
 绝对不变量(椭圆曲线的) 2:345  
 绝对不变量(型的) 3:167  
 绝对不变量(Weierstrass  $p$  函数的)  
 5:468  
 绝对不可测性(测度空间划分的)  
 3:736  
 绝对不可约多项式 1:767  
 绝对不可约矩阵群 3:181  
 绝对不可约模 4:725  
 绝对差积(域的) 2:238  
 绝对单群 4:828  
 绝对等价求和法 2:378  
 绝对点(极空间的) 4:216  
 绝对调和零测度集 2:832  
 绝对二次曲面 1:758  
 绝对非分歧理想 5:356  
 绝对分量(几何对象的) 2:711  
 绝对公平序列 1:24  
 绝对过去区域 4:569  
 绝对积分不变量 3:109  
 绝对基 1:317  
 绝对极大点 3:689  
 绝对极点(球面几何学中的)  
 2:348  
 绝对极小点 3:689  
 绝对极小值 5:38  
 绝对几何学 1:19  
 绝对接近性 3:727  
 绝对解析空间 2:62  
 绝对近似误差 4:823  
 绝对矩 1:20  
 绝对开拓子(正规拓扑空间的)  
 1:20  
 绝对可和基 1:317  
 绝对可和级数 1:20  
 绝对可和性 1:20  
 绝对可和性( $p$  次的) 1:21  
 绝对可和序列 1:20  
 绝对可积函数 1:23  
 绝对宽度 5:502  
 绝对粒子吸收 4:467  
 绝对连续分布 1:811  
 绝对连续概率分布(关于一个测度



- 的) 1:811  
 绝对连续函数 1:18  
 绝对连续集函数 1:377  
 绝对连续谱 4:911  
 绝对连续随机过程 5:16  
**绝对连续性 1:18**  
 绝对连续性(测度的) 1:18  
 绝对连续性(函数的) 1:18  
 绝对连续性(积分的) 1:18  
 绝对连续性(集函数的) 1:19  
 绝对邻域收缩核 4:615  
 绝对挠率 5:228  
 绝对平面 1:367  
**绝对平坦环 1:23**  
**绝对平行标架场 4:82**  
 绝对射影常数 1:307  
 绝对实验 5:151  
 绝对收敛 2:44  
 绝对收敛半平面(Dirichlet 级数的) 2:217  
**绝对收敛的反常积分 1:21**  
 绝对收敛二重级数 2:285  
 绝对收敛横坐标(Dirichlet 级数的) 2:217  
 绝对收敛横坐标(Laplace 积分变换的) 3:346  
**绝对收敛级数 1:22**  
 绝对收敛级数(Banach 空间中的) 1:307  
 绝对收敛无穷积 3:57  
**绝对收缩核(正规空间的)\* 1:20**  
 绝对同调群(拓扑空间的) 2:913  
 绝对同伦群(带基点的空间的) 2:919  
 绝对凸集 1:852  
 绝对凸区域(Riemann 流形中的) 4:650  
 绝对凸子群 1:849  
**绝对拓扑性质 1:21**  
 绝对微分法 1:876  
 绝对未来区域 4:569  
 绝对稳定差分格式 1:422  
**绝对稳定性 4:960**  
 绝对稳定性(关于输出的) 4:961  
**绝对无偏序列 1:24**  
**绝对误差 1:19**  
 绝对误差界 2:387  
 绝对线汇 1:367  
 绝对线性复形 5:111  
**绝对形 1:17**  
 绝对形(射影几何学中的) 1:18  
 绝对形(双曲几何学的射影模型的) 3:935  
 绝对形(拓扑空间的) 1:472  
 绝对形(正则拓扑空间的) 1:17  
 绝对异地区域 4:569  
 绝对正规数 3:984  
 绝对正则求和法 1:21  
**绝对值 1:21**  
 绝对值(泛函的) 4:215  
 绝对值(复数的) 1:21, 713  
 绝对值(格序群的元素的) 3:358  
 绝对值(实数的) 4:512  
 绝对值象限(多重幂级数的) 4:281  
 绝对锥面 1:619  
 绝对自由代数 2:564  
 绝对最小剩余(整数模  $m$  的) 4:579  
 绝对最优策略 3:1033  
 绝对坐标(几何对象的) 2:711  
 绝对 Borel 空间 2:62  
 绝对 Hodge 类 2:884  
 绝对 Lipschitz-Killing 密度 5:174  
 绝对  $\epsilon$  熵 5:501  
 绝对  $\epsilon$  熵(度量空间中集合的) 2:315  
**绝热流动 1:40**  
 均差 2:473; 3:903  
 均方逼近 1:199  
**均方逼近(函数的)\* 3:696**  
 均方根 4:389  
 均方根误差 4:379  
 均方回归 4:541  
 均方偏差 3:658  
 均方收敛 1:840  
 均方收敛性 2:857  
 均方微分 5:16  
 均方误差 4:379  
 均方误差(估计量的) 1:352  
 均幂逼近 1:195; 1:199  
**均幂环 4:670**  
 均幂结构(环上的) 4:670  
 均幂序列(在余代数中的) 4:671  
 均时性准则 4:825  
 均匀多面体 4:776  
**均匀分布 5:322**  
 均匀分布(区间上作为极限分布的) 5:323  
 均匀分布(直线上的一个区间上的) 5:322  
 均匀分布( $\mathbf{R}^k$  的一个子集上的) 5:323  
 均匀分配 4:477  
 均匀性检测标准 5:40
- ## K
- 卡积 4:193  
**开闭集 3:1020**  
 开度(Hilbert 线性子空间的) 2:873  
 开度(Hilbert 子空间的) 2:873  
 开覆盖 1:881  
 开关(控制论中的) 5:179  
 开核(集合的) 3:128; 3:255  
 开核(拓扑空间中集合的) 3:129  
 开环控制 1:827; 3:1032  
 开基 1:312  
**开集 3:1021**  
 开集(拓扑空间中的) 3:1021  
 开集(相对另一集合的) 4:564  
 开结点扇形 4:740  
 开控制系统 1:918  
**开流形 3:1020**  
 开模型(运输问题的) 5:259  
 开球 1:299  
**开区间 3:151**  
 开射影度量空间 4:338  
 开数据原理 3:154  
 开拓扑 5:201  
 开线段 3:151  
 开星形(单形在三角剖分中的) 5:269  
**开映射 3:1020**  
**开映射定理 3:1020**  
 开映射原理 4:288  
 开宇宙模型 1:869  
 开域 1:462

- 开子复形 1:707  
 开 Newton-Cotes 公式 3:902  
 开 Riemann 流形 4:650  
 开 Riemann 曲面 4:634  
 抗噪声性 3:922  
 《科学的花冠》(Baskara II 著)  
     1:227  
 可凹空间 5:416  
 可逼近群(由一个群类) 3:913  
 可比较单形(单纯集的) 4:839  
 可闭算子 1:610  
 可变方向法 5:372  
 可变符号 3:663  
 可变结构自动机 1:273  
 可变网格法 5:372  
 可表格化中间逻辑 3:131  
 可表示函子 4:586  
 可表示  $I$  群 3:359  
 可驳公式 4:540  
 可测包(集合的) 3:700  
 可测动力系统 1:497  
 可测多值映射 3:853  
 可测分划 2:364;2:410;3:724  
 可测分划(模零等价的) 3:696  
 可测分解 3:696  
 可测分解的熵 2:364  
 可测分解(在自同态下全不变的)  
     2:410  
 可测函数 3:697  
 可测函数的重排 3:613  
 可测函数级数 4:795  
 可测核(集合的) 3:700  
 可测基数 1:475;2:63  
 可测集 3:698  
 可测集值函数 4:746  
 可测矩形 3:701  
 可测空间 3:698  
 可测流 3:697  
 可测瀑布 1:497  
 可测选择 1:829  
 可测映射 3:697  
 可测域(算子的) 5:441  
 可测域(von Neumann 代数的)  
     5:441  
 可测 Lie 群 3:105  
 可测 Riemann 映射定理 4:422  
 可除代数 2:269  
 可除环 4:671  
 可除群 2:268  
 可除 Abel 群 1:13  
 可传递效用 5:363  
 可达边界点 1:252  
 可达边界点(区域的) 2:275  
 可达边界弧 1:252  
 可达不可判定度 2:39  
 可达顶点 2:760  
 可达集(控制论中的) 5:179  
 可达空间 5:127  
 可达区域法 3:1035  
 可达性 1:268  
 可达子群 1:252  
 可代数化泛形式形变(概形的)  
     2:28  
 可定化自伴算子(Крейн 空间中的)  
     3:295  
 可定向丛 4:17  
 可定向多边形 4:224  
 可定向多面体 4:228  
 可定向流形 4:17  
 可定向同调类 4:1020  
 可定向同调流形 2:909  
 可定向性(向量丛的) 1:556  
 可定向叶状结构 3:268  
 可定义集(在模型中的) 2:735  
 可定义算术函数 2:365  
 可定义谓词 2:365  
 可动性程度(或自由度)(具有仿射  
     联络的空间的) 3:318  
 可度量化集合 3:722  
 可度量化空间 3:737  
 可度量化邻近空间 4:354  
 可度量化拓扑空间 5:199  
 可度量化拓扑向量空间 5:212  
 可度量化准则 3:729  
 可对称化矩阵 3:242  
 可对称化空间 3:738  
 可对称化拓扑空间 5:107  
 可对角化的代数群 2:70  
 可对角化的群概形 2:70  
 可对角化的线性群 2:68  
 可对角化矩阵 5:268  
 可对角化群概形 1:675  
 可对角化线性变换 3:512  
 可分半泛微分域扩张 2:420  
 可分半群 4:783  
 可分闭包(域的) 4:781  
 可分闭域 4:781  
 可分测度空间 3:703  
 可分次数(域扩张的) 4:781  
 可分代数 4:780  
 可分对策 2:34  
 可分多项式 4:781  
 可分泛微分域扩张 2:420  
 可分构造度量空间 1:791  
 可分过程 4:782  
 可分积分核 3:102  
 可分解表示(拓扑群的) 4:591  
 可分解的拓扑空间 4:721  
 可分解的  $s$  向量 2:432  
 可分解多向量 4:220  
 可分解可对角化代数群 2:70  
 可分解内积空间 2:877  
 可分解算子 4:925  
 可分解算子(Hilbert 空间的和上的)  
     5:441  
 可分解性(正规化不变测度的)  
     3:736  
 可分解 Lie 代数(域上的) 4:956  
 可分解 Марков 链 3:617  
 可分空间 4:783  
 可分扩张 4:781  
 可分裂链环 3:272  
 可分裂群 4:956  
 可分滤过 2:470  
 可分生成域扩张 5:241  
 可分随机过程 4:782  
 可分同源 3:186  
 可分拓扑空间 2:305  
 可分完全化(环的)\* 4:781  
 可分性(集合的)\* 4:780  
 可分映射 4:782  
 可分域扩张 2:627;4:781  
 可分元(域的) 4:781  
 可分组区组设计 1:376  
 可分  $B$  代数 2:629  
 可分 Hilbert 空间 4:24  
 可赋范拓扑向量空间 3:966;  
     5:212  
 可更新随机过程 5:17  
 可公度量和不可公度量 1:668  
 可公度子群(拓扑群的) 2:231



- 可公理化类(代数系统的) 1:107
- 可公理化类(一阶语言模型的) 3:784
- 可公理化类( $\Omega$  系统的) 1:107
- 可构造层 2:2;2:394
- 可构造集 2:735
- 可构造集(代数几何学中的) 2:340
- 可构造性公理 2:735;4:343
- 可构造映射 1:784
- 可构造子集 1:784**
- 可构造  $I$  进层 3:314
- 可观测性(动态系统的) 3:1031
- 可观测性矩阵 1:269
- 可观测性(沿坐标的) 1:266
- 可观察量 4:991
- 可光滑流形 5:223
- 可光滑奇点 4:857
- 可归约集 4:528
- 可归约性 4:528
- 可(归)约性公理 4:530**
- 可归约性(枚举的) 2:366
- 可归约性(真假值表型的) 5:285
- 可和函数 5:73**
- 可和基 1:317
- 可和性(按对数法的) 3:557
- 可和性(按方法( $W, p_n$ )的) 5:444
- 可和性(按矩阵法的) 3:677
- 可和性(按算术平均法的) 1:233
- 可和性(按  $A^*$  法的) 1:7
- 可和性(按 Abel 法的) 1:7
- 可和性(按 Borel 法的) 1:406
- 可和性(按 Gronwall 法的) 2:778
- 可和性(按 Hausdorff 法的) 2:844
- 可和性(按 Hölder 法的) 2:889
- 可和性(按  $k$  次 Cesàro 法的) 1:541
- 可和性(按 Lambert 法的) 3:334
- 可和性(按 Mittag-Leffler 法的) 5:444
- 可和性(按 Бернштейн-Rogosinski 法的) 1:337
- 可和性乘子 5:72**
- 可和性(发散级数按某求和法的) 5:75
- 可和性(强的)\* 5:72**
- 可和性域 5:72**
- 可忽视的坐标(力学中的) 2:809
- 可积表示 3:86**
- 可积殆复结构 1:137
- 可积殆辛结构 1:143
- 可积函数 3:86**
- 可积结构(流形上的) 3:602
- 可积旗结构 2:495
- 可积条件 3:179
- 可积系统 3:86**
- 可积性问题 2:620
- 可积性(张量场的) 4:79
- 可积性( $G$  结构的) 2:620
- 可积性(Хинчин 意义下的) 3:258
- 可积 Hamilton 系统 2:809
- 可计算不变量 1:725**
- 可计算分析 1:785
- 可计算函数 1:724**
- 可计算枚举 2:367
- 可计算实数 1:726**
- 可加性 1:39**
- 可加性质(同调论的) 2:908
- 可加性(Riemann 积分的) 4:628
- 可简化线性系统(可约线性系统) 4:531**
- 可交换的平衡解 3:931
- 可接受枚举(部分递归函数的) 1:719
- 可解边界函数 5:359
- 可解边界函数(Dirichlet 问题中的) 2:216
- 可解初等理论 1:131
- 可解代数的 Lie 代数 3:547
- 可解的 Steiner 系 4:1029
- 可解多算子群 3:851
- 可解根 4:469
- 可解根(Lie 群的) 3:424
- 可解公理化语言模型类 1:293
- 可解函数 4:136;4:267;4:268
- 可解环 1:146
- 可解集 1:135;2:834
- 可解集(参数规划问题的) 4:89
- 可解开集 4:268
- 可解流 4:896**
- 可解流形 4:895**
- 可解流形(紧的)\* 4:896**
- 可解枚举问题 2:368
- 可解群 4:896**
- 可解群簇 1:400
- 可解算法问题 2:19
- 可解性度(群的) 4:897
- 可解性公理 2:834
- 可解性(交错环中的) 1:146
- 可解性问题 2:19
- 可解中间逻辑 3:130
- 可解子群列 4:897
- 可解子群系统 5:61
- 可解 Lie 代数 3:419**
- 可解 Lie 群 3:431**
- 可靠的知识 4:312
- 可靠法则 4:898**
- 可靠理论 4:898
- 可靠逻辑理论 4:898
- 可靠性 1:540**
- 可靠性函数(通信信道的) 2:387
- 可靠性和检验(控制系统的)\* 4:573**
- 可靠性(控制论中的) 1:919
- 可靠性理论 4:576**
- 可靠性(逻辑系统的) 1:781
- 可靠性(逻辑中的) 1:781;3:298
- 可靠性问题 4:574
- 可靠性指标 4:576
- 可控微分方程 4:961
- 可控系统(带分布参数的) 3:1031
- 可控性 1:268
- 可控性(动力系统的) 3:1031
- 可控性矩阵 1:265
- 可控性指数 3:596,979
- 可料随机测度 3:235
- 可料随机过程 4:286**
- 可料序列 3:629
- 可料增随机过程 5:8
- 可料  $\sigma$  代数 4:286**
- 可料  $\sigma$  域 4:287
- 可满足形式系统 1:781
- 可枚举集 2:365**
- 可枚举集(字的) 4:254
- 可枚举算术函数 2:365
- 可枚举谓词 2:365**
- 可枚举自然数集 2:365
- 可挠恒等式 3:400
- 可挠 Lie 容许代数 3:400
- 可能位移(完整系统的) 2:891

- 可能位置(完整系统的) 2:891  
 可能误差 3:127  
 可能值(随机变量的) 4:315  
**可逆层** 3:177  
 可逆理想 2:544  
**可逆模** 3:176  
 可逆纽结 3:275  
 可逆双模 3:176  
 可逆线性变换 3:512  
**可逆元** 3:176  
 可逆自动机 1:273  
 可逆  $k$  节 4:864  
 可判定的初等理论 2:337  
 可判定的枚举模型 4:525  
 可判定的算法问题 2:19  
 可判定的形式理论 4:350  
**可判定公式** 2:17  
**可判定集** 2:17  
 可判定集(自然数的) 2:17  
 可判定逻辑公式 4:540  
**可判定谓词** 2:17  
 可判定系统(模态逻辑的) 3:782  
 可判定性 3:145;4:350  
 可判定性问题(判定问题) 2:39;  
 5:357  
 可判定性质(语言的) 2:751  
 可判定性(Post 对应问题的)  
 4:256  
 可判定子集 4:525  
 可平面触点网络 1:800  
 可平面构形 1:744  
**可平面图** 2:761  
 可平行化定理 4:860  
 可平行化动力系统 1:694  
**可平行化流形** 4:83  
 可嵌入性(函数类的) 3:15  
 可求长罗 5:462  
**可求长曲线** 4:518  
 可求积图形 1:222  
**可求积性** 4:959  
**可去集** 4:579  
 可去集(对于函数类的) 4:579  
 可去集(关于可去奇点的) 4:579  
 可去间断点 2:222  
**可去奇点** 4:580  
 可去奇点定理(调和函数的)  
 2:829  
 可去奇点(解析函数的) 1:154  
 可容集 1:468  
 可三角化群 5:268  
**可三角化元** 5:271  
 可三角化 Lie 群 3:432  
 可三角剖分性(拓扑流形的)  
 5:223  
 可识别集(可认识集) 4:546  
 可实现闭逻辑公式 4:515  
 可实现公式集 1:107  
 可实现函数 1:276  
 可实现同调类 4:1020  
 可实现谓词公式 4:527  
**可实现性** 4:515  
 可实现性理论 3:894  
 可数闭和定理 2:182  
 可数反链条件 5:88  
 可数仿紧拓扑空间 4:76  
**可数赋范空间** 1:871  
 可数和公理 2:183  
 可数基 1:316  
**可数集** 1:870  
 可数加性测度 1:35  
**可数加性集函数** 1:871  
 可数加性向量测度 5:415  
**可数紧空间** 1:871  
 可数紧拓扑空间 1:680  
 可数开覆盖 1:604  
 可数连续算子 1:818  
 可数链条件 1:542  
**可数零维空间** 1:871  
 可数微分方程组 2:133  
 可数无穷集 5:316  
 可数无限集 1:65  
 可数值逻辑 3:608  
 可数主纤维丛 4:297  
 可数  $G$  丛 1:604  
 可塑锥 1:739  
 可缩复形 1:711  
 可缩曲面(负曲率的) 3:885  
 可缩拓扑空间 1:738  
**可调和化动力系统** 2:836  
 可调和化函数(Riemann 曲面上的)  
 4:639  
**可调和化随机过程** 2:836  
 可推导的部分正确性语句  
 5:156  
**可推导法则** 2:49  
 可推导公式 2:50  
 可推导逻辑公式 4:349  
 可推导形式表示式 2:520  
**可推导性** 2:49  
 可推导性(逻辑演算中的) 3:153  
 可推导元素(演算中的) 1:455  
**可推断法则** 2:22  
 可微表示(Lie 群的) 3:51  
 可微除法定理 5:473  
 可微对称函数定理 5:473  
**可微函数** 2:90  
 可微函数(按复分析意义(在区域内的)) 1:153  
 可微函数(按复分析意义(在一点处的)) 1:153  
 可微函数(按  $C$  意义下的)  
 1:153  
 可微函数(按  $R^2$  意义下的)  
 1:153  
 可微函数(按 Whitney 意义的)  
 5:496  
 可微函数(关于一集合的) 2:94  
 可微函数(在区间上的) 2:99  
 可微函数(在一点上的) 2:52;  
 2:93;2:99  
 可微函数(在一集合上的) 2:94  
 可微结构 2:90  
**可微类** 1:597  
 可微流 2:310  
 可微曲面 2:154  
 可微曲线 2:152  
 可微算子 3:947  
**可微随机过程** 5:16  
 可微同痕 3:200  
 可微同胚(微分同胚) 2:75  
**可微向量** 2:92  
 可微性(按  $C$  意义的) 1:153  
 可微性(按  $R^2$  意义的) 1:153  
 可微性(函数的) 2:101  
**可微性(微分方程的解的)\*** 2:89  
 可微性(微分方程解对初值的)  
 1:519  
 可微性(在一点上按复分析意义的)  
 1:153  
 可微性(在一区域中按复分析意义  
 的) 1:153



- 可微叶状结构 2:503
- 可微映射 2:171
- 可微映射的奇点 4:864
- 可微映射奇点的类型 4:865
- 可微映射(在一点上的) 2:171
- 可微映射(在一点正常的) 4:862
- 可微映射(在一点正则的) 4:862
- 可微预备定理 5:473
- 可微 Newton 定理 5:473
- 可无限延拓的解 4:347
- 可显式定义的一般递归函数 2:669
- 可行方向法 3:656
- 可行集 3:655
- 可行决策 3:1023
- 可形变固体力学 4:967
- 可序半群 4:13
- 可序群 4:10
- 可选抽样定理 3:630
- 可选时 3:631
- 可选随机变量 5:27
- 可选随机过程 3:1050
- 可选  $\sigma$  代数 3:1050
- 可压缩流动 5:514
- 可验逻辑公式 2:471
- 可一致化拓扑 5:327
- 可因子化多向量 4:220
- 可应用域(算法的) 1:135
- 可有限公理化的蕴涵命题演算 3:22
- 可余子空间 1:690
- 可余子空间(Banach 空间中的) 1:307
- 可约表示 4:531
- 可约代数方程 1:82
- 可约多项式 1:82
- 可约解析集 1:173
- 可约解析集(在一点上的) 1:173
- 可约局部对称 Riemann 空间 5:103
- 可约平面实代数曲线 4:169
- 可约伪 Riemann 空间 4:373
- 可约线性系统 4:531
- 可约  $n$  元运算 4:430
- 可约 Riemann 空间 4:531
- 可展曲面 2:67
- 可整体化的变换伪群 4:368
- 可正化自伴算子(Крейн 空间中的) 1:312
- 3:295
- 可证递归函数 1:229
- 可证公式 3:558
- 可证明的逻辑公式 4:349
- 可证实信息 1:897
- 可证性逻辑 3:782
- 可直接导出的字符串(生成文法中的) 2:750
- 可重正化模型(量子场论的) 4:408
- 可转换逻辑公式 3:310
- 可着  $k$  色的图 2:755
- 可自应用算法 1:126;4:317
- 可自应用性问题 4:317
- 可 Hilbert 化的空间 3:996
- 可  $k$  因子分解的图 2:447
- 克隆 1:607
- 客观分析 3:718
- 客厅对策 2:287
- 空的线性方程组 2:656
- 空关系 1:364
- 空盒检验 2:357
- 空集 2:357
- 空间 4:899
- 空间类  $\mathcal{P}_\lambda$  1:307
- 空间场所 3:540
- 空间(代数上的)\* 4:902
- 空间的加边 1:401
- 空间的连通分支 1:721
- 空间的谱 4:935
- 空间的剩余 4:579
- 空间的同调维数 2:906
- 空间点(流形上的) 2:342
- 空间对称群 1:900
- 空间(多面体的) 4:163
- 空间费用函数 1:122
- 空间复杂性(生成文法的) 2:750
- 空间构形 1:743
- 空间截面(宇宙模型的) 1:869
- 空间截面(Minkowski 空间中的) 1:721
- 空间界(Turing 机的) 1:721
- 空间晶体群 1:898
- 空间理论(拟共形映射的) 4:422
- 空间(链环的) 3:273
- 空间漏子 4:84
- 空间(满足第二可数公理的) 1:312
- 空间(满足第一可数公理的) 1:312
- 空间平均值 2:385;5:527
- 空间球面调和函数 4:944
- 空间曲面罗 5:462
- 空间曲线 1:367
- 空间曲线罗 5:462
- 空间群 1:900
- 空间(容许运动群的) 2:788
- 空间扇形 4:740
- 空间(上同调运算的) 1:655
- 空间同构 von Neumann 代数 5:440
- 空间椭球调和函数 2:343
- 空间椭圆坐标 2:342
- 空间(拓扑空间分解的) 1:810
- 空间(线性表示的) 4:600
- 空间(相同拓扑型的) 2:892
- 空间楔 1:739
- 空间形式 4:899
- 空间圆环调和函数 5:227
- 空气动力学相似性 3:589
- 空气动力学中的数学问题 1:48
- 空图 2:753
- 空隙 3:316
- 空隙(对 Hill 算子的) 2:883
- 空隙(函数论中的) 3:316
- 空隙(几何学中的) 3:316
- 空隙空间 3:318
- 空隙(偏微分方程理论中的) 3:316
- 空隙性(具有仿射联络的空间中的) 3:318
- 空隙(运动群理论中的) 2:788; 3:318
- 空闲排队系统 4:446
- 空向超平面 3:486
- 空向曲面 3:486
- 空字 1:789;2:513;5:522
- 空字母表 1:144
- 空  $U$  卷积(线性方程组的) 2:656
- 控制 2:277
- 控制安排 5:289
- 控制参数 4:242
- 控制策略 2:278
- 控制程序(微分对策中具有导向的)

- 2:149  
 控制动态系统 5:118  
 控制(对策论中的) 2:278  
 控制(对二择一特征的) 4:988  
 控制(对计量特征的) 4:988  
 控制分配 2:278  
 控制公理 2:278  
 控制估计(误差的) 1:30  
**控制函数 1:826**  
**控制论 1:917**  
 控制论系统 1:917  
 控制论系统的分解问题 1:919  
 控制论系统的分析问题 1:919  
 控制论系统的综合问题 1:919  
 控制论系统的最优化问题 1:919  
 控制(偏微分算子的) 4:301  
 控制器 1:919  
 控制收敛定理(Lebesgue 定理)  
 3:378  
 控制图 4:1016  
 控制(位势论中的) 2:278  
**控制系统 1:827**  
**控制系统的可靠性和检验 4:573**  
 控制系统的状态 1:268  
 控制系统可靠性中的问题 4:573  
 控制(线性算子的) 2:547  
 控制线性形式(支配线性型)  
 2:278;4:601  
 控制行(Snobol 语言中的) 4:885  
 控制域(复泛函的) 5:345  
 控制原理(调和函数的) 2:831  
 控制原理(位势论中的) 2:278  
 控制支配(拓扑空间的) 2:922  
 控制转移 1:129  
**口径 1:457**  
 口径(拓扑空间的) 1:457  
 口令保护 1:893  
 库 4:979  
 块(区) 3:26  
 块(群的群代数中的) 2:480  
 快解(微分方程组的) 4:144  
 快时间 4:877  
 快速离散 Fourier 变换法 3:759  
 快速 Fourier 变换 2:541;5:392  
 快运动 4:877  
 “宽带”噪声 5:489  
**宽度 5:500**  
 宽度(集合的) 5:500  
 宽度(曲线的) 1:784  
 宽度(凸体的) 1:784  
 宽收敛(负荷的) 1:837  
 宽拓扑(有界测度空间上的)  
 1:837  
 框积 5:196  
 框架 3:131;3:540;4:666  
 框架链环 3:276  
 亏格(闭 Riemann 曲面的) 4:640  
**亏格(代数函数的)\* 2:699**  
 亏格(代数曲线的) 1:78  
 亏格(典型积的) 1:462  
 亏格(定向链环的) 3:273  
 亏格(二次型的) 4:383  
 亏格(几何对象的) 2:711  
 亏格(紧 Riemann 曲面的) 3:245  
 亏格(矩阵的) 1:12  
 亏格(平面实代数曲线的) 4:170  
**亏格(曲面的)\* 2:698**  
**亏格(曲线的)\* 2:698**  
 亏格(群表示的) 3:272  
 亏格(三维流形的) 5:170  
 亏格(图的) 2:758;2:759  
 亏格(图形的) 2:469  
 亏格(无穷乘积的) 2:699  
**亏格(整函数的)\* 2:699**  
 亏格(Abel 函数的) 1:12  
 亏格(Fano 簇的) 2:451  
 亏格(Hilbert 子空间的) 2:873  
 亏格(Pfaff 结构的) 4:153  
**亏量 2:23**  
 亏量(二次型的) 2:111  
 亏量关系 2:23;5:367  
 亏量(配极的) 4:217  
 亏量(算子的) 2:23  
 亏量(亚纯函数值的) 2:23  
 亏数 2:425  
 亏数(矩阵的) 3:672  
 亏数(算子的) 2:23  
 亏数(样条的) 4:952  
 亏损抛物线 4:170  
 亏损 Марков 链 5:250  
 亏值 5:367  
**亏值 2:23**  
 亏指数(半伪 Euclid 空间的)  
 4:775  
 亏指数(算子的) 2:24  
**亏子空间 2:23**  
 亏子空间(算子的) 2:23  
 扩充的模 4:338  
 扩充的上半平面 3:791  
 扩充的数系 3:67  
 扩充复空间 3:59  
**扩充复平面 2:420**  
 扩充数轴 3:58  
 扩充 Cartan 矩阵 3:243  
 扩交换半群簇 5:401  
 扩散边界层 1:411  
 扩散法(密码学中的) 1:894  
**扩散方程 2:174**  
 扩散方程,第二类边界条件 2:175  
 扩散方程,第三类边值问题 2:175  
 扩散方程,第一类边界条件 2:174  
**扩散方法 2:175**  
**扩散过程 2:175**  
 扩散过程(流形上的) 5:31  
**扩散近似 2:174**  
 扩散系数 2:175  
 扩散系数(随机微分方程的) 5:4  
 扩散型过程 3:207  
 扩散阻力系数 5:301  
 扩散 Feller 链 2:456  
**扩张(半群的)\* 2:424**  
 扩张(半有界算子的) 2:426  
 扩张(变换的 Lie 伪群的) 4:368  
 扩张(测度的) 3:700  
 扩张(代数系统的) 3:1003  
 扩张(到一个扩大了 Hilbert 空间  
 中的算子的) 2:427  
**扩张定理 2:428**  
 扩张定理(多面体映射的) 1:654  
**扩张定理(解析几何中的) 2:429**  
 扩张(对应于边值问题的算子的)  
 2:427  
 扩张(赋值的) 5:366  
**扩张和限制方法 3:721**  
 扩张(交换环上结合代数的)  
 2:425  
**扩张(结合代数的)\* 2:425**  
 扩张(具有核的模的) 1:295  
 扩张(具有核的 Lie 代数的)  
 2:423  
 扩张(逻辑理论的) 1:705



扩张(模的)\* 2:424  
 扩张(区域的) 2:428  
 扩张(群的)\* 2:422  
 扩张数空间 3:58  
 扩张(双模通过环的) 1:647  
 扩张(算子的)\* 2:425  
 扩张条件 4:841  
 扩张(拓扑空间的)\* 2:425  
 扩张(微分算子的) 2:426  
 扩张(微分域的)\* 2:420  
 扩张问题 1:647  
 扩张(线性微分算子的) 3:475  
 扩张(一个模通过另一个模的)  
     2:424  
 扩张(一个群通过另一群的)  
     2:422;4:755  
 扩张映射 2:417  
 扩张(映射的) 3:609  
 扩张(有限加性测度的) 3:699  
 扩张域 2:422;2:467  
 扩张(域的)\* 2:422  
 扩张阻碍(函数的) 3:1012  
 扩张阻碍(群的) 2:423  
 扩张(Lie 代数的)\* 2:423

## L

拉丁长方 3:353  
 拉丁方 3:353  
 拉丁方(标准形式的) 3:354  
 拉丁方的推广 3:354  
 拉丁方型区组设计 1:376  
 拉丁子方 3:354  
 拉回 2:465;2:465  
 拉回正方形(Descartes 正方形)  
     1:488  
 类 1:594  
 类胞腔映射 5:219  
 类多项式对策 2:34  
 类多项式支付函数 2:34  
 类分相 1:387  
 类(公理集合论中的) 1:594  
 类光向量 4:569  
 类空超平面 3:486  
 类空面元 4:433  
 类空曲面 3:486

类空曲线 3:763  
 类空时空间隔 3:149  
 类空向量 3:763  
 类前缀(Simula 语言中的) 4:843  
 类氢原子 2:939  
 类群(Weber 意义下的) 1:99  
 类时超平面 3:776  
 类时面元 4:433  
 类时曲面 3:486  
 类时曲线 3:763;4:433  
 类时时空间隔 3:149  
 类时向量 3:763  
 类数(算术群的元素在种中的)  
     2:699  
 类星体 1:868  
 类型 5:304  
 类型(多类语言的) 2:521  
 类型(二次型的) 5:517  
 类型环(域上的二次型的) 5:517  
 类型论 5:304  
 类型论概括公理 5:304  
 类型特征(结构的) 5:41  
 类型问题(Riemann 曲面的)  
     4:636;4:638  
 类型( $\lambda$  演算中的) 3:311  
 类演算 1:456  
 类域 1:597  
 类域论 1:595  
 类域塔问题 4:236;5:237  
 类域(Weber 意义下的) 1:99  
 类 Algol 模式 5:155  
 类  $B_2$ (缺项序列的) 3:318  
 类  $B_{2c}$ (缺项序列的) 3:318  
 类  $C_0$ (算子半群的) 4:763  
 类[FC](群的) 5:341  
 类[FIA](群的) 5:341  
 类[FIR](群的) 5:341  
 类  $IC_0$ (算子半群的) 4:764  
 类  $ID$ (分布半群的) 4:765  
 类[MAP](群的) 5:341  
 类  $S$ (函数的) 5:345  
 类  $S^*$ (星形函数的) 4:982  
 类[SIN](群的) 5:341  
 类  $uC_0$ (算子半群的) 4:765  
 类[Z](群的) 5:341  
 类  $\Pi_0^1$ (集合的) 2:863

类  $\Pi_{n-1}^1$ (集合的) 2:863  
 类  $\Pi_n^0$ (集合的) 2:863  
 类  $\Sigma_0^1$ (集合的) 2:863  
 类  $\Sigma_{n-1}^1$ (集合的) 2:863  
 类  $\Sigma_n^0$ (集合的) 2:863  
 类  $\Sigma(B)$ (函数的) 5:343  
 累次代换法 4:789  
 累次核 3:202  
 累次积分 4:583  
 累次积分变换 3:121  
 累次微分(函数的) 1:101  
 累积和控制图 4:1016  
 累积支付(动态对策中的) 2:304  
 累级数 4:584  
 累极限 4:584  
 累极限(多元函数的) 4:584  
 累极限(二重序列的) 4:584  
 棱(多面体的)\* 4:616  
 棱(二面角的) 2:177  
 棱(解析多面体的) 1:172  
 棱同态 4:922  
 棱(凸多面体的) 1:846  
 棱(楔的) 2:953  
 棱柱 4:304  
 棱柱区域 3:827  
 棱锥 4:376  
 冷储备 4:578  
 冷宇宙模型 1:869  
 离差法 2:248  
 离差法(数论中的) 2:248  
 离差(亚纯函数与一复数的)  
     5:367  
 离群值检测和处理 2:391  
 离群值检验 2:391  
 离群值(异常值) 2:390;4:679;  
     4:1000  
 离散变换器 5:157  
 离散变换群 2:226  
 离散并(拓扑空间的) 2:243  
 离散测度 2:228  
 离散的最大值原理 3:692  
 离散动力系统 5:189  
 离散度量 3:722;3:730  
 离散范数 2:228  
 离散仿射概形 1:57  
 离散分布 2:225

- 离散分析 2:224  
 离散赋范环 2:234  
 离散赋值 2:228;5:365  
 离散赋值环 2:228;2:234  
 离散概率分布 1:811;4:484  
 离散规划 2:228  
 离散和(离散并)(拓扑空间的)  
     2:243  
 离散化方法 2:234  
 离散化误差 2:387  
 离散基 1:312  
 离散集族 2:226  
 离散几何学 2:716  
 离散紧序列 1:836  
 离散可控系统 3:1032  
 离散空间 2:230  
 离散流 5:189  
 离散偏序集 4:100—101  
 离散谱 2:134  
 离散谱(动力系统的) 4:932  
 离散圈积 5:523  
 离散射影直线 4:345  
 离散时间动力系统(瀑布) 1:497;  
     1:921  
 离散时间通信信道(区间上的)  
     1:669  
 离散时间信息源 3:76  
 离散时间状态空间动力系统  
     1:921  
 离散时间 Марков 链 3:614;  
     3:616  
 离散时空 2:230  
 离散收敛 1:835  
 离散收敛的算子序列 1:836  
 离散收敛序列 1:836  
 离散数学 2:224;2:481  
 离散拓扑 2:233  
 离散系列表示 4:796  
 离散系列(表示的)\* 2:229  
 离散系统(统计力学中的) 2:233  
 离散信息处理器 1:918  
 离散直积 2:206  
 离散直线 5:28  
 离散子范畴(由对象类生成的)  
     5:57  
 离散子集族 3:737  
 离散子群 2:230  
 离散纵坐标法 4:946  
 离散最优化 3:85  
 离散最优化问题 5:380  
 离散 Carlson 法 1:479  
 离散 Fourier 变换 2:541  
 离散 Mathieu 算子 3:668  
 离散 von Neumann 代数 5:441  
 离式(微分多项式的) 2:98  
 离心率 2:317  
 离心率(双曲线的) 2:941  
 离心率(椭圆的) 2:341  
 离子流 5:301  
 理发师悖论 1:310  
 理论程序设计 5:155  
 理论(逻辑中的) 4:976  
 理论算术 1:226  
 理论相关图 1:865  
 理论语法 5:113  
 理想 3:1  
 理想(半群的) 4:299;4:758  
 理想保密 1:894  
 理想边界(开 Riemann 曲面的)  
     4:639  
 理想变压器 3:894  
 理想层(解析集的) 1:640  
 理想超平面 4:334  
 理想除子 2:270  
 理想(代数的) 4:299  
 理想代数数 1:97  
 理想单半群 4:831  
 理想的高 2:847  
 理想的根(根基) 4:470  
 理想的加性理论 1:38  
 理想的  $m$  维超平面 3:528  
 理想地图投影 1:495  
 理想点 3:4  
 理想点(双曲平面的) 4:196  
 理想点(Лобачевский 空间的)  
     3:528  
 理想对象 3:2  
 理想(仿射代数集的) 1:51  
 理想(仿射代数  $k$  集的) 1:51  
 理想仿射球面 1:59  
 理想(分式域的) 3:2  
 理想(赋值环的) 5:365  
 理想(格的) 3:2  
 理想化 1:26  
 理想(环的) 4:299  
 理想回转器 3:894  
 理想空间 3:141  
 理想扩张(半群的) 2:424  
 理想类群 2:270  
 理想类数 1:98  
 理想列 3:4  
 理想流体的波动问题 1:420  
 理想(偏序集中的) 3:2  
 理想气体 4:813  
 理想区域(Лобачевский 空间中的)  
     3:528  
 理想群 2:270  
 理想商 3:2  
 理想数 3:3  
 理想同余(半群的) 4:758  
 理想完整约束 2:313  
 理想遗传根 4:471  
 理想因子(半群的) 4:296  
 理想(由集合生成的) 3:2  
 理想元 3:5;3:58  
 理想约束 5:429  
 理想(在环扩张下不分歧的)  
     5:356  
 理想(Banach 代数的) 4:924  
 理想( $\Omega$  群的) 3:851  
 力迫法 2:506  
 力迫关系 2:506  
 力学第二定律 3:309  
 力学第一定律 3:903  
 立方 1:903  
 立方八面体 4:776  
 立方(数的) 1:903  
 立方体 1:903  
 立方体空间 3:1015  
 立方体条件 1:740  
 立体弧度 4:1035  
 立体角 4:893  
 立体切锥 5:131  
 立体正锥 4:248  
 立体锥(体锥) 1:739  
 利益联盟 1:621;2:634  
 利益协议 3:637  
 例外除子 2:412  
 例外单紧 Lie 代数 3:427  
 例外单 Lie 代数 3:417  
 例外方向(轨道的) 4:398



- 例外方向(自治系统的) 4:740  
**例外解析集** 2:411  
 例外零点(Dirichlet  $L$  函数的) 2:213  
 例外平面束 5:122  
 例外曲线 2:412;4:858  
 例外群 3:407  
 例外圆束 5:122  
 例外直线束 5:122  
**例外值** 2:413  
**例外子簇** 2:412  
**例外 Lie 代数** 3:407  
 隶属关系 4:799  
**粒子方法** 4:103  
 粒子集团 3:851  
 粒子(排列中的) 1:234  
 粒子数算子 2:502  
 粒子网格法 4:103  
 连带超几何函数 2:957  
**连带函数** 1:236  
 连带 Legendre 函数 5:227  
 连带 Legendre 函数(第二类) 4:941  
 连带 Legendre 函数(第一类) 4:941  
**连分数** 1:805  
**连分数的渐近分数** 1:841  
 连分数(数列的) 1:805  
 连分数展开(数的) 1:806  
 连接闭包(语言的) 2:514  
 连接编辑程序 4:889  
 连接点 2:440  
 连接函数(超几何函数的) 2:957  
 连接平移(半群的) 5:253  
 连接数(纽结的) 3:277  
 连接态射 1:711  
 连接同态 1:709  
 连接(语言的) 2:514  
 连接(字的) 2:514  
 连结等级部件系统(字母表上的链的) 5:113  
**连锁螺线** 3:523  
 连通半单紧 Lie 群 3:426  
 连通代数群 1:91  
 连通单纯集 4:839  
 连通定向  $n$  维流形(无边界的) 2:612  
 连通定向  $n$  维流形(有边界的) 2:612  
 连通二角形 5:200  
 连通方阵 3:279  
 连通仿射概形 1:57  
**连通分支(单位元的)\*** 1:774  
**连通分支(空间的)\*** 1:721  
 连通分支(图的) 2:753,756  
 连通分支(拓扑空间的点的) 1:780  
**连通和** 1:775  
 连通和(集族的) 1:775  
 连通和(微分流形的) 1:775  
**连通集** 1:775  
 连通集(单位立方体顶点的) 1:393  
 连通集(拓扑空间中的) 1:780  
 连通交换紧 Lie 群 3:426  
 连通阶(区域的) 2:275  
 连通结合代数 4:594  
 连通可解 Lie 群 4:896  
**连通空间** 1:775  
 连通两点空间(连通冒号) 1:660  
**连通数** 1:778  
 连通双代数 2:927  
 连通图 2:753,756  
 连通拓扑空间 2:670  
 连通拓扑空间( $n$  维的) 1:780; 4:108  
 连通拓扑群 5:193  
**连通性** 1:780  
 连通性(集合的) 1:155  
 连通性阶(平面区域的) 3:866  
 连通性( $n$  维的) 1:780  
 连通 Hopf 代数 2:927  
 连通  $p$  可除群 4:58  
 连续闭紧映射 1:610  
 连续变换群 5:189  
**连续表示** 1:818  
**连续表示系列(表示的连续系列)** 1:818  
 连续表示(Lie 群的) 3:51  
 连续测度 3:699  
 连续测度空间 3:699  
 连续查问 1:897  
 连续典范形式(动态系统的) 5:118  
 连续对偶 Hahn 多项式 5:512  
 连续多值映射 3:853  
**连续泛函** 1:813  
 连续范畴 1:815  
**连续方法** 1:803  
 连续方法(对参数的) 1:809; 3:943  
**连续方法(对非线性算子的)** 1:804  
 连续非线性算子 3:947  
**连续分布** 1:811  
 连续分拆(拓扑空间的) 1:811  
**连续分解** 1:810  
 连续辐角 5:512  
 连续概率分布 4:484  
**连续格** 1:815  
 连续公理(椭圆几何学的) 4:623  
**连续函数** 1:812  
**连续函数空间** 1:814  
 连续函数(在点上关于一集合的) 1:812  
 连续函数(在开区间上的) 3:633  
 连续函数(在一点上的) 1:812; 3:633  
 连续函数(在一点上关于一特定变量的) 1:813  
 连续函数(在一集合上的) 1:812  
 连续函数( $\lambda$  演算中的) 3:311  
**连续函子** 1:814  
 连续和 1:316  
 连续积分 2:463;3:113;4:320  
 连续积分核 3:112  
**连续集** 1:819  
 连续集(分布函数的) 3:398  
 连续几何 1:816;3:794  
**连续截面** 1:818  
 连续可微映射 2:75  
**连续流** 1:811  
**连续模** 1:808  
 连续模(函数空间中的) 1:808  
 连续模(沿一个方向关于  $L_p(Q)$  度量的) 1:213  
 连续模( $k$  阶的) 3:209  
 连续模( $L_p(Q)$  中的) 1:213  
 连续逆(拓扑代数的) 1:300  
 连续偏序集 1:815  
 连续平面 4:168

- 连续谱(动力系统的) 4:932  
 连续谱(算子的) 4:934  
 连续瀑布 1:497  
 连续区间(Марков 谱的) 3:627  
 连续曲面 5:187  
 连续全序集 5:236  
**连续群 1:814**  
 连续射影直线 4:345  
 连续时间动力系统 1:497;2:499  
 连续时间可控系统 3:1032  
 连续时间通信信道(区间上的)  
 1:669  
 连续时间信息源 3:76  
 连续时间 Марков 链 3:621  
**连续算子 1:817**  
 连续算子函数 3:1022  
**连续统 1:819**  
**连续统的基数 1:819**  
**连续统假设 1:819**  
 连续统问题 1:819  
 连续统(在一点上光滑的) 4:882  
 连续统值逻辑 3:608  
 连续统(最小容量的) 5:347  
 连续线性泛函 1:305  
 连续线性算子(Banach 空间上的)  
 3:492  
 连续线性算子(Hilbert 空间上的)  
 3:494  
**连续性 1:807**  
**连续性定理 1:808**  
**连续性方程 1:808**  
 连续性(分布函数的) 3:398  
**连续性公理 1:807**  
 连续性公理(Hilbert 公理系统中的)  
 2:878  
 连续性(实数的) 4:512  
 连续性条件(从域到 Abel 群的映射  
 的) 3:969  
 连续性(一致收敛级数之和的)  
 5:330  
 连续性(映射的) 1:838  
 连续性原理 1:808  
 连续性原理(Riesz 位势的) 4:659  
 连续性质(同调论的) 2:908  
 连续依赖性(常微分方程的解对初  
 始值的) 2:109  
 连续依赖性(解对初始数据的)  
 3:652;5:481  
**连续映射 1:816**  
 连续映射(场所的) 3:540  
 连续映射定理 5:457  
 连续直线 5:28  
 连续 Hahn 多项式 5:512  
 连续 von Neumann 代数 5:441  
 联合不变量(型组的) 3:167  
**联合分布 3:227**  
 联合分布函数 3:227  
 联合概率密度 2:47;3:227  
 联合共变换(张量系的) 1:875  
 联合谱(Banach 代数的元素组的)  
 4:934  
 联合奇点分解 4:857  
 联合(事件的) 4:313  
 联合相关函数 1:861  
 联合(子群的) 5:59  
 联合 Fredholm 核 2:562  
 联结词 3:145  
 联立逼近(用有理数对几乎所有实  
 数的) 2:189  
 联立递归 3:860  
 联立相伴变换 1:668  
 联立 Diophantus 逼近 2:191  
**联络 1:775**  
 联络代数 3:402  
 联络(殆辛结构的) 1:143  
**联络对象 1:778**  
 联络(光滑丛的范畴中的) 3:941  
**联络(流形上的)\* 1:778**  
 联络(上同调群之间的) 1:651  
 联络系数 5:143  
 联络(纤维丛上的) 1:775  
**联络形式 1:777**  
 联络(与 Hermite 度量相容的)  
 2:858  
 联络(主丛上的) 2:152  
**联盟 1:621**  
 联盟策略 1:621  
**联盟对策 1:621**  
 联盟合理构形 4:965  
 联盟(合作非原子对策的) 3:929  
 联盟结构 1:621;4:965  
**链 1:542**  
 链(触点网络中的) 1:800  
 链定理(差积的) 2:238  
 链复形 1:708;1:710;2:910;  
 2:915;4:838  
 链(功能元图中的) 2:72  
**链环 1:543**  
 链环(单形的) 4:164  
 链环(具有  $m$  座桥的) 3:273  
**链环(连接) 3:516**  
**链环群(连接群) 3:271**  
**链环图(连接图) 3:269**  
 链环图(正则位置的) 3:269  
 链环(重数为  $\mu$  的) 3:273  
**链模 1:542**  
 链群 1:627  
**链条件 1:542**  
 链(图中的) 2:755  
 链形连续统 4:885  
**链循环 1:542**  
 链(中继触点电路的) 4:573  
 链(字母表上的) 5:113  
 链(A 系统的) 1:2  
 良基递归  
**良基关系 5:480**  
 良基归纳法(理由充足的归纳法)  
 3:919  
 良基解析关系(集合上的) 2:64  
 良基偏序 5:480  
 良基偏序关系 5:480  
 良基树 5:245  
**良集 2:470**  
 良可达边界点 4:982  
 良拟序集 4:103  
 良势范畴 5:399  
 良序定理 1:286;5:537  
**良序集 5:480**  
 两点插值问题 1:4  
**两点空间(冒号) 1:660**  
 两点离散空间 1:661  
**两点张量 5:302**  
**两集合的差 2:79**  
 两阶段验收控制方案 4:989  
 两两独立 3:35  
 两两正交拉丁方 4:28  
**量 4:404**  
**量词 4:403**  
 量词公理(直觉主义逻辑中的)  
 3:155  
**量纲分析 2:186**



- 量纲公式(物理中的) 2:186  
 量纲指数(物理量纲公式中的)  
   2:186  
 量化(信息源体积的) 3:76  
 量特征标 4:627  
 量子 3:863  
 量子编码 4:405  
 量子测度 1:793  
 量子测量 1:642  
 量子场 2:468  
**量子场论 4:406**  
 量子代数概率空间 4:414  
 量子电动力学 4:569  
 量子动力学 2:312  
 量子动力学演化 4:416  
 量子反散射方法 5:529  
**量子概率 4:412**  
 量子概率基础 4:414  
 量子概率空间 4:413  
 量子化场 2:468  
 量子化(Lie 双代数的) 4:411  
 量子化(Poisson-Hopf 代数的)  
   4:411  
 量子力学 2:783;3:54;4:406;  
   5:315  
 量子力学方程 4:751  
 量子力学散射问题 4:724  
**量子群 4:410**  
 量子随机变量 4:413  
 量子随机分析 4:416  
**量子随机过程 4:414**  
**量子通信信道 4:405**  
 量子统计学 2:461  
 量子杨(振宁)-Baxter 方程  
   4:412  
 量子译码 4:405  
 量子 Gauss 状态 4:415  
 量子 Gibbs 系综 4:992  
 量子 Poisson 括号 4:406  
 量子 Марков 过程  
 量子 Марков 过程(具有连续参数  
   的) 4:416  
 量子 Марков 链 4:415  
 量( $k$  阶的) 4:7  
 列表说明法(逻辑代数函数的)  
   1:73  
 列代数 2:696  
 列根(遗传代数的) 3:695  
 列环 4:751  
**列紧集 1:679**  
**列紧空间 1:682**  
**列紧性 1:685**  
 列秩 4:489  
**列子群 4:791**  
 列(Padé 表的) 4:60  
 裂缝(固体中的) 2:549  
 裂纹 1:915  
 裂纹体弹性力学理论的平面问题  
   5:298  
 裂纹体的纵向剪切 5:299  
 邻边(多边形的) 4:223  
 邻边(图中的) 2:752  
 邻顶点(超图的) 2:959  
 邻顶点(多边形的) 4:224  
 邻顶点(图中的) 2:752  
 邻角 1:182  
 邻接单纯映射 1:709  
 邻接符号 4:173  
 邻接函数(汇合型超几何函数的)  
   1:747  
 邻接矩阵 2:753  
 邻接区间(Contor 集作图中的)  
   1:464  
 邻近闭链函子 5:371  
**邻近变换 4:356**  
**邻近点 4:354**  
 邻近点(素端的) 3:446  
 邻近积 4:355  
**邻近空间 4:354**  
 邻近空间的适当化 4:356  
 邻近连通性 4:355  
 邻近邻域 5:324  
**邻近性 4:354**  
 邻近性分划 5:325  
**邻域 3:888**  
 邻域(串在语言中的) 1:166  
 邻域(点的) 3:129;3:888  
**邻域定义系 2:25**  
 邻域基 2:25  
 邻域(集合在集族中的) 1:125  
 邻域收缩核 4:614  
 邻域(子集的) 3:888  
 临界参数(关于稳定性的) 4:967  
 临界带(Dirichlet  $L$  函数的)  
   2:212  
 临界带(Riemann  $\zeta$  函数的) 5:542  
**临界点 1:888**  
 临界点(二次微分的) 4:380  
 临界点(函数的) 2:743  
 临界点(解析函数的  $m$  阶的)  
   1:888  
 临界点(解析集的) 1:888  
 临界点(可微映射的) 4:864  
 临界点(微分流形光滑映射的)  
   1:888  
 临界分支过程 1:438  
 临界格(有限型集的) 2:722  
 临界共振频率 4:92  
**临界函数 1:888**  
 临界函数(统计检验的) 4:1017  
 临界集(统计检验的) 4:825  
 临界集(微分流形光滑映射的)  
   1:888  
 临界集(Колмогоров 检验的)  
   3:287  
**临界理想 1:888**  
 临界面(关于稳定性的) 4:967  
 临界频率 2:812  
 临界情况(稳定性的) 3:583  
**临界区域 1:889**  
 临界区域(统计检验的) 4:1017  
 临界群 5:400  
**临界水平 1:888**  
 临界速率(无记忆信道的) 2:387  
 临界图 2:757  
 临界问题(组合几何中的) 1:666  
 临界行列式(有限型集的) 2:722  
 临界序数(函数的) 4:15  
**临界值 1:889**  
 临界值(代数函数的) 1:85  
 临界值(检验统计量的) 4:1017  
 临界值(微分流形光滑映射的)  
   1:887  
 临界指数(热力学中的) 5:161  
 临界指数(组合几何的) 1:666  
 临界子图 2:757  
 临界 Reynolds 数 4:614  
 灵敏度分析 4:90  
 灵敏(敏感)系数 3:327  
**鈴木零散群 5:91**  
**鈴木群 5:90**

- 鈴木 2 群 5:90  
 菱二十—十二面体 4:776  
 菱立方八面体 4:776  
 菱形 4:615  
 零 5:537  
 零测度集 2:7  
 零乘积环 1:219  
 零点 5:537  
 零点除子(函数的) 2:270  
 零点(二次微分的) 4:379  
 零点分离(常微分方程解的) 2:12  
 零点(函数的) 5:538  
 零点集(函数集) 5:538  
 零点(校函数的) 1:929  
 零点(整函数的) 2:361  
 零点( $L$  函数的) 4:818  
 零点(Riemann  $\zeta$  函数的) 5:542  
 零点(Чебышев 多项式的) 1:572  
 零调复形 1:710;2:55  
 零调连续统 1:32  
 零调拓扑空间 2:227  
 零调元 1:32  
 零对象(范畴的)\* 3:1000  
 零关系 4:561  
 零化度(链环的) 3:278  
 零化子 1:184  
 零化子(赋范子空间的) 2:296  
 零化子(集合的) 1:184  
 零化子(模的) 3:794  
 零化子(向量子空间的) 1:220  
 零级数 3:710  
 零级数的 Меньшов 例子 3:710  
 零级数序列 4:785  
 零集 3:700  
 零集(广义函数的) 5:81  
 零阶标架 3:840  
 零阶问题 2:924  
 零阶  $\epsilon$  邻近性条件 5:458  
 零截面(层的) 4:803  
 零截面(向量丛) 4:739  
 零解(非自治系统的) 2:377  
 零解(齐次线性积分方程的) 3:95  
 零矩阵 3:670  
 零空间(算子的) 3:919  
 零伦映射 3:51  
 零配极 1:860;5:541  
 零容度 1:802  
 零三角阵列 1:248  
 零散单群 4:956  
 零散有限单群 3:669  
 零算子 3:1026  
 零维空间 5:538  
 零维嵌入剩余(拓扑空间的)  
     1:684  
 零维拓扑空间 3:1020  
 零维拓扑空间(在  $\dim$  意义下的)  
     5:538  
 零维拓扑空间(在  $\text{Ind}$  意义下的)  
     5:538  
 零维拓扑空间(在  $\text{ind}$  意义下的)  
     5:538  
 零维映射 5:538  
 零稳定性 3:741  
 零系 5:540  
 零线性算子 3:491  
 零向量 5:404  
 零向量 3:763  
 零性元(内积空间中的) 2:877  
 零性质 3:574  
 零序列 1:841;3:440  
 零序列(有理数的) 4:513  
 零一律 5:539  
 零因子 5:539  
 零因子(环中的) 5:539  
 零因子(具有零元的半群的)  
     5:539  
 零因子(模中的) 5:539  
 零元 5:537  
 零元(除环的) 5:537  
 零元(代数系统的) 5:537  
 零元代数运算 1:100  
 零元(格的) 5:538  
 零元(环的) 5:537  
 零元(域的) 5:537  
 零元(Abel 群的) 5:537  
 零知识交互作用证明 1:897  
 零子空间 1:860  
 零子午线 4:943  
 岭点(脊点)(紧凸曲面上的)  
     1:850  
 岭点(脊点)(凸锥的) 5:131  
 岭回归 4:558  
 领导者(对策中的) 2:634  
 领口(子流形的) 2:814  
 流程分析(程序的) 4:322  
 流程原理 4:81  
 流出边界 3:628  
 流(单参数变换群) 3:1018;5:189  
 流动奇点 3:839  
 流动奇点(常微分方程的) 1:179  
 流动形 2:146  
 流动形(积分的) 4:188  
 流(环面上的)(环面上的微分方程)  
     2:134  
 流(连续时间动力系统) 2:499  
 流量(向量场的)\* 2:500  
 流入边界 3:628  
 流体动力学不稳定性 4:204  
 流体力学近似 2:935  
 流体力学中的数学问题 2:936  
 流体热力学 3:717  
 流(图上的) 2:757  
 流(网络中的)\* 2:499  
 流(微分流形上的) 2:499  
 流(向量场的) 5:413  
 流形 3:600  
 流形(代数元的) 3:604  
 流形的浸入 3:20  
 流形的拓扑学 5:223  
 流形(二次元素的) 3:604  
 流形(具有仿射联络的) 5:102  
 流形(具有负截曲率的) 1:609  
 流形(具有奇点的) 3:601  
 流形(具有正截曲率的) 1:609  
 流形理论的历史 3:602  
 流形(散布在  $C^n$  上的) 1:880  
 流形上的积分 3:125  
 流形上的联络 1:778  
 流形上的偏微分方程 4:97  
 流形上的微分几何学 2:157  
 流形上的向量场 5:413  
 流形(有界曲率的) 5:297  
 流形(圆锥曲线的) 3:604  
 流形(在一点处测地完全的)  
     2:931  
 流(用光滑向量场定义的) 2:499  
 流(用光滑向量场确定的) 2:499  
 流(由光滑向量场生成的) 2:499  
 流(运输网络中的) 3:893  
 留数(残数)(解析函数的)\*  
     4:604



**留数形式(残数形式)** 4:603

六角闭包条件 1:613

六角线罗 5:462

**六面体** 2:861

六球坐标 4:119

隆起的强函数 4:850

路 2:753

路径积分 2:462;3:113;4:320

**路径积分(道路积分)** 4:109

路(图中的) 2:755;2:760

旅行推销员问题 1:662

滤波(随机过程的) 5:19

滤层(模的) 4:922

滤过 2:470

**滤过代数** 2:469

滤过反投影 5:185

滤过环 3:515

滤过积( $\Omega$  系统的) 1:108

滤过积( $\Omega$  系统关于滤子的)  
1:108

滤过集系(滤子) 1:685

滤过集族(中心集族, 滤子)  
1:540;1:682

**滤过模** 2:470

滤过偏序集 1:682

滤过(群上的) 3:515

**滤子** 2:469

滤子(非空集合上的) 2:469

滤子基 1:315;1:511;2:206

滤子(滤子基张成的) 2:469

**孪生素数** 5:291

孪生素数问题 5:291

卵形的 Möbius 平面 3:780

卵形面 1:608;4:54

卵形面的基本定理(Bonnet 定理)  
1:389

**卵形体** 4:54

**卵形线** 4:53

卵形线(实代数曲线的) 4:509

轮换(长度为  $l$  的) 4:133

轮换分解(置换的) 5:99

轮换型(置换的) 5:99

轮换指数(置换的) 5:99

轮换指数(置换群的) 4:222

轮空 4:716

轮廓搜索 3:849

《论劈锥曲面、球体和螺线》(Archi-

medes 著) 3:62

《论平均量》(Чебышев 著) 3:363

《论十进》(Stevin 著) 3:1001

《论算术三角形》(B. Pascal 著)  
4:107

《论作为几何基础的假设》(B. Rie-  
mann 著) 3:602

**罗** 5:460

罗(代数几何学中的) 5:121

**罗的几何学** 5:462

罗马记数制 1:589

罗马数系 3:1008

**罗马数字** 4:680

**罗微分(法)** 5:460

逻辑悖论 1:186

逻辑部分(程序设计中语言的)  
4:983

**逻辑代数** 1:72

逻辑的公设 4:349

**逻辑等价\*** 2:378

**逻辑定律** 3:560

**逻辑公理** 3:557

逻辑公理(简单类型论中的)  
5:305

**逻辑公式** 3:559

逻辑公式的相容类 1:781

逻辑公式的转换 3:310

逻辑公式(对一个初等理论等价的)  
2:337

逻辑公式(对一个解释是真的)  
4:515

逻辑公式(实现一个函数的)  
3:605

逻辑公式(由其他公式可表达的)  
3:130

逻辑公式(有界深度的) 3:606

逻辑公式(在集合的系统中可解的)  
2:472

逻辑公式(在世界中成立的)  
3:782

逻辑公式(在 Kripke 框架中大体上  
有效的) 3:782

**逻辑函数** 3:560

**逻辑结果** 3:559

逻辑结果(前提集合的) 3:559

**逻辑矩阵** 3:560

逻辑理论 1:705;3:562

逻辑理论(程序的) 5:156

逻辑理论(对一基数稳定的)  
4:974

逻辑理论(关于一个模型是完全的)  
1:705

逻辑理论(相对相容于另一个逻辑  
理论的) 1:781

逻辑联结词 2:697;3:145

**逻辑数学演算** 3:561

逻辑数学语言 4:284

**逻辑斯谛** 3:563

**逻辑斯谛分布** 3:562

逻辑斯谛系统 2:696

逻辑斯谛族 1:546

**逻辑推导** 2:50

逻辑网络 1:277;1:918

逻辑系统 2:696

**逻辑演算** 3:557

**逻辑运算** 3:560

逻辑蕴涵 3:559

逻辑真 3:6

逻辑终结历史 5:156

**逻辑主义** 3:560

螺距(螺线的) 2:848

**螺线** 2:848

**螺线** 4:952

**螺线管** 4:893

**螺线管场** 4:893

螺线向量场 5:407

螺旋 2:848

螺旋参数 2:848

螺旋度 4:949

螺旋矩 2:848

**螺旋面** 2:849

螺旋向量 2:848

**螺旋演算** 2:848

**螺旋运动曲面** 5:84

螺旋轴 2:848

## M

马雅印第安人数系 3:1009

**码** 1:628

码字 3:78

脉冲传递函数(线性定常控制系统  
的) 5:242

- 脉冲传输时间 5:301  
 脉冲法 4:612  
 脉冲控制 3:1035  
 脉冲特征(线性定常控制系统的) 5:242  
 脉冲转移函数 5:16  
 脉动 2:568  
**脉络 5:168**  
 脉络场(线场) 2:713  
 脉络(谱中的) 4:437  
 满半单纯复形 4:837  
 满单纯集 4:839  
 满单纯子复形 4:834  
 满负载储备 4:577  
 满函子(全函子) 1:503;2:610  
 满模 2:194  
**满射 5:86**  
**满态射 2:372**  
 满态射(向量丛的) 5:409  
 满完全的局部凸拓扑向量空间 5:214  
**满子范畴 2:584**  
 满子范畴(由对象类生成的) 5:57  
 满自反子范畴(满反射子范畴) 4:539;5:204  
 慢化长度 3:898  
 慢解(微分方程组的) 4:143  
 慢运动 4:877  
 蔓叶类曲线 1:593  
**蔓叶线 1:593**  
 忙排队系统 4:446  
 忙期(单服务排队系统的) 4:454  
 毛利人数系 3:1008  
 毛球定理 4:201  
 矛盾 3:645  
**矛盾(公式) 1:824**  
**矛盾律 1:824**  
 矛盾命题演算 4:352  
 矛盾形式系统 1:781  
 矛盾原理 3:155  
**冒号 1:660**  
**枚举 2:366**  
 枚举集 2:367  
 枚举集(递归可枚举集族的) 2:367  
 枚举集范畴 2:366  
 枚举(集合的) 2:366  
 枚举(集合的元素的) 4:798  
**枚举模型 2:366**  
**枚举算子 2:368**  
**枚举问题(计数问题) 2:368**  
**玫瑰线 4:686**  
 梅坦寿春条件期望 4:415  
**门空间 2:279**  
 门限函数 2:72  
 门限元 2:72  
 门限元图 2:72  
**蒙特卡罗方法 3:822**  
 蒙特卡罗方法的修正(辐射输运理论中的) 3:824  
 蒙特卡罗算法(估算重积分值的) 3:822  
 蒙特卡罗算法(解椭圆型方程的) 3:824  
 蒙特卡罗算法(求解第二类积分方程的) 3:823  
**弥散点 2:248**  
**弥散空间 2:249**  
**迷向表示 3:201**  
 迷向部分(内积空间的) 2:877  
 迷向点(极空间的) 4:216  
 迷向二次型 4:382  
 迷向方向(伪 Euclid 空间中的) 4:366  
 迷向流形 3:731  
 迷向平面(伪 Euclid 空间中的) 4:366  
 迷向齐次随机场 4:482  
 迷向曲线 3:763  
 迷向曲线(伪 Riemann 几何学中的) 4:372  
**迷向群 3:201**  
 迷向特征标 2:711  
 迷向伪 Riemann 子空间 4:531  
**迷向线汇 3:201**  
**迷向向量 3:201**  
 迷向向量(不定度规空间中的) 4:905  
 迷向向量(内积空间中的) 2:877  
 迷向向量(伪 Euclid 空间中的) 4:366  
 迷向元 1:360  
 迷向直线 1:593  
 迷向直线(拟双曲空间中的) 4:431  
 迷向直线(上伪 Euclid 空间中的) 1:619  
 迷向锥 3:201  
 迷向锥(伪 Euclid 空间中的) 4:366  
 迷向子簇 5:69  
 迷向子空间 3:201;5:69;5:111  
 迷向子模 1:360  
 迷向子群 4:976;5:107  
 迷向子群(点的) 3:437  
 迷向子群(稳定子群) 4:900  
 迷向坐标 3:199  
 迷向坐标系 3:199  
 迷向 Hölder 条件 2:887  
 迷向  $m$  维超平面 3:528  
 米田 - Grothendieck 嵌入 2:779  
 米田嵌入 2:611;2:779  
 米田引理 2:779  
 米田 Ext 代数 4:235  
 秘密的保护 1:893  
 秘密的放大 1:893  
 秘密的交换 1:893  
 秘密共享 1:893  
 密报 1:893  
**密度定理 2:48**  
 密度定理(Riemann  $\zeta$  函数的零点的) 5:544  
 密度(多维奇异积分方程的) 4:853  
 密度(多元分布的) 3:843  
**密度方法 2:46**  
 密度(负荷的) 4:473  
**密度(概率分布的)\* 2:46**  
 密度(格填装的) 2:722  
 密度估计 2:883;4:543  
**密度(集合的)\* 2:48**  
**密度假设 2:44**  
 密度(解析函数的积分表示的) 3:116  
**密度矩阵 2:45**  
 密度矩阵(态的) 4:991  
**密度(数列的)\* 2:47**  
 密度(双曲度量的) 2:943  
 密度算子 4:414  
 密度(图的) 2:759  
**密度(拓扑空间的)\* 2:48**



- 密度(位势的) 3:905;4:263  
 密度(向量场的源的) 5:414  
 密度(B分布的) 2:638  
 密度(Cauchy 型积分的) 1:513  
 密度(Hilbert 奇异积分的) 2:871  
 密度(Lagrange 函数的) 3:330  
 密码分析 1:891  
 密码分析员 1:891  
 密码强伪随机序列生成器 1:895  
 密码体制 1:891,893  
 密码体制(具有签名能力的)  
   1:896  
 密码协议 1:897  
 密码学 1:891  
 密码组链接 1:894  
 密切 4:51  
 密切点 2:284  
 密切点(实曲线的) 4:862  
 密切二次曲面 4:50  
 密切抛物面 4:50  
 密切平面 4:50  
 密切球面 4:50  
 密切曲线 4:51  
 密切圆 4:49  
 密切圆(曲线的) 2:154  
 密切圆(在曲线的一点处的) 4:49  
 密文 1:891  
 密文空间 1:891  
 密文消息空间 1:893  
 密钥(保密学中的) 1:891;1:893  
 密钥分布(保密学中的) 1:893  
 密钥空间 1:891;1:893  
 密钥空间的熵 1:894  
 密钥排定(DES(数据加密标准)中  
   的) 1:895  
 密着空间(反离散空间,平凡拓扑空  
   间) 1:185  
 幂 4:277  
 《幂除法的剩余》(Euler 著) 2:782  
 幂等测度定理 1:76  
 幂等单子 5:281  
 幂等的代数运算 3:5  
 幂等律 1:73  
 幂等元 3:5  
 幂等元半群 3:5  
 幂等元(半群中的) 4:757  
 幂等元技巧 4:673  
 幂等元(可序半群中的) 4:13  
 幂等元生成的正则半群 4:553  
 幂等中间拟群 2:264  
 幂(点的) 1:590;2:38  
 幂对象(范畴中的) 5:207  
 幂法(对触点配置方案的) 5:116  
 幂法(用于矩阵本征值问题的)  
   3:204  
 幂(反演的) 3:172  
 幂非剩余 5:303  
 幂非剩余(模  $m$  的  $n$  次的) 4:579  
 幂函数 4:277  
 幂级数 4:279  
 幂级数(单复变量的) 4:279  
 幂级数(对  $z_n$  为  $d$  次正则的)  
   5:473  
 幂级数(多复变量的) 4:280  
 幂级数(实变量的) 4:281  
 幂集 5:201  
 幂集公理 1:291  
 幂集(集合的) 5:98  
 幂结合代数 1:77  
 幂结合性 3:400  
 幂零半群 3:914  
 幂零半群(Малыцев 意义下的)  
   3:914  
 幂零代数 3:912  
 幂零导子(环中的) 2:50  
 幂零的自动机 1:256  
 幂零度(次数) 1:537  
 幂零度(幂零群的) 3:913  
 幂零多算子群 3:851  
 幂零多项式矩阵 3:673  
 幂零分量(自同态的 Jordan 分解的)  
   3:229  
 幂零根 4:472  
 幂零根(Lie 代数的) 3:413  
 幂零级(半群的) 3:914  
 幂零矩阵 5:334  
 幂零空间 4:498  
 幂零类 1:537  
 幂零类(半群的) 3:914  
 幂零理想 3:913  
 幂零群 3:913  
 幂零群簇 5:400  
 幂零群的类 3:913  
 幂零性(交错环中的) 1:146  
 幂零元 3:912  
 幂零元(代数的 Lie 代数的)  
   3:230  
 幂零元(Lie 代数的) 3:416  
 幂零指数(代数的) 3:912  
 幂零指数(环元素的) 3:912  
 幂零自同态 3:229  
 幂零 Lie 代数 3:412  
 幂零 Lie 群 3:429  
 幂膨胀 4:923  
 幂剩余 4:278  
 幂剩余符号 4:279  
 幂剩余和非剩余的分布 2:256  
 幂剩余互反律 4:279  
 幂剩余(模  $m$  的) 4:279  
 幂剩余(模  $m$  的  $n$  次的) 4:279;  
   4:579  
 幂同余式 5:303  
 幂么半群 4:127  
 幂么根 4:470  
 幂么矩阵 5:334  
 幂么矩阵群 5:334  
 幂么群 5:334  
 幂么线性群 3:483  
 幂么元 5:333  
 幂么元(代数群的) 3:230  
 幂么子群 4:532  
 幂么自同构 3:229  
 幂(圆束的) 5:122  
 幂运算 3:313  
 幂指数(多项式中的) 4:232  
 免失效 4:576  
 面 2:445  
 面(闭凸集的) 3:545  
 面(抽象单形的) 4:163;4:833  
 面(抽象复形的) 4:163  
 面(单纯复形的) 4:834  
 面(单形的) 4:332  
 面(多面角的) 4:227  
 面(多面体的) 2:445;4:228;4:  
   616  
 面(二面角的) 2:177  
 面(复形的元素的) 1:707  
 面积 1:221  
 面积的极小化 3:758  
 面积定理 1:224  
 面积(多面体曲面的) 1:221

- 面积法 1:224  
 面积法(单叶函数论中的) 5:346  
 面积函数 1:223  
 面积(集合边界的) 1:223  
 面积论 1:222  
 面积(平面图形的) 1:221  
 面积(曲面的) 1:221  
 面积(上 Euclid 空间中三角形的) 1:618  
 面积(凸曲面的) 1:851  
 面积(凸曲面上多边形的) 1:851  
 面积(凸曲面上 Borel 集的) 1:851  
 面积原理 1:224  
 面积(圆盘的) 2:220  
 面积(子流形的) 1:222  
 面积(Riemann 空间中曲面的) 4:655  
 面(解析多面体的) 1:172  
 面(凸多面体的) 1:846  
 面(凸集的) 1:848  
 面(拓扑有序单形的) 4:833  
 面向机器的算法语言 1:128  
 面向机器的语言 3:592  
 面向问题的算法语言 1:128  
 面向问题的语言 4:318  
 面(Weil 区域的) 5:479  
 描述复杂性(正规算法的) 1:121  
 描述复杂性(Turing 机的) 1:121  
 描述集合论 2:59  
 描述性定义 2:22  
 秒 4:736  
 灭绝概率 2:37  
 灭绝概率(无穷时间的) 2:37  
 敏感依赖性(对初始条件的) 1:546  
 名称 3:872  
 名义的多元属性 3:845  
 明文 1:891;1:893  
 明文空间 1:891  
 明文消息空间 1:893  
 命令 4:321  
 命名形式(命名式) 2:521;3:873  
 命题 4:352  
 命题变元 4:354  
 命题公式 4:353  
 命题函数 4:354  
 命题联结词 4:353  
 命题量词 3:557  
 命题片断(命题变元符号) 3:297  
 命题形式 4:353  
 命题演算 4:352  
 命题中间逻辑 3:130  
 摹状算子 1:290  
 模 3:794  
 模变差(函数的) 3:888  
 模(表示的) 4:600  
 模表示(群的) 2:479  
 模不变量 1:905  
 模(乘法格上的) 3:862  
 模(代数曲线上的) 3:221  
 模的扩张 2:424  
 模的深度 2:49  
 模的支集 5:81  
 模的秩 4:490  
 模的重数 3:863  
 模的  $p$  次对称幂 5:96  
 模对 4:772  
 模范畴 3:797  
 模(复数的) 1:21;1:713  
 模格 3:793  
 模(公开加密密钥的) 1:892  
 模关系 4:772  
 模函数 3:789  
 模函数(子群的) 3:791  
 模糊子集 1:273  
 模糊自动机 1:273  
 模(降到域上的) 4:725  
 模(交错数的) 1:147  
 模角(椭圆积分的) 3:802  
 模(局部紧除环上的) 3:543  
 模(局部紧群的) 2:797  
 模具问题 1:797  
 模(具有有限长度的) 3:863  
 模空间 4:722;5:226  
 模空间(不可约瞬子的) 5:530  
 模空间(实流形的) 2:26  
 模空间(Hodge 结构的) 5:226  
 模理想 3:793  
 模理想的恒等元 3:793  
 模律 3:793  
 模(模数,参模) 3:800  
 模拟估计 4:1000  
 模拟退火 3:850  
 模(平面区域的) 3:801  
 模嵌装 3:791  
 模(区域的) 2:436  
 模曲面(解析浮雕) 1:163  
 模曲线 3:787  
 模(曲线族的)\* 3:801  
 模群 3:792  
 模(群的) 3:160  
 模三角形 3:791  
 模上的微分算子 2:167  
 模(实数的) 1:21  
 模式 4:109  
 模式(程序的) 5:155  
 模式(带存储的程序的) 5:155  
 模式(递归程序的) 5:155  
 模式(控制系统的) 1:827  
 模式匹配 4:110  
 模式识别 4:109  
 模式识别的分类学问题 4:109  
 模式识别的基本问题 4:109  
 模式识别算法 4:109  
 模式识别问题 3:7  
 模式(Turing 机的) 5:290  
 模数(次摆线的) 5:282  
 模(数的) 3:968  
 模数(辐角余弦的) 1:867  
 模数(辐角正弦的) 4:844  
 模数(模) 3:800  
 模数(内摆线的) 2:962  
 模数(双连通区域的) 3:798  
 模数(椭圆积分的) 3:802  
 模数(外摆线的) 2:371  
 模数系( $\theta$  函数的) 5:162  
 模数(Jacobi 椭圆函数的) 3:213  
 模数( $n$  连通区域的) 3:798  
 模数( $\delta$  辐角的) 2:40  
 模数( $\theta$  函数的) 5:162  
 模(素端的) 3:801  
 模态 3:783  
 模态(函数的临界点的) 4:866  
 模态(流形上点在 Lie 解作用下的) 4:866  
 模态逻辑 3:781  
 模态逻辑演算 3:559  
 模态谓词演算 4:285  
 模态系统 3:781  
 模态演算 2:734  
 模态语句 3:781



模态运算 3:781  
 模同态 3:543  
 模(同余式的) 1:760  
 模图形 2:226  
 模(伪 Euclid 空间中向量的)  
     4:366  
 模(向量的) 5:404  
**模形式 3:788**  
 模形式(最高水平的) 3:789  
 模型 1:105  
 模型(初等理论的) 2:337  
 模型(代数理论的) 5:349  
 模型(公理系统的) 3:784  
 模型(古典逻辑的) 3:297  
 模型(函数域的) 1:86  
 模型(具有型 $(\alpha, \beta)$ 的) 3:785  
 模型可定义集合 2:735  
 模型空间(流形上伪群的) 4:369  
**模型论 3:784**  
 模型论力迫法 2:695  
 模型(逻辑—数学演算的) 3:561  
 模型(逻辑理论的) 1:398;1:705  
**模型(逻辑中的) 3:784**  
**模型曲面 3:838**  
 模型(识别算法的) 4:109  
 模型(数理逻辑中的) 3:21  
 模型(形式理论的) 4:350  
 模型(一阶语言的) 3:784  
 模型(由逻辑函数的集合生成的)  
     3:605  
 模型(语言的) 3:784  
**模型(正则的)\* 3:784**  
 模型(Snobol 语言中的) 4:885  
 模型( $\Omega$  系统的) 1:109  
 模(由标量的扩张得到的) 3:796  
 模(由标量的限制得到的) 3:796  
 模(由基变换得到的) 3:796  
**模(圆环的)\* 3:801**  
 模(圆环域的) 3:801  
**模(自同构的)\* 3:801**  
 模(自同态的) 3:801  
 模 Klein 群 2:583  
 模 Lie 代数 3:434  
 模(Lie 代数上的) 3:795  
 模(Lie 群的) 2:797  
**模 1 分布 2:255**  
**模 1 分布(高维的)\* 2:255**

膜振动方程 2:115  
 墨西哥帽小波 5:455  
 默认原理(PL/ I 语言中的)  
     4:183  
**母函数(生成函数) 2:693**  
**母图 5:79**  
 母线(直纹曲面的) 4:698  
 母线(柱面的) 1:931  
 母线(锥的) 1:738  
 母线(锥面的) 1:769  
 母锥(再生锥) 1:739  
**目标函数 3:1011**  
 目标可实现性原理 3:931  
 目标(控制的) 1:265  
 目标算法语言(程序的) 5:252

## N

纳布拉算子 2:265  
 奈特(自然单位) 2:363  
 南极 4:218  
 南雲引理 2:162  
 难驾驭递归语言 1:720  
 挠类 4:127  
 挠率—曲率形式(共形联络的)  
     1:749  
**挠率 5:228**  
 挠率(仿射联络的) 5:228  
 挠率函数( $G$  结构的) 2:619  
 挠率(空间的) 5:229  
 挠率(曲线的) 5:228  
**挠率形式 5:230**  
 挠率(映射的) 5:229  
 挠率(有限生成 Abel 群的)  
     5:229  
**挠率张量 5:231**  
 挠率张量场 1:483  
 挠率张量(殆复结构的) 1:137  
 挠率张量(殆率结构的) 1:143  
 挠率(子流形的) 5:228  
 挠率( $h$  配边的) 2:793  
 挠群 1:551;4:126  
 挠系数(有限生成 Abel 群的)  
     5:229  
 挠秩(Abel 群的) 3:829  
**挠子模(扭子模) 5:230**

挠子群 4:126  
 挠子群(Abel 群的) 1:13;5:230  
**内摆线 2:961**  
 内半径(区域关于点的) 1:758  
**内边界 3:131**  
 内边界层 2:142;4:508  
 内变分 3:132  
**内变分方法 3:132**  
 内变量 4:879  
**内波 3:132**  
 内不变系统 5:235  
**内部 3:127**  
 内部(半群的平移包的) 5:254  
 内部边值问题 4:264  
 内部程序通信(Cobol 语言中的)  
     1:621  
 内部(带边界 Riemann 曲面的)  
     4:634  
 内部反问题(位势论中的) 4:272  
**内部观点(关于集合论的) 4:873**  
**内部(集合的)\* 3:129**  
 内部(流形的) 3:600  
 内部算法 4:834  
 内部唯一性定理 5:335  
 内部唯一性性质(解析函数的)  
     5:335  
 内部稳定的反馈系统 2:795  
 内部问题(断层照相法中的)  
     5:185  
 内部置换(么拟群的) 3:565  
 内部状态(Turing 机器的) 5:290  
 内部 Dirichlet 问题 4:264  
 内部 Hom 函子 1:608  
 内部 Neumann 问题 4:265  
 内测度(集合的) 4:53  
 内测度(由测度导出的) 3:700  
 内插(随机过程的) 5:15  
 内乘(法) 2:144;5:110  
 内错角 1:182  
 内导子 1:647  
 内导子(环中的) 2:50  
 内导子 Lie 代数 3:411  
 内导子(Lie 代数的) 1:46  
 内导子(Lie 代数中的) 3:403  
 内点(带边界 Riemann 曲面的)  
     4:634  
**内点(集合的)\* 3:129**

- 内点(区域的) 2:275  
 内点(曲线的) 4:827  
 内点(一维流形的) 3:1016  
**内度量 3:131**  
 内度量空间 2:487  
 内度量(流形上的) 1:850  
 内分位数间距 3:127  
 内分位数距离 3:127  
**内分位数宽度 3:127**  
 内分支(Nicomedes 蚌线的) 3:908  
 内函数 1:418;2:817;4:926  
 内涵逻辑 4:750  
 内涵模型 2:862  
**内积 3:84**  
 内积空间 1:225;2:877;4:283  
 内积模 2:877  
 内积(Hilbert 空间中的) 2:871  
 内渐近级数 4:879  
 内角(多边形的) 4:224  
 内角平分线 4:172  
 内接多边形 1:745;3:84  
 内接覆盖(集合的) 2:185  
**内接角 3:85**  
**内接形与外接形,内切形与外切形 3:84**  
**内接折线 3:85**  
 内解 4:144  
 内径(正多边形的) 4:224  
 内力 2:313  
 内六分位数 3:127  
 内模型(集合论中的) 3:21  
 内模原理 1:922  
 内切曲线 3:84  
**内切形与外切形 3:84**  
 内切圆(三角形的) 4:172  
 内曲率 1:910  
 内曲率(凸曲面的) 1:850  
 内容量 1:467  
**内射 3:82**  
 内射包 3:82;5:539  
 内射包络(度量空间的) 3:730  
 内射包(模的) 2:424;4:333  
**内射对象 3:83**  
 内射分解 3:82;3:83;4:607  
**内射模 3:82**  
 内射态射 3:82  
 内射拓扑 3:998  
 内射拓扑张量积 5:210  
 内射维数 2:181;2:905;3:82  
 内射  $T_0$  偶空间 4:615  
 内生变量 4:543  
 内十分位数 3:127  
 内双平移(半群的) 5:253  
 内算子 4:358  
 内算子(关于曲面的) 3:128  
 内同调流形 1:401  
**内微分算子 3:128**  
 内微分算子(关于曲面的) 3:128  
 内维数核 1:463  
 内稳定集(图中的) 2:759  
 内稳定数(图的) 2:759  
 内象征(算子的) 5:93  
 内形式(代数群的) 2:508  
 内因子(全纯函数的) 1:417  
**内映射 3:128**  
 内右平移(半群的) 5:253  
 内蕴度量 3:131;3:723;5:298  
 内蕴方程(曲线的) 3:874  
**内蕴几何学 3:128**  
 内蕴几何学(曲面的) 2:152  
 内蕴面积 1:223  
 内蕴曲率 2:660  
 内蕴曲率(凸曲面的) 1:850  
 内在方法(引入坐标的) 1:857  
 内在完全子空间(内积空间的) 2:877  
 内在有效轨线(经济发展的) 3:636  
 内在自由代数(泛代数类中的) 2:564  
 内展开式(微分方程解的) 4:877  
 内正则测度 4:473;4:554  
 内置换群(么拟群中的) 3:565  
**内自同构 3:83**  
 内自同构(环的) 3:83  
 内自同构群 1:45  
 内自同构(群的) 3:83  
 内自同构(么半群的) 3:83  
 内自同构(Lie 代数的) 3:84  
 内左平移(半群的) 5:253  
 内 Schwarzschild 时空 4:734  
**能量不等式 2:359**  
 能量不等式方法 2:124  
**能量(测度的)\* 2:359**  
**能量法 2:359**  
 能量法(对稳定性的) 4:968  
 能量泛函 3:834  
 能量范数 2:83;2:360  
**能量积分 2:359**  
 能量(均匀质量分布的) 3:586  
 能量守恒与转化定律 5:160  
 能量算子 4:1007;5:427  
 能量算子(物理系统的) 4:991  
 能量(物理系统的) 4:991  
 能量原理 2:360  
 能谱(平稳随机过程的) 4:987  
 能行不可完全化的逻辑理论 1:705  
 能行的推导 1:705  
 能行泛函 1:791  
 能行集 2:62  
 能行集类( $\alpha$  中的) 2:62  
 能行可计算性 1:132  
 能行描述集合论 2:62  
 能行算子 1:791  
 能行拓扑斯(有效拓扑斯) 4:515; 5:225  
 能行性(形式化语言中的) 2:522  
 能行性要求 2:520  
 能行(有效) $\omega$  规则 1:787;4:1034  
 能指 5:40  
 拟本原类 4:443  
 拟本征函数 4:425  
 拟本征值 4:425  
 拟变分不等式 1:834  
 拟并行性(Simula 语言的) 4:843  
**拟不变测度 4:432**  
**拟测地线 4:428**  
 拟测度 1:931  
 拟处处(在一集合上) 1:298  
**拟簇 4:443**  
 拟簇的生成类 1:111  
 拟簇( $\Omega$  系统的) 1:108  
 拟代数闭域 5:308  
 拟带形域(二次微分的) 2:731  
**拟单表示 4:440**  
 拟单不可约表示 3:53  
 拟单代数群 4:778;4:828  
 拟导数 2:427  
**拟等价表示 4:427**  
 拟等价基 1:317



- 拟等价基(核型空间中的) 3:999  
 拟等式 4:432  
 拟对偶空间(群的) 5:340  
 拟多项式 3:500  
 拟二面体群 4:425  
 拟范数 4:437  
 拟仿射概形 4:417  
 拟仿射态射 4:417  
 拟分离态射(概形的) 4:720  
 拟分裂群 4:442  
 拟分裂群(在域上的) 1:183  
 拟复流形 1:579  
 拟复配边理论 1:622  
 拟赋范空间 4:437  
 拟共形性系数(在一点上的) 4:421  
 拟共形性系数(在一区域中的) 4:421  
 拟共形映射 4:421  
 拟共形映射的边界性质 4:423  
 拟共形映射的二维理论 4:421  
 拟合优度检验 2:739  
 拟合优度检验问题 2:739;3:956  
 拟基本解 4:93;4:261;4:557  
 拟基本解法 4:93  
 拟基本解(伪微分算子的) 4:364  
 拟结合代数 3:927  
 拟结合环 3:927  
 拟结合环和代数 3:927  
 拟解 4:441  
 拟解析函数类 1:477;4:417  
 拟解析函数类(区间上的) 4:418  
 拟解析函数类(在 Hadamard 意义下的) 1:477  
 拟解析类 4:417  
 拟解析  $k$  代数 1:172  
 拟紧仿射概形 1:57  
 拟紧空间 4:421  
 拟紧态射(概形的) 4:720  
 拟紧拓扑空间 1:682  
 拟紧性 1:682  
 拟经典近似 4:420  
 拟局部程序最优化变换 4:322  
 拟局部可观察量代数 4:1007  
 拟可除环 4:671  
 拟可分裂群 4:442  
 拟可数紧拓扑空间 1:682  
 拟扩散法 5:257  
 拟离散谱 4:425  
 拟离散谱(动力系统的) 4:933  
 拟立方体连续统 1:903  
 拟连通分支(拓扑空间中一点的) 1:780  
 拟幂零群 2:492  
 拟幂么群作用 3:813  
 拟幂么元 4:123  
 拟内射模 3:82  
 拟逆元 4:440  
 拟凝聚层 4:420  
 拟平均 4:419  
 拟平均法 4:419  
 拟切方程 1:803  
 拟切(向量函数的) 1:803  
 拟区间 5:506  
 拟全称代数系统类 1:110  
 拟群 4:429  
 拟群系 4:429  
 拟三角 Hopf 代数 4:411;5:529  
 拟射影簇 2:902  
 拟射影概形 4:439  
 拟射影态射 4:439  
 拟双曲空间 4:431  
 拟双周期整函数 5:161  
 拟素数 4:439  
 拟特征标 4:420  
 拟同构 2:54  
 拟桶型空间 3:81  
 拟椭圆空间 4:426  
 拟拓扑斯 4:207  
 拟完全核型空间 3:997  
 拟完全化 5:216  
 拟完全局部凸拓扑向量空间 5:215  
 拟完全桶型空间 3:994  
 拟线性常微分算子 2:166  
 拟线性方程 4:433  
 拟线性化 4:436  
 拟线性偏微分方程 3:941;3:950  
 拟线性偏微分算子 2:166  
 拟线性双曲型方程和方程组 4:433  
 拟线性系统 3:948  
 拟线性一阶偏微分方程 2:128  
 拟相等除子理想 2:275  
 拟辛变换 4:442  
 拟辛空间 4:442  
 拟信息扩充 4:432  
 拟序 4:6;4:103;4:283  
 拟序(对策的分配集上的) 1:858  
 拟循环群 4:425  
 拟么群(具有可逆性质的) 3:565  
 拟么群(具有弱可逆性质的) 3:565  
 拟一致结构 5:325  
 拟一致收敛 4:442  
 拟一致子群 5:326  
 拟有补格 3:359  
 拟有限态射(概形的) 4:720  
 拟域 5:150  
 拟运算 1:726  
 拟张量几何对象 2:712  
 拟阵 3:677  
 拟整体方法 3:849  
 拟正规空间 4:437  
 拟正规拓扑空间 3:988  
 拟正交多项式 3:805  
 拟正则点(遍历集中的) 2:382  
 拟正则动力系统 3:238  
 拟正则泛函 5:467  
 拟正则根(根基) 4:440  
 拟正则环 4:440  
 拟正则理想 4:440  
 拟正则映射 4:421  
 拟正则元 4:440  
 拟周期 5:162  
 拟周期半群 4:127  
 拟周期函数 4:438  
 拟周期演化(动力系统的) 1:546  
 拟周期运动 4:438  
 拟周期振动 2:826  
 拟周期状态 2:506  
 拟自反 Banach 空间( $n$  阶) 1:305  
 拟自然正规形式 3:978  
 拟自相似集 2:543  
 拟坐标 2:892  
 拟 Abel 函数 4:417  
 拟 Euclid 空间 4:427  
 拟 Frobenius 代数 2:575  
 拟 Frobenius 环 4:427  
 拟 Fuchs 群 2:584;3:266  
 拟 Fuchs 群(亏格为 1 的) 3:266

- 拟 Fuchs 群(亏格为 2 的) 3:266  
 拟 Goldbach-Euler 问题 1:37  
 拟 Hopf 代数 2:927  
 拟 Riemann 空间 4:775;4:777  
 逆半群 2:424;3:175  
**逆半群 3:175**  
 逆编码定理 3:80  
 逆变换 2:516  
 逆变换公式(Hardy 变换的)  
   2:821  
 逆变换公式(Hermite 变换的)  
   2:855  
 逆不变 Haar 测度 2:797  
**逆步表示 1:824**  
 逆步表示(群在线性空间中的表示  
   的) 1:824  
 逆步矩阵(矩阵的) 1:824  
 逆步模 1:45  
 逆步同构(对环上右模的自同构的)  
   1:824  
**逆步自同构 1:824**  
 逆插值法 1:572  
 逆插值问题 3:134  
 逆道路 4:108  
 逆迭代法 4:99  
 逆迭代法(位移的) 4:99  
**逆定理 1:841**  
 逆定理(函数逼近论中的) 1:202;  
   1:211  
 逆(对应的) 1:866  
 逆(二元关系的) 1:365  
 逆范畴 1:503;2:290  
 逆分析方案 1:29  
 逆根系 4:683  
 逆公式(Banach 空间及其对偶空间  
   的范数的) 1:305  
 逆(关系的) 1:866  
 逆和(集合的) 1:34  
 逆紧映射(拓扑空间的) 4:351  
**逆矩阵 3:171**  
 逆(矩阵的) 3:671  
 逆矩阵法 4:833  
 逆矩阵(域上的方阵的) 3:171  
 逆控制原理 2:278  
**逆抛物型偏微分方程 3:171**  
 逆谱 1:472;4:328  
 逆谱变换 3:291  
 逆谱变换法 2:810;3:291  
 逆(群元素的) 2:781  
 逆三角形不等式(反三角形不等式)  
   4:366;4:569  
 逆散射变换 3:291  
 逆散射法 2:726;2:810;3:291  
 逆算法(结合演算中的) 2:785  
 逆算子 3:170  
 逆算子(单值满算子的) 3:170  
 逆通信信道 1:919  
 逆微分 2:165  
 逆问题(谱分析的) 4:930  
 逆系统 4:328;5:120  
 逆系统(范畴中的) 5:120  
 逆线性变换 3:512  
 逆(线性算子的) 3:491  
 逆向量 5:404  
 逆向 Колмогоров 方程 3:284  
 逆象层 4:806  
 逆象(层的) 4:806  
 逆象函子 2:394  
 逆象(解析形变的) 2:26  
 逆象同态 3:148  
 逆象(原象) 2:589  
 逆序 4:130  
 逆序数(置换的) 4:132  
 逆演算 2:786  
**逆映射 3:170**  
 逆映射(单值满映射的) 3:170  
 逆有理变换 2:516  
 逆元(环元素的) 5:337  
 逆元(拓扑群的元素的) 3:537  
 逆运算(二元关系的) 1:365  
 逆追赶(逆双搜索) 2:286;4:24  
 逆 gsm 映射 2:516  
 逆 KAM 定理 4:439  
 年龄近似 3:898  
**年龄相关分支过程 1:439**  
**粘性 5:430**  
**粘性解 5:430**  
 粘性解(Bellman 方程的) 1:832  
 粘性上解 5:430  
 粘性下解 5:430  
**凝聚层 1:641**  
**凝聚代数层 1:640**  
**凝聚点 1:731**  
**凝聚点(集合的)\* 1:731**  
 凝聚定理(范畴论中的) 1:505  
 凝聚对象(范畴中的) 1:641  
**凝聚环 1:641**  
**凝聚解析层 1:640**  
 凝聚解析空间 1:640  
 凝聚模 1:641  
 凝聚谱 4:911  
 凝聚区间(段)(运动群理论中的)  
   2:788  
 凝聚上同调维数 1:643  
 凝聚实解析空间 4:511  
**凝聚算子 1:731**  
 凝聚条件 3:817  
 凝聚映射 2:892;3:612  
 扭根 4:471;5:230  
 扭积 4:871  
 扭模 3:796;5:230  
 扭(挠)理论 5:230  
 扭曲 5:107  
 扭群 1:583  
 扭群环 1:890  
 扭形式 2:510  
 扭转相 3:737  
 扭转(由 Tate 主题的) 3:838  
**扭子模 5:230**  
 扭子群 5:230  
 扭 Chevalley 群 1:583  
 纽结 1:433;3:273  
**纽结表 3:272**  
**纽结的配边 1:626**  
**纽结和链环的二次型 3:278**  
 纽结和链环的分类 3:276  
 纽结和链环的历史 3:276  
 纽结和谐群 1:627  
**纽结理论 3:273**  
 纽结配边性 1:627  
 纽结(配边于零的) 1:626  
**纽结球面 3:279**  
**纽结群和链环群 3:271**  
**纽结图和链环图 3:269**  
 纽结(型  $L$  的) 3:844  
 浓度边界层 1:411  
 浓原子范畴 3:541  
 女生问题 4:1029  
 暖储备 4:578



## O

偶函数 2:407  
 偶极 2:287  
 偶卵形线(实代数曲线的) 4:509  
 偶数 2:407  
 偶相对张量 5:145  
 偶置换 4:132  
 偶 Clifford 代数 1:60;4:950  
 偶 Clifford 群 4:950  
 偶 Dirichlet 特征标 2:209  
 偶  $\theta$  特征 5:162

## P

拍(强迫 van der Pol 振子的)  
     5:369  
 排斥点 3:234  
 排斥集 4:585  
 排斥子 4:585  
 排除法 3:822  
 排队 4:446  
 排队(带拒绝的)\* 4:452  
 排队(等待制的单通道的)\*  
     4:453  
 排队(等待制的多通道的)\*  
     4:449  
 排队论 4:457  
 排队输入流(呼唤的) 4:448  
 排队系统 4:446  
 排队系统(常规的) 4:446  
 排队系统(等待制的) 4:446  
 排队系统(队长有限的) 4:446  
 排队系统(多服务台的) 4:447  
 排队系统(具有成批输入流和成批服务的) 4:447  
 排队系统(具有有限等待空间的)  
     4:446  
 排队系统(损失制的) 4:446  
 排队系统(自控服务的) 4:446  
 排列 4:130  
 排列 1:234  
 排列(不重复的) 1:234  
 排列(集合元素的) 1:661

排列检验 4:134  
 排列(可重复的) 1:234  
 排列类 1:234  
 排序 4:6  
 排序算法 1:125  
 排中律 3:365  
 判别分析 2:238  
 判别规则 2:241  
 判别函数 2:241  
 判别曲线 2:240  
 判别式 2:236  
 判别式(代数的) 2:237  
 判别式(代数数域的) 2:237  
 判别式(代数数域中格的) 2:237  
 判别式(多项式的) 2:236  
 判别式(二元二次型的) 1:364  
 判别式(关于向量组的半双线性型的) 2:236  
 判别式(关于自同构的半双线性型在基下的) 2:236  
 判别式(理想的) 2:237  
 判别式(模函数理论中的) 3:790  
 判别式(椭圆曲线的) 2:344  
 判别式(域的基的) 2:237  
 判别式(域的元素组的) 2:236  
 判别式(中心单代数的) 2:238  
 判别式(Weierstrass 函数的)  
     5:468  
 判别问题 2:238  
 判别问题(分布的) 2:241  
 判别信息梯度 2:241  
 判别张量 2:242  
 判别子集 4:857  
 判定过程 4:751  
 判定问题 2:19  
 判定问题(半群不变性质的)  
     1:131  
 判定问题(Diophantus 集的)  
     2:197  
 旁切(内切)曲线 3:84  
 旁切圆(三角形的) 4:172  
 抛物插值 3:369  
 抛物的分式线性映射 2:546  
 抛物的球面束 5:122  
 抛物的透射(几何学中的) 2:907  
 抛物的圆束 5:122;1:752  
 抛物点 4:72

抛物点(曲面的) 1:908;2:154  
 抛物回归 4:73  
 抛物尖点(Fuchs 群的) 2:584  
 抛物螺线 4:73  
 抛物面 4:75  
 抛物面坐标 4:75  
 抛物模形式 3:788  
 抛物抛物线 4:170  
 抛物脐点 5:165  
 抛物球面罗 5:461  
 抛物扇形 4:740  
 抛物射线(线汇中的) 1:765  
 抛物双曲类线 4:170  
 抛物退化的线性偏微分方程  
     2:112  
 抛物线 4:66  
 抛物线法 4:66  
 抛物线(偏微分方程的) 3:774  
 抛物线坐标 4:67  
 抛物型二阶偏微分方程 2:130  
 抛物型方程法 4:68  
 抛物型方程及方程组的混合和边值问题 3:770  
 抛物型分式线性变换 3:791  
 抛物型复数 2:279  
 抛物型偏微分方程 4:69  
 抛物型偏微分方程,数值方法  
     4:70  
 抛物型偏微分算子 2:166  
 抛物型线性偏微分方程 2:111  
 抛物型线性微分算子 3:476  
 抛物型圆网 3:890  
 抛物型直线网 3:890  
 抛物元素(Fuchs 群的) 2:583  
 抛物直线(拟双曲空间中的)  
     4:431  
 抛物直线(上伪 Euclid 空间中的)  
     1:619  
 抛物指数函数 3:1022  
 抛物柱函数 4:67  
 抛物柱面 4:67  
 抛物子代数 4:73  
 抛物子群 4:74  
 抛物子群(线性代数群的) 4:74  
 抛物子群(线性代数群的  $k$  有理点的群的) 4:74  
 抛物子群(Coxeter 群的) 1:884

- 抛物子群(Tits 系统的) 4:74  
 抛物 Riemann 曲面 5:328  
**陪集** 1:867  
 陪集(代数系统的) 1:106  
 陪集(群模子群对的) 2:282  
 配比曲面(等距曲面的) 1:642  
**配边** 1:622  
 配边标架流形 4:939  
 配边等距结构 1:627  
 配边矩阵 1:626  
 配边类(纽结的) 3:844  
 配边理论 1:622  
 配边流形 3:601  
 配边纽结 1:626;3:844  
**配边(纽结的)\*** 1:626  
 配边于零的矩阵 1:626  
 配边(Poincaré 复形的) 1:624  
**配对** 4:64  
 逐次近似法(逐次逼近法) 1:548;  
 4:789  
 配方法 4:381  
 配分函数 2:728;4:1016  
**配极** 4:216  
 配极变换 4:216  
 配极(集合的) 1:34  
 配极群 4:217  
 配极容许射影变换 4:217  
 配极凸体 1:848  
 配数(字的) 1:233  
**配置法** 1:659  
 配置法的收敛(对线性边值问题的)  
 1:659  
 配置结点 1:659  
 配子代数 2:696  
**喷射** 4:957  
**膨胀** 2:177  
 膨胀(仿射平面的) 4:169  
 膨胀理论 4:413  
 膨胀同态 1:650  
 膨胀(压缩算子的) 1:821  
**膨胀映射** 2:177  
 碰撞估计 3:823  
 碰撞积分 1:549  
 碰撞算子 1:386,549  
 劈形算子 2:808  
**劈锥曲面** 1:781  
 毗连 2:570  
 毗连(形式语言的) 2:512  
 毗连(形式语言中概念的) 1:129  
 毗连运算(多元组的) 3:154  
 毗连运算(字的) 1:260  
 毗连(Snobol 语言中模型的)  
 4:885  
 匹配 1:665;2:755;5:474  
 匹配法 4:877  
 匹配渐近展开 4:144  
 匹配渐近展开法 2:143  
 匹配矢列式 2:698  
 匹配问题 1:665  
**偏差** 2:223  
**偏差(逼近函数的)\*** 2:67  
 偏差(常微分方程中自变量的)  
 2:139  
 偏差(单位立方体顶点的) 1:393  
**偏差(近似的)\*** 2:224  
 偏差(序列的) 2:223  
 偏差原理 3:10  
**偏导数** 4:96  
 偏导数(对坐标系的) 5:133  
 偏导数(多元函数的) 2:101  
 偏多值上同调运算 1:655  
 偏好关系 5:362  
 偏聚值集 1:614  
 偏历动力系统 2:53  
**偏量** 2:68  
**偏微分** 4:97  
 偏微分(多元函数的) 2:94;2:101  
 偏微分(多元函数在一点的)  
 1:694  
**偏微分方程** 2:111  
**偏微分方程边值问题** 1:424  
**偏微分方程,变分法** 2:130  
 偏微分方程,波动算子 2:5  
 偏微分方程的型的变更线 3:774  
 偏微分方程的型的退化线 3:774  
**偏微分方程(二阶的)\*** 2:129  
**偏微分方程,泛函解法** 2:123  
**偏微分方程,复变方法** 2:114  
 偏微分方程(关于一非零向量为双  
 曲型的) 3:486  
 偏微分方程(具非负特征形式的)  
 2:36  
**偏微分方程,具有间断初始(边界)  
 条件的问题** 2:120  
**偏微分方程,具有间断系数的问题**  
 2:119  
**偏微分方程(流形上的)\*** 4:97  
**偏微分方程(奇异系数的)\***  
 2:131  
 偏微分方程(双曲型的) 2:944  
**偏微分方程,斜导数问题** 2:126  
 偏微分方程(严格双曲型的)  
 2:945  
**偏微分方程(一阶的)\*** 2:127  
 偏微分方程(在其定义域中椭圆型  
 的) 2:352  
**偏微分方程,在特征上给出数据的  
 问题** 2:118  
 偏微分方程(在一点处双曲型的)  
 2:944  
 偏微分方程(在一点处椭圆型的)  
 2:352  
 偏微分方程(在一区域中椭圆型的)  
 2:352  
 偏微分方程(正规双曲型的)  
 3:262  
**偏微分方程,自由边界问题** 2:122  
 偏微分方程组 2:112  
 偏微分方程组(流形上的) 3:180  
 偏微分方程组( $r$  阶的) 4:98  
**偏微分方程,Fischer - Riesz  
 (Picone)法** 2:121  
 偏微分算子 1:424  
 偏微分算子(有相同强度的)  
 4:301  
**偏相关系数** 4:96  
 偏斜度(分布的) 1:245  
 偏斜系数 1:244  
 偏斜(形变张量的) 2:32  
**偏序** 4:99  
 偏序环 4:12  
 位值向量 4:473  
**偏序集** 4:100  
**偏序集,表示** 4:590  
**偏序集,长度** 3:389  
**偏序集的反同构** 1:185  
**偏序集的中心** 1:539  
 偏序集(右滤过的) 1:682  
 偏序集(左滤过的) 1:682  
**偏序群** 4:100  
 偏序么拟群 3:565



- 偏倚 1:352  
 偏倚(点估计量的) 4:201  
 偏倚(统计估计量的) 4:495  
 偏应力张量 5:32  
 偏约化微分多项式 2:98  
 偏增量(部分增量)(多元函数的) 2:101;5:232  
 偏正合同调论 2:913  
 偏自动机 1:272  
 片断 4:353  
 片分解(测度的) 5:12  
 漂移 3:567  
**漂移方程** 2:287  
 漂移方程组 2:288  
 漂移系数 2:175;3:207  
 漂移系数(随机微分方程的) 5:4  
 贫集 1:296;1:506;2:695  
 频率 4:307  
**频率定理** 2:572  
 频率(发生的) 4:312  
 频率方程 2:322  
 频率俘获(强迫 van der Pol 振子中的) 5:369  
 频率(强迫振动的) 2:505  
 频率特性(函数的) 2:529  
 频率特征 4:961  
 频率特征(线性定常控制系统的) 5:243  
 频率稳定性准则 4:961  
 频率(谐振动的) 2:835  
 频率准则(绝对不稳定性的) 4:962  
 频率(自由谐振动的) 2:567  
 频闪观测法 3:949  
 频域探测 2:726  
 品质问题(关于微分对策的) 2:147  
 品种(区组设计的) 1:375  
 平点 2:498  
 平凡 $(-1)^k$ 构造 5:447  
 平凡表示 5:337  
 平凡不变子空间(表示的) 3:166  
 平凡测试(控制论中的) 5:151  
 平凡超滤子 5:307  
 平凡簇 1:112  
 平凡代数系统类 2:565  
 平凡等距变换 1:851  
 平凡度量 3:727  
 平凡泛代数簇 5:402  
 平凡范数 3:968  
 平凡赋值 5:365  
 平凡关系(群演算中的) 2:786  
 平凡化(法丛的) 3:832  
 平凡化(理想层的) 4:607  
 平凡化配边理论 1:622  
 平凡化(纤维空间的) 2:466  
 平凡交叉同态 1:650  
 平凡解(非自治系统的) 2:377  
 平凡解(齐次线性积分方程的) 3:95  
 平凡解析形变 2:26  
 平凡链环 3:273  
 平凡零点(Dirichlet  $L$  函数的) 2:212  
 平凡零点(Riemann  $\zeta$  函数的) 5:542  
 平凡纽结 3:844  
 平凡偏序集 4:100  
 平凡拓扑空间 1:185  
 平凡弯曲场 2:31  
 平凡弯曲场(无穷小形变的) 3:66  
 平凡无穷小变形 3:66  
 平凡纤维空间 2:466  
 平凡线性组合(向量的) 5:417  
 平凡相关关系 2:568  
 平凡向量丛(秩为  $n$  的) 5:410  
 平凡形变(代数的) 2:29  
 平凡运算(泛代数簇中的) 5:402  
 平凡主齐性空间 4:298  
 平凡主纤维丛 2:618  
 平凡自校正模式 4:574  
 平凡  $G$  对象 4:298  
 平凡  $h$  配边 2:794  
 平凡  $t$  设计 5:127  
**平方** 4:959  
 平方多项式的根的方法 3:528  
 平方风险 4:494  
**平方根法** 4:959  
 平方根(自伴线性变换的) 4:748  
 平方可积表示 3:86  
 平方可积积分核 3:202  
 平方偏差(测量的) 3:368  
**平分面** 1:371  
**平分线** 1:371  
 平分线(角的) 1:371  
 平分线(三角形的) 1:371  
 平衡不完全区组设计 1:376; 1:662  
 平衡测度(容量测度) 1:467; 4:659;4:677  
 平衡乘子法 5:257  
 平衡点(静止点)(自治系统的) 1:281  
 平衡对策 1:855  
 平衡法 2:87  
 平衡范畴 2:449;2:694  
 平衡分布(统计力学中的) 4:1005  
**平衡关系** 2:377  
 平衡关系(值分布论中的) 2:377  
 平衡恒等式(半群簇中的) 5:401  
**平衡环** 1:297  
**平衡集** 1:297  
 平衡解 3:931  
**平衡模** 1:297  
 平衡态 4:396;4:1007  
 平衡态(单参数自同构群下不变的) 2:384  
 平衡态(非自治系统的) 2:377  
 平衡态(函数的) 5:192  
 平衡条件(关于运输问题的) 5:259  
 平衡位势(容量位势) 1:467; 4:265;4:677  
**平衡位置** 2:376  
 平衡问题 4:678  
 平衡系综 4:991  
 平衡性质(亚纯函数的) 2:377  
 平衡状态(经济学中的) 3:638  
 平角 1:182  
**平截头棱锥体** 4:304  
 平均包络曲面 2:409  
**平均逼近** 1:195  
 平均遍历定理 1:370;5:443  
 平均传输速率(信道的) 5:255  
 平均方法 4:141  
**平均化** 1:285  
 平均极限 5:452  
 平均渐屈面 2:409  
 平均流法 5:257  
 平均漏检率(不合格产品的) 4:711

- 平均偏差 4:318  
 平均曲率 3:695  
 平均曲率法向量(Euclid 空间中子流形的) 3:696  
 平均曲率(3 维 Euclid 空间中曲面的) 3:695  
 平均曲面(线汇的) 1:766  
 平均失真度量(编码的) 3:76  
 平均收敛 1:839  
 平均收敛( $p$  阶的)\* 1:837  
 平均顺序统计量 4:8  
 平均误差 4:318  
 平均信息 3:73  
 平均译码错误概率 2:386  
 平均运动 1:284  
 平均值 1:283  
 平均值变化定理(统计力学中的) 1:284  
 平均值(殆周期函数的) 1:141; 2:528  
 平均值泛函(殆周期函数的) 1:141;1:139  
 平均值(随机变量的) 3:641  
 平均值性质 2:828  
 平均值(沿轨道的) 1:370  
 平均秩 5:173  
 平均周期函数 2:683  
 平均转动 1:284  
 平均  $p$  叶函数(在面积的) 3:866  
 平均  $p$  叶函数(在圆周上的) 3:866  
 平行线(椭圆空间中的) 4:624  
 平面 4:168  
 平面槽谷 5:283  
 平面代数元( $k$  阶的) 3:604  
 平面的外部反问题(位势论中的) 4:272  
 平面地图 2:761  
 平面点(流形的) 2:342  
 平面多边形 4:223  
 平面反问题(位势论中的) 4:272  
 平面公理 1:783  
 平面构形 1:741  
 平面基多边形 4:172  
 平面角 1:182  
 平面晶体群 1:898  
 平面片 3:44  
 平面曲线 2:154  
 平面三角剖分 2:761  
 平面三角学 4:171  
 平面三元环 4:341;5:149  
 平面扇形 4:739  
 平面实代数曲线 4:169  
 平面实代数曲线的类 4:169; 4:184  
 平面束 5:122  
 平面网 3:890  
 平面稳态弹性振动 2:333  
 平面无处稠密的连续统 1:463  
 平面形变 2:331  
 平面与环面的交线 4:138  
 平面 Hausdorff 测度 2:842  
 平面  $p$  罗 5:462  
 平坦层 2:497  
 平坦常曲率 Riemann 流形 1:783  
 平坦点 2:498  
 平坦点(曲面的) 1:908  
 平坦点(曲线的) 2:498  
 平坦范数 2:497  
 平坦分解 4:607  
 平坦覆盖 5:328  
 平坦光滑函数 5:134  
 平坦函数芽 5:134  
 平坦环 4:899  
 平坦集 2:864  
 平坦集(向量空间中的) 5:417  
 平坦解析映射 1:165  
 平坦解析映射(在一点上的) 1:165  
 平坦空间 4:899  
 平坦联络 4:78  
 平坦链 2:498;4:802  
 平坦模 2:497  
 平坦上链 2:496;2:498;4:802  
 平坦态射 2:497  
 平坦维数 2:181  
 平坦形式 2:496  
 平坦  $p$  罗 5:462  
 平坦 Riemann 曲面 5:328  
 平头立方体 4:776  
 平头十二面体 4:776  
 平稳测度 4:984  
 平稳策略 1:829  
 平稳单速齐次输运方程 5:434  
 平稳等待时间过程 4:453  
 平稳点(动力系统的) 3:164  
 平稳点(非自治系统的) 2:377  
 平稳点(光滑映射的) 1:889  
 平稳点(函数的) 4:984  
 平稳对偶性 4:703  
 平稳方程组(图形的) 2:469  
 平稳分布 4:984  
 平稳过程 2:363  
 平稳介质 1:274  
 平稳控制 1:829  
 平稳量子随机过程 4:413  
 平稳奇点(常微分方程的) 1:179  
 平稳曲线场(变分问题的) 2:435  
 平稳随机过程 4:985  
 平稳随机过程的谱分析 4:912  
 平稳随机过程的谱函数 4:918  
 平稳随机过程(广泛意义下的) 4:985  
 平稳随机过程(严格意义下的) 4:985  
 平稳相位法 4:984  
 平稳信息源 3:76  
 平稳性(Poisson 过程的) 2:335  
 平稳序列 4:784  
 平稳增量 5:18  
 平稳增量随机过程 5:18  
 平稳增量随机过程(广泛意义下的) 5:18  
 平稳增量随机过程(严格意义下的) 5:18  
 平稳子群 4:988  
 平稳子群(点关于群的) 4:1  
 平稳最优策略 5:5  
 平稳 Марков 过程 3:625  
 平行标架场(绝对的)\* 4:82  
 平行场 4:79  
 平行超平行体 4:84  
 平行多面体 4:83  
 平行公理 4:83  
 平行公设 2:468  
 平行横截集(横截系中的) 5:261  
 平行角 3:524,525  
 平行类(点集的) 4:1029  
 平行六面体 4:84  
 平行曲面 4:82  
 平行曲线 4:80



- 平行四边形 4:83  
 平行四边形法则 4:283  
 平行投影 4:326  
 平行微分形式 4:79  
**平行位移 4:77**  
 平行位移(向量的) 4:78  
 平行位移(余向量场的) 4:78  
 平行位移(张量场的) 4:78  
**平行线 4:80**  
 平行线(链环的分支的) 3:273  
 平行线(模型曲面的) 3:838  
 平行线(纽结分支的) 3:271  
 平行线(旋转曲面的) 4:690  
 平行线(Euclid 几何学中的)  
     3:524  
 平行线 Лобачевский 几何学中的)  
     3:524  
 平行向量场 4:79  
 平行向量场(沿曲线的) 1:53  
 平行向量场(沿一曲线的) 4:467  
 平行性(球上的) 4:943  
**平行移动 4:78**  
 平行移动(仿射空间中的) 1:58  
 平行张量场 4:79  
**平行直线 4:81**  
 平行直线(双曲平面中的) 4:196  
 平行直线(Euclid 几何学中的)  
     4:81  
 平行直线(Лобачевский 几何学中的)  
     4:82  
 平行轴测投影法 1:293  
**平延 5:260**  
**平移 5:252**  
**平移(半群的)\* 5:253**  
 平移包(半群的) 5:253  
**平移不变度量 5:252**  
 平移不变量(自治系统周期解的)  
     4:128  
 平移对称 5:106  
 平移(仿射空间中的) 1:58  
 平移函子 2:53  
 平移平面 4:169  
**平移曲面 5:253**  
 平移轴 5:106  
**平直点 4:203**  
 评价函子 3:851  
 屏蔽拓扑空间 4:76  
 迫近函数(邻近函数) 4:5;2:377  
 迫近函数(亚纯函数的) 3:900  
 破产(输光)问题 1:331  
 破译水平(密码分析的) 1:894  
 剖分法 2:372  
 剖分合同 5:135  
**铺砌 4:111**  
 铺砌空间 4:111  
 铺砌(铺砖) 2:725;4:59;5:444  
 朴素场所 3:540  
 朴素集合论 4:799  
 普遍可测集 4:121  
 普遍(一般)有效逻辑公式 2:672;  
     3:130;5:284  
 普遍有效逻辑公式 2:673  
**普遍有效性 2:672**  
 普遍有效性(命题公式的) 2:672  
 普遍有效性(谓词公式的) 2:673  
 普通随机点过程 5:11  
 普通正弦曲线 4:868  
**谱半不变量 4:920**  
**谱半径 4:919**  
 谱半径公式 1:301  
 谱半径(矩阵的) 4:1040  
 谱半径(Banach 代数元的) 1:300  
 谱(保测变换的) 1:194  
 谱变换 3:290  
 谱(表示广义上同调论的) 2:678  
 谱表示(随机函数的) 4:913  
**谱测度 4:919**  
 谱测度(过分函数的) 3:629  
 谱测度(随机过程的) 1:862  
 谱超同调函子 2:960  
**谱窗 4:931**  
 谱窗生成元 4:932  
 谱(殆周期函数的) 2:528  
 谱定理(正规线性算子的) 3:495  
**谱(动力系统的)\* 4:932**  
 谱(对应于配边理论的) 1:578  
 谱(非线性算子的) 3:948  
 谱(分布的) 3:805  
 谱分布函数 4:918  
**谱分解 4:920**  
 谱分解定理 4:920  
 谱分解(随机函数的)\* 4:913  
 谱分解(线性算子的)\* 4:912  
**谱分析 4:910**  
**谱分析(平稳随机过程的)\***  
     **4:912**  
 谱分析(时间序列的) 4:912  
 谱分析问题(Lie 群上的) 3:54  
 谱分析(自伴微分算子的) 4:928  
 谱(复形的) 3:881  
**谱估计量(参数的)\* 4:917**  
**谱函数 4:917**  
 谱(函数的) 2:529  
**谱函数的估计量 4:917**  
**谱函数(平稳随机过程的)\***  
     **4:918**  
 谱函数(齐次随机场的) 4:918  
 谱函数(Laplace 变换的) 2:687  
**谱(环的)\* 4:933**  
 谱迹(算子的) 3:996  
 谱(积分算子的) 2:559  
**谱集 4:923**  
 谱(集函数的) 3:805  
 谱集(交换 Banach 代数的) 4:923  
 谱集(算子的) 4:923  
 谱(交换 Banach 代数元的) 1:673  
**谱(矩阵的)\* 4:933**  
**谱(空间的)\* 4:935**  
**谱类型 4:931**  
 谱类型(测度的) 4:931  
 谱类型(从属于线性算子的)  
     4:931  
 谱累积量 4:920  
**谱理论 4:924**  
 谱理论(动力系统的) 2:383  
 谱理论(算子的) 2:595  
**谱理论(微分算子的)\* 4:927**  
 谱理论(线性算子的) 4:924  
 谱流形 4:924  
**谱密度 4:916**  
**谱密度估计量 4:916**  
 谱(齐次对称积分方程的) 3:99  
 谱奇点(算子的) 3:962  
 谱扰动理论 4:910  
 谱上同调 1:531  
**谱算子 4:919**  
**谱(算子的)\* 4:934**  
 谱(随机过程的) 4:915  
 谱条件数 3:756  
**谱同调 4:918**  
 谱同调群 2:292

谱同调群(带紧支集的) 4:918  
 谱拓扑 4:933  
 谱(拓扑空间的) 4:437  
 谱系(关于 Riesz 空间生成带的)  
 4:662  
 谱(线性变换的) 2:323  
 谱(线性算子的) 3:492  
 谱性质(保测变换的) 1:194  
 谱性质(动力系统的) 4:932  
**谱序列 4:921**  
 谱序列(覆盖的) 1:645  
 谱序列(连续映射的) 3:391  
 谱映射(次数为  $r$  的) 4:935  
 谱映射定理 4:934  
**谱(元素的)\* 4:933**  
 谱子空间 4:924  
**谱综合 4:923**  
 谱综合集 4:924  
 谱综合集(交换 Banach 代数的)  
 4:923  
 谱(Banach 代数的) 1:553  
 谱(Banach 代数元的) 1:300  
**谱( $C^*$  代数的)\* 4:932**  
 谱(Ляпунов 特征指数的) 3:579  
**瀑布 1:497**

## Q

期望(超几何分布的) 2:955  
 期望(程序设计中数据的) 4:885  
 期望返回时间 4:199  
 期望(随机变量的) 3:641  
 期望 von Neumann 子代数 4:415  
 齐次边值问题 1:423;1:425  
 齐次差分方程 2:77  
 齐次超平面 2:960  
 齐次乘性泛函 4:416  
 齐次的分次模 2:742  
 齐次点坐标 4:332  
 齐次调和多项式 2:833  
 齐次独立增量随机过程 5:18  
 齐次多项式 4:233  
**齐次函数 2:898**  
 齐次函数(入次的) 2:898  
 齐次浑沌 5:503  
 齐次积分方程(对应于非齐次积分

方程的) 3:94  
 齐次基(格的) 4:551  
 齐次集合(实数的) 5:248  
 齐次扩散方程 2:174  
 齐次理想 4:330  
 齐次逻辑系统 3:786  
 齐次模元(次数  $n$  的) 2:742  
 齐次切线坐标 5:134  
 齐次算术最小值 2:722;2:855  
**齐次算子 2:898**  
 齐次算子( $n$  次的) 3:947  
**齐次随机场 4:482**  
 齐次随机场(广泛意义下的)  
 4:482  
 齐次随机场(严格意义下的)  
 4:482  
**齐次凸锥 2:897**  
 齐次问题(数的几何中的) 2:721  
 齐次问题(消元理论中的) 2:340  
 齐次无记忆信道 3:710  
 齐次线性常微分方程 3:496  
 齐次线性常微分方程(二阶的)  
 3:499  
 齐次线性常微分方程组 3:497  
 齐次线性代数方程组 3:461  
 齐次线性方程 3:480  
 齐次线性积分方程 3:94  
 齐次线性偏微分方程 2:111  
 齐次形式 3:482  
 齐次有限状态通信信道 1:544  
 齐次转移函数 5:248  
 齐次子模(分次模的) 2:742  
 齐次最小值 2:722  
**齐次坐标 2:898**  
 齐次 Diophantus 逼近 2:191  
 齐次 Volterra 方程 5:435  
 齐次 Марков 过程 3:622  
 齐次 Марков 链 3:614  
 齐性丛 2:900  
 齐性顶点算子结构(基础表示的)  
 3:244  
**齐性复流形 2:896**  
**齐性空间 2:899**  
**齐性空间(代数群的)\* 2:901**  
 齐性空间的分类 2:901  
 齐性空间的拓扑学 2:900  
 齐性空间(具有基本群的) 2:710

齐性空间(具有群的) 2:899  
 齐性空间(群的) 3:1  
**齐性有界域 2:895**  
 齐性 Kähler 流形 2:896  
**齐性 Riemann 空间 4:656**  
**奇点 4:854**  
 奇点(常微分方程组的) 1:178  
 奇点(代数簇的) 4:857  
**奇点的分解 4:607**  
**奇点的消去 1:459**  
**奇点的指标 4:863**  
**奇点的秩 4:491**  
 奇点的秩(线性常微分方程的)  
 4:491  
 奇点的秩(线性常微分方程组的)  
 4:492  
**奇点的重数 3:864**  
 奇点(动力系统的) 1:324;2:310  
 奇点(多值性的) 1:435  
 奇点(二次超曲面的) 4:394  
 奇点(二次曲线的) 1:767  
 奇点(非自治系统的) 2:377  
 奇点(复超曲面的) 4:857  
 奇点(概形的) 4:857  
 奇点(光滑概形的) 4:883  
 奇点(函数元的) 4:854  
 奇点(函数元沿曲线解析延拓的)  
 4:854  
 奇点(解析函数的) 1:154;4:867  
 奇点(解析集的) 1:173;1:888  
 奇点(解析空间的) 1:174  
**奇点(可微映射的)\* 4:864**  
 奇点(空间曲线的) 4:862  
 奇点理论 2:728  
 奇点(平面实代数曲线的) 4:169  
 奇点(曲面的) 4:858  
 奇点(曲面上的) 2:154  
 奇点(曲线的) 2:152  
 奇点(实曲面的) 4:863  
 奇点(实曲线的) 4:862  
 奇点(实曲线的  $k$  阶的) 4:862  
 奇点(微分方程的) 1:179;4:859  
 奇点(微分方程组的奇点) 4:860  
 奇点(无穷远处的) 4:200  
 奇点(向量场的) 4:859  
 奇点(自治系统的) 2:502  
 奇点(S 型的) 4:865



- 奇怪吸引子 5:28  
 奇函数 3:1015  
 奇卵形线(实代数曲线的) 4:509  
 奇妙定理 2:490,660  
 奇偶表示(对称群的) 4:598  
 奇偶校验矩阵 2:388  
 奇偶性(超代数上的) 5:78  
 奇数 3:1015  
 奇相对张量 5:145  
 奇性集 4:867  
 奇异阿列夫 1:65  
 奇异鞍点 4:705  
 奇异半群 3:5  
 奇异不可约二次曲面 5:85  
 奇异不可约曲面 5:85  
 奇异测度 3:871  
 奇异插值矩阵 3:136  
 奇异单纯集 4:837  
 奇异单形 4:848  
 奇异端点(Sturm-Liouville 问题的)  
     5:48  
 奇异分布 4:846  
 奇异分量(积分权表示中的)  
     5:475  
 奇异概率分布 4:846  
 奇异广义函数 2:684  
 奇异函数 4:848  
 奇异函子 4:837  
 奇异环面 4:556  
 奇异积分 4:849  
 奇异积分方程 4:850  
 奇异积分方程的历史 4:853  
 奇异积分方程组 1:637  
 奇异积分方程组(正规型的)  
     4:853  
 奇异积分算子 1:516;4:850;5:94  
 奇异积分算子(具有 Cauchy 核的)  
     4:850  
 奇异积分算子(正规型的) 4:851  
 奇异基数 1:474  
 奇异极限本征值问题方法 4:508  
 奇异极值曲线 4:547  
 奇异集 5:166  
 奇异解 4:863  
 奇异矩阵 2:36;3:671  
 奇异矩阵束 5:123  
 奇异扩张(结合代数在交换环上的)  
     2:425  
 奇异立方体 3:125  
 奇异链 1:627  
 奇异模态的段 4:547  
 奇异内函数 2:817  
 奇异谱(超函数的) 3:739  
 奇异曲面 3:241  
 奇异曲线 4:863  
 奇异上链 1:628  
 奇异上同调 4:848  
 奇异摄动 1:414  
 奇异摄动常微分方程 2:143  
 奇异摄动方程 2:90;2:143  
 奇异摄动问题 2:143  
 奇异数(算子的) 3:961  
 奇异双线性型 1:360  
 奇异算子 4:850  
 奇异算子的特征部分 4:850  
 奇异同调 4:848  
 奇异同调群 2:910  
 奇异透射(几何学中的) 2:907  
 奇异系数的偏微分方程 2:131  
 奇异下配边 4:179  
 奇异纤维(椭圆曲面的) 2:354  
 奇异性(嵌入的) 1:627  
 奇异性(Riemann 曲面上的微分的)  
     2:164  
 奇异序数 4:15  
 奇异依赖性(对小参数的) 4:876  
 奇异支集 5:454  
 奇异支集(超函数的) 2:954  
 奇异支集(广义函数的) 5:81  
 奇异支集( $D$  模的) 2:2  
 奇异值(线性算子的) 2:870  
 奇异指数 4:846  
 奇异中心纤维(Seifert 纤维化的)  
     2:743  
 奇异子空间(不定度规空间的)  
     4:905  
 奇异子空间(极空间的) 4:216  
 奇异组(算子的) 2:561  
 奇异最优控制 1:826  
 奇异 Cauchy 算子 3:113  
 奇异 Green 算子 5:93  
 奇异  $k$  链 3:125  
 奇异  $n$  维流形 1:402  
 奇异 Sturm-Liouville 问题 5:50  
 奇异 Weierstrass 元 1:692  
 奇置换 4:132  
 奇 Dirichlet 特征标 2:209  
 奇  $\theta$  特征 5:162  
 歧点定理 1:616  
 歧义的文法( $k$  度的) 2:515  
 歧义度 2:515  
 歧义二次型 4:388  
 歧义类的 Borel 集 1:405  
 歧义上下文无关语言  
 歧义文法 2:515  
 歧义语言 2:515  
 脐点 5:309  
 旗 2:494  
 旗簇 2:495  
 旗集合(多胞形的) 4:232  
 旗结构 2:495  
 旗空间 2:495  
 旗( $i$  阶的) 2:373  
 起点(道路的) 4:108  
 起伏散逸定理 1:285  
 起始点(光滑树形的) 4:882  
 气候 3:717  
 气候可预报性 3:717  
 气候系统 3:717  
 气体动力学的数值方法 2:644  
 气体动力学方程 2:641  
 气体流动理论 2:648  
 气体射流理论 2:648  
 气象学中的数学问题 3:717  
 气压公式 1:385  
 恰当流动形 4:188  
 恰当切触结构 1:801  
 恰当微分方程 4:260  
 恰当微分形式 2:144;4:188  
 恰当微分(Riemann 曲面上的)  
     2:164  
 恰好非 Cross 簇 3:420  
 迁法子流形 1:784  
 迁移表(自动机的) 1:260  
 迁移方程 2:530  
 迁移方程,数值方法(输运方程,数  
     值方法) 5:255  
 迁移图(自动机的) 1:260  
 迁移网 5:258  
 铅垂 2:42  
 铅垂构造 3:743

- 铅垂流形 2:42  
 前导(序数的) 4:15  
 前对偶(Banach 代数的) 5:440  
 前几何 1:666  
 前趋(序列的项的) 4:784  
 前束范式 4:287  
**前束公式 4:287**  
 前束式 4:287  
 前提 3:22  
 前提(逻辑规则的) 2:697  
 前提(推导法则的) 2:51  
 前条件(程序的) 5:156  
 前项否定律 4:252  
 前项规则 2:697  
 前项(矢列式的) 4:786  
 前序 4:283  
 前缀码 1:631  
 前缀运算 3:1021  
 潜抗噪声性 3:922  
 潜无穷 1:26;1:27  
 潜约束 5:396  
 潜运动 5:396  
**潜在可实现性抽象 1:27**  
 潜质量 5:396  
**欠定方程组 5:317**  
 欠定线性微分方程组 3:477  
 嵌入 3:82  
 嵌入(半群到群中的) 3:15  
**嵌入(半群的)\* 3:15**  
 嵌入(半群的)(到群中的) 3:15  
**嵌入(的)拓扑学 5:221**  
**嵌入定理 3:15**  
 嵌入定理(范畴论中的) 3:716  
**嵌入(范畴的)\* 3:14**  
**嵌入(函数空间的)\* 3:14**  
 嵌入(函数类的) 3:15  
**嵌入(环的)\* 3:14**  
 嵌入(拉丁方的) 4:29  
 嵌入类(流形的) 3:189  
 嵌入(流形的) 3:20;3:601  
 嵌入奇点 4:607  
 嵌入(群代数到体的) 2:784  
 嵌入(上积的) 1:858  
 嵌入素理想 4:288  
 嵌入算子 3:14  
 嵌入维数 4:235  
 嵌入维数(切维数)(解析空间的)  
 1:174  
 嵌入(在  $\mathbb{Z}_2$  同调中为单射的)  
 5:174  
**嵌入字 3:13**  
 嵌入(字的) 1:233  
 嵌入 Runge-Kutta 法 1:523;  
 2:138;3:309  
 嵌入(Steiner 系的) 4:1028  
 嵌入 Марков 过程 4:457  
 嵌入 Марков 链方法 4:447  
 嵌套 Hilbert 空间 4:666  
 嵌装图案 2:275  
 强半群带 1:309  
 强逼近定理 1:766  
 强逼近问题(代数群中的) 3:464  
**强遍历性 5:35**  
 强不可达阿列夫 1:65  
 强不可达基数 1:475  
 强不稳定 Hamilton 方程 2:812  
 强乘性算术函数 3:861  
 强次加性函数 1:467  
**强大数律 5:36**  
 强单峰分布函数 5:332  
 强单位 1:302  
 强单位(Riesz 空间中的) 5:531  
**强导数 5:34**  
 强递归表示 4:525  
 强递归表示枚举模型 4:525  
 强递归可表示模型 4:525  
 强递归模型 4:526  
 强定理(解析圆盘上的) 1:808  
 强定理(Phragmén-Lindelöf 型的)  
 4:156  
 强定向图 2:760  
 强度测度(随机点过程的) 5:11  
 强度(平稳输入流的) 4:448  
 强度(涡管的) 1:906  
 强度(向量场的源的) 5:414  
 强度(向量管在横截面中的)  
 5:419  
 强度(Poisson 过程的) 4:210  
 强对偶(拓扑向量空间的) 2:297  
 强对偶原理(范畴论中的) 1:507  
 强多步对策 2:148  
 强多项式算法 3:504  
 强仿紧拓扑空间 4:76  
 强非线性双曲型方程组 4:434  
 强否定 1:788  
 强刚性定理 2:232  
 强刚性(Lie 群中的) 5:327  
 强孤立子群  
 强函数 3:595  
 强函数(函数的) 3:595  
**强函数和弱函数 3:595**  
 强函数(幂级数的) 3:595  
 强核型算子 3:995  
 强横截性条件 4:692  
**强积分 5:36**  
 强极限定理 3:450  
 强极限基数 1:475  
 强极小值 3:1047  
**强极值 5:35**  
 强极值(变分问题中的) 5:381  
 强加性算术函数 1:34  
 强加性向量测度 5:415  
 强间断性(弹性力学方程解的)  
 2:305  
**强解 5:38**  
 强解(随机微分方程的) 5:4  
 强竞赛图 4:236  
 强可测函数 1:377  
**强可和性 5:72**  
 强扩张(半群的) 2:424  
 强连通单纯复形 4:371  
 强连通定向图 2:760  
**强连续半群 5:39**  
 强连续算子 1:1026  
 强零维拓扑空间 5:539  
 强幂零元 3:913  
 强偏好关系 5:362  
 强偏序广群 4:12  
 强迫同步(俘获) 2:506  
 强迫同步化 1:254  
**强迫振动 2:505**  
 强迫 van der Pol 振子 5:369  
 强奇点 1:746;3:184  
 强生成元(范畴的) 2:694  
 强收敛 1:839  
 强双曲型多项式 2:945  
 强算子拓扑 3:494  
**强同调 5:35**  
 强同态 2:916  
 强同态( $\Omega$  系统的) 1:106  
 强凸域(Riemann 空间中的)



- 4:649  
 强退化 Lie 代数 2:360  
 强椭圆型 Monge - Ampère 方程 3:809  
**强拓扑 5:39**  
 强拓扑范畴 5:208  
**强微分法(不定积分的)\* 5:34**  
 强伪凸的区域(在一边界点上) 4:361  
 强伪凸区域 1:359;1:418  
 强稳定典范方程 3:865  
 强稳定 Hamilton 方程 2:812  
 强无限维紧统 3:56  
 强无限维空间 3:56  
**强相对极小值 5:38**  
 强相合估计量 1:782  
 强形变收缩核 1:917  
 强形变收缩核(拓扑空间的) 2:32  
 强序列(函数序列的) 2:278  
 强有限差分格式 2:947  
 强正规微分域扩张 2:421  
 强正则图 4:99;4:727  
 强制 3:1021  
**强制边值问题 1:636**  
 强制偏微分算子 1:425  
 强制形式 1:637  
**强制性不等式 1:637**  
 强制性条件 2:350  
 强锥条件 1:740  
 强最大值原理 1:468  
 强 Feller 过程 2:456  
 强 Feller 过程(狭义的) 2:456  
 强 Feller 链 2:456  
 强  $l$  角形条件 1:740  
 强 Legendre 条件 3:382  
 强  $p$  伪凹函数 4:360  
 强  $p$  伪凹集(复流形中的) 4:360  
 强  $p$  伪凹空间 4:360  
 强  $p$  伪凸函数 4:360  
 强  $p$  伪凸集(复流形中的) 4:360  
 强  $p$  伪凸空间 4:360  
 强 Poincaré 问题 3:714  
 强 Марков 过程 3:622  
 强 Марков 性质 3:622;3:625  
 强 Новиков 猜想 1:454  
 强  $\forall$  有限理论 4:525  
 桥 2:150  
 桥指标 5:175  
 壳 4:807  
**壳体理论 4:807**  
 切变换 4:356  
 切表示 4:947  
**切层 5:133**  
 切场(叶状结构的) 2:503  
 切除 4:562  
 切除公理 2:677;2:913;4:1019  
 切除性质 1:709  
 切除映射 1:709  
**切触 5:129**  
**切触变换 1:802**  
 切触代数 3:404  
 切触(集合的) 2:153  
 切触阶(曲线的) 4:51  
**切触结构 1:801**  
 切触(可微映射的  $k$  阶的) 4:864  
 切触流形 1:801  
 切触伪群 4:368  
 切触无穷小变换 1:802  
 切触形式 1:801  
 切触元素 1:802  
 切触圆变换 1:592  
 切触( $\alpha$  阶的集合的) 2:153  
**切丛 5:130**  
 切代数(解析么拟群的) 3:566  
 切割 - 选择技术 1:898  
 切换线路 1:800  
 切空间 2:309  
 切空间(仿射代数群在单位元处的) 3:413  
 切空间(解析空间在一点处的) 1:174  
 切口(集合之间的) 4:104  
**切流 5:132**  
**切面 5:133**  
 切片定理(关于群在流形上的作用的) 1:32  
 切片纽结 1:626;3:274  
 切平面(曲面的) 2:154  
 切平面(曲面在一点处的) 5:133  
 切维数(解析空间的) 1:174  
**切线 5:132**  
**切线变换 5:134**  
**切线标线 3:44**  
 切线法 3:904  
 切线方程(曲线的) 5:134  
 切线(曲线的) 2:99;2:153  
 切线(曲线在一点上的) 5:132  
**切线坐标 5:134**  
 切向间断(流体运动的) 4:812  
**切向量 5:133**  
 切向应力 2:329  
 切向 Cauchy - Riemann 方程 4:186  
**切锥 1:803**  
**切锥 5:131**  
 切锥(代数簇在一点上的) 5:131  
 切锥(凸曲面在一点上的) 5:131  
 切锥(完全凸曲面一点上的) 1:850  
 切 Riemann 空间 2:486  
**亲和数 1:149**  
 轻子数 4:406  
**穷竭法 2:416**  
**穷竭(区域的)\* 2:416**  
 穷竭序列(集合的) 2:690  
 穷举方法(被 L 系统生成的语言的) 3:315  
 穷举滤过 2:470  
 穷举搜索法(保密学中的) 1:893  
**求和 5:73**  
**求和(发散级数的)\* 5:75**  
**求和法 5:73**  
 求和法(保持绝对收敛性的) 1:21  
**求和法的包含 3:30**  
**求和法的传递性 5:254**  
**求和法的核 3:255**  
**求和法的相容性 1:689**  
 求和法(对等于收敛性的) 3:30  
 求和法(强于另一求和法的) 3:30  
 求和(积分的) 5:73  
 求和基 1:308  
 求和(级数的) 5:73  
 求和(序列的) 5:73  
 求和约定 2:328  
**求和(Fourier 级数的)\* 5:76**  
 求积法及其推广 2:560  
**求积分 4:390**  
**求积公式 4:390**  
**求积公式(具有最高代数精度的)\* 4:392**  
 求积公式(Gauss 型的) 4:391;

- 4:392  
 求积和 1:901  
 求积和方法 4:393  
 求积误差 3:1037  
 求面积 4:390  
 求体积公式 1:901  
 球 1:299  
 球(按半范的) 5:211  
 球的 Newton 数 3:378  
 球对称化 5:104  
 球极平面投影 4:1035  
 球极平面投影中心 4:1035  
 球截形 4:742  
 球空间形式 4:899  
 球面 4:936  
 球面标线 4:946  
 球面表示(法) 1:911  
 球面丛 5:167;5:168  
 球面单叶映射 3:885  
 球面导数 1:616;3:976  
 球面的第  $k$  个稳定同伦群 2:921;  
 4:938  
 球面的同伦群 4:938  
 球面的同伦群的一般理论 4:938  
 球面点 5:309  
 球面点(曲面的) 1:908  
 球面定理 1:910;2:39  
 球面度量 2:420  
 球面多项式 3:383  
 球面二角形 2:177  
 球面割补术 5:86  
 球面函数 4:941  
 球面函数(对应于拓扑群表示的)  
 4:591  
 球面函数方程 2:115  
 球面几何学 4:942  
 球面角盈 2:414  
 球面角盈(三角形的) 5:268  
 球面(具有  $g$  个环柄的) 2:294  
 球面距离 4:632  
 球面罗 5:461  
 球面(内切于圆锥的) 3:84  
 球面切线象 3:44  
 球面三角形 4:943  
 球面三角学 4:948  
 球面束 1:752;4:937;5:122  
 球面调和函数 4:944  
 球面调和函数法 4:944  
 球面(椭圆空间中的) 4:624  
 球面网 3:890  
 球面厦 5:180  
 球面象 1:224  
 球面形变张量 2:32  
 球面映射 4:946  
 球面映射的推广 4:947  
 球面元 4:145  
 球面重排 2:814  
 球面锥 2:897  
 球面坐标 4:940  
 球面 Bessel 函数 1:928  
 球(排列中的) 1:234  
 球扇形 4:740  
 球体函数 4:894  
 球体调和函数 4:894;4:941  
 球问题 1:592  
 球心 1:299  
 球形部分和(多重级数的) 4:794  
 《球与圆柱》(Archimedes 著)  
 区分随机现象的信息(按照 Kall-  
 back) 3:73  
 区间 3:149  
 区间分析 3:150  
 区间估计 3:151  
 区间估计(对样本空间相似的)  
 1:740  
 区间函数 3:150  
 区间(偏序集中的) 3:150;4:101  
 区间拓扑 1:849;4:9  
 区间与线段 3:150  
 区域 2:275  
 区域传递拓扑动力系统 5:211  
 区域的穷竭 2:416  
 区域分解法 4:728  
 区域扩张原理 2:428  
 区域(展布在  $C^n$  上的) 3:394  
 区组(横截系中的) 5:261  
 区组(区组设计的) 1:375  
 区组设计 1:375  
 区组设计的处理 1:375  
 区组(Steiner 系中的) 4:1028  
 曲多面体 4:231  
 曲率 1:907  
 曲率半径 1:591  
 曲率半径(曲线的) 2:154  
 曲率半径(曲线在一点上的) 4:49  
 曲率半径(上伪 Euclid 空间中的)  
 1:619  
 曲率半径(上 Euclid 空间的)  
 1:618  
 曲率半径(双曲空间的) 3:934  
 曲率半径(双曲平面的) 3:934  
 曲率半径(椭圆空间的) 3:934  
 曲率半径(椭圆平面的) 3:934  
 曲率半径(Лобачевский 空间的)  
 3:525  
 曲率变换 1:912  
 曲率标形 2:302;2:342  
 曲率不变量 4:619  
 曲率测度( $O$  曲线的) 2:578  
 曲率对象 1:778  
 曲率函数 3:777  
 曲率阶( $O$  曲线的) 2:578  
 曲率(曲面的) 1:907  
 曲率(曲线的) 1:907  
 曲率(椭圆空间的) 4:623  
 曲率线 1:911  
 曲率线(回转曲面上的) 1:912  
 曲率线网 1:912  
 曲率形式 1:911  
 曲率域 2:342  
 曲率圆 1:591  
 曲率张量 1:912  
 曲率张量场 1:483  
 曲率中心 1:591  
 曲率中心(平面曲线的) 2:154  
 曲率中心(曲线在一点上的) 4:49  
 曲率(子流形的) 1:909  
 曲率(Riemann 空间的) 1:908  
 曲率(Riemann 空间中的) 4:647  
 曲面 5:82  
 曲面(常平均曲率的) 2:30  
 曲面带 5:33  
 曲面(带边界的) 5:294  
 曲面(单侧放置的) 3:1018  
 曲面的基本形式 2:612  
 曲面的亏格 2:698  
 曲面的脐点 1:908  
 曲面(等仿射空间中的) 1:55  
 曲面(负 Gauss 曲率的) 1:351  
 曲面函数 5:82  
 曲面积分 5:82



- 曲面积分(第二类) 5:83  
 曲面积分(第一类) 5:82  
 曲面积分(关于曲面内侧的) 5:83  
 曲面积分(关于曲面外侧的) 5:83  
 曲面(空间型的) 1:521  
**曲面(理)论 5:158**  
 曲面(零速度的) 5:169  
 曲面面积 2:489  
 曲面(面积最小的) 3:749  
 曲面片 5:82  
 曲面三角形 4:655  
 曲面(双侧放置的) 3:1018  
 曲面椭球调和函数 2:343  
 曲面网 3:890  
**曲面位势 5:86**  
 曲面(一般型的) 1:461  
 曲面(有限型的) 5:328  
 曲面(直接意义下的负曲率的) 3:881  
 曲面(Riemann 空间中的) 4:655  
 曲面(Riemann 流形中的) 1:222  
 曲面(T 型的) 2:30  
**曲线 1:912**  
 曲线场 4:547  
**曲线的焦点 2:503**  
**曲线的亏格 2:698**  
 曲线的类 5:134  
**曲线的突转 5:91**  
 曲线多面形 4:225  
 曲线回归 4:541  
 曲线汇 1:766;3:604  
**曲线积分 1:913**  
 曲线论 2:152  
 曲线三角剖分 4:231  
 曲线系(代数曲面上的) 1:103  
 曲线(形式群中的) 2:511  
 曲线(在一点具有相同方向的) 4:655  
**曲线族的模 3:801**  
 曲线坐标 1:857  
 曲线坐标系 1:565  
 曲线(Jordan 意义下的) 3:454  
 曲线(Урысон 意义下的) 3:455  
 屈服条件 4:173  
 趋势 4:1016  
 取出问题 5:501  
 取共轭(由一群元) 1:770  
 取极限(在 Lebesgue 积分下) 2:452  
 取幂(置换群的) 4:132  
**取余运算 1:690**  
 圈 4:126  
 圈(闭曲线) 4:740  
 圈长(螺线的) 2:848  
 圈代数 3:243  
**圈积 5:523**  
 圈积(半群的) 5:524  
 圈积(群的) 5:523  
 圈积(置换群的) 4:131  
 圈基 2:761  
 圈拟阵 3:678  
 圈(拟阵的) 3:678  
 圈群 3:243  
 圈(Darboux 曲面的) 2:10  
**全闭映射 2:585**  
 全变差 1:19  
 全变差(负荷的) 1:564  
**全变差(函数的)\* 5:233**  
 全变差下降格式 2:949  
 全薄集 4:216  
 全不变合同(全特征合同) 2:584  
 全不变理想 5:126  
 全不变子群 3:989  
 全不可分解矩阵 5:9  
 全不可约表示 3:52  
 全不可约表示(拓扑群的) 4:593  
 全不可约表示(Lie 代数的) 4:589  
**全不可约集 5:234**  
 全不连通紧群 1:677  
**全不连通空间 5:233**  
 全不连通拓扑空间 1:780;2:249;5:538  
 全不连通拓扑群 5:193  
 全不连通性 1:780  
**全不完满空间 5:234**  
 全不完满拓扑空间 3:577  
**全测地流形 5:234**  
 全测地曲率 2:701  
 全测地子流形 2:704;5:234  
 全超越逻辑理论 4:976  
 全称等价代数系统 2:338  
 全称公式 1:107  
 全称可公理化  $\Omega$  系统类 1:108  
**全称量词 5:354**  
 全称  $\Omega$  系统类 1:108  
 全乘性算术函数 3:861  
 全纯半平面(Dirichlet 级数的) 2:217  
**全纯包 2:889**  
 全纯包(Riemann 区域的) 2:889  
 全纯表示 1:172  
 全纯表示(Lie 群的) 3:51  
 全纯的矩阵函数 1:178  
 全纯峰函数 3:390  
**全纯函数 2:890**  
 全纯函数的边界表示问题 1:415  
 全纯函数的边界值的存在性问题 1:415  
 全纯函数(内指数增长的) 2:954  
 全纯函数(在区域内的) 1:153  
 全纯函数(在一点处的) 1:153  
 全纯函数(Riemann 曲面上的) 2:164  
 全纯函数(Riemann 域上的) 4:645  
 全纯横坐标(Dirichlet 级数的) 2:217  
 全纯截曲率 1:911  
 全纯可分性 4:1026  
 全纯曲线 1:177  
 全纯上边缘 1:872  
 全纯上循环 1:381  
 全纯收缩 2:412  
 全纯(双全纯映射) 1:359  
 全纯同构(双全纯映射) 1:359  
**全纯凸复空间 2:891**  
 全纯凸区域 1:158;2:276  
 全纯凸性 1:852  
 全纯完全空间 2:891;4:1026  
 全纯完全流形 4:1026  
 全纯微分形式 2:104  
 全纯微分形式层 2:104  
 全纯微分  $p$  形式 2:145  
 全纯微分(Riemann 曲面上的) 2:164  
 全纯向量场(解析空间上的) 2:104  
 全纯向量丛 5:411  
**全纯形式 2:889**  
 全纯形式表示 4:194  
 全纯形式(复流形上  $p$  次的)

- 2:889  
 全纯性(多复变函数的) 1:156  
 全纯性(在区域内) 1:153  
**全纯映射 2:890**  
 全纯映射(复流形之间的) 2:890  
 全纯映射(解析空间的) 1:174  
 全纯映射(在区域内非退化的) 2:890  
 全纯映射(在一点非退化的) 2:890  
**全纯域 2:276**  
 全纯约化(复空间的) 2:891  
 全纯支撑函数 3:390  
 全纯轴(Dirichlet 级数的) 2:217  
 全纯自同构 1:359  
 全纯 de Rham 复形 2:890  
 全纯 Lefschetz 公式 3:379  
 全纯 Lefschetz 数 3:379  
 全纯 1 上循环 1:873  
 全次数(单项式的) 1:818  
**全导数 5:232**  
**全等(几何学中的) 1:764**  
 全等角 1:182  
 全等图形 1:764  
 全对称多胞腔 5:551  
**全对称多面体 5:551**  
 全对称拟群 4:429  
 全对合代数 3:178  
 全非负矩阵 4:45  
 全分裂素理想 1:98  
 全分歧环扩张 2:234  
 全概率公式 4:314  
**全概率公式 1:696**  
 全孤立理想(半群的) 1:553  
 全关系 1:364  
**全集 5:232**  
 全集(泛函的) 1:699  
 全集(复平面上的) 4:892  
 全集(线性泛函的) 1:308;5:232  
**全加性函数 5:233**  
 全焦子流形 5:176  
 全局的程序最优化变换 4:322  
 全局坐标 1:857  
 全矩阵环 3:676  
 全聚值集 1:614  
 全绝对曲率(浸入的) 5:173  
 全可和基 1:317  
 全可积系统 3:87  
**全可解 Lie 代数 3:408**  
**全可解 Lie 群 3:428**  
 全可解 Lie 群(超可解 Lie 群) 3:432  
**全空间 5:233**  
 全空间(纤维空间的) 2:466  
**全良序集 5:236**  
 全迷向子空间 2:201  
 全迷向子模 1:360  
 全扭曲(带的) 5:525  
 全扭曲(纽结的) 3:277  
 全扭曲(曲线的) 5:228  
 全旗结构(完全旗结构) 2:495  
 全旗(完全旗) 2:494  
 全曲率 1:693  
 全曲率(曲面上一点的) 1:693  
 全曲率(曲面上一个区域的) 1:693  
**全曲率(完全曲率) 1:693**  
 全射影群 4:337  
 全收缩图 5:499  
 全双曲型偏微分方程组 3:486  
 全双曲型(狭义下双曲型)偏微分方程组 3:486  
 全松弛(单纯复形的) 4:328  
**全特征合同 2:584**  
**全特征子群 2:584**  
 全图 2:735  
**全微分 1:694**  
 全微分(多变量函数的) 2:93,102  
**全微分方程 2:132**  
 全稳定性 4:966  
 全线性群 1:601  
 全形 4:956  
**全形(群的)\* 2:889**  
 全序 4:6;5:481  
 全序半群 4:13  
 全序环 4:12  
**全序集 5:236**  
**全序群 5:235**  
 全序么拟群 3:565  
 全序子集(上有界的) 5:551  
 全有界度量空间 3:728  
**全有界集 5:233**  
**全有界空间 5:233**  
 全有界一致空间 5:326  
 全有限测度 3:699,706  
**全域 5:356**  
 全域的图表(一阶语言模型的) 3:784  
 全域(一阶结构的) 1:108  
 全域(Boole 值模型的) 1:398  
**全增量 5:232**  
 全增量(多元函数的) 1:102  
 全增量(函数的) 2:93  
 全正代数数 1:100  
**全正规空间 5:235**  
 全正规拓扑空间 5:235  
 全正规拓扑空间(呈正规拓扑空间) 3:730  
 全正规性(可度量化空间的) 3:737  
 全正矩阵 4:45  
 全正则环 1:453  
 全指标(Riemann - Hilbert 问题的) 4:626  
 全置换 4:430  
 全子集 5:418  
 全 Gauss 曲率 2:662  
 全 Понтрягин 类 4:239  
 全  $\sigma$  有限测度 3:699,706  
**权 5:474**  
 权(半不变量的) 4:768  
 权(表示的) 4:500  
 权的加法定理(关于紧空间的) 1:473  
**权的重数 3:864**  
 权(二次型的亏格的) 4:384  
 权分解 5:475  
 权格(根系的) 4:685;4:778  
 权(功能元的) 2:72  
 权(观测的) 3:368  
**权函数 5:475**  
 权函数(半范数的) 5:476  
 权函数(范数的) 5:476  
 权函数(积分中的) 5:474  
 权(函数空间上的) 4:476  
 权函数(求积公式的) 4:390  
 权函数(输入 - 输出系统的) 5:474  
 权函数(线性定常控制系统的) 5:242  
 权函数(正交多项式的) 5:474



- 权(决定函数的) 2:482  
**权空间 5:476**  
 权空间(Lie 代数上权  $\alpha$  的) 5:475  
 权(模形式的) 3:788  
 权模(Lie 代数上权  $\alpha$  的) 5:475  
 权(求积公式的) 4:390  
 权同态 2:695  
 权图(曲线的) 4:858  
**权(拓扑空间的)\* 5:476**  
 权(伪张量的) 4:374  
 权系数(积分中的) 5:474  
 权(线性变换的) 3:167  
 权(线性表示的) 4:778  
 权(相对张量的) 4:374  
 权(一致空间的) 5:324  
 权(遗传代数的) 2:695  
 权(张量密度的) 5:144  
 权(整数的) 1:629  
 权子空间 5:475  
 权子空间(表示的) 4:601  
 权(自守形式的) 1:279  
 权(Boole 代数的) 1:391  
 权( $L$  模的) 5:475  
**权(Lie 代数表示的)\* 5:475**  
 权(von Neumann 代数的) 5:440  
 权( $\theta$  函数的) 5:161  
 权( $\theta$  级数的) 5:163  
 缺项插值 2:854;3:136  
**缺项函数系 3:319**  
 缺项函数系(阶  $p > 2$  的) 3:319  
 缺项函数系( $\epsilon$  唯一性的) 3:319  
**缺项级数 3:318**  
**缺项幂级数 3:317**  
**缺项三角级数 3:319**  
**缺项序列 3:317**  
 缺项序列( $R$  类) 3:318  
 缺项序列( $R_\epsilon$  类) 3:318  
 缺项序列( $\Lambda$  类) 3:318  
 缺项序列( $\Lambda_\epsilon$  类) 3:318  
 缺项原理 2:935  
 确定的矩问题 3:804  
 确定的拟线性双曲组 4:433  
 确定方程组(线性代数方程的) 3:461  
 确定问题(运筹学中的) 3:1023  
 确定性浑沌 1:546  
 确定性机器 3:590  
 确定性上下文无关文法 2:747  
 确定性网格模型 3:895  
 确定性下推自动机 2:515  
 确定性语言 2:515  
 确定性自动机 1:272;1:278  
**群 2:781**  
 群( $I$  型的) 5:341  
 群(伴随型的) 1:45  
 群逼近 4:602  
 群表示 4:131;1:141  
**群表示的特征标 1:552**  
 群表示与特殊函数 4:908  
**群簇 5:399**  
 群簇(Lie 型的) 5:400  
 群簇(Magnus 型的) 5:400  
**群代数 2:784**  
 群代数(环上群的) 2:784  
**群代数(局部紧群的) 2:785**  
 群代数(域上的群的) 2:784  
 群(带多重算子的) 3:851  
 群(带算子半群的) 3:1028  
 群(带算子的) 3:1028  
 群(带算子域的) 3:1028  
 群(带子群的极大条件的) 3:919  
**群的表示 4:588**  
 群的表示方程组 2:711  
 群的范 3:967  
**群的根(根基) 4:469**  
**群的共合 1:148**  
**群的全形 2:889**  
 群的群类逼近 3:913  
**群的上同调 1:649**  
**群的特征标 1:551**  
 群的有限群逼近 4:602  
**群的指数 2:417**  
**群的秩 4:489**  
**群的中心 1:539**  
**群的中心积 1:537**  
**群的中心列 1:537**  
**群的周期 4:125**  
**群的自由积 2:569**  
 群的自由作用 1:32  
**群对象 2:787**  
**群范畴 1:506**  
 群范畴(范畴上的) 1:506  
**群概形 2:788**  
 群概形(乘型的) 1:675  
 群概形(概形上的) 2:788  
**群和代数中的多项式与指数增长 4:234**  
 群环 1:890  
 群环(环上的群的) 2:784  
 群结构(椭圆曲线上的) 2:344  
 群(具有对合的 Witt 环的) 5:518  
**群(具有极大条件的)\* 2:790**  
**群(具有极小条件的)\* 2:790**  
 群(具有偶对的) 3:278  
**群(具有唯一开方法的)\* 2:790**  
**群(具有有限型条件的)\* 2:790**  
 群(具有有限一般秩的) 4:489  
 群(具有有限秩的) 2:790  
 群(具有  $BN$  对的) 5:181  
**群扩张 2:422**  
 群(链环的) 3:274  
 群论的历史 2:781  
 群(纽结的) 3:844  
 群(齐性空间的) 2:899  
**群上的殆周期函数 1:141**  
 群上调和分析 2:822  
 群剩余(在群的类中关于一个关系的) 4:602  
**群速度 2:789**  
 群(图的) 2:754  
**群(无挠的)\* 2:791**  
 群(无限阶的) 4:5  
 群(无中心的) 1:539;1:694  
 群系(链环的) 3:274  
 群型的分次(代数上的) 2:742  
 群性质(分式线性映射的) 2:545  
 群性质(相位流的) 1:282  
**群演算 2:785**  
 群(有降链条件的) 1:234  
 群(有平凡中心的) 1:539  
 群(有有限特殊秩的) 4:489  
 群元(半群的) 1:606  
 群在流形上的作用 1:32  
 群字 5:400  
 群自动机 1:256  
 群作用 1:497;4:131  
**群( $p^\infty$  型的)\* 2:788**  
 群  $S$  概形 2:788

## R

燃烧理论 1:667

- 染色 4:746  
 扰动方程(常微分方程的) 2:109  
 扰动(函数的) 2:298  
**扰动理论 4:139**  
 扰动理论(线性算子的) 2:595  
 扰动配置法 1:660  
**扰动(线性方程组的)\* 4:139**  
 扰动抑制问题 2:795  
 绕组(中继触点模式的) 4:573  
 热边界层 1:411  
 热传导 1:799;2:534;5:274  
**热传导方程 5:159**  
**热传导理论的接触问题 1:799**  
 热多项式 2:855  
 热扩散模型 4:507  
 热力学第二定律 4:566;  
     5:160  
 热力学第三定律 5:161  
 热力学第一定律 4:566;  
     5:160  
 热力学定律 5:160  
 热力学关系 4:1006  
**热力学极限 5:160**  
 热力学极限过渡 4:1006  
**热力学势 5:159**  
**热力学中的数学问题 5:160**  
 热平衡 4:413  
 热双层位势 2:280  
 热位势 3:653;4:261  
 热宇宙模型 1:869  
 热噪声 5:488  
 人的签名 1:896  
 人工智能 1:920  
 认证 1:896  
 认证方案 1:896  
 认证函数 1:896  
 任意函数法 4:313  
 日本环 2:714  
 日程表 5:95  
 日冕问题 2:817  
 日心系统 3:648  
**容斥原理 3:29**  
**容度 1:802**  
 容度(多项式的) 4:292  
 容度(集合的) 5:439  
**容量 1:466**  
 容量(边的) 3:893  
 容量测度 1:467  
 容量(割的) 2:757  
 容量(集合的) 1:466  
 容量(紧集的) 1:466  
 容量(奇怪吸引子的) 3:580  
 容量区域(通信信道的) 1:545  
 容量(图的) 2:757  
**容量位势 1:468**  
 容量(信道的) 3:71  
 容量(元素的) 2:757  
 容量(Gauss 信道的) 2:662  
 容量  $\alpha$  位势 4:659  
 容忍乘数 5:184  
 容忍界限 5:183  
**容忍区间 5:183;5:184**  
 容许单态射 1:352  
 容许单项变换 3:817  
 容许点格 2:722  
 容许度量(关于参模问题的)  
     2:435  
 容许短正合序列 4:562  
 容许法则 4:898  
 容许覆盖 4:668  
**容许(关系) 5:183**  
 容许函数 5:391  
 容许函数(Dirichlet 变分问题中的)  
     2:220  
 容许集(全域) 2:522  
 容许假设集 4:1002  
 容许接近区域 1:418  
 容许决策规则 4:990  
 容许开集族 4:668  
 容许控制 1:264;2:161;3:1034;  
     4:242  
 容许满态射 1:352  
 容许拟群 4:430  
 容许切向量(流形的) 2:485  
 容许商对象 4:462  
 容许生产过程 3:636  
 容许投射对象(范畴的) 4:339  
 容许拓扑( $G$  空间上的) 4:904  
 容许信息集 1:125  
 容许信息向量 1:125  
 容许性条件 1:637  
 容许序列(展形的) 4:958  
 容许映射(泛代数簇的) 5:402  
 容许正规子群(带算子域的)  
     3:1028  
 容许子对象(范畴中对象的) 5:66  
 容许子空间 3:166  
 容许子群(带算子域的) 3:1028  
 容许子群(由集合生成的) 3:1028  
 容许坐标卡 1:565  
**冗余度 4:533**  
 冗余度(编码的) 1:633  
 冗余度(明文消息语言的) 1:894  
 柔性力 2:300  
 入次数(度)(顶点的) 2:753  
 入次数(入度)(图的) 2:753  
 入度(顶点的) 2:760  
 入度(图的) 2:753  
 入度(图的顶点的) 3:597  
**软层 4:888**  
**软件 4:888**  
 软件保护 1:893  
 “若-则-否则”算法 1:134  
 弱\* 拓扑 1:47;2:297;5:213  
 弱逼近(代数群的) 3:465  
 弱逼近格式 2:548  
 弱表通用集 1:127  
 弱不可达阿列夫 1:65  
 弱不可达基数 1:475  
 弱不可约伪 Riemann 空间 4:531  
 弱纯子群 4:375  
 弱大数律 3:450  
 弱殆周期函数 2:673  
 弱殆周期紧化 1:383  
 弱殆周期性 4:400  
 弱单位 4:773  
 弱单位(Riesz 空间中的) 5:531  
**弱导数 5:457**  
 弱导数(广义函数的) 2:685  
 弱等价表示 2:378  
 弱定理(Phragmén - Lindelöf 型的)  
     4:156  
 弱定向图 2:761  
 弱对偶空间(拓扑向量空间的)  
 弱多步微分对策 2:148  
 弱仿紧拓扑空间 4:77  
 弱非线性偏微分方程 3:950  
 弱非线性双曲型方程组 4:434  
 弱非游荡点 5:460  
 弱分歧环扩张 2:234  
 弱负向量丛 3:888



- 弱复流形 1:625  
 弱刚性定理 2:232  
 弱共轭空间(拓扑向量空间的)  
   2:296  
 弱关联原理 4:419  
 弱函数 3:765  
 弱函数(函数的) 3:595  
 弱混合 3:779  
 弱积分 4:147  
 弱基 1:367  
 弱极小值 5:381  
 弱极值 5:457  
 弱极值(变分问题中的) 5:381  
 弱解 5:459  
 弱解(随机微分方程的) 5:4  
 弱解(微分方程在一区域中的)  
   5:459  
 弱解析函数 1:26  
 弱局部可缩拓扑空间 4:804  
 弱可测函数 4:147  
 弱可和基 1:317  
 弱可数基 1:317  
 弱可数加性向量测度 5:415  
 弱连通图  
 弱连续算子 3:1026  
 弱奇异性 5:459  
 弱奇异性积分核 3:112  
 弱奇异性积分算子 3:112;5:459  
 弱全纯函数 3:971  
 弱全纯凸性 4:1026  
 弱收敛 1:840  
 弱收敛(负荷的) 1:837  
 弱收敛(概率测度的)\* 5:457  
 弱收敛序列(概率分布的) 2:262  
 弱收敛序列(概率分布的) 2:262  
 弱双曲型多项式 2:945  
 弱双曲型偏微分方程 3:472  
 弱算子拓扑 3:494  
 弱同调 5:458  
 弱同伦等价 2:922  
 弱同伦等价拓扑空间 2:922  
 弱凸集 1:852  
 弱拓扑 5:459  
 弱拓扑(有界测度空间上的)  
   1:837  
 弱拓扑( $G$  空间上的) 4:905  
 弱完全流形 3:280  
 弱完全 Banach 空间 1:306  
 弱微分 2:649  
 弱维数 2:181,905  
 弱伪凸域 4:361  
 弱稳定 Yang-Mills 场 5:530  
 弱无穷维空间 5:460  
 弱无条件收敛级数(Banach 空间中  
   的) 1:307  
 弱无限维紧统 3:56  
 弱纤维化 4:797  
 弱相对极小值 5:458  
 弱相对紧概率测度族 2:263  
 弱相对紧概率分布族 2:263  
 弱相关随机变量 3:36  
 弱相关性 3:36  
 弱相合估计量 1:782  
 弱一致局部紧半群 5:197  
 弱遗传交换代数 1:649  
 弱游荡集 5:460  
 弱有补格 3:359  
 弱有界集 5:39  
 弱约化半群 5:254  
 弱正规数(对于底  $g$  的) 3:984  
 弱正向量丛 4:254  
 弱正则微分算子 4:401  
 弱锥条件 1:740  
 弱  $B$  正则性 4:362  
 弱 Brennermann 正则性 4:362  
 弱 Cauchy 序列 1:306  
 弱 Goldbach 问题 1:37  
 弱  $l$  角形条件 1:740  
 弱 Lefschetz 定理 3:381  
 弱  $n$  维度量空间 3:308  
 弱  $(p, q)$  范数 3:142  
 弱 Radon-Nikodym 性质 5:416
- ## S
- 三测法 1:294  
 三叉线(抛物蚌线) 4:170  
 三常数定理 3:11  
 三重点 3:859  
 三重积分 3:858  
 三重正交曲面系 5:279  
 三重 Jordan 积 3:228  
 三次超曲面 1:905  
 三次超曲面(三维的) 1:906  
 三次方程 1:904  
 三次非剩余 1:761  
 三次非剩余(模  $m$  的) 1:761  
 三次抛物线 1:906  
 三次曲面 1:905  
 三次曲线 1:903  
 三次曲线的类 1:903  
 三次剩余 1:906  
 三次剩余(模  $m$  的) 1:761  
 三次型 1:904  
 三次型(域上的) 1:904  
 三次样条 1:199;4:954  
 三等分角问题 5:281  
 三等分角线 1:904  
 三分律 4:404  
 三基代数 1:255  
 三级数定理 5:171  
 三级数准则 5:171  
 三极点定理 2:732  
 三角不等式 3:50,762  
 三角部分(拓扑空间的) 4:835;  
   5:269  
 三角插值 5:273  
 三角多项式 5:274  
 三角多项式( $n$  阶的) 2:534  
 三角方程 2:374  
 三角分布 5:323  
 三角分解(拓扑群中的) 2:653  
 三角共轭函数 4:305  
 三角函数 5:272  
 三角函数(复变量的) 5:273  
 三角函数(实变量的) 5:272  
 三角函数系 5:278  
 三角和 5:276  
 度量 3:722  
 三角和法 5:277  
 三角和(素数上的) 5:276  
 三角回归 4:541  
 三角级数 5:274  
 三角级数的形式积 2:519  
 三角角觔 5:268  
 三角角盈 2:414  
 三角截断(拓扑群的) 2:653  
 三角精度 5:264  
 三角矩问题 2:805  
 三角剖分 5:269

- 三角剖分不变量 4:164  
 三角剖分(多面体的) 1:708;  
 4:163;5:269  
 三角剖分空间 4:835  
 三角剖分流形 4:17  
**三角求和法 5:268**  
 三角权 4:32  
**三角形 5:267**  
 三角形部分和(多重级数的)  
 4:794  
 三角形部分和(二重级数的)  
 2:285  
 三角形范畴 2:53  
 三角形(范畴中的) 2:53  
 三角(形)公理 3:722  
 三角形解(三体问题的) 5:169  
**三角形矩阵 5:268**  
 三角形可解 Lie 代数 3:420  
 三角形连通 Lie 群 3:432  
 三角形(内度量空间中的) 4:654  
 三角形区组设计 1:376  
**三角形群 5:268**  
 三角形式(复数的) 1:714  
**三角形数 5:268**  
 三角形(凸曲面上的) 1:850  
 三角形图式(范畴中的) 2:71  
 三角形(椭圆平面上的) 4:623  
**三角形元 5:268**  
 三角形(Euclid 平面上的) 5:267  
 三角形 Lie 代数 3:420  
 三角形 Lie 群 3:432  
**三角学 5:279**  
**三角阵列 5:268**  
**三角组 5:267**  
 三阶切触 4:50  
 三阶上同调运算 1:655  
 三径双曲线 4:170  
 三连通域 2:275  
 三十二面体(二十-十二面体)  
 4:776  
**三体问题 5:168**  
 三维晶体群 1:898  
**三维流形 5:170**  
 三维物体 5:438  
 三线性型 3:855  
 三线性映射 3:855  
 三线坐标 5:154  
 三相点 4:153  
 三相态 4:153  
**三向量 5:281**  
 三向量(张量分析中的) 5:282  
 三叶形 5:232  
 三叶形纽结 3:273  
 三元关系 4:561  
**三元域 5:149**  
 三元运算 2:844  
**三元组 5:279**  
 三元组(半鞅的局部可料特征的)  
 4:771  
 三元组(范畴中的) 1:647  
 三元组(与 Stone 代数相伴的)  
 5:25  
 三值逻辑 3:608  
 散布函数(随机变量的) 1:731  
 散布图 1:864  
**散布椭球面 2:247**  
 散布椭球面(概率分布的) 2:247  
 散布椭球面(随机向量的) 2:247  
 散布(Boole 函数的) 1:398  
**散度 2:265**  
 散度定理 2:500;3:126;4:52  
 散度(曲线坐标中的) 3:335  
 散度(向量场的) 2:265;5:407;  
 5:440  
 散度(张量场的) 2:265  
 散度(柱面坐标中的) 1:926  
**散粒效应 4:816**  
 散射高 4:713  
**散射矩阵 4:713**  
**散射空间 4:713**  
 散射理论 2:595  
 散射数据 5:54  
 散射数据(Schrödinger 算子的)  
 3:290  
 散射算子 4:141  
 散射相位 5:53  
 散射指标 4:434  
 扫除 1:298;2:278  
 扫除测度 1:299  
 扫除(测度从区域到边界上的)  
 1:298  
 扫除(测度到紧集上的) 1:298  
**扫除法 1:298**  
 扫除(函数到紧集上的) 1:298  
 扫除空间 4:216;4:270;4:  
 1911660  
 扫除问题 1:298  
 扫除原理 2:278  
**扫描法 4:713**  
 扫描(Snobol 语言中的) 4:885  
 色多项式 2:756  
 色类 2:756  
 色谱序列 1:626  
**色散方程 2:247**  
**色散关系 2:249**  
 色散关系(带减除的) 2:249  
 色数(二维曲面的) 2:756  
 色数(图的) 2:755,759  
 森光定理 2:272  
 森林 5:266  
**森田等价 3:827**  
 森田等价的泛代数簇 5:403  
 森田等价环 3:827  
 森田定理 1:882  
 森田对偶性 3:797;3:827  
 森田组 4:116  
 森田组的环 4:116  
 沙堆悖论 1:186  
**筛法 4:819**  
 筛函数 4:819  
 筛网 5:203  
 筛网确定的半近性空间 5:203  
 筛选(通过 Лузин 筛的) 3:577  
 山谷 3:755  
 山谷法 3:756  
 删除与插入误差校正码 1:629  
 删失 2:391  
 删失时 3:623  
**扇 2:450**  
 扇定理 1:310;3:154  
**扇形 4:739**  
**扇形(常微分方程理论中的)\***  
**4:740**  
 扇形(空间中的) 4:740  
 扇形(平面上的) 4:739  
 扇形算子 2:426  
 商 2:268  
 商标架 3:540  
**商表示 4:462**  
 商层 4:804  
 商丛(向量丛的) 5:408



- 商代数 1:763
- 商(代数簇的对合下的) 3:178
- 商对象 4:461**
- 商多边形 4:226
- 商范畴 4:460**
- 商范数 3:966
- 商函子 2:611
- 商环 4:462**
- 商空间 4:462**
- 商空间(动力系统的) 4:705
- 商空间(空间关于群的) 1:32
- 商空间(群关于其子群的) 2:899
- 商空间(向量空间的) 4:417
- 商(连分数的) 1:806
- 商模 3:682
- 商模(模在子模上的) 3:795
- 商品(数理经济学中的) 3:636
- 商群 4:460**
- 商(实数被非零实数除所得的) 4:512
- 商拓扑 4:461
- 商维数(向量子空间的) 1:630
- 商系统 1:763
- 商系统(代数系统的) 1:106
- 商映射 4:460**
- 商子群(Klein 群的) 5:328
- 熵 2:363**
- 熵(保测变换的) 1:194;3:238
- 熵猜想 5:191
- 熵(对象的) 1:127
- 熵(可测分解的)\* 2:364**
- 熵理论 3:724
- 熵理论(动力系统的)\* 2:364**
- 熵(理想气体的) 1:386
- 熵(理想 Fermi 气体的) 2:461
- 熵(粒子系统的) 1:408
- 熵(随机变量的) 3:71;3:75
- 熵(一对随机变量的) 3:71
- 上半格 4:769
- 上半连续多值映射 3:853
- 上半连续分解 4:753
- 上半连续分解(拓扑空间的) 1:610;1:811
- 上半连续函数 2:161;4:753
- 上半连续集值映射 1:610
- 上半连续性 4:753
- 上半连续映射 4:753
- 上半模格 4:772
- 上半平面 2:804
- 上包络(函数族的) 4:136
- 上闭链 1:628**
- 上闭链群(复形的) 1:709
- 上闭链(上链复形的) 1:710
- 上闭链(上同调于零的) 3:283
- 上闭微分(Riemann 曲面上的) 2:164
- 上边缘 1:627;4:848
- 上边缘(平坦上链的) 2:498
- 上边缘(上链复形的) 1:710
- 上边缘算子 1:708
- 上边缘算子(单纯对象的) 4:836
- 上边缘映射 1:627
- 上乘法 1:619;4:410
- 上代数(余代数) 1:617**
- 上单位 2:927
- 上单位(函子添加的) 1:44
- 上底(截棱锥的) 4:376
- 上定义域(态射的) 1:502
- 上泛正方形 1:488
- 上根(代数的子类的) 4:471
- 上根(单代数类的划分的) 4:471
- 上根类 4:471
- 上估计 5:302
- 上广义上调和函数 5:358
- 上过桥 3:269
- 上函数 4:137;4:709;5:358
- 上函数与下函数方法 5:358**
- 上核 1:658**
- 上积 1:858**
- 上积(第  $i$  个) 4:1021
- 上极限 3:48;4:337;5:354
- 上极限(范畴中的) 1:503
- 上极限(函数在一点处的) 5:359
- 上极限(集合序列的) 5:360
- 上极限(投射谱的) 4:328
- 上极限(序列的) 5:359
- 上极限与下极限 5:359**
- 上集(偏序集中的) 1:815
- 上渐近密度 1:245
- 上角(广义 Riemann 空间中曲线之间的) 4:655
- 上解(Dirichlet 问题的) 5:359
- 上界 3:595
- 上界猜想 4:230
- 上界(函数的) 2:587
- 上界(集合的) 1:808
- 上界(全序子集的) 5:551
- 上界(算子的) 1:430
- 上界(拓扑族的)\* 5:360**
- 上界与下界 5:357**
- 上境图(母图) 5:79
- 上类(分割的) 3:21
- 上类(根型的) 4:471
- 上类(全序集的分割的) 5:236
- 上链 1:627**
- 上链复形 1:710
- 上临界分支过程 1:438
- 上迷向特征簇( $D$  模的) 2:2
- 上迷向子空间 5:69
- 上抛物函数 5:80**
- 上奇异指数 4:847
- 上恰当微分(Riemann 曲面上的) 2:164
- 上强导数 1:193
- 上确界 5:357
- 上确界模 2:794
- 上确界(偏序集的) 4:102
- 上确界(拓扑族的) 5:360
- 上确限(集合的) 5:357,358
- 上群对象(带点拓扑空间范畴中的) 1:619
- 上热函数 4:216
- 上三角矩阵 5:268
- 上升(本征值的) 4:927
- 上升方法 2:143
- 上升方法(关于说明过程的) 4:318
- 上升(线性算子的) 4:927
- 上生成元(半群的) 1:823
- 上四分位数 4:417
- 上松弛法 4:570
- 上调和函数 5:80**
- 上调和函数(在宽的意义下的) 4:136
- 上同调 1:643**
- 上同调残数 4:604
- 上同调长度(拓扑空间的) 1:505
- 上同调(代数的)\* 1:646**
- 上同调(带算子的空间的) 1:645
- 上同调(动力系统的) 2:910
- 上同调对象(上链复形的) 1:710

- 上同调(复形的)\* 1:646
- 上同调(概形的) 4:719
- 上同调函子 1:645
- 上同调环 1:657
- 上同调流形 1:646
- 上同调论 2:913
- 上同调论(代数几何学中的) 2:291
- 上同调(凝聚层的) 2:291
- 上同调平凡模 1:651
- 上同调(取值于 Abel 群层中的) 1:644
- 上同调群 1:645
- 上同调群(带紧交集的) 1:645
- 上同调群(单纯集的) 4:838
- 上同调(群的)\* 1:649
- 上同调群(结合代数的) 1:646
- 上同调群(链复形的) 1:646
- 上同调群(群的) 1:647;1:649
- 上同调群(上链复形的) 1:645
- 上同调群(射有限群的) 1:647
- 上同调群(系数取自模中的群的) 1:649
- 上同调群(么半群的) 1:646
- 上同调群(支集在闭子集族中的) 1:645
- 上同调群(Lie 代数的) 1:646
- 上同调上闭链 1:628
- 上同调(上链复形的) 2:910
- 上同调示性类(向量丛上的) 1:604
- 上同调(拓扑空间的) 1:643
- 上同调维数 1:642
- 上同调维数(概形的) 1:643
- 上同调维数(环的) 1:642
- 上同调维数(群的) 2:905
- 上同调维数(拓扑空间的) 1:642
- 上同调纬垂 1:654
- 上同调(系数在群层中的空间的) 3:925
- 上同调(线性微分算子复形的) 3:476
- 上同调序列 1:657
- 上同调序列(复形对的) 1:710
- 上同调运算 1:653
- 上同调正合序列 2:411
- 上同调(Banach 代数的)\* 1:649
- 上同调  $l$  维数(概形的) 1:643
- 上同调(Lie 代数的)\* 1:651
- 上同调  $p$  维数 2:623
- 上同论群 1:657
- 上退化算子(单纯对象的) 4:836
- 上拓扑极限 3:442
- 上外密度 1:193
- 上万有线性空间 5:355
- 上伪 Euclid 空间 1:619
- 上伪 Galilei 空间 1:620
- 上下文条件(程序的) 4:322
- 上下文文法 2:748
- 上下文无关法则(语法中的) 2:746
- 上下文无关文法 2:746
- 上下文无关文法(具有无穷级歧义性的) 2:747
- 上下文无关语言 2:514
- 上下文相关文法 2:748
- 上下文相关语言 2:748
- 上纤维 1:638
- 上纤维化 1:638
- 上纤维化(带基点的空间的) 1:638
- 上限制映射 1:650
- 上象(对应下的元素的) 1:866
- 上小数近似 2:18
- 上形式(辨的) 1:433
- 上鞅 2:804;3:629
- 上鞅收敛定理 5:1
- 上一致有界性 5:320
- 上移(张量的指标的) 5:146
- 上诣零根 3:911
- 上诣零根(代数的) 3:910
- 上有界复形 2:54
- 上有界函数 2:587
- 上有向集 2:206
- 上有向偏序集 1:682
- 上右 Dini 导数 1:188
- 上诱导模 1:649
- 上运动(半双曲空间中的) 4:768
- 上运动(半椭圆空间中的) 4:756
- 上运动(拟双曲空间中的) 4:431
- 上运动(拟椭圆空间中的) 4:427
- 上置信限 3:151
- 上中心列(群的) 1:537
- 上中心列(Lie 代数的) 3:413
- 上中心指数 1:532
- 上中心子群列 5:60
- 上锥 4:101
- 上左 Dini 导数 2:188
- 上 Bohl 指数 2:134
- 上 Bohl 指数(在零点上的) 2:134
- 上 Darboux-Stieltjes 和 4:1038
- 上 Darboux 和 2:9
- 上 Darboux 积分 2:9
- 上 Descartes 正方形 1:658
- 上 Euclid 空间 1:618
- 上 Euclid 平面 1:618
- 上 Galileo 空间 4:756
- 上  $H$  空间 1:619
- 上 Moore 空间 3:826
- 上 Wirtinger 表示 3:270
- 上 Привалов 算子 4:304
- 蛇形连续统 4:885
- 舍入 4:693
- 舍入到第  $t$  位 4:694
- 舍入到小数点后第  $t$  位 4:694
- 舍入(数的) 4:693
- 舍入误差 2:387;4:693
- 舍入误差分析 1:29
- 舍入误差积累 1:30
- 设计 4:5
- 社会选择 3:637
- 射流 5:513
- 射线 4:504
- 射线(程序的) 4:322
- 射线法 4:504
- 射线函数 4:504
- 射线近似 2:707
- 射线(线丛的) 1:715
- 射线(线汇的) 1:765
- 射线性质 4:981
- 射影 1:880
- 射影变换 4:346
- 射影表示 4:341
- 射影表示(群的) 4:341
- 射影测度 1:18
- 射影长度 1:18
- 射影丛 4:342;5:410
- 射影簇 4:330
- 射影代数 4:329
- 射影代数簇 1:52
- 射影(代数的) 5:57



- 射影代数集** 4:330  
 射影代数(射影直线的点的) 2:56  
 射影代数(在广义的意义下的) 4:330  
 射影代数(在狭义意义下的) 4:329  
 射影到带上的定理( $K$  空间中的) 4:774  
 射影的拓扑张量积 5:209  
 射影典面论 5:158  
 射影典型群 1:600  
**射影度量** 4:337  
 射影度量空间 4:337  
 射影度量元素 2:579  
 射影对射变换 5:541  
 射影对应 4:332  
**射影法线** 4:339  
 射影分层定理 4:343  
**射影概形** 4:342  
 射影公式(关于环同态的) 1:585  
 射影构形 1:742  
 射影化(向量丛的) 5:409  
 射影基(射影底) 3:914;5:410  
 射影极限的构造(Banach 空间的) 2:593  
**射影集** 4:343  
**射影几何学** 4:335  
 射影几何学(除环上的) 4:329  
 射影浸入(代数曲面的) 1:103  
 射影距离 1:18  
 射影决定公理 2:63;4:343  
**射影空间** 4:344  
 射影空间(代数上的) 4:903  
 射影类(语言的模型的) 1:293  
**射影联络** 4:330  
 射影模型 3:746  
**射影平面** 4:340  
 射影平坦空间 2:704  
 射影平延 5:260  
 射影谱 4:342;4:933  
**射影谱(环的)** 4:345  
 射影曲率张量 1:910  
 射影曲面 1:323  
**射影群** 4:336  
 射影态射 4:342  
 射影特殊线性群(特殊射影线性群) 2:667;3:749  
 射影条件(关于从属树的) 5:114  
 射影同调群 2:292  
 射影同构 1:658  
**射影微分几何学** 4:334  
 射影无穷小结构 3:67  
 射影纤维丛 4:342  
 射影(纤维积的) 2:465  
 射影(纤维空间的) 2:466  
 射影线性逼近方法 1:208  
 射影线元 2:579  
 射影辛群 5:109;5:111  
**射影形变** 4:333  
 射影性 1:659;4:346  
 射影性质 4:335  
 射影映射 2:704;4:416  
 射影有限几何 1:376  
 射影直射变换 1:658  
**射影直线** 4:345  
 射影子空间 4:344  
 射影子空间(由点集生成的) 4:344  
**射影坐标** 4:332  
 射影( $K$  空间中的到带上的) 4:774  
**涉及时刻选择的对策** 2:630  
 伸长摆线 1:923  
 伸缩 2:907  
 伸缩不变性 1:753  
 伸缩系数(共形映射的) 1:753  
 伸缩(在一点上的) 4:421  
 伸展的  $K$  空间 4:774  
 身份证明问题 1:897  
 深度(功能元图的) 2:72  
**深度(模的)\*** 2:49  
 深度(拓扑动力系统的中心的) 1:538  
 神经(集系的) 4:328  
**神经(集族的)\*** 3:889  
 神经(开覆盖的) 1:628  
 《神妙的比例》(Fra Luca Pacioli 著) 2:738  
 升超限序列 4:  
 升集(微分代数学中的) 2:98  
 升理想列 3:4  
 升力系数 5:514  
 升链条件 1:542  
 升链条件(理想的) 1:252  
 升链(微分代数学中的) 2:98  
 升滤过 2:470  
 升腾变换 3:813  
 升维法 4:879  
 升中心列(群的) 2:492  
 升子群 4:791  
 升子群列 4:791  
 生产 3:636  
 生产计划的基本问题 3:636  
 生长自动机 1:272  
**生成对象(范畴的)\*** 2:693  
 生成对象(几何对象场的) 2:712  
 生成方程组(微分方程组的) 4:398  
**生成函数** 2:693  
 生成函数(超几何分布的) 2:955  
 生成函数(码的) 1:631  
 生成函数(序列的) 2:693  
 生成函数(Bernoulli 数的) 1:329  
 生成函数(Bessel 函数的) 1:342  
 生成函数(Laguerre 多项式的) 3:332  
 生成级数(Euler 数的) 2:403  
 生成集(范畴中对象的) 2:694  
 生成集(自由半群的) 2:570  
 生成曲面(Ribaucour 线汇的) 4:616  
 生成树(图的) 5:266  
 生成算子 2:250  
**生成算子(半群的)\*** 2:693  
 生成算子(算子半群的) 4:762  
 生成算子(算子的压缩半群的) 2:250  
 生成算子(有限型的) 1:315  
 生成算子(Boole 代数的) 1:315  
**生成文法** 2:750  
 生成文法的规则 2:750  
 生成文法的时间复杂性 2:750  
 生成楔 1:740  
 生成元(半群的) 1:823  
 生成元(层的范畴的) 4:805  
 生成元(超平行体的) 4:84  
 生成元(动力系统的) 2:364  
 生成元(二次曲面的) 4:394  
**生成元(范畴的)\*** 2:694  
 生成元集(范畴的) 2:694  
 生成元(模的) 3:795

- 生成元(算子半群的) 4:762  
 生成元系(构形的) 1:741  
 生成元系(模的) 3:795  
 生成元系(投射  $p$  群的) 4:306  
 生成元系(Banach 代数的) 1:674  
 生成元(压缩半群的) 2:250  
 生成元(右位移算子的) 2:681  
 生成元族(模的) 3:795  
 生成元族(微分域扩张的) 2:420  
 生成元(左位移算子的) 2:681  
 生成元( $K$  系统的) 3:238  
 生成元( $R$  模范畴的) 1:297  
 生成锥 1:739  
 生成锥(向量空间中的) 4:772  
 生成子集 1:314  
 生成子(局部凸拓扑的) 3:547  
 生成子图 2:753  
**生存对策** 2:630  
 生存时(中断 Марков 过程的) 3:623  
**生灭过程** 1:371  
 生日(超实数的) 5:87  
 圣·彼得堡对策 2:637  
 剩余次数(赋值的) 5:366  
 剩余次数(环扩张的) 2:234  
 剩余法 3:822  
 剩余格 3:862  
 剩余函数(有限决定函数的) 2:482  
 剩余环(模  $n$  的) 4:462  
 剩余集 1:506;2:695  
 剩余(矩阵求逆中的) 3:173  
**剩余(空间的)\*** 4:579  
 剩余类 2:782  
 剩余类(代数系统的) 1:110  
 剩余类(模  $m$  的) 1:760  
 剩余(模  $m$  的  $n$  次的) 4:279  
 剩余谱 3:493  
 剩余谱(算子的) 4:934  
 剩余特征标(模  $q$  的) 2:660  
 剩余(拓扑空间的) 1:401  
**剩余映射** 4:602  
 剩余(映射的) 4:603  
**剩余有限半群** 4:602  
 剩余有限代数系统 1:110  
**剩余有限群** 4:602  
 剩余域 3:535  
 剩余域(点的) 4:719  
 剩余域(赋值的) 5:365  
 剩余运算 3:862  
**剩余(整数的)\*** 4:579  
 剩余(整数模  $m$  的) 4:579  
 剩余  $t$  设计 5:127  
 失效 4:576  
 失效函数 4:574  
 失效函数表 4:575  
 失效率 4:576  
 失真度量 2:363;3:76  
 十二角星 4:225  
**十二面体空间** 2:275  
**十分位数** 2:17  
 十分位数间宽 2:17  
 十角星 4:225  
**十进制计算体系** 2:18  
 十进制数字 2:18  
**十进制小数** 2:18  
 十一点圆锥曲线 3:914  
 石(铺砌的) 4:111  
 时间步进法 1:47  
 时间测量不变量 4:566  
 时间费用函数 1:122  
 时间复杂性函数 1:720  
 时间集 1:275  
 时间平均值 1:370  
 时间相关 Hamilton-Jacobi 方程 1:695  
**时间序列** 5:179  
 时间移位 1:921  
**时间最优控制问题** 5:178  
**时空** 4:903  
 时空测地线 5:523  
 时空几何光学 4:505  
 时空间隔 3:149  
 时空流形 4:952  
 时向曲面 3:486  
 时序函数 1:272  
 时序算子演算 3:1023  
 时序转换器 2:516  
 识别复杂性(上下文无关语言中字符串的) 2:748  
 识别器 1:275  
**识别问题** 4:517  
 实闭序域 4:11  
**实变函数论** 2:608  
 实变集 5:166  
 实部(复数的) 1:713  
 实部(拟特征标的) 4:420  
 实部(有界算子的) 2:250  
 实测度 1:564  
**实代数簇** 4:508  
 实对称核 3:99  
 实对称积分核 3:99  
 实多维 Monge-Ampère 方程 3:810  
 实二次域 4:381  
 实二次锥面 1:769  
**实范数** 4:511  
**实函数** 4:511  
 实级数 4:792  
 实极化 4:3  
 实际比例尺(地图投影的) 1:489  
 实际必然性 4:312  
 实际命题 4:349  
 实解析函数 1:597  
**实解析空间** 4:511  
 实解析流形 1:164  
 实解析曲面 1:178  
 实紧空间 1:682;1:699  
 实时 1:123  
 实时操作系统 4:889  
**实数** 4:511  
**实数的小数近似** 2:17  
 实数(数学分析中的) 3:633  
 实数系的完全性质 4:512  
 实数有乘法运算的性质 4:512  
 实数有加法运算的性质 4:512  
 实特征标 3:219  
 实同构(代数数域的) 2:219  
 实椭球面 2:342  
 实椭圆 2:341  
 实椭圆柱面 2:346  
 实伪八元数代数 3:401  
 实位移(完整系统的) 2:891  
 实无穷 1:26,27  
**实无穷抽象** 1:27  
 实现(抽象复形的) 4:163  
 实现(单纯复形的) 4:835  
 实现的复杂性问题 3:606  
 实现复杂度(Boole 函数的) 5:115  
 实现(合取的) 1:796  
 实现理论 1:921



- 实现(随机过程的) 4:708
- 实现(随机函数的) 4:483
- 实现(随机图的) 2:762
- 实现问题(动力系统的行为的) 5:118
- 实现(真相等的) 1:796
- 实现(Wiener-Hopf 方程的符号的) 3:98
- 实向量空间 5:417
- 实心三角形 5:267
- 实验函数空间 2:689
- 实用程序 5:124
- 《实用算术总论》(Cardano 著) 3:1002
- 实元(函数代数的) 1:72
- 实在参数(过程的) 4:318
- 实正交群 4:27
- 实值函数 2:587
- 实指数函数 2:419**
- 实质浸入 5:175
- 实质蕴涵 3:22
- 实质蕴涵悖论 5:32
- 实轴 1:713
- 实 Dirichlet 特征标 2:209
- 实  $K$  理论 3:239
- 实  $n$  次方根(实数的) 1:232
- 实  $n$  空间 1:233
- 实 Reidemeister 挠率 4:561
- 矢(范畴的) 1:501
- 矢列式 4:786
- 矢列式(逻辑中的) 4:786**
- 矢列式系统 2:696
- 矢列式演算 4:786**
- 始对象 2:470
- 始对象(范畴的) 3:1001
- 始集(部分等距算子的) 1:696
- 世界点 3:763;4:568;5:523
- 世界函数 5:523**
- 世界线 5:523**
- 市场 1:856
- 市场对策 1:856
- 市场模型经济 3:638
- 示性类 1:556
- 示性类(流形的) 1:556
- 示性类(纤维化的) 1:556
- 示性数 1:562**
- 事件 4:312;4:324;4:480
- 事件(程序设计中的) 4:81
- 事件代数 4:546
- 事件(时空中的) 5:523
- 事件(网络中的) 3:894
- 事件(有限自动机可表示的) 1:276
- 事件(自动机理论中的) 1:272
- 事件 Borel 域 1:403**
- 事件(Simula 语言中的) 4:843
- 势(代数系统的) 1:105
- 势(功能元图的) 2:73
- 势(基数) 1:475**
- 势(基数)(Cantor 意义下的) 1:474
- 势(集合的) 1:474
- 势(连续统的) 1:475
- 势(球面罗的) 5:461
- 势(向量场的源的) 5:414
- 视界(黑洞的) 4:734
- 试探粒子 2:702
- 试位法 2:74;4:735
- 试验 5:150**
- 试验的信息量 3:73
- 试验(对于失效函数表的) 4:575
- 试验方法(函数极大化的) 3:688
- 试验方法(函数极小化的) 3:688
- 试验(概率论中的) 5:150
- 试验(控制系统检验中的) 4:575
- 试验设计 2:64**
- 试验(依计划的) 4:577
- 试验(以 Марков 链联结的) 4:315
- 试验(自动机的) 1:258
- 适当差分问题 2:86
- 适当邻近空间 4:356
- 适当输入(算法的) 1:119
- 适定边值问题 3:652
- 适定差分格式 1:421
- 适定差分问题 2:86
- 适定定义(控制论中的) 1:918
- 适定矩问题 3:804
- 适定类 3:652
- 适定网格问题 3:467
- 适定问题 5:481**
- 适定(正确提出的)问题 3:776
- 适定 Cauchy 问题 1:508
- 适应控制 1:270;3:585
- 适应控制机构 1:922
- 适应随机过程 3:1050;5:16
- 适应最优控制 3:1044
- 释放公理 5:429
- 收敛半径 1:7
- 收敛半径(幂级数的) 2:221
- 收敛半平面(Dirichlet 级数的) 2:217
- 收敛半平面(Laplace 积分变换的) 3:346
- 收敛闭链 5:422
- 收敛(测度的)\* 1:837**
- 收敛(差分边值问题的) 1:195
- 收敛(差分格式的) 2:86
- 收敛乘子 1:837**
- 收敛的加速 1:28**
- 收敛迭代法 3:203
- 收敛定理(对线性方程的投影法的) 4:327
- 收敛(定向到一点的) 1:838
- 收敛(度量空间中的) 3:727
- 收敛多圆盘(多重幂级数的) 4:281
- 收敛多圆盘(柱)(幂级数的) 2:221
- 收敛多圆柱 2:221
- 收敛二重级数 2:285
- 收敛反常积分 3:26
- 收敛(概率分布的) 1:534
- 收敛(广义函数的) 2:690
- 收敛(广义函数序列的) 2:684
- 收敛(广义序列到一点的) 1:838
- 收敛耗散系统 2:251
- 收敛横坐标(Dirichlet 级数的) 2:217
- 收敛横坐标(Laplace 积分变换的) 3:346
- 收敛(级数的) 1:838,839
- 收敛级数(可测函数的) 4:795
- 收敛级数(Banach 空间中的) 1:307
- 收敛集合序列 3:442
- 收敛集(幂级数的) 4:279
- 收敛(检验函数的) 2:690
- 收敛(检验函数空间中的) 1:840
- 收敛结构 5:201
- 收敛界(序列类的) 1:4

- 收敛空间 1:838;5:203
- 收敛空间(Fréchet 意义下的) 1:838
- 收敛(空间  $L_p(X)$  中的) 1:839
- 收敛类(Abel-Гончаров 问题的) 1:4
- 收敛累级数 4:584
- 收敛连分数 1:806
- 收敛脉络 1:17
- 收敛幂级数环 2:519
- 收敛模(有理数构造序列的) 1:785
- 收敛谱序列 4:921
- 收敛(谱序列的) 4:921
- 收敛区间 1:837**
- 收敛区间(实幂级数的) 4:281
- 收敛(区域序列的) 1:469
- 收敛数列 1:838
- 收敛数值级数 1:838
- 收敛速率 4:496**
- 收敛(凸曲面序列的) 1:850
- 收敛网 2:691
- 收敛(网到一点的) 1:838
- 收敛(网的) 3:891
- 收敛无穷积 3:57
- 收敛系统 4:48
- 收敛行列式(无穷矩阵的) 2:66
- 收敛性 2:671
- 收敛性的比较判别法 1:687**
- 收敛(性)的类型 1:837**
- 收敛性公理 2:834
- 收敛序列 1:838
- 收敛(序列的) 1:838
- 收敛(伊代尔的) 3:4
- 收敛(依变差的)\* 1:837**
- 收敛(依测度的)\* 1:836**
- 收敛(依范数的)\* 1:836**
- 收敛(依分布的)\* 1:836**
- 收敛(依概率的)\* 1:836**
- 收敛(以概率 1 的)\* 1:841**
- 收敛(以正则子的) 4:661
- 收敛因子(定义玉河测度的) 5:128
- 收敛映射(有向集之间的) 4:103
- 收敛域(多重幂级数的) 4:280
- 收敛域(求和法的) 5:72
- 收敛圆(幂级数的) 4:279
- 收敛圆盘 2:221**
- 收敛圆盘(幂级数的) 2:221; 4:279
- 收敛指数(序列的) 1:462
- 收敛轴(Dirichlet 级数的) 2:217
- 收敛(Fourier 级数的) 1:587
- 收敛(Постников 系统的) 4:258
- 收缩 1:821**
- 收缩半群代数 4:759
- 收缩(表示的)\* 1:822**
- 收缩(代数簇的) 2:412
- 收缩(代数几何学中的) 2:412
- 收缩(复空间的) 2:412
- 收缩核 4:614**
- 收缩核(范畴对象的) 4:614
- 收缩核(拓扑空间的)\* 4:614**
- 收缩集 1:318
- 收缩(解析集的) 2:412
- 收缩(解析空间的) 3:787
- 收缩纬垂 5:90
- 收缩一边 2:753
- 收缩(有限维代数的) 2:29
- 收缩(字符串的) 2:746
- 收缩(Lie 代数的)\* 1:822**
- 收缩(Lie 群的) 1:822
- 守恒差分格式 2:87
- 守恒方程 2:829
- 守恒律 3:917;4:204;4:434
- 守恒求和法 4:556
- 首本征值(算子的) 4:251
- 首次积分 2:490**
- 首次积分(第一积分)(常微分方程的) 2:490
- 首次积分(微分方程的) 3:111
- 首次积分(微分方程组的) 3:111
- 首次积分(Pfaff 方程的) 4:149
- 首次进入 5:27
- 首项(多项式的) 4:233
- 首项 Ляпунов 特征指数 3:579
- 首一多项式 5:422
- 首语重复的连结 5:114
- 受控概率分布族 2:47
- 受控过程(扩散型的) 1:830
- 受控过程(离散时间的) 1:832
- 受控扩散过程 1:830
- 受控随机过程 1:828**
- 受控跳跃 Марков 过程 1:828
- 受控系统 1:919
- 疏集 3:992**
- 疏远集 4:354
- 输出报表书写(Cobol 语言中的) 1:621
- 输出(触点模式的) 1:800
- 输出(动力系统的) 1:921
- 输出端点(中断触点电路的) 4:573
- 输出(功能元的) 2:72
- 输出(功能元图的) 2:72
- 输出函数 1:275;1:272
- 输出(算法的) 1:119
- 输出信号(控制论系统的元的) 1:918
- 输出字母表 1:275;2:516
- 输入(触点网络的) 1:800
- 输入(动力系统的) 1:921
- 输入端点(中继触点电路的) 4:573
- 输入(功能元的) 2:72
- 输入(功能元图的) 2:72
- 输入输出动态系统 1:269;5:118
- 输入输出系统 1:269
- 输入数据误差 2:387
- 输入(算法的) 1:119
- 输入算法语言(程序的) 5:252
- 输入算子(线性定常控制系统的) 5:243
- 输入信号(控制论系统的元的) 1:917
- 输入字母表 1:275;2:515
- 输运方程,数值方法 5:255**
- 输运理论(迁移理论) 1:64
- 属性(算法语言中的词位的) 1:129
- 属性(算法语言中的概念的) 1:129
- 属性文法 2:748
- 束 3:507
- 束方程 2:249
- 束(几何学中的) 5:122
- 束类群 1:100
- 束类域 1:100
- 树 5:265**
- 树(从顶点长出的) 5:266
- 树码 5:266



- 树形 4:882
- 树形图 2:697
- 竖轴 1:488
- 竖轴(仿射坐标系的) 1:54
- 竖坐标 1:191
- 数 3:1001
- 数的表示 3:1008
- 数的度量理论 3:733
- 数的几何 2:721
- 数的阶码(在浮点记号中的) 4:201
- 数的文字表示法 1:589
- 数(递归可枚举集的) 4:529
- 数(对象的) 2:366
- 数过程 4:416
- 数据部分(Cobol 语言中的) 1:621
- 数据加密标准 1:895
- 数据加密标准 1:895
- 数空间 1:233
- 数理经济学 3:635
- 数理逻辑 3:644
- 数理逻辑的历史 3:644
- 数理统计 3:657
- 数理统计的历史 3:659
- 数理统计方法 3:657
- 数理统计与概率论之间的关系 3:657
- 数理统计中的问题 3:659
- 数理语言学 3:642
- 数量等价(集合的) 4:199
- 数量多元属性 3:845
- 数量级 4:4
- 数列 4:324
- 数列的密度 2:47
- 数论 3:1005
- 数论函数 3:1005
- 数论中的概率方法 3:1006
- 《数论》(P. J. L. Dirichlet 著) 2:467
- 数项级数 4:791
- 数项级数的第  $n$  项 4:792
- 数学 3:665
- 数学抽象 1:26
- 数学的萌芽时期 3:665
- 数学的起源 3:665
- 数学分析 3:632
- 数学分析的历史 3:635
- 数学符号 3:660
- 数学符号的起源 3:660
- 数学概率 4:307
- 数学归纳法 3:641
- 数学归纳法原理 3:46;3:642
- 数学归纳原理 3:642
- 数学规划 3:655
- 数学家解放运动 5:87
- 数学结构 5:41
- 数学晶体学 1:900
- 数学模型 3:647
- 数学模型(程序设计中的) 5:124
- 数学模型的辨识问题 3:1044
- 数学模型化 3:647
- 数学模型化的四个阶段 3:647
- 数学模型(控制系统的) 1:264
- 数学期望 3:641
- 数学期望的主要性质 3:641
- 数学物理 3:648
- 数学物理方程 3:650
- 《数学原理》(Russell - Whitehead 著) 3:644
- 数域 3:1004
- 数值标志集(表示的最高权向量的) 1:486
- 数值不变量(代数曲面的) 1:102
- 数值不变量(拓扑空间的) 5:194
- 数值等价代数闭链 1:81
- 数值二重序列 2:284
- 数值方法(第一类 Fredholm 积分方程的) 2:561
- 数值方法(解不适定问题的) 3:7
- 数值方法(解网格方程组的) 4:207
- 数值方法(解 Fredholm 积分方程的) 2:559
- 数值方法(连续计算的) 2:645
- 数值方法(确定 Fredholm 积分算子本征值的) 2:325
- 数值方法(数理经济学中的) 3:639
- 数值函数 2:587;3:441
- 数值积分法 3:124
- 数值解(非线性方程组的) 3:138
- 数值解(积分方程的) 3:139
- 数值解(矩阵对策的) 3:675
- 数值解(微分方程的) 3:139
- 数值离心率 2:317
- 数值算子 3:1022
- 数值特征标(模  $q$  的) 2:659
- 数值微分法 2:170
- 数值稳定性 1:659
- 数值域(算子的) 2:426
- 数值 Laplace 变换 3:347
- 数轴 1:228;4:514
- 数字 1:589
- 数字签名 1:896
- 数字(算法语言中的) 1:129
- 数组(PL/I 语言中的) 4:183
- 衰减(转移过程的) 1:267
- 衰减 Radon 变换 5:185
- 双边逼近 5:302
- 双边不变 Haar 测度 2:797
- 双边二次型 4:388
- 双边估计 5:302
- 双边滑动平均过程 3:839
- 双边可逆元(有单位元的单群的) 3:176
- 双边理想 3:1
- 双边理想(范畴的) 3:3
- 双边零化子(集合的) 1:184
- 双边零元(半群的) 5:537
- 双边生成元(动力系统的) 2:364
- 双边生成元( $K$  系统的) 2:238
- 双边数值方法 5:302
- 双边正则化子(有界线性算子的) 4:852
- 双边指数分布 3:340
- 双不变度量 2:487
- 双侧不变积分(群上的) 3:160
- 双侧不变平均(群上的) 1:158
- 双侧超曲面 3:1019
- 双侧基座(环的) 3:745
- 双侧极限 3:1019
- 双侧假设 5:108
- 双侧曲面 5:303
- 双侧收敛级数 4:794
- 双侧统计检验 4:1017
- 双侧约束 2:892
- 双侧 Laplace 积分变换 3:346
- 双层的推迟位势 3:262
- 双层对数位势 3:555
- 双层密度 2:686
- 双层位势 2:280

- 双层 Newton 位势 3:905
- 双层 Riemann 曲面 2:282
- 双代数 2:927
- 双单半群 4:831
- 双调和方程 1:358
- 双调和函数 1:358
- 双对偶 1:308
- 双对数纸(对数纸) 3:554
- 双二次方程 1:368
- 双二次非剩余 1:761
- 双二次剩余 1:761
- 双反射子范畴 5:204
- 双范畴 1:352
- 双仿射空间 1:55
- 双峰分布 1:362
- 双峰概率分布 3:783
- 双复形 1:353
- 双共轭函数 2:290
- 双函子 1:356
- 双极定理 2:296;3:546
- 双极集 4:213
- 双极矩 3:852
- 双极位势 3:852
- 双极坐标 1:367
- 双加算子(Крёин 空间中的) 3:294
- 双交换子 5:440
- 双结合性(Moufang 么拟群的) 3:838
- 双结合么拟群 3:565
- 双紧拓扑空间 1:686
- 双紧性 1:686
- 双矩阵对策 1:362
- 双连通空间 1:353
- 双连通正域 2:275;3:866
- 双连续对应 3:60
- 双临界结点 3:915
- 双领子集 1:144
- 双面体 2:932
- 双模 1:362
- 双模态射 1:362
- 双纽线 3:387
- 双纽线函数 3:387
- 双陪集 2:282;3:592
- 双陪集(关于紧子群的) 2:681
- 双陪集(群的模一对子群的) 2:282
- 双平面几何学 1:367
- 双平面空间 1:367
- 双平移(半群的) 5:253
- 双切线(平面实代数曲线的) 4:184
- 双球面坐标 1:368
- 双曲测度 2:942
- 双曲长度 2:942
- 双曲超限直径(紧集的) 5:244
- 双曲的常曲率 Riemann 流形 1:783
- 双曲的分式线性映射 3:546
- 双曲的球面束 5:123
- 双曲的圆束 5:122
- 双曲的 Coxeter 群 1:884
- 双曲的 Poincaré 度量 3:266
- 双曲点 2:949
- 双曲点(动力系统的) 2:949
- 双曲点(曲面的) 1:910;2:154; 2:949
- 双曲点(双曲平面的) 4:196
- 双曲度量 2:942
- 双曲度量(单位圆盘中的) 2:942
- 双曲度量(复区域中的) 2:942
- 双曲度量原理 2:943
- 双曲对合 3:177
- 双曲反演 3:172
- 双曲函数 2:941
- 双曲集 2:949
- 双曲几何学 2:942
- 双曲角觔(三角形的) 5:268
- 双曲距离 2:943;4:162
- 双曲空间 5:516
- 双曲空间形式 4:899
- 双曲类线 4:170
- 双曲螺线 2:950
- 双曲面 2:951
- 双曲面积 2:943
- 双曲抛物面 2:944
- 双曲抛物线 4:170
- 双曲平面 4:196;5:338
- 双曲平面模型 5:244
- 双曲脐点 5:165
- 双曲球面罗 5:461
- 双曲容量 5:244
- 双曲三角学 2:950
- 双曲扇形 4:740
- 双曲射线(线汇中的) 1:765
- 双曲双曲线 4:170
- 双曲透射(几何学中的) 2:907
- 双曲椭圆积分 2:349
- 双曲伪距离 5:244
- 双曲线 2:941
- 双曲型的多项式 2:945
- 双曲型的球面网 3:890
- 双曲型二阶偏微分方程 2:130
- 双曲型方程及方程组的混合和边值问题 3:767
- 双曲型复数 2:279
- 双曲型偏微分方程 2:944
- 双曲型偏微分方程,数值方法 2:945
- 双曲型偏微分方程组 1:872; 3:486
- 双曲型偏微分算子 2:166
- 双曲型奇点(微分方程的) 3:165
- 双曲型双线性型 5:516
- 双曲型线性常微分方程组 3:498
- 双曲型线性偏微分方程 2:111
- 双曲型线性微分算子 3:476
- 双曲型圆网 3:890
- 双曲型周期吸引子 1:181
- 双曲型 Booth 双纽线 1:399
- 双曲型 Riemann 曲面 5:328
- 双曲性(不变点的) 3:832
- 双曲性(轨道的) 3:832
- 双曲性区域(偏微分方程的) 3:774
- 双曲余弦 1:867
- 双曲余弦积分 3:109
- 双曲圆盘 2:943
- 双曲正切 2:941
- 双曲正切 5:132
- 双曲正弦 4:846
- 双曲正弦积分 3:109
- 双曲直线 4:196;5:28
- 双曲直线(拟双曲空间中的) 4:431
- 双曲直线(上伪 Euclid 空间中的) 1:619
- 双曲直线(双曲平面中的) 4:196
- 双曲指数函数 3:1022
- 双曲柱面 2:941
- 双曲 Чебышев 常数 5:244



- 双全纯映射 1:359  
 双全纯自同构( $CP^n$  的) 2:546  
 双色图 2:754  
 双商映射 4:461  
 双射性问题 3:995  
 双生子佯谬 4:569  
 双搜索法 4:286  
 双随机矩阵(二重随机矩阵)  
     3:596;4:129;5:9  
 双态射 1:362  
 双椭圆  $\theta$  函数 4:643  
 双微分算子(一阶的) 3:411  
 双维数(代数的) 2:905  
 双稳态扩散方程 4:507  
 双线性度规空间 4:904  
 双线性泛函 1:361  
 双线性关系(Abel 微分的) 1:10  
 双线性函数 1:361  
 双线性积分形式 1:361  
 双线性级数(积分核的) 3:100  
 双线性微分 1:359  
 双线性型 1:360  
 双线性映射 1:361  
 双线性运算 5:145  
 双线性展开(积分核的) 3:100  
 双向量 1:372  
 双向量的叶 1:372  
 双向量空间 1:373  
 双序集 4:553  
 双循环半群 1:353  
 双亚纯映射 3:715  
 双样本 Student 检验 5:46  
 双叶双曲面 5:302  
 双因子映射 1:356  
 双有理变换 1:369  
 双有理不变量 1:368  
 双有理等价概形 1:369  
 双有理等价平面实代数曲线  
     4:169  
 双有理几何学 1:368  
 双有理态射 1:369  
 双有理同构 1:369  
 双有理同构概形 1:369  
 双有理映射 1:369  
 双有理自同构 1:369  
 双余反射子范畴 5:204  
 双圆盘 1:354  
 双圆形域 2:276  
 双张量 1:373  
 双正规拓扑空间 1:20  
 双正交规范系 4:37  
 双正交系 1:367  
 双正则环 4:551  
 双众数分布(双峰分布) 1:362  
 双重传递群 5:537  
 双重递归 4:521  
 双重否定 1:790  
 双重否定律 2:282  
 双重模 2:282  
 双周期函数 2:283  
 双轴空间 1:367  
 双柱截线 1:354  
 双柱面坐标 1:353  
 双柱域 1:353  
 双  $\Gamma$  函数 4:375  
 水平的全纯映射 4:123  
 水平的微分形式 1:777  
 水平分布 2:931  
 水平(函数的) 5:384  
 水平函数(偏序集上的) 4:552  
 水平集 3:392  
 水平阶层曲线(共形映射的)  
     3:452  
 水平(可积最高权表示的) 3:243  
 水平流形(函数的) 5:384  
 水平切子空间 1:777  
 水平曲面(函数的) 2:760  
 水平曲线(联络的) 1:775  
 水平提升(曲线的) 1:775  
 水平(同余子群的) 3:792  
 水平投影 2:59  
 水平投影面 2:59  
 水平线(函数的) 2:760  
 水平子空间 1:776  
 水平(子群的) 3:787  
 顺从代数 1:649  
 顺从局部紧群 3:158  
 顺从群 3:158  
 顺序程序设计 4:80  
 顺序公理(椭圆几何学的) 4:622  
 顺序统计量 4:7  
 顺序统计量系列 4:7  
 顺序统计量向量 4:7  
 顺序统计量序列 5:399  
 瞬变条件 2:505  
 瞬变现象(近临界分支过程中的)  
     1:438  
 瞬时速度 2:99  
 瞬时相位(自由谐振动的) 2:567  
 瞬时状态 3:85  
 瞬态解 4:144  
 瞬态问题(绕射的) 2:172  
 瞬子 5:530  
 瞬子向量丛 5:411  
 说谎者 4:286  
 说谎者悖论 3:400  
 丝 4:508  
 私人解密算法 1:893  
 私人密钥(密码学中的) 1:893  
 思维抽象 1:26  
 斯拉夫数字 4:873  
 死带(局部极值的) 3:849  
 四边形 4:395  
 四边形罗 5:462  
 四次剩余 4:279  
 四顶点定理 2:156  
 四分位数 4:417  
 四极矩 3:852  
 四极位势 3:852  
 四角形 4:378  
 四角形(完全的)\* 4:379  
 四面体 5:154  
 四面体空间 5:154  
 四面体数  
 四面体坐标 5:154  
 四色猜想 2:762  
 四色问题 2:526  
 四维流形 2:526  
 四元二次型 4:443  
 四元数 4:443  
 四元数除环 4:870  
 四元数代数 5:235  
 四元数结构 4:445  
 四元数结构(实向量空间上的)  
     4:445  
 四元数结构(微分流形上的)  
     4:445  
 四元数群 4:444  
 四元数 Kähler 流形 4:445  
 四元数 Riemann 流形 4:445  
 四元型 4:443

- 四元组形式体系 2:203  
 四圆坐标 5:153  
 四子空间箭图 4:459  
 似然比 4:1012  
 似然比检验 3:438  
 似然比检验的容量 3:439  
 似然比检验统计量 3:438  
 似然比(随机过程的) 4:1011  
 似然方程 3:438  
 似然函数 3:69;3:690;4:996;  
 4:1012  
 松阪定理 3:800  
 松本定理 1:94  
 松弛变量变换 2:440  
 松弛层 2:494  
 松弛(单纯复形的) 4:328  
 松弛法 4:570  
 松弛条件 3:687  
 松弛振动 4:571  
 松弛最优控制 1:826  
 松弛最优模态 1:826  
 松島准则 3:679  
 松散映射 3:613  
 搜索对策(具有不动隐藏者的)  
 4:376  
 搜索对策(具有移动隐藏者的)  
 4:376  
 搜索问题(线性的) 4:734  
 素半群元素 4:289  
 素除子(群中的) 2:270  
 素端 1:252;3:445  
 素端的印记 3:446  
 素多向量 4:220  
 素格理想 4:290  
 素根 3:911;3:913  
 素环 4:291  
 素理想 4:289  
 素理想(半群的) 1:553;3:682  
 素理想数 3:3  
 素理想(与模相伴的) 1:39  
 素理想(在域扩张中惯性的) 3:50  
 素理想(Dedekind 环的) 2:21  
 素滤子 4:290  
 素商环 3:222  
 素数 4:290  
 素数差 2:259  
 素数定理 2:261;1:712  
 素数分布 2:256  
 素数模的同余式 1:764  
 素数(在算术级数中的) 2:256;  
 2:259  
 素域 4:289  
 素域(特征  $p$  的) 2:626  
 素元 4:289  
 素元(第一类) 3:446  
 素元(多项式环中的) 3:182  
 素元(环中的) 1:252;2:268  
 素元素的类 3:446  
 素蕴涵元(Boole 函数的) 4:530  
 素子域 2:467  
 速度场(变换群的) 3:1018  
 速度场(无穷小形变的) 3:66  
 速度(密码体制的) 1:893  
 速度向量 4:688  
 速端曲线 2:886  
 速端曲线变换 2:886  
 速端曲线方程 3:162  
 速率(作为失真函数的) 2:364  
 塑性力学的数学理论 4:173  
 塑性流动理论 4:175  
 算法 1:119  
 算法不可解可判定问题  
 算法不可解问题 1:886  
 算法不可解性 5:356  
 算法的闭包 1:613  
 算法的表示 1:126  
 算法的等价性 1:134  
 算法的度量理论 1:136  
 算法的计算复杂性 1:122  
 算法的描述 1:785  
 算法的描述复杂性 1:121  
 算法的组合 1:133  
 算法集合论 1:133  
 算法几何学 2:709  
 算法计算过程 1:119  
 算法(局部的)\* 1:124  
 算法可归约性 1:133  
 算法可归约性问题 1:136  
 算法论 1:135  
 算法论的应用 1:136  
 算法逻辑 5:156  
 算法熵(字的) 1:128  
 算法识别(球面的) 5:170  
 算法算子( $M_1 \rightarrow M_2$  型的)  
 1:791  
 算法条件熵(字的) 1:128  
 算法问题 1:130  
 算法问题(上下文无关文法中的)  
 2:748  
 算法问题(上下文相关文法中的)  
 2:749  
 算法信息量 1:128  
 算法信息论 1:126  
 算法语言 1:128  
 算法语言(递归函数的) 4:534  
 算法语言中的说明 1:129  
 算法(字母表上的)\* 1:124  
 算盘 1:3  
 《算盘书》(Leonardo da Pisa 著)  
 1:227  
 算术 1:226  
 算术半形式系统 1:787  
 算术比 1:232  
 算术不变量(图形的) 2:469  
 算术簇 3:148  
 算术代数几何学 1:115  
 算术定理(关于 Lie 子群的)  
 2:231  
 算术泛代数 5:349  
 算术分布 1:228  
 算术分层 2:863  
 算术分数 2:543  
 算术根 1:232  
 算术公式 1:229  
 算术关系类 2:863  
 算术函数 1:230  
 算术函数的渐近式 1:251  
 算术函数(多项式增长的) 4:234  
 算术函数(幂增长的) 4:234  
 算术函数(同阶增长的) 4:234  
 算术函数(指数增长的) 4:234  
 算术函数(中间增长的) 4:234  
 算术和(序列的) 3:604  
 算术化 1:233  
 算术基本定理 2:256  
 算术空间 1:233  
 算术亏格 1:231  
 算术亏格(代数曲线的) 1:78  
 算术亏格(完全光滑代数曲面的)  
 2:698  
 算术类(晶体群的) 1:899



- 算术理论(二次型的) 4:383  
 算术连续统 1:228  
 算术码 1:628  
 算术平均几何平均不等式 3:596  
 算术平均求和法 1:233  
 算术平均值 1:232  
 算术谱系 3:264  
 算术全对称 1:899  
 算术群 1:231  
 算术群元素的类 2:699  
 算术群元素的种 2:699  
 算术三角形 1:233  
 算术数列(等差数列) 1:232  
 算术谓词 1:229  
 算术误差 1:629  
 算术误差校正码 1:628  
 《算术研究》(Gauss 著) 2:782;  
 3:960  
 算术演算 1:229;3:153  
 算术值(实数  $n$  次方根的) 1:232  
 算术最小值 2:722  
 算术最小值(二元型的) 1:363  
 算术 Cohen - Macaulay 簇 1:639  
 《算术》(Diophantus 著) 1:69;  
 1:83;2:336  
 算术 Lie 子群 2:231  
 《算术》(Stevin 著) 3:1002  
 算图 3:922  
 算图法 3:922  
 算子 3:1025  
 算子半群 4:762  
 算子半群(局部凸空间中的)  
 4:765  
 算子半群( $C_0$  类的) 4:762  
 算子半群( $lC_0$  类的) 4:764  
 算子半群( $uC_0$  类的) 4:765  
 算子变换 5:47  
 算子变体(平稳相位法的) 4:985  
 算子遍历定理 3:1028  
 算子不可约表示 3:1029  
 算子代数 2:384  
 算子的插值 3:140  
 算子的扩张 2:425  
 算子的谱 4:934  
 算子的象征 5:92  
 算子的象征(带边界流形上的)  
 5:93  
 算子的象征(流形上的) 5:93  
 算子的象征( $\mathbf{R}^n$  上的) 5:92  
 算子的压缩 3:1025  
 算子的指标 3:43  
 算子范数 3:493;3:967  
 算子方程 2:598  
 算子根(算子方程的) 3:963  
 算子函数 2:594;3:1022  
 算子环 3:1029  
 算子积 3:1027  
 算子(空间上的) 3:1025  
 算子扩张问题 2:427  
 算子理论 3:545  
 算子理论(带不定度规的 Hilbert 空  
 间中的) 2:876  
 算子群 3:1028  
 算子(弱型( $A, \psi$ )的) 3:142  
 算子束 5:123  
 算子算法 1:729  
 算子同构 3:1028  
 算子同态 3:1029  
 算子拓扑 3:1029  
 算子(线性表示的) 3:505  
 算子演算 3:1021  
 算子指数 1:425  
 随机逼近 5:1  
 随机编码 4:479  
 随机变量 4:484  
 随机变量变换 4:485  
 随机不可辨别性 5:7  
 随机常微分方程 5:31  
 随机场 4:480  
 随机场(广义的)\* 4:481  
 随机场(齐次的)\* 4:482  
 随机存取机器 3:590  
 随机存取(Cobol 语言中的) 1:621  
 随机等价 5:5  
 随机等价随机变量 5:5  
 随机等价随机过程 5:5  
 随机点过程 5:10  
 随机点过程(有限记忆的)\* 5:12  
 随机动态规划 2:308  
 随机独立性 3:35  
 随机对策 5:5  
 随机对策(具有极限均值性能指标  
 的) 5:5  
 随机分配 4:477  
 随机估计 5:19  
 随机规划 5:23  
 随机过程 5:13  
 随机过程的二阶性质 1:861  
 随机过程的滤波 5:19  
 随机过程的内插 5:21  
 随机过程的统计分析 4:990  
 随机过程的预测 5:22  
 随机过程(独立增量的)\* 5:17  
 随机过程(多维参数的) 4:480  
 随机过程(多维时间的) 4:480  
 随机过程(关于闭集类可分的)  
 4:782  
 随机过程(广义的)\* 5:16  
 随机过程(具有谱密度的) 4:916  
 随机过程(具有谱密度的) 4:916  
 随机过程(可更新的)\* 5:17  
 随机过程(可微的)\* 5:16  
 随机过程(离散时间的) 5:13  
 随机过程(连续时间的) 5:13  
 随机过程论中的统计问题 4:1011  
 随机过程(平稳增量的)\* 5:18  
 随机过程(时齐的) 4:985  
 随机过程(无后效的) 4:316  
 随机过程(相容的)\* 5:16  
 随机函数 4:483  
 随机函数的谱分解 4:913  
 随机函数(具有不相关增量的)  
 4:986  
 随机函数(时间的) 5:13  
 随机核 4:134  
 随机化 4:488  
 随机化检验 4:488  
 随机化判定法则 4:488  
 随机积分 5:7  
 随机基 5:2  
 随机极小化方法 3:656  
 随机几何学 5:6  
 随机介质 1:274  
 随机竞赛图 5:237  
 随机矩阵 5:9  
 随机控制 3:1031  
 随机连续随机过程 5:2  
 随机连续性 5:2  
 随机流 4:416  
 随机滤波 3:1031  
 随机滤波理论 3:1044

随机滤波问题 5:19  
 随机抛物元 5:328  
 随机偏微分方程 5:20  
 随机求积公式 3:823  
**随机区间 5:8**  
 随机时间变换 2:605  
 随机实数 5:220  
 随机实现问题 3:773  
**随机事件 4:480**  
**随机收敛 5:2**  
 随机树 2:762  
 随机数 4:478  
**随机数和伪随机数 4:478**  
**随机数值算法 5:10**  
 随机梯度 3:686  
 随机梯度法 3:686  
 随机跳跃测度 4:771  
**随机图 2:762**  
**随机微分 5:3**  
**随机微分方程 5:4**  
 随机微分方程的逼近 5:31  
 随机稳定特征指数 4:969  
 随机问题(动态规划中的) 2:308  
 随机问题(运筹学中的) 3:1023  
 随机误差 2:390  
 随机下降法 3:656  
**随机相依性 5:2**  
 随机向量 4:485  
**随机序列 4:484**  
**随机序列 5:24**  
**随机映射 4:484**  
**随机游动 4:485**  
 随机游动(具有一个边界的)  
 4:486  
**随机有界性 5:2**  
 随机语言 2:516  
**随机元 4:479**  
 随机置换 4:484  
 随机自动机 1:278  
 随机最大值原理 1:833  
 随机最优控制 3:1031;3:1043  
 随机 Boole 函数 2:762  
 随机 Ляпунов 函数 3:585  
**孙子剩余定理 1:584**  
 损失顶限 4:303  
 损失概率 4:447  
**损失函数 3:569**

损失制排队系统 4:447  
 损失制系统 4:452  
 缩并(外微分形式与向量的)  
 1:484  
**缩并(张量的)\* 1:823**  
 缩短摆线 1:923  
 缩尾 2:391  
 缩约合取范式 1:74  
 缩约析取范式 1:74  
 所指 3:872  
 所指 5:40  
**所指(外延)\* 2:44**  
 索引输入-输出(Cobol 语言中的)  
 1:621  
 锁相 1:254

## T

**胎紧测度 5:177**  
 胎紧测度集 3:702  
 胎紧概率测度族 2:263  
 胎紧概率分布族 2:263  
 胎紧集函数 5:177  
 胎紧浸入 5:173  
**胎紧浸入和套紧浸入 5:173**  
 胎紧 Baire 测度 1:404  
 胎紧 Borel 测度 1:404  
 台架试验 4:577  
 太阳 1:574  
 太阳-地球-月亮系统 5:169  
 态 4:991;4:1007  
**态射 3:828**  
 态射(被枚举的集合的) 2:367  
 态射(次数为  $h$  的) 1:710  
 态射(代数簇的) 1:91  
 态射(戴环空间的) 4:672  
**态射的核(范畴中的)\* 3:254**  
**态射的象 3:12**  
 态射(范畴的) 1:500;3:828  
 态射(分次对象的) 1:710  
 态射(局部有限型的) 4:720  
 态射(具有构造群的纤维丛的)  
 2:618  
 态射类 3:828,1011  
 态射(链复形的) 1:710  
 态射(谱的) 4:935  
 态射(纤维空间的) 2:466  
 态射(向量丛的) 5:408  
 态射(有限型的) 4:720  
 态射(余代数的) 1:617  
 态射余锥 1:738  
 态射锥 1:738  
 态射(Lie 群之间的) 3:423  
 态射( $p$  可除群的) 4:58  
 态射( $S$  概形的) 4:719  
 态射(Постников 系统的) 4:258  
 坍缩映射锥 3:610  
 贪婪算法 3:678  
 谈判方案 1:217  
 谈判解 1:217  
**弹性的数学理论 2:329**  
**弹性理论的动力学问题 2:304**  
**弹性理论的接触问题 1:797**  
**弹性理论的平面问题 2:331**  
 弹性模量 2:329  
 弹性平面理论中的第二类基本问题  
 2:332  
 弹性平面理论中的第三类基本问题  
 2:332  
 弹性体动力学方程 2:333  
**弹性系统的稳定性 4:967**  
 弹性形变 2:329  
 套紧浸入 5:174  
 套紧嵌入 5:176  
 套紧子空间 5:176  
 套紧子流形 5:176  
 特定点(单纯集的) 4:839  
 特定曲率(凸曲面的) 1:851  
 特定相 1:387  
 特化 Boole 函数法 1:392  
 特积分(微分方程的) 3:111  
 特积分(一阶偏微分方程的)  
 2:129;3:112  
 特解 2:670  
 特解(非齐次差分方程的) 2:78  
 特殊除子 1:79  
 特殊次直积(代数系统的) 5:58  
 特殊单 Lie 代数 3:417  
 特殊仿射弧长 1:57  
 特殊根(根基) 4:471  
**特殊函数 4:907**  
**特殊化(点的)\* 4:909**  
 特殊化定理(光滑态射的) 2:393



- 特殊化规范变换 2:651  
 特殊化同态 3:813  
 特殊化序 3:596  
 特殊控制 3:1035  
 特殊列代数 2:696  
**特殊流 4:907**  
 特殊四元数结构 4:445  
 特殊四元数流形 4:445  
 特殊系数定理  
**特殊线性群 4:908**  
 特殊线性群(除环上  $n$  个变量的)  
   1:601  
 特殊线性群(环上的  $n$  阶的)  
   4:908  
 特殊酉配边 1:624  
 特殊酉群 5:339  
 特殊正交变换 4:40  
 特殊正交代数群 4:27  
 特殊正交群 4:40  
 特殊秩(群的) 4:489  
**特殊自同构 4:906**  
 特殊自同构(四元数结构的)  
   4:445  
 特殊自同构(由测度空间的自同构  
   构造的) 4:906  
 特殊 Abel 函数 1:11  
 特殊 Clifford 群 1:605  
 特殊 Denjoy 积分 2:43  
 特殊 Jordan 代数 3:227  
 特殊 Kähler 流形 4:445  
 特殊 Lie 代数 3:404;3:412  
 特殊 Lie 群 3:430  
 特殊 Riccati 方程 4:616  
 特殊 Whitehead 群 5:494  
 特殊  $\lambda$  环 3:312  
 特性指数(除子的) 1:103  
**特许紧集 4:306**  
 特许 Stein 集(关于凝聚解析层的)  
   4:306  
 特异边界(多区域的) 4:223  
 特异边界(多圆盘的) 4:223  
 特异类(域扩张的) 4:781  
 特异三角形(范畴中的) 2:53  
 特异元(集合中的) 1:100  
 特异真假值 3:782  
**特征 1:554**  
 特征闭链( $D$  模的) 2:2  
 特征标 4:3  
**特征标(半单 Lie 代数有限维表示  
   的)\* 1:551**  
 特征标半群 1:553  
**特征标(半群的)\* 1:553**  
 特征标(代数群的) 1:552  
**特征标的导子 1:737**  
 特征标(分离半群元素的) 1:553  
**特征标公式 1:549**  
 特征标(交换拓扑半群的) 5:197  
**特征标(结合代数表示的)\*  
   1:552**  
**特征标(结合代数的)\* 1:553**  
**特征标群 1:550**  
**特征标(群表示的)\* 1:552**  
 特征标群(代数群的) 1:550  
**特征标(群的)\* 1:551**  
 特征标群(拓扑群的) 1:550  
 特征标(拓扑空间的) 2:670  
 特征标(拓扑群的) 1:551  
 特征标(酉表示的) 5:341  
 特征标(在一点上的) 1:472  
**特征标( $C^*$  代数的)\* 1:551**  
 特征参数(Kerr 度规的) 3:256  
 特征簇( $D$  模的) 2:2  
 特征代数 3:782  
**特征带 1:563**  
 特征单纯映射(单形的) 4:980  
 特征点(核的) 4:135  
 特征对( $O$  曲线的) 2:578  
 特征(多维奇异积分方程的)  
   4:853  
**特征多项式 1:563**  
 特征多项式(代数元素的) 2:237  
 特征多项式(多项式矩阵的)  
   3:672  
 特征多项式(矩阵的) 1:563  
 特征二次型(二次曲线的) 4:738  
 特征法向(在一点上的) 3:485  
**特征泛函 1:561**  
 特征泛函的主要性质 1:561  
 特征泛函(湍流的) 5:287  
**特征方程 1:559**  
 特征方程(差分方程的) 2:78  
 特征方程(常系数线性常微分方程  
   的) 3:500  
 特征方程(二次曲线的) 4:738  
 特征方程(矩阵的) 1:563  
 特征方程(拟线性双曲型方程组的)  
   4:433  
 特征方程(周期系数的线性微分方  
   程组的) 3:508  
 特征方程组(一阶偏微分方程的)  
   2:128  
 特征方程组(Pfaff 方程组的)  
   1:482  
 特征方程组(Pfaff 结构的) 4:152  
 特征方向(拟微分算子的象征的)  
   5:454  
 特征方向(一阶偏微分方程的)  
   2:128  
 特征方向(在一点上的) 3:485  
 特征方向(Monge 锥的) 3:811  
 特征根(矩阵的) 1:563  
**特征函数 1:560**  
 特征函数(对策的) 1:855  
 特征函数(多维分布的) 3:843  
 特征函数(分布的) 2:448  
 特征函数(合作非原子对策的)  
   3:929  
**特征函数(集合的) 1:561**  
 特征函数(局部环的) 3:535  
 特征函数(齐次线性积分方程的)  
   3:95  
 特征函数(齐次线性积分方程核的)  
   3:95  
 特征函数(区间的) 4:493  
 特征函数(随机变量的) 1:560  
 特征函数(亚纯函数的)  
 特征集(微分代数学中的) 2:98  
 特征集(在一点处的) 3:485  
 特征角面 3:776  
 特征矩阵 3:485  
 特征矩阵(多项式的) 3:672  
 特征矩阵(矩阵的) 3:977  
 特征矩阵(模态逻辑中的) 3:782  
 特征矩阵(拟线性双曲型方程组的)  
   4:434  
 特征理想 5:481  
 特征零的域 1:563  
**特征流形 1:562**  
 特征流形(偏微分算子的) 1:554  
 特征流形(线性微分算子的)  
   3:476

- 特征逻辑矩阵 3:560  
 特征(偏微分算子的) 1:554  
 特征奇异积分方程 4:850  
 特征奇异算子 4:850  
**特征曲面 1:564**  
 特征曲面(拟线性双曲型方程组的) 4:434  
 特征曲面(偏微分算子的) 1:554  
 特征(曲线的奇点的) 4:858  
 特征曲线(一阶偏微分方程的) 2:128  
**特征数 1:562**  
 特征数(矩阵的) 1:563  
 特征数(齐次线性积分方程的) 3:959  
 特征数(齐次线性积分方程核的) 3:95  
 特征数(算子的) 2:250  
 特征数(Pfaff 方程组的) 1:482  
 特征算子函数 3:964  
 特征算子(Марков 过程的) 5:249  
 特征(图形的) 2:469  
 特征(微分算子的) 4:301  
 特征无限的域(无特征的域,特征零的域) 1:563  
**特征线法 3:719**  
 特征线(偏微分方程的) 1:554  
 特征(线性微分算子的) 3:475  
 特征线(Monge 锥的) 3:811  
 特征向量 2:327  
 特征行列式 4:926  
 特征行列式(偏微分方程组的) 2:112  
 特征形式(拟线性双曲型方程组的) 4:433  
 特征形式(偏微分方程的) 2:111  
 特征形式(线性椭圆型偏微分算子的) 3:477  
 特征序列(集合的) 1:127  
 特征(亚纯函数的) 2:590  
**特征映射 1:562**  
 特征映射(环柄的) 2:814  
**特征(域的)\* 1:562**  
 特征值(核的) 4:135  
 特征值(积分算子的) 2:327  
 特征值(矩阵的) 1:563  
 特征值(齐次线性积分方程的) 3:95  
 特征值(齐次线性积分方程核的) 3:95  
 特征值(Fredholm 积分方程的) 2:563  
**特征指数 1:560**  
 特征指数(常微分方程组的解的) 1:560  
**特征指数的稳定性 4:969**  
 特征指数(微分方程解的) 4:396  
 特征指数(线性微分方程组的) 4:396  
 特征指数(周期系数的线性常微分方程组的) 1:560  
 特征指数(Puiseux 展开的) 4:858  
 特征锥 3:486  
**特征子群 1:563**  
 特征坐标系 4:435  
 特征(Abel 群中的) 1:13  
 特征(Monge 锥的) 3:811  
**梯度 2:742**  
**梯度变换 2:744**  
 梯度(标量场的) 5:407  
 梯度(标量函数的) 2:742  
**梯度场 2:744**  
**梯度动力系统 2:743**  
**梯度法 2:744**  
 梯度(泛函的) 3:947  
 梯度(光滑函数的) 2:743  
 梯度(曲线坐标中的) 3:335  
 梯度射影法 3:656  
 梯度投影程序 5:388  
 梯度系 1:773  
 梯度下降 5:384  
 梯度向量 3:755  
 梯度(张量的) 1:877  
 梯度(柱面坐标中的) 1:926  
**梯形 5:264**  
 梯形法则 1:33  
**梯形公式 5:264**  
 提升(到特征零中的) 2:28  
 提升(概形的) 2:27  
 提升(函数的) 1:558  
 提升(拓扑空间的) 2:27  
 提升性质(无穷小形变的) 2:393  
 提升(映射的) 3:551  
 体 2:864  
 体(单纯复形的) 4:835  
 体(复形的) 4:163  
**体积 5:438**  
 体积不变量 4:235  
 体积(多面体的) 4:228  
 体积函数(度量空间中的) 3:724  
 体积(棱锥的) 4:376  
 体积(流形上集合的) 5:439  
 体积(平行多面体的) 5:440  
 体积(三维物体的) 5:438  
 体积位势 4:263  
**体积形式 5:439**  
 体积(有界物体的) 5:438  
 体积元 2:265  
 体积质量位势 4:276  
 体积(Riemann 流形的子集的) 5:439  
 体制(动力系统的状态空间中的) 5:289  
 替换公理 1:290  
 替换系统 5:172  
 替换(字符串的) 1:166  
 天球 1:240  
**天体测量学的数学问题 1:240**  
 天体力学 1:284  
**天体物理学的数学问题 1:241**  
 《天体运行理论》(C. F. Gauss 著)  
**天文学的数学问题 1:240**  
 添加公式 1:78  
 添加(函子的) 1:44  
 添加一边 2:753  
 添加一顶点 2:753  
 田村-木村定理 4:758  
 填补法 2:372  
 填补相等的多边形 2:372  
**填装 4:59**  
 填装(集合被向量系的) 4:59  
 填装(Steiner 系的) 4:1029  
 条件测度系 3:696  
 条件等式 1:111  
 条件方程(最小二乘法的) 3:369  
**条件分布 1:732**  
 条件分布函数 1:733  
 条件复杂性(字的) 1:128  
**条件概率 1:734**  
 条件概率(一事件对另一事件的) 1:734



- 条件概率(一事件对一 $\sigma$ 代数的)  
     1:734  
 条件基(Banach 空间中的) 1:308  
 条件极值 1:733  
 条件列紧集 1:679  
 条件密度 1:732  
 条件期望 4:413  
 条件期望(随机变量的) 1:734  
 条件熵 2:363  
 条件实验 5:151  
 条件实验(控制系统检验中的)  
     4:575  
 条件适定问题 3:7  
 条件收敛横坐标(Laplace 积分变换  
     的) 3:346  
 条件收敛级数 1:732  
 条件收敛性 1:732  
 条件数(本征值的) 1:697  
 条件数(矩阵的) 1:29,697  
 条件数学期望 1:734  
 条件随机变量 4:413  
 条件梯度法 3:656  
 条件完全格 1:737  
 条件稳定差分格式 1:422  
 条件稳定点(关于映射族的)  
     1:736  
 条件稳定点(流形的) 1:735  
 条件稳定性 1:735  
 条件稳定性(指数  $k$  的) 1:735  
 条件项(递归模式中的) 5:155  
 条件序列紧集 1:679  
 条件序完全向量格 1:691  
 条件周期函数 1:737  
 条件周期运动 1:737  
 条件最优控制 2:308  
 条件作用(量子概率论中的)  
     4:415  
 条件  $A$  3:982  
 条件 Feynman 测度 2:463  
 条件 Gauss 分布 2:662  
 条件  $R$ (关于 Bergman 射影的)  
     1:326  
 条件  $\omega$  3:982  
 条件  $\bar{\omega}$  3:982  
 调和比 1:890  
 调和标量场 5:408  
 调和测度 2:831  
 调和测度原理 2:832  
 调和测度(在一点的) 2:831  
 调和层 4:268  
 调和插值 3:369  
 调和的函数层 2:834  
 调和多项式 2:833  
 调和分割(点的) 2:833  
 调和分析 2:822  
 调和分析(抽象的)\* 2:822  
 调和分析(广义位移算子的)  
     2:682  
 调和分析(Lie 群上函数的) 3:53  
 调和共轭点 2:833  
 调和共轭点对 2:833  
 调和过分函数 2:415  
 调和函数 2:828  
 调和函数的基本性质 2:828  
 调和函数(曲面上的) 3:339  
 调和函数(在无穷远点的) 2:828  
 调和函数(在无穷远点正则的)  
     2:828;3:252  
 调和函数(Riemann 曲面上的)  
     2:164  
 调和级数 2:833  
 调和极线 1:904  
 调和空间 2:834  
 调和零测度集 2:832  
 调和平衡法 2:826  
 调和平均值 2:831  
 调和强函数 2:831  
 调和容量 2:826  
 调和四边形 2:833  
 调和四元点组 2:833  
 调和四元平面组 2:833  
 调和四元直线组 2:833  
 调和四元组 2:833  
 调和微分(Riemann 曲面上的)  
     2:164  
 调和线性化 2:826  
 调和向量场 5:408  
 调和形式 2:827  
 调和旋量场 4:952  
 调和优函数(调和强函数)  
     2:831  
 调和子空间 4:268  
 调和综合 4:924  
 调和综合集 4:923  
 调和坐标 2:826  
 调和坐标系 4:654  
 调节法 1:47  
 调节规律 1:266  
 调节品质 1:266  
 调节器 1:266  
 调节时间 1:267  
 调节域 1:266  
 调试(Cobol 语言中的) 1:621  
 调整子(代数数域的)\* 4:560  
 跳测度(跳过程的) 3:235  
 跳点法 2:236  
 跳过程 3:235  
 跳跃函数 3:234  
 跳跃函数(在积分权表示中的)  
     5:475  
 跳跃(全序集中的) 5:236  
 跳跃(子群系统中的) 4:11;5:61  
 停机问题 1:119;1:132;5:317  
 停机(Turing 机的) 5:317  
 停时 5:27  
 停止定理 3:631  
 停止观测集 4:788  
 通常的收敛性(级数的) 1:541  
 通常尖点 1:915  
 通常 Dirichlet 级数 2:217  
 通触点 1:800  
 通道 2:753  
 通积分 2:666  
 通积分(微分方程的) 3:111  
 通积分(一阶偏微分方程的)  
     2:129;3:112  
 通解 2:669  
 通解(差分方程的) 2:77  
 通解(常微分方程的) 2:108  
 通解(线性代数方程组的) 3:461  
 通量有限的有限差分格式 2:949  
 通向浑沌的道路 4:694  
 通信网络 3:893  
 通信信道 1:669  
 通信信道(有不完全反馈的)  
     1:544  
 通用部分递归函数 5:353  
 通用插值序列 2:817  
 通用程序最优化变换 4:322  
 通用对象(一般拓扑学中的)  
     5:178

- 通用复化(实 Lie 群的) 1:718  
 通用函数 5:352  
 通用级数 5:354  
 通用集 5:354  
 通用解析形变 2:26  
 通用算法 5:350  
 通用谓词 1:229  
 通用形变 5:166  
 通用形变(概形的) 2:27  
 通用形变(可微映射的) 4:866  
 通用一般递归函数 5:353  
 通用原始递归函数 5:353  
 通用正规算法 5:353  
 通用族 1:358  
 通用最终渊藪 5:208  
 同变多维 Plateau 问题 4:181  
 同变割补 2:381  
 同变估计量 2:381  
 同变光滑 2:381  
 同变横截性 2:381  
 同变配边理论 2:381  
 同变上同调 2:380  
 同变态射 1:668;4:297  
 同变同伦论 2:381  
 同变映射 1:668  
 同变阻碍理论 2:381  
 同变  $K$  理论 3:240  
 同变 Morse 理论 3:833  
 同变 Morse 引理 3:830  
 同变 Plateau 问题 4:181  
 同步化机制 4:81  
 同步化(终端的) 3:316  
 同步计算法 4:81  
 同侧内角 1:182  
 同侧外角 1:182  
 同单值方程 2:582  
 同等收敛性定理 4:34;4:929  
 同调包含 2:904  
 同调代数 2:902  
 同调等价的代数闭链 1:81  
 同调(动力系统的)\* 2:910  
 同调对象(复形的) 1:710  
 同调(多面体的)\* 2:911  
 同调方法(泛函分析中的) 3:545  
 同调分类(环的)\* 2:904  
 同调(复形的)\* 2:910  
 同调函子 2:907  
 同调积 2:912  
 同调基 2:907  
 同调(具有紧支集的)\* 2:916  
 同调(链复形的) 2:910  
 同调流形 2:909  
 同调论 2:912  
 同调论和上同调论(作为对偶对的) 2:292  
 同调球面 4:200  
 同调群 2:908  
 同调群(单纯集的) 4:838  
 同调群(复形的) 1:708  
 同调群(结合代数的) 1:647  
 同调群(拓扑空间的) 2:908  
 同调群(Lie 代数的) 1:647  
 同调维数 2:904  
 同调维数(空间的)\* 2:906  
 同调维数论 2:185;2:906  
 同调维数(群的) 2:905  
 同调序列 2:912  
 同调序列((复形,子复形)对的) 1:709  
 同调序列(三角组的) 2:914  
 同调序列(三元组的) 2:914  
 同调序列(一个对的) 2:913  
 同调余维数(模的) 2:49  
 同调直径 2:904  
 同调( $B(n)$ 的) 1:433  
 同调( $K(n)$ 的) 1:433  
 同调(Lie 代数的系数在一个模内的) 1:652  
 同调  $n$  流形 2:909  
 同方差性 2:917  
 同构 3:193  
 同构闭子范畴 5:204  
 同构表示 2:378  
 同构表示(Lie 代数的) 4:589  
 同构测度空间 3:703  
 同构(测度空间的) 3:703  
 同构次正规列 3:987  
 同构次正规子群列 5:60  
 同构(代数的) 4:673  
 同构代数系统 1:105  
 同构(代数系统的) 1:105  
 同构的  $C$  代数化空间 1:716  
 同构对象 2:711  
 同构分解 2:924  
 同构复形 1:707  
 同构(构造的) 5:447  
 同构关联系统 3:29  
 同构几何复形 2:708  
 同构(结合演算的) 1:237  
 同构解析形变 2:26  
 同构理想列 3:4  
 同构偏序集 1:614  
 同构平面实代数曲线 4:169  
 同构齐性凸锥 2:897  
 同构算子 3:980  
 同构同调论 2:914  
 同构图 2:753;2:758  
 同构图式(范畴中的) 2:71  
 同构拓扑向量空间 5:211  
 同构问题 3:193  
 同构问题(群环的) 2:784  
 同构(纤维空间的) 2:466  
 同构向量空间 5:418  
 同构(形式群律的) 2:511  
 同构映射(图之间的) 2:758  
 同构域扩张 2:422  
 同构(域扩张的) 2:422  
 同构正规列 3:987  
 同构正交对称 Lie 代数 2:733  
 同构(置换群的) 4:131  
 同构自动机 1:259  
 同构(自动机的) 1:259  
 同构 Hermite 空间 2:856  
 同构(Hermite 空间的) 2:856  
 同构 Hilbert 空间 2:871  
 同构(Lie 群的) 3:423  
 同痕 3:199  
 同痕代数运算 2:791  
 同痕(代数运算的) 2:791  
 同痕等价拓扑空间 3:200  
 同痕广群 3:199  
 同痕(广群的) 3:199  
 同痕扩张问题 3:200  
 同痕拉丁方 3:354  
 同痕链环 3:274  
 同痕嵌入 3:200  
 同痕(拓扑空间的) 3:200  
 同痕拓扑嵌入 5:221  
 同痕(拓扑学中的) 3:200  
 同痕问题(凸曲面的) 1:642  
 同痕型 3:200



- 同化抽象 1:27  
 同阶函数 4:7  
 同类项(多项式的) 4:232  
 同伦 2:917  
 同伦不变函子 2:918  
 同伦超渡 2:919  
 同伦单纯映射 4:839  
 同伦单态射 2:922  
 同伦单位元( $H$ 空间的) 2:795  
 同伦单形(单纯集的) 4:839  
 同伦等价 2:922  
 同伦等价的拓扑空间 2:922;  
 5:217  
 同伦范畴 1:501  
 同伦方法 1:804;4:87  
 同伦方法(解方程的) 3:639  
 同伦(分次对象的) 1:711  
 同伦分解 4:259  
 同伦分解(拓扑空间的) 2:924  
 同伦公理 2:677;2:913;4:1019  
 同伦函子 1:917  
 同伦简单空间 3:1013  
 同伦结合的上乘法 1:619  
 同伦结合的映射 2:796  
 同伦(空间偶映射的) 2:918  
 同伦扩张性质(关于多面体的)  
 1:638  
 同伦(扩张一个映射的) 1:881  
 同伦连续方法 1:804  
 同伦(连续映射的) 2:917  
 同伦论 2:918  
 同伦满态射 2:922  
 同伦逆映射 2:796  
 同伦平凡映射 2:917  
 同伦切除定理 5:267  
 同伦切除同态 5:267  
 同伦球面 3:743  
 同伦群 2:918  
 同伦群(带基点空间对的) 2:918  
 同伦群(概形的) 2:926  
 同伦群局部族(拓扑空间上的)  
 2:920  
 同伦群局部族(子空间上的)  
 2:920  
 同伦群(具有群中系数的空间的)  
 3:826  
 同伦群(空间对在一点的) 2:918  
 同伦群(空间关于一子空间在一点  
 的) 2:918  
 同伦群(球面的) 2:76  
 同伦群(三角组的) 5:267  
 同伦上结合的上乘法 1:619  
 同伦上逆 1:619  
 同伦算子 4:306  
 同伦态射 1:711  
 同伦提升 1:881  
 同伦提升定理 4:840  
 同伦提升性质 1:879;2:466;  
 4:797  
 同伦稳定映射 4:865  
 同伦(问题的) 1:804  
 同伦系统 2:919  
 同伦纤维化序列 2:923  
 同伦(相对于一个集合的) 2:918  
 同伦型 2:922  
 同伦型(拓扑范畴的)\* 2:926  
 同伦型问题 2:922  
 同伦型(有终对象的拓扑范畴的)  
 2:926  
 同伦映射 2:917  
 同伦(映射的) 2:277  
 同伦预解系 2:923  
 同伦正合列(三角组的) 5:267  
 同伦  $n$  单式空间 2:920  
 同伦群公理 2:919  
 同胚 2:892  
 同胚(到标准对的) 5:222  
 同胚等价(轨道系统的) 1:282  
 同胚合痕群 2:894  
 同胚空间 2:670  
 同胚群 2:894  
 同胚图 2:758  
 同胚拓扑空间 2:892;5:200  
 同胚映射 2:892  
 同群 3:744  
 同时代表系 5:120  
 同时迭代法 3:205  
 同时连续函数(在一点上关于全体  
 变量的) 1:813  
 同时连续性 1:813  
 同时替换法 4:829  
 同时置换法(同时替换法) 3:217;  
 4:829  
 同势集 1:475  
 同宿点 2:895  
 同宿解 2:895  
 同宿曲线 3:445  
 同宿圈 2:860  
 同态 2:916  
 同态(半群的) 4:757  
 同态(测度空间的) 3:725  
 同态(代数的) 4:673  
 同态的  $p$  次对称幂 5:96  
 同态定理 2:916;5:214  
 同态定理(泛代数中的) 5:348  
 同态(群对象的) 2:787  
 同态(同调论的) 2:914  
 同态(拓扑环的) 5:196  
 同态(相对同调群的) 1:709  
 同态象 4:673  
 同态(形式群律的) 2:511  
 同态(幺半群上多边形的) 4:226  
 同态(由单纯映射诱导的相对同调  
 群的) 1:709  
 同态(语言的) 2:514  
 同态自动机 1:259  
 同态(Lie代数的) 5:352  
 同态( $T$ 代数的) 5:280  
 同态( $\Omega$ 系统的) 1:106  
 同位角 1:182  
 同心圆 1:590  
 同型恒等式(半群簇的) 5:401  
 同义词 3:643;3:873  
 同余(半群上的) 1:309  
 同余点(双周期函数的) 2:283  
 同余(对重模的) 1:764  
 同余多项式(对重模的) 1:764  
 同余方程 1:762  
 同余核 1:766  
 同余式 1:760  
 同余式(多变量的)\* 1:767  
 同余式(素数模的)\* 1:764  
 同余式(重模的)\* 1:764  
 同余问题 1:766  
 同余(幺半群上的多边形的)  
 4:226  
 同余子群 1:766  
 同余子群问题 1:766  
 同余 $\zeta$ 函数 5:545  
 同源 3:186  
 同源群概形 3:186

- 统计遍历定理 4:993  
 统计不变量 4:414  
 统计程序的不变性 3:156  
 统计程序的风险 4:675  
 统计点估计量 4:201  
 统计独立性 3:35  
 统计度量空间 3:730  
 统计对策 4:1002  
 统计方法 3:657  
 统计方法的效率 2:320  
 统计方法(决定概率的) 4:307  
 统计方法(离散规划问题的)  
 2:229  
 统计分布与概率分布之间的关系  
 3:658  
 统计估计 4:993  
 统计估计量 4:995  
 统计估计量 4:1000  
 统计估计量(误差理论中的)  
 4:999  
 统计关系 4:313  
 统计过程的风险(统计程序的风  
 险) 4:675  
 统计和 4:1016  
 统计假设 4:1004  
 统计假设检验 4:1002  
 统计检验 4:1017  
 统计检验的功效 4:278  
 统计检验(显著性水平为  $\alpha$  的)  
 4:1003  
 统计决策规则 2:19  
 统计决策函数 2:19  
 统计决策理论 4:990  
 统计决策问题 1:319  
 统计力学 4:419  
 统计力学中的数学问题 4:1005  
 统计量 4:1018  
 统计模拟 4:1008  
 统计权重 1:408  
 逐次逼近法 4:789  
 统计试验法 4:1000  
 统计问题(平稳过程的) 4:1013  
 统计问题(随机过程论中的)\*  
 4:1011  
 统计问题(Gauss 过程的) 4:1013  
 统计问题(Марков 过程的)  
 4:1014  
 统计物理学中的数学问题 4:1009  
 统计系综 4:991  
 统计限制 5:23  
 统计相依性 5:2  
 统计学中的非参数方法 3:956  
 统计验收控制 4:988  
 统计正则化 4:558  
 统计质量控制 4:1015  
 统联 3:226  
 统联(单纯复形的) 3:226  
 统联(单形的) 4:164  
 统联(复形的) 4:164  
 统联(拓扑空间的) 3:226  
 统一场论 5:319  
 桶集 1:310;3:81  
 桶型空间 1:310  
 偷听者 1:893  
 投射 3:1027  
 投射对象 4:562  
 投射对象(范畴的)\* 4:339  
 投射分层(集合的) 2:863  
 投射分解 2:181;4:607  
 投射分解(模的) 2:902  
 投射覆叠 4:333  
 投射覆叠(模的) 2:424;4:333  
 投射极限 4:337  
 投射极限(函子的) 4:337  
 投射极限(集合族的) 4:337  
 投射模 4:338  
 投射平凡环 2:568  
 投射谱 4:328  
 投射同伦型(有终对象的拓扑化的  
 范畴的) 2:926  
 投射拓扑 3:547;3:998;5:212  
 投射拓扑(向量空间中的) 5:212  
 投射维数 2:181;2:905  
 投射系 5:168  
 投射系(概率测度的) 1:689  
 投射系(概率分布的) 1:690  
 投射有限群 4:321  
 投射有限完全化(群的) 4:321  
 投射运算 4:326  
 投射 Banach 模 1:304  
 投射  $p$  群 4:306  
 投射  $R$  模 3:797  
 投索体系 3:639  
 投影 4:326  
 投影差分法 2:81;2:324  
 投影(程序在变元的值上的)  
 5:252  
 投影(抽象 Riemann 区域的)  
 4:645  
 投影带 4:662  
 投影(点的) 4:326  
 投影(断层照相法中的) 5:184  
 投影法 4:327  
 投影法(解近似算子方程的)  
 2:560  
 投影公式(关于真态射的) 3:147  
 投影化(射影化)(向量丛的)  
 1:557;5:409  
 投影(解析延拓的奇点的) 4:855  
 投影平面 4:326  
 投影(平行于一个子空间的)  
 4:326  
 投影算子 4:346  
 投影(图形的) 4:326  
 投影完全子空间(不定度规空间的)  
 4:905  
 投影网格法 4:206  
 投影系(Галеркин 方法的) 2:621  
 投影(向量的) 5:405  
 投影性质 4:662  
 投影(秩统计量在线性秩统计量中  
 的) 4:492  
 投影中心 4:326  
 投影(Diophantus 集的) 2:202  
 透镜空间 3:389  
 透射 2:907  
 透射变换 1:658  
 透射焦散线 1:526  
 透射问题(偏微分方程的) 2:119  
 透射中心 2:907  
 透射轴 2:907  
 透视 4:138  
 透视对(格元素的) 4:551  
 透视画法 2:59  
 透视(具有中心点的) 4:138  
 透视(射影几何学中的) 2:907  
 透视映射 4:139  
 凸包 1:845  
 凸胞腔 1:531  
 凸参数规划问题 4:89  
 凸超曲面 1:852



- 凸度量** 1:846  
 凸度量(流形上的) 1:851  
**凸对策** 1:845  
 凸多胞形 1:847  
**凸多边形** 1:846  
**凸多面体** 1:846  
 凸多面体(具有边界的) 1:846  
**凸泛函** 1:844  
**凸分析** 1:841  
**凸规划** 1:847  
**凸函数** 5:79  
 凸函数(多实变量的) 1:844  
**凸函数(复变量的)** 1:842  
**凸函数(实变量的)** 1:843  
 凸函数(Riemann 流形上的)  
 4:652  
**凸集** 1:847  
 凸集的度量空间 1:849  
 凸集的线性空间 1:849  
 凸集(内度量空间中的) 4:655  
 凸集(向量空间中的) 1:847  
 凸集(Euclid 空间中的) 1:847  
 凸集(Riemann 空间中的) 1:852  
**凸几何学** 2:716  
 凸紧值多值映射 3:853  
 凸距离函数 2:725  
 凸棱锥 4:386  
 凸理想单半群 4:14  
 凸邻域 2:704  
 凸平衡有界收敛拓扑 3:1029  
**凸区域(凸域)** 1:842  
 凸区域(Riemann 空间中的)  
 4:649  
**凸曲面** 1:849  
**凸曲线** 1:852  
 凸射线函数 4:504  
 凸四角形 4:172  
**凸算子** 1:846  
**凸体** 1:841  
 凸体(低维的) 1:847  
 凸体理论 2:865  
**凸性** 1:852  
**凸性半径** 1:853  
 凸性(度量的) 1:853  
**凸性(对数的)\*** 1:853  
 凸性(泛函的) 1:852  
 凸性极限(函数的) 1:853  
 凸性模 1:306  
 凸性条件(Riemann 流形上的)  
 4:652  
 凸性问题(Hilbert 空间中 Чебышев  
 集的) 1:574  
 凸性(小球面的) 2:487  
 凸性性质(凸曲面上度量的)  
 1:850  
 凸性性质(下调和函数平均值的)  
 5:62  
**凸序列** 1:847  
**凸域** 1:842  
 凸正规化 4:559  
**凸锥** 1:842  
 凸锥(向量空间中的) 1:739  
 凸子格 5:64  
**凸子集** 1:849  
**凸子群** 1:849  
 突出尖锥 1:739  
**突转(曲线的)\*** 5:91  
**图** 2:752  
**图表可归约性** 2:73  
 图表语言(一阶语言模型的)  
 3:784  
 图册 1:565  
 图册(局部平凡丛的) 3:551  
 图册(流形的) 5:130  
 图的参数(图的数值特征) 2:760  
**图的回路** 2:755  
**图的减缩图** 3:764  
**图的连通性** 2:756  
**图的嵌入** 2:758  
 图的嵌入定理 3:307  
**图的数值特征** 2:759  
**图的同构** 2:758  
**图的同胚** 2:758  
**图的着色** 2:755  
**图的自同构** 2:754  
**图等价** 2:764  
**图(定向的)\*** 2:760  
**图(二部的)\*** 2:754  
 图概形 1:502  
 图减缩定理 3:764  
 图解法(函数极大化的) 3:688  
 图解法(函数极小化的) 3:688  
 图(具有特异极点的) 3:893  
**图(可平面的)\*** 2:761  
**图论** 2:763  
 图拟阵 3:678  
**图上的对策** 2:631  
**图式** 2:71  
 图(式)范畴 1:502  
 图(式)范畴(具有给定概形的)  
 2:611  
 图式(范畴中的) 2:71  
**图(随机的)\*** 2:762  
 图象(多值映射的) 3:853  
 图象(算子的) 3:1026  
 图象(图形)(函数的) 2:586;  
 2:760  
 图象(拓扑同态的) 5:214  
 图象(亚纯映射的) 3:714  
**图象(映射的)\*** 2:760  
**图形** 2:469  
 图形覆盖另一图形 2:469  
 图形空间(一个图形的) 2:469  
 图形偶 2:469  
**图形(线、曲面、球面…)的流形**  
 3:603  
 图(Boole 函数生成的) 1:393  
 湍流 3:717;5:288  
**湍流的数学理论** 5:286  
 湍流(动力系统中的) 5:289  
 湍流流形(动力系统中的) 5:289  
**湍流系统** 5:289  
 《推测术》(Jacob Bernoulli 著)  
 1:662  
 推迟体积位势 3:261  
 推迟位势 4:613  
**推迟位势法** 4:612  
 推迟(延迟)(常微分方程中自变量  
 的) 2:139  
 推迟(延迟)函数微分方程 2:139;  
 2:601  
 推迟(延迟)状态 3:85  
 推出 2:465;4:841  
 推出(态射的) 1:658  
 推导 1:288  
 推导(按照上下文无关文法的)  
 2:515  
 推导(从假设出发的) 2:50  
 推导的时间复杂性(上下文无关语  
 言中的) 2:746  
**推导法则** 2:51

- 推导法则(具有一个前提的) 2:51  
 推导法则(系统  $S$  的) 1:288  
 推导法则(直觉主义逻辑中的) 3:155  
 推导复杂性(上下文无关文法的) 2:747  
 推导复杂性(上下文相关文法的) 2:749  
 推导(逻辑的)\* 2:50  
 推导(生成文法中串的) 2:750  
 推导树 2:51  
 推导树(按上下文无关文法推导的) 2:515  
 推导(演算中的) 1:455  
 推广的 Kalman 滤波器 5:20  
 推广法则 4:285  
 推广唯一性集 5:336  
 推理法则 3:22  
 推理法则(简单类型论中的) 5:305  
 退化表示系列(表示的退化系列) 2:37  
 退化表示(Virasoro 代数的) 5:427  
 退化测度 3:699  
 退化超几何方程 1:746  
 退化超几何函数 2:34  
 退化超平行体 4:84  
 退化单形(单纯集的) 4:838  
 退化的代数系统类 2:565  
 退化的代数线束 5:123  
 退化的凸体 1:847  
 退化的支付函数 2:34  
 退化的 Abel 函数 1:11  
 退化的 Fredholm 核 2:562  
 退化对策 2:34  
 退化二次曲线 4:737  
 退化二次型 4:382  
 退化方程组(常微分方程的) 4:571  
 退化分布 2:33  
 退化概率 2:37  
 退化概率(无穷时间的) 2:37  
 退化核 2:35  
 退化核法 2:35  
 退化核(区域序列的) 1:470  
 退化积分方程 2:34  
 退化阶(测地线的) 3:829  
 退化结点 3:915  
 退化矩阵 2:36  
 退化连续系列(表示的) 1:818  
 退化抛物型方程 2:36  
 退化抛物型方程和方程组 2:118  
 退化偏微分方程 2:36  
 退化平衡位置 2:33  
 退化平衡位置(常微分方程组的) 2:33  
 退化平面网 3:890  
 退化射影二次曲线 4:738  
 退化双曲型方程 2:34  
 退化双曲型方程和方程组 2:118  
 退化双线性映射 1:361  
 退化算子(单纯对象的) 4:836  
 退化算子(单纯集的) 4:840  
 退化算子(单纯谱中的) 4:840  
 退化椭球坐标系 2:343  
 退化椭圆型方程 2:33  
 退化椭圆坐标 2:343  
 退化圆网 3:890  
 退化 Klein 群 3:267  
 脱节向量(残差) 1:697  
 脱殊光滑性 2:695  
 脱殊集 2:695  
 脱殊集(对于模型的) 2:506  
 脱殊滤子 2:695  
 脱殊性 2:695  
 脱殊性质 4:865  
 脱殊元 2:695  
 椭球面 2:342  
 椭球算法 3:504  
 椭球调和函数 2:343  
 椭球调和函数(Lamé 函数) 3:336  
 椭球坐标 2:342  
 椭圆-抛物型偏微分方程 2:36  
 椭圆 2:341  
 椭圆超限直径(紧集的) 5:244  
 椭圆的分式线性映射 2:546  
 椭圆的球面束 5:122  
 椭圆的圆束 1:752;5:122  
 椭圆点 2:354  
 椭圆点(曲面的) 2:154  
 椭圆调和空间 4:269  
 椭圆对合 3:177  
 椭圆反演(负反演) 3:172  
 椭圆泛函 5:467  
 椭圆复形 3:40  
 椭圆函数 2:346  
 椭圆函数的变换问题 2:347  
 椭圆函数(第二类) 2:347  
 椭圆函数(第三类) 2:347  
 椭圆函数(第一类(正常意义下的)) 2:347  
 《椭圆函数和 Euler 积分文集》(Legendre 著) 1:88  
 椭圆积分 2:348  
 椭圆积分的反演 3:175  
 椭圆积分的模数 3:802  
 椭圆积分的振幅 1:149  
 椭圆积分(第二类 Legendre 正规形式的) 2:349  
 椭圆积分(第三类 Legendre 正规形式的) 2:350  
 椭圆积分(第一类 Legendre 正规形式的) 2:349  
 椭圆几何学 2:348  
 椭圆空间 1:606;2:348;4:623;5:465  
 椭圆模函数(模函数) 3:789  
 椭圆模群 4:640  
 椭圆模形式(模形式) 3:788  
 椭圆抛物面 2:351  
 椭圆平面 4:623  
 椭圆平面模型 5:244  
 椭圆奇点 4:858  
 椭圆脐点 5:165  
 椭圆球面罗 5:461  
 椭圆曲面 2:354  
 椭圆曲面(一般型的) 2:355  
 椭圆曲线 2:344  
 椭圆曲线的算术 2:345  
 椭圆曲线(非闭域上的) 2:344  
 椭圆曲线(复数域上的) 2:344  
 椭圆曲线(具有复乘法的) 2:345  
 椭圆曲线(作为一维 Abel 簇的) 2:344  
 椭圆容量 5:244  
 椭圆扇形 4:740  
 椭圆射线(线汇中的) 1:765  
 椭圆双曲类线 4:170  
 椭圆伪距离 5:244  
 椭圆纤维化的分类 2:354



- 椭圆线 4:623  
 椭圆象 5:468  
 椭圆型边值问题 1:636  
 椭圆型边值问题(具有自然边界条件的) 2:83  
 椭圆型二阶偏微分方程 2:130  
**椭圆型方程边值问题 1:419**  
 椭圆型方程(解析系数的) 2:114  
 椭圆型复数 2:279  
 椭圆型经典伪微分算子 4:364  
**椭圆型偏微分方程 2:352**  
**椭圆型偏微分方程,数值方法 2:352**  
 椭圆型偏微分方程(在区域的边界上退化的) 2:33  
 椭圆型偏微分算子 2:166  
 椭圆型球面网 3:890  
**椭圆型算子 2:350**  
 椭圆型算子族 3:42  
 椭圆型线性偏微分方程 2:111  
 椭圆型线性微分算子 3:476  
 椭圆型线性 Lie 代数 4:368  
 椭圆型圆网 3:890  
 椭圆型直线网 3:890  
 椭圆型 Booth 双纽线 1:399  
 椭圆性区域(偏微分方程的) 3:774  
 椭圆性条件(偏微分方程的) 2:131  
 椭圆余弦(辐角余弦) 1:867  
 椭圆正弦 4:844  
 椭圆直线(拟双曲空间中的) 4:431  
 椭圆直线(上伪 Euclid 空间中的) 1:619  
**椭圆柱面 2:346**  
**椭圆坐标 2:343**  
 椭圆坐标系 1:748  
 椭圆 Bauer 空间 4:269  
 椭圆 Hermite 空间 2:580  
 椭圆 Riemann 流形(常曲率的) 1:783  
 椭圆 Riemann 曲面 5:328  
 椭圆 Чебышев 常数 5:244  
 拓扑 5:198  
**拓扑半群 5:196**  
 拓扑半序空间 4:774  
 拓扑保测变换 1:194  
 拓扑逼近(拓扑空间的) 5:217  
 拓扑变换群 5:246  
 拓扑遍历拓扑动力系统 5:211  
**拓扑不变量 5:194**  
 拓扑不变量(Понтрягин 类的) 4:240  
 拓扑不变性 2:893  
 拓扑不变性定理 2:61  
 拓扑不可约表示 3:182  
 拓扑不可约表示(拓扑群的) 4:593  
 拓扑不可约集 5:234  
 拓扑测度论 5:220  
 拓扑常返性 2:457  
 拓扑除环 1:39  
 拓扑传递动力系统 1:547  
**拓扑传递性 5:210**  
 拓扑(从属于  $G$  度规的) 4:904  
**拓扑代数 5:187**  
 拓扑代数(具有连续逆的) 1:300  
 拓扑单对偶代数 2:289  
 拓扑单形 4:833;5:262  
**拓扑的比较 1:687**  
**拓扑等价 5:192**  
 拓扑等价表示 2:378  
 拓扑等价度量 3:727  
 拓扑等价空间 2:892  
 拓扑等价拓扑空间 5:220  
 拓扑等价(线性常微分方程组的) 3:498  
 拓扑等价(线性算子的) 3:492  
 拓扑等价(芽的) 4:866  
 拓扑等价映射 3:129  
**拓扑动力系统 5:188**  
**拓扑动力系统的中心 1:538**  
**拓扑动力学 5:189**  
 拓扑对偶空间 5:213  
 拓扑多面体 4:163  
 拓扑范畴 1:505  
**拓扑范畴的同伦型 2:926**  
 拓扑范畴的性质 5:204  
 拓扑范畴(基本范畴上的) 5:206  
 拓扑范畴(具有具体幂的) 5:208  
 拓扑广义辐角原理 1:226  
 拓扑函子 5:206  
**拓扑化范畴 5:216**  
**拓扑环 5:196**  
**拓扑积 5:195**  
 拓扑基(向量空间的) 1:316  
 拓扑极限 3:442  
 拓扑(集合上的) 1:614  
 拓扑结点 4:860  
**拓扑结构 5:202**  
**拓扑结构(拓扑) 5:201**  
 拓扑结构(Riemann 流形的) 4:650  
 拓扑近性空间 5:202  
 拓扑具体范畴 5:202  
 拓扑刻画(拓扑空间的) 2:893  
**拓扑空间 5:198**  
 拓扑空间的分解 1:810  
**拓扑空间的扩张 2:425**  
**拓扑空间的密度 2:48**  
**拓扑空间的权 5:476**  
**拓扑空间的收缩核 4:614**  
 拓扑空间的伪权 1:472  
 拓扑空间的  $\pi$  权 1:472  
 拓扑空间范畴 1:500  
 拓扑空间(局部地具有某一性质的) 3:530  
 拓扑空间(可数型的) 4:129  
 拓扑空间(相同伦型的) 2:922  
 拓扑空间(相同  $n$  伦型的) 2:923  
 拓扑空间(在两点间不可约的) 1:780  
 拓扑空间在无穷远点具有的性质 4:579  
 拓扑扩张(拓扑空间的) 5:217  
 拓扑流 1:811  
 拓扑流形 2:90  
**拓扑模 5:195**  
 拓扑纽结 3:844  
 拓扑配边 1:624  
 拓扑齐性拓扑空间 2:487  
 拓扑嵌入 5:221  
 拓扑嵌入逼近 5:222  
 拓扑嵌入(平凡维区域中的) 5:222  
 拓扑强混合 3:779  
 拓扑球面 4:937  
**拓扑群 5:192**  
**拓扑群的表示 4:591**  
 拓扑群(可嵌入到紧群中的)

2:476  
 拓扑群在空间上的作用 1:32  
 拓扑弱混合 3:779  
**拓扑熵 5:191**  
 拓扑射影平面 4:341  
**拓扑斯 5:225**  
 拓扑同构 3:492  
 拓扑同痕 3:200  
 拓扑同态 5:214  
 拓扑统 5:208  
 拓扑网络 3:893  
 拓扑微丛 3:738  
 拓扑稳定映射 4:865  
**拓扑向量空间 5:211**  
**拓扑向量空间中的测度 3:704**  
 拓扑向量空间中的拓扑的性质  
 5:211  
 拓扑向量群 5:211  
 拓扑向量商空间 5:212  
 拓扑型的有限性(Riemann 流形的)  
 4:651  
 拓扑性质 2:893  
 拓扑性质(代数曲面的) 1:103  
**拓扑学 5:216**  
 拓扑叶状结构 2:503  
 拓扑映射 2:892  
**拓扑映射空间 4:901**  
 拓扑(由度量生成的) 3:727  
 拓扑(由赋值确定的) 5:365  
 拓扑有序单形 4:833  
 拓扑右向量空间 5:221  
 拓扑(与  $G$  度规相容的) 4:904  
**拓扑域 5:192**  
**拓扑圆盘 2:221**  
**拓扑张量积 5:209**  
 拓扑直和 1:690  
 拓扑指标  
 拓扑自由集 2:571  
**拓扑族的上界 5:360**  
**拓扑族的下界 3:569**  
 拓扑左向量空间 5:211  
 拓扑 Bernoulli 自同构 5:94  
 拓扑(DFS 型的) 2:294  
 拓扑  $G$  模 5:195  
 拓扑 Haefliger 结构 2:803  
 拓扑  $K$  理论 3:239  
 拓扑(QDFS 型的) 2:294

拓扑(QFS 型的) 2:294  
 拓扑 Марков 链 5:94

## W

**外摆线 2:371**  
 外半径(紧集的) 5:245  
 外不变子群系 4:11  
 外部边值问题 4:264  
 外部标识符(Алгамс 语言的)  
 1:68  
 外部存储器的构造(机器的)  
 3:590  
 外部反问题(位势论中的) 4:271  
 外部观点(关于集合论的) 4:873  
 外部(光滑纽结的) 3:844  
 外部过程(PL/ I 语言中的) 4:183  
**外部和内部边值问题 2:431**  
 外部(链环的) 3:273  
 外部面积定理 1:224  
 外部内切曲线 3:84  
 外部问题(断层照相法中的)  
 5:185  
 外部 Dirichlet 问题 4:265  
 外部 Neumann 问题 1:49;4:265  
**外测度 4:52**  
 外测度(集合的) 4:53  
 外测度(由测度导出的) 3:700  
 外测度(Carathéodory 意义下的)  
 4:52  
**外插 2:432**  
 外乘法 2:163  
 外稠密点 2:48  
 外错角 1:182  
**外代数 2:430**  
 外导数 3:128;5:143  
 外导子(环中的) 2:50  
 外点(区域的) 2:275  
**外法线 2:432**  
 外法线(立体的) 2:432  
 外法线(凸曲面的) 2:432  
 外分支(Nicomedes 蚌线的) 3:908  
 外共轭自同构 2:384  
 外函数 2:817  
**外积 2:432**  
 外积(交错积)(张量的) 1:145

外渐近级数 4:879  
 外角平分线 4:172  
 外角(凸多边形的) 4:224  
 外接曲线 3:84  
 外接圆(三角形的) 4:172  
 外解 4:144  
 外来方法(引入坐标的) 1:857  
 外力 2:313  
 外密度 2:48  
 外面积定理 5:345  
 外切多边形 3:84  
 外曲率 1:910;4:947  
 外曲率(凸曲面的) 1:850  
 外群 4:127  
 外容量 4:215  
 外生变量 4:543  
 外推(随机过程的) 5:22  
 外椭圆摆线 4:693  
 外微分 5:143;1:628  
 外微分法 2:144  
 外微分(微分形式的) 2:144  
 外微分形式 1:482;2:144  
 外稳定数(图的) 2:759  
 外信息量度量 3:848  
**外形式 2:432**  
 外形式代数 4:872  
 外形式(代数群的) 2:508  
**外形式法 2:432**  
**外延 2:44**  
 外延公理(简单类型论中的)  
 5:305  
**外延性公理 1:286**  
 外因子(全纯函数的) 1:417  
 外在导数(外导数) 3:128  
 外在几何学 3:128;5:158  
 外在球面 2:700  
 外在曲率(外曲率)(凸曲面的)  
 1:850  
 外在性质(逻辑联接词的语义的)  
 4:750  
 外展开式(微分方程解的) 4:877  
 外 Schwarzschild 时空 4:734  
 弯曲不变量 2:490  
 弯曲场 2:31  
 弯曲场(无穷小变形的) 3:66  
 弯曲(曲面变形的) 1:313  
 弯曲(曲面的) 2:31



- 完满保密 1:894  
 完满闭包(域的) 4:120  
 完满不可约映射 4:120  
 完满测度 4:120  
 完满测度空间 3:702  
 完满范式 4:121  
 完满分布 4:316  
 完满覆盖 1:879  
 完满概率空间 4:316  
 完满函数 5:174  
 完满合取范式 1:74;1:397  
 完满核 2:56  
 完满环 4:122  
 完满集 4:122  
 完满紧化 4:119  
 完满空间 2:56  
 完满码 1:880;2:388  
 完满匹配 2:447  
 完满群 3:865;5:100  
 完满数 4:121  
 完满填装 1:879  
 完满微分理想 2:95  
 完满析取范式 1:74;1:397  
 完满性(测度的) 4:484  
 完满映射 4:120  
 完满域 4:119  
 完满正规空间 4:123  
 完满正规拓扑空间 1:680;3:988  
 完满正规  $T_2$  紧统 1:680  
 完满  $k$  正规拓扑空间 3:988  
 完全半单半群 4:297  
 完全半群 2:424  
 完全半项群( $n$  次的) 5:524  
 完全包含(求和法的) 3:30  
 完全本征函数系 2:557  
 完全本征值问题(本征值的完全问题) 1:696  
 完全变差(函数的)\* 1:701  
 完全遍历自同构(测度空间的) 4:426  
 完全不可约表示(拓扑群的) 4:593  
 完全不可约集 5:235  
 完全不连通拓扑空间(点状拓扑空间) 1:685;4:119;4:579  
 完全不稳定动力系统 1:694  
 完全不稳定焦点 2:502  
 完全不稳定性 1:694  
 完全测度 1:695  
 完全测度空间 1:695  
 完全差集 2:89  
 完全陈(省身)类 1:577  
 完全充分统计量函数族 4:494  
 完全初等理论 2:337  
 完全初等模型类(形式语言的) 1:293  
 完全代数簇 1:691  
 完全代数函数 1:86  
 完全单半群 1:704  
 完全等价变换系 2:379  
 完全等价求和法 2:378  
 完全等价算法(关于字母表的) 1:134  
 完全独立函数系 3:606  
 完全度量空间 1:695  
 完全对称代数 3:179  
 完全对称积分核 3:100  
 完全对称 Banach 代数 1:301  
 完全对应(集合之间的) 1:865  
 完全多重极集 2:430  
 完全二部图 2:755  
 完全法则系(对于控制系统类的) 2:379  
 完全非分裂链环 3:272  
 完全非负 Jacobi 矩阵 3:216  
 完全非紧 Riemann 流型 4:650  
 完全非酉压缩半群 1:823  
 完全非酉压缩算子 1:821  
 完全分布族 2:262  
 完全分离代数 1:649  
 完全分裂素理想 1:98  
 完全分裂 Abel 群 1:13  
 完全分配格 1:701  
 完全分配律 1:701  
 完全分式环 3:541  
 完全概率公式(全概率公式)\* 1:696  
 完全概率空间 4:312  
 完全格 1:695;3:354  
 完全根子空间系 4:923  
 完全构造度量空间 3:791  
 完全归纳法则 3:57  
 完全归纳公理 3:47  
 完全规范正交集 2:872  
 完全轨道 5:239  
 完全函数系 1:700  
 完全函子 2:611  
 完全互斥集 1:696  
 完全化(测度的) 1:695  
 完全化(度量空间的) 3:727  
 完全化(对合代数的) 3:178  
 完全化方法 1:706  
 完全化(概率空间的) 4:312  
 完全化(偏序集的) 1:695  
 完全化(拓扑空间的) 1:705  
 完全化(拓扑向量空间的) 5:211  
 完全化(一致空间的) 1:706  
 完全化(Zariski 环的) 2:447  
 完全积分 1:694  
 完全积分(一阶偏微分方程的) 2:129  
 完全极集 4:215  
 完全极限(投射谱的) 4:328  
 完全极小曲面 3:752  
 完全极小同胚 4:426  
 完全集 1:698  
 完全集(泛函的)\* 1:699  
 完全集(两两正交 Latin 方的) 4:28  
 完全集(拓扑向量空间中的) 5:211  
 完全集(相互正交 Latin 方的) 4:28  
 完全集(域上的拓扑向量空间中的) 1:698  
 完全记忆 4:247  
 完全加性算术函数 1:34  
 完全交(代数几何学中的) 4:235  
 完全交环 2:740  
 完全交局部环 4:235  
 完全交(局部环的) 4:235  
 完全交(Cohen-Macaulay 环的) 1:639  
 完全角(全角) 4:224  
 完全角(全角)(凸曲面上一点处的) 1:850  
 完全解析函数 1:691  
 完全解析函数(多复变量的) 1:693  
 完全解析函数(Weierstrass 意义下的) 1:692

- 完全解析形变 2:26  
 完全局部环 3:535  
 完全局部凸张量积 5:214  
 完全聚点 1:691  
 完全聚值集 1:614  
 完全决策规则类 4:990  
 完全绝对标架场 4:82  
 完全可达矩阵对 3:596  
 完全可达控制系统 5:124  
 完全可达排队系统 4:446  
 完全可达性 1:268  
 完全可分度量空间 1:733  
 完全可观测系统 1:269  
 完全可观测性 1:269  
 完全可积方程组 1:702  
 完全可积微分方程 1:701  
 完全可积 Hamilton 方程 1:702  
 完全可积 Hamilton 方程组 1:702  
 完全可积 Pfaff 方程 4:148  
 完全可积 Pfaff 方程组 1:482;  
 4:149  
 完全可积 Pfaff 结构 4:152  
 完全可控对象 1:268  
 完全可控矩阵对 3:979  
 完全可控系统 1:265  
 完全可控性 1:265  
 完全可枚举类(递归可枚举集的)  
 2:367  
 完全可约表示 1:703  
 完全可约环 1:703  
 完全可约集 1:703  
 完全可约矩阵群 1:702  
 完全可约模 1:703  
 完全可约性原理 1:703  
 完全空间 1:699  
 完全拉丁方 3:354  
 完全力迫条件序列 2:506  
 完全连续积分算子 2:556  
 完全连续算子 1:701  
 完全连续算子(有限阶的) 3:961  
 完全连续向量场 2:493  
 完全连续映射 1:701  
 完全邻近空间 4:355  
 完全零维映射 5:538  
 完全逻辑理论 1:705  
 完全码 1:631  
 完全枚举 2:367  
 完全命题演算 4:352  
 完全模格 1:694  
 完全模态逻辑系统 3:782  
 完全逆象(映射下集合的) 3:610  
 完全偏微分方程组 1:699  
 完全旗 2:494  
 完全旗结构 2:495  
 完全嵌入(一个模型到另一个模型  
 的) 1:704  
 完全曲率 1:693  
 完全曲率(在曲面上一点的)  
 1:693  
 完全曲率(在曲面上一个区域的)  
 1:693  
 完全曲面 3:881  
 完全圈积 5:523  
 完全群 1:694  
 完全三角分解(拓扑群的) 2:653  
 完全三角和 5:276  
 完全商(连分数的) 1:806  
 完全生成集(Boole 代数中的)  
 1:391  
 完全剩余系 1:700  
 完全收敛 3:398  
 完全双圆形域 2:276  
 完全四边形 4:379  
 完全四角形 4:379  
 完全松弛法 4:570  
 完全算子 1:695  
 完全提升 3:421  
 完全统计量 5:70  
 完全投射谱 4:328  
 完全凸曲面 1:849  
 完全图 2:753  
 完全图参数集 2:760  
 完全推导(文法中的) 2:750  
 完全椭圆积分(第二类) 2:349  
 完全椭圆积分(第一类) 2:349  
 完全拓扑空间 1:701  
 完全系统 1:699  
 完全线性系 3:506  
 完全相容求和法 1:689  
 完全向量场 3:437;3:1018  
 完全形式系统 2:17  
 完全形式(Diophantus 方程的)  
 2:196  
 完全性定理(构造实数系的)  
 1:785  
 完全性定理(关于有限区间上幂系  
 的) 3:870  
 完全性定理(逻辑中用 Kripke 模型  
 表达的) 3:297  
 完全性定理(特征列的) 1:103  
 完全性(度量空间的) 1:465  
 完全性赋值准则 1:691  
 完全性公理 2:834;3:1003  
 完全性公理(Hilbert 公理体系中的)  
 2:879  
 完全性(构造实数集的) 1:785  
 完全性(函数系的) 1:612  
 完全性(逻辑理论的) 3:898  
 完全性(逻辑学中的) 3:606  
 完全性(逻辑演算的) 3:153  
 完全性(逻辑中的) 1:704  
 完全性条件(对区域上的正交多项  
 式的) 4:34  
 完全性条件(对围道上的正交多项  
 式的) 4:34  
 完全性(拓扑学中的) 1:705  
 完全性问题(逻辑学中的) 3:606  
 完全性问题(自动机集的) 1:256  
 完全性(线性序集的) 5:88  
 完全性(自动机集的) 1:256  
 完全性(Hilbert 空间的) 2:871  
 完全演算 1:704  
 完全一阶理论 1:108  
 完全一致空间 1:701  
 完全因子 4:300  
 完全语言簇 2:513  
 完全元素(函数)系 2:537  
 完全元素系(Hilbert 空间的) 4:40  
 完全原象(映射下集合的) 3:610  
 完全圆形区域 4:561  
 完全运动群 2:788  
 完全蕴涵命题演算 3:22  
 完全正逼近性质( $C^*$  代数的)  
 3:993  
 完全正规空间 5:235  
 完全正交函数系 4:36  
 完全正确程序 5:156  
 完全正确性(程序的) 5:156  
 完全正熵 3:238  
 完全正则半群 1:703  
 完全正则半群元 4:545



- 完全正则空间 1:703  
 完全正则求和法 4:556  
 完全正则拓扑空间 4:783  
 完全正则性 5:200  
 完全正则锥 1:739  
 完全正则 Banach 代数 1:301  
 完全直积 2:205  
 完全中间逻辑(相对一个语义的) 3:130  
 完全主元法 2:657  
 完全子复形 4:231  
 完全子群系统 5:61  
 完全最大值原理 4:269  
 完全 Abel 群 1:13  
 完全 Boole 代数 1:391  
 完全 Cartan 联络 1:779  
**完全 Dedekind 格 1:693**  
 完全 Hartogs 区域 2:839  
 完全 Hermite 核 2:857  
 完全 Hoare 逻辑 5:156  
 完全 Killing 向量场 3:260  
 完全  $O$  单半群 2:424  
 完全  $r$  度 4:528  
 完全 Reinhardt 区域 2:276  
**完全 Riemann 空间 1:698**  
 完全 Scott 格 5:157  
 完全 Sylow 基 5:91  
 完全 Zariski 环 2:447  
 完全  $\Omega$  系统类 1:108  
 完全  $0$  单半群 1:353  
 完整截面 3:874  
 完整理想约束 2:313  
 完整模 2:470;5:482  
 完整网 3:891  
**完整系统 2:891**  
 完整线性微分算子 3:476  
 完整约束 2:313  
 完整坐标 2:892  
 完整  $D$  模 2:2  
 万有丛 1:603  
**万有覆盖 5:352**  
 万有覆盖流形 2:932  
 万有覆盖曲面 3:882  
 万有积分不变量 3:109  
**万有空间 5:355**  
 万有奇点 4:865  
 万有奇点类 4:865  
 万有曲线 3:710  
 万有群 1:109  
 万有拓扑向量空间 5:355  
 万有系数定理 2:911  
 万有系数公式 2:611  
 万有线性空间 5:355  
 万有线性微分算子 3:475  
 万有线性系统 3:786  
 万有形变 5:166  
 万有形式群律 1:625;2:511  
**万有性态(动力系统的)\* 5:350**  
 万有性质(分式线性映射的) 2:545  
 万有引力定律 2:765  
 万有 Cantor 曲线 1:463  
 万有  $G$  纤维化 2:381  
 万有 Hausdorff 紧统定理(给定权和维数的) 2:179  
 王(宪钟)极大性定理(关于 Lie 子群的) 2:232  
**网 3:890**  
 网(代数几何学中的) 5:122  
 网格 2:80;2:352;4:378  
 网格逼近 3:466  
 网格点(数值解法的) 4:6  
**网格法 2:778**  
 网格函数 2:79  
 网格函数空间 2:79  
 网格(精细度)(空间覆盖的) 3:724  
 网格(精细度)(剖分的) 3:442;3:858  
 网格特征线法 3:720  
 网格图(制图网格) 1:489  
 网格(Auslander-Reiten 箭图的) 4:595  
**网络 3:893**  
 网络分析 4:716  
**网络规划 3:895**  
 网络(具有时间准则的) 3:894  
 网络流问题 3:893  
**网络模型 3:894**  
 网络权 1:472;3:892  
**网络图 3:894**  
 网络(拓扑空间中的) 1:680  
 网络(拓扑空间中集合的) 3:892  
**网络中的流 2:499**  
 网权 3:892  
 网(拓扑空间的覆盖的) 1:881  
 网(拓扑空间中的) 3:443  
**网(拓扑空间中集合的) 3:892**  
 网(微分几何学中的) 3:891  
**网(有限几何学中的) 3:892**  
**网(有向集) 3:891**  
 网(最终在集合中的) 3:891  
 忘却函子 1:503  
 威胁(联盟的) 4:965  
**微丛 3:738**  
**微分 2:92**  
**微分包含 2:160**  
**微分边值问题的差分边值问题逼近 1:195**  
 微分变分原理(经典力学的) 5:394  
 微分表达式 2:165  
 微分表示 3:52  
**微分不变式 2:162**  
 微分不变式( $r$  级的) 2:162  
**微分不等式 2:161**  
 微分不定元 2:420  
 微分不可分基 2:184  
**微分参数 2:168**  
 微分层 4:805  
**微分差分方程 2:105**  
 微分超越次数 2:184  
 微分超越基 2:184  
 微分代换 2:581  
**微分代数 2:95**  
 微分代数的微分域的扩张 2:420  
 微分代数(外微分形式的) 4:151  
 微分代数无关元 2:420  
 微分代数相关元 2:420  
**微分代数学 2:95**  
 微分(第二类) 1:10  
 微分(第一类) 2:890  
 微分动力系统 2:309  
**微分对策 2:147**  
 微分(多复变复函数的) 1:156  
 微分多项式环 2:420  
 微分(多元函数的) 2:93  
 微分(多元函数关于一集合的) 2:94  
 微分(多元函数在一集合上的) 2:94

- 微分二项式(二项式微分) 2:98  
 微分法 2:170  
 微分法(广义函数的) 2:685  
 微分法(沿动力系统的流的)\* 2:170  
 微分法(映射的)\* 2:171  
 微分泛函方程 2:147  
 微分方程 2:161;3:374  
 微分方程(抽象的)\* 2:105  
 微分方程(带小参数的)\* 2:141  
 微分方程的闭形式积分 3:124  
 微分方程的差分方程逼近 1:196  
 微分方程的积分 3:111  
 微分方程定性理论 4:395  
 微分方程定性理论(Banach 空间上的) 4:400  
 微分方程(环面上的)\* 2:134  
 微分方程解的延拓 4:347  
 微分方程解析理论 1:178  
 微分方程(具有多值右端的) 2:160  
 微分方程(具有偏差变量的) 2:601  
 微分方程(与线性常微分方程伴随的) 1:42  
 微分方程(在 $+\infty$ 处振动的) 4:44  
 微分方程(在区间上振动的) 4:44  
 微分方程组(无穷阶的)\* 2:133  
 微分方法 3:321  
 微分方法(对一个参数的) 3:942  
 微分仿射空间 2:95  
 微分分次代数 2:95  
 微分分式域 2:420  
 微分(复合函数的) 2:101  
 微分公式(汇合型超几何函数的) 1:747  
 微分(函数的) 2:100  
 微分(函数关于一集合的) 2:94  
 微分(函数芽的) 2:104  
 微分函数(域论中的) 2:420  
 微分(函数在一点处的) 2:100  
 微分(函数在一集合上的) 2:94  
 微分环 2:169  
 微分几何结构 2:151  
 微分几何学 2:152  
 微分几何学(流形上的)\* 2:157  
 微分几何学(曲线和曲面的) 2:152  
 微分(解析函数在一点上的) 1:153  
 微分(解析空间的解析映射的) 1:174  
 微分可分的微分域的扩张 2:420  
 微分可分无关元 2:420  
 微分可分相关元 2:420  
 微分理想 2:95  
 微分邻域 2:163  
 微分邻域( $C_p$  类的流形的  $2k$  阶的) 2:163  
 微分邻域( $n$  阶的) 2:163  
 微分(零阶的) 2:163  
 微分流形 2:90  
 微分流形映射的分类 2:91  
 微分流形( $C^k$  类的) 2:90  
 微分权 1:612;4:30;5:475  
 微分权函数 1:612  
 微分群 2:160  
 微分熵 2:105  
 微分生存对策 2:631  
 微分算子 2:165  
 微分算子的本征值,数值方法 2:323  
 微分算子的差分算子逼近 1:197  
 微分算子的谱理论 4:927  
 微分算子的主部 4:300  
 微分算子(定义边界条件的) 2:166  
 微分算子(发散型  $2m$  阶的) 3:947  
 微分算子环 2:168  
 微分算子(零阶的) 2:168  
 微分算子(模上的)\* 2:167  
 微分算子(强于一微分算子的) 2:278  
 微分算子(实主型的) 4:301  
 微分算子(微分参数) 2:168  
 微分算子(无穷阶的) 2:166  
 微分算子(域论中的) 2:420  
 微分特殊化(点的) 2:96  
 微分同胚 2:75  
 微分同胚流形 2:75  
 微分同胚( $C^k$  类的) 2:91  
 微分拓扑学 2:169  
 微分维数 2:184  
 微分维数(不可约集的) 2:95  
 微分系统( $p$  维的) 3:180  
 微分相伴变换 2:105  
 微分形式 2:143  
 微分形式(代数簇上的) 2:146  
 微分形式(代数簇上  $r$  次的) 2:146  
 微分形式的拉回(在由向量场生成的无字小变换下的) 2:146  
 微分形式(微分流形上的) 2:143  
 微分形式(在开集上正则的代数簇上的) 2:146  
 微分形式组 4:151  
 微分形式( $p$  次的) 2:143  
 微分形式( $(r,s)$  型的) 2:145  
 微分型(不可约集的) 2:95  
 微分型(微分扩张的) 2:184  
 微分学 2:99  
 微分学(多元函数的) 2:101  
 微分学(解析空间上的) 2:104  
 微分(一阶的) 2:163  
 微分(以概率 1 的) 5:16  
 微分(映射的) 2:171  
 微分(映射在一点上关于增量的) 2:171  
 微分域 2:143  
 微分域扩张 2:420  
 微分域扩张(由子集生成的) 2:420  
 微分子流形 5:64  
 微分子域 2:420  
 微分(自变量的) 2:93  
 微分 Galois 理论 2:625  
 微分  $i$  形式模 2:52  
 微分( $(m,n)$  维的) 2:165  
 微分( $(m,n)$  型的) 2:165  
 微分  $p$  形式 2:143  
 微分  $r$  标架丛 5:130  
 微分(Riemann 曲面上的)\* 2:163  
 微分 1 形式 5:133  
 微观世界 2:230  
 微观正则 Gibbs 分布 2:728  
 微观正则 Gibbs 统计系综 2:730  
 微函数层 3:740  
 微积分的历史 2:103  
 微积分学基本定理 3:125;3:904



- 微解析超函数 3:739  
 微解析性(超函数的) 3:739  
**微局部分析 3:739**  
 微局部正则性定理 4:364  
 微微分算子 3:740  
 微正则分布 4:1005  
 微正则系综 4:1005  
 围道 1:712;2:760  
 围道积分 4:605  
**围道积分法 1:820**  
 唯一遍历动力系统 5:95  
 唯一遍历性 5:35  
**唯一分解环 2:447**  
 唯一分解局部环(析因局部环)  
   2:272  
 唯一弧连通连续统 4:882  
 唯一可译码 1:631  
 唯一确定曲面 1:851  
 唯一确定凸曲面 1:851  
 唯一性定理(参模问题中极值长度的)  
   2:435  
 唯一性定理(殆周期函数的)  
   1:139  
 唯一性定理(复数域的) 1:714  
 唯一性定理(公理上同调论的)  
   4:1019  
 唯一性定理(公理同调论的)  
   4:1019  
 唯一性定理(解析函数的) 1:154  
 唯一性定理(准素既约表示的)  
   1:39  
 唯一性定理(最佳算法的) 1:125  
 唯一性集 5:275  
**唯一性集 5:336**  
 唯一性集(三角级数的) 1:465  
 唯一性界(序列类的) 1:4  
 唯一性距离(密码体制的) 1:894  
 唯一性条件(关于共形映射的)  
   1:754  
 唯一性问题(解析函数的) 1:415  
 唯一性性质(调和函数的) 2:829  
**唯一性性质(解析函数的)\*  
   5:334**  
 唯一性性质(幂级数的) 4:280  
 唯一延拓公理 1:702  
 唯一因子分解环 3:182  
 唯一因子分解整环 2:657;2:770;  
   3:182  
**维数 2:178**  
 维数(表示的) 3:51;4:600  
**维数不变量 2:183**  
 维数(超空间的) 5:77  
 维数(超流形的) 5:77  
 维数(抽象单形的) 4:832  
 维数(抽象复形中单形的) 4:163  
 维数(代数群的) 1:91  
 维数(代数向量丛的) 5:410  
 维数(单纯复形的) 4:834  
**维数的加法性质 2:182**  
 维数的齐性(单纯复形的) 4:371  
 维数(等维数理想的) 2:376  
 维数(多面体的) 4:230  
**维数多项式 2:184**  
 维数多项式(微分扩张的) 2:184  
 维数多项式(微分域扩张的)  
   2:184  
 维数(仿射簇的) 4:497  
 维数分支 1:463  
 维数(复形的元素的) 1:706  
 维数公理 2:913;4:1019  
**维数函数 2:183**  
 维数核 1:463  
 维数核( $n$  维空间的) 3:308  
 维数(环的谱的) 4:933  
 维数(积分流形的) 3:110  
 维数(基的) 1:315  
 维数(几何对象的表示空间的)  
   2:711  
 维数(结合环的) 2:180  
 维数(解析集的) 1:173  
 维数(解析集在一点的) 1:173  
 维数(解析空间在一点的) 1:174  
 维数(解析向量丛的) 5:411  
 维数(紧统的) 2:185  
**维数论 2:184**  
 维数论(一致空间的) 5:325  
 维数(筛的) 4:819  
 维数(山谷的) 3:755  
 维数(上同调群的) 1:649  
 维数(射影子空间的) 4:344  
 维数(凸集的) 1:847  
 维数(拓扑空间的) 2:178  
 维数(拓扑向量空间的) 5:211  
 维数(拓扑学中的) **2:670**  
 维数(伪 Euclid 空间的) 4:366  
 维数位移 1:650  
 维数(物理量纲公式中的) 2:186  
 维数(线性表示的) 4:600  
 维数(向量丛的) 5:408  
 维数(向量空间的) 3:488;4:489;  
   5:418  
 维数(叶状结构的) 2:503  
 维数(有限几何复形的) 2:708  
 维数(酉群表示的) 1:141  
 维数重正化 4:582  
 维数(坐标卡的) 1:565  
 维数(Boole 函数的) 1:393  
 维数(Hilbert 空间的) 2:873  
 维数(Lie 群的) 3:423  
 维数( $p$  可除群的) 4:58  
 维数(Pfaff 结构的) 4:152  
 伪凹复空间 4:360  
 伪凹群 1:280;4:360  
**伪标量 4:373**  
**伪标量积 4:374**  
 伪补(格元素相对于另一格元素的)  
   4:357  
 伪差 1:446  
 伪纯正半群 4:554  
 伪单位向量(伪 Euclid 空间中的)  
   4:366  
**伪度量 4:371**  
 伪度量公理 4:371  
 伪度量(集合上的) 4:371  
**伪度量空间 4:371**  
 伪多项式 3:902  
**伪二次型 4:372**  
 伪反射 4:536;5:338  
**伪范数 4:371**  
 伪仿射球面 1:59  
**伪共形映射 4:359**  
**伪弧 4:357**  
 伪回复点 4:520  
**伪基 4:357**  
 伪基(拓扑空间的) 4:357  
 伪几何环 2:411;2:714  
 伪解析函数 2:676  
**伪紧空间 4:359**  
 伪紧性 1:682  
 伪局部性质(伪微分算子的)

- 4:363  
 伪开映射 4:371  
 伪离式(微分多项式的) 2:98  
 伪菱立方八面体 4:777  
 伪流形 4:370  
 伪流形(带边缘的) 4:370  
 伪螺线 4:952  
 伪内射模 3:82  
 伪逆正则半群 4:554  
 伪凝聚模 1:641  
 伪判别式(二次型的) 2:75  
 伪球面 4:374  
 伪群 4:367  
 伪群结构 4:369  
 伪群结构(流形上的) 4:369  
 伪群(微分流形的变换的) 4:367  
 伪随机数 4:372  
 伪随机序列 1:894  
 伪随机序列生成器 1:894—895  
 伪特征标 4:359  
 伪特征标(拓扑空间的) 4:359  
 伪特征标(拓扑空间中集合的) 4:359  
 伪特征标(在一点处的) 1:472  
 伪凸的区域(在边界点上) 4:361  
 伪凸的区域(在一点上) 2:276  
 伪凸空间 2:860  
 伪凸流形(拟凸流形) 3:394  
 伪凸与伪凹 4:359  
 伪凸域 1:158;2:276;2:775  
 伪图 2:752;3:854  
 伪椭圆积分 4:366  
 伪拓扑空间 5:203  
 伪微分算子 4:362  
 伪微分算子(不超过  $m$  阶的  $\rho, \delta$  型的) 4:363  
 伪微分算子代数 4:364  
 伪向量 4:375  
 伪有补格 3:359  
 伪酉群 5:339  
 伪张量 4:374  
 伪正交群 4:27  
 伪秩函数(正则环上的) 4:552  
 伪周期函数 4:372  
 伪柱面地图投影 1:493  
 伪锥顶地图投影 1:493  
 伪自同构(么拟群的) 3:565  
 伪 Abel 完全化 3:837  
 伪 Boole 代数 4:357  
 伪 Euclid 空间 4:366  
 伪 Euclid 平面 4:366  
 伪 Galileo 空间 4:367  
 伪  $p$  周期 4:372  
 伪 Riemann 度量张量 3:731  
 伪 Riemann 几何学 4:372  
 伪 Riemann 空间 4:373  
 伪 Riemann 空间(常曲率的) 4:373  
 伪 Riemann 空间的类 1:595  
 伪 Riemann 流形 5:102  
 尾事件 5:539  
 尾数(对数的) 3:552  
 尾数(在浮点记号中的数的) 4:201  
 纬垂 5:90  
 纬垂(带基点空间的) 5:90  
 纬垂范畴 4:703  
 纬垂(复形的) 3:610  
 纬垂(空间的谱上的) 4:935  
 纬垂(上同调运算的) 5:90  
 纬垂(同调类的) 5:90  
 纬垂同构 2:677  
 纬垂同态 2:921  
 纬垂(拓扑空间的) 5:90  
 纬垂序列(拓扑空间的) 2:921  
 纬度 1:493  
 未来  $\sigma$  域流( $C^*$  代数的) 4:416  
 未知数 2:374  
 未知数(代数方程的) 1:82  
 未知数(未知量)(线性代数方程组的) 3:461  
 位错(固体内的) 2:549  
 位力定理 5:429  
 位力分解 5:428  
 位力级数 5:428  
 位力系数 5:428  
 位力展开 4:1010  
 位势 4:260  
 位势(测度的) 4:266  
 位势场 4:260  
 位势的主要种类及其性质 4:262  
 位势法 4:276  
 位势(广义函数的) 4:266  
 位势函数 4:260;4:260;1:914  
 位势核 4:270  
 位势核(核半群的) 1:299  
 位势(可测函数的) 5:249  
 位势论 4:262  
 位势论(抽象的)\* 4:267  
 位势论的混合边值问题 4:273  
 位势论中的边值问题 1:426  
 位势论中的反问题 4:271  
 位势论中的 Martin 边界 3:627  
 位势曲面 2:321  
 位势算子 4:262  
 位势网 4:260  
 位势系 2:321  
 位势向量场 3:340;5:407  
 位势型积分 2:544  
 位势型积分核 3:112  
 位势型算子 5:93  
 位势(质量分布的) 4:261  
 位似比 2:917  
 位似变换 2:917  
 位似变换群 4:824  
 位似图形 2:917  
 位似( $A$  模的) 4:770  
 位(一个域取值于另一个域的) 4:166  
 位移标形 4:688  
 位移场的复数表示 2:331  
 位移场(广义平面应力状态的) 2:331  
 位移定律(力学中的) 5:404  
 位移对称化 5:104  
 位移矢量(向量) 2:331  
 位移图 4:688  
 位移形式 2:619  
 位移形式( $G$  结构的) 2:619  
 位(域的)\* 4:166  
 位置-尺度族(分布的) 4:712  
 位置参数 4:712;4:810  
 位值数系 3:1008  
 位值数系(以  $q$  为基的) 3:1009  
 位置对策 4:247  
 位置(对策的) 2:148;4:247  
 位置公理 4:346  
 位置公理(椭圆几何学的点在线上的) 4:622  
 位置微分对策 2:148  
 位置(微分对策的) 2:148



- 位置(Petri 网中的) 4:146
- 谓词 4:284
- 谓词变元 4:286
- 谓词常量 1:783
- 谓词的保持类 3:607
- 谓词符号 4:286
- 谓词演算 4:284
- 谓词演算(带等号的) 3:558
- 谓词演算公式 3:560
- 谓词字母 4:286
- 温度边界层 1:411
- 文法 2:513;2:514
- 文法(变换的)\* 2:752
- 文法(范畴的)\* 2:746
- 文法(上下文无关的)\* 2:746
- 文法(上下文相关的)\* 2:748
- 文法(生成的)\* 2:750
- 文法(线性的)\* 2:751
- 文法(形式的)\* 2:750
- 文法(正则的)\* 2:751
- 文法(支配的)\* 2:749
- 文法(自动的)\* 2:746
- 文件(Cobol C 语言中的) 1:621
- 文字(算法语言中的) 1:129
- 吻接数(接触数)(球的) 1:666;  
3:378
- 稳定差分格式 4:970
- 稳定代数向量丛 5:410
- 稳定等价纤维丛 1:604
- 稳定等价向量丛 5:409
- 稳定等价芽 4:866
- 稳定多项式 4:696
- 稳定方法 1:30
- 稳定分布 4:977
- 稳定分布的吸引域 1:252
- 稳定分界线(鞍点的) 4:705
- 稳定复流形 1:625
- 稳定根(常微分方程组的) 2:141
- 稳定光滑映射 4:865
- 稳定合成积 4:939
- 稳定和失去稳定佯谬 4:968
- 稳定化(发展方程解的) 2:409
- 稳定化泛函 3:8
- 稳定化子 4:976
- 稳定化子(点的) 2:899
- 稳定化子(点对于群的) 4:1
- 稳定化子(集合中元素的) 4:976
- 稳定化(Heegaard 图) 2:846
- 稳定极限环 3:444
- 稳定极小化问题 3:761
- 稳定解 4:397
- 稳定可平行流形 3:601
- 稳定理论和不稳定理论 4:976
- 稳定流形 2:861;4:784
- 稳定流形(鞍点的) 4:705
- 稳定流形(点的) 2:950
- 稳定流形(轨道的) 2:950
- 稳定逻辑理论 4:974
- 稳定区域 4:972
- 稳定上同调运算 1:654
- 稳定上同伦群 1:657
- 稳定示性类 4:239
- 稳定收敛算子序列 1:836
- 稳定随机过程 4:977
- 稳定特殊线性群(环的) 4:908
- 稳定特征指数 4:969
- 稳定同构投射模 4:339
- 稳定同伦群 4:978
- 稳定同胚猜想 5:293
- 稳定微分映射 4:865
- 稳定维数 1:657
- 稳定线性常微分方程组 3:497
- 稳定性 4:960
- 稳定性(差分边值问题的) 1:195
- 稳定性(差分方程解的) 1:197
- 稳定性(差分格式的)\* 4:970
- 稳定性(持续扰动下的) 4:966
- 稳定性(持续作用扰动下的)\*  
4:966
- 稳定性(弹性系统的)\* 4:967
- 稳定性定理 4:972
- 稳定性定理(代数  $K$  理论中的)  
4:972
- 稳定性定理(关于叶状结构的)  
2:504
- 稳定性定理(关于约化 Whitehead  
群的) 4:972
- 稳定性定理(关于 Whitehead 群的)  
4:972
- 稳定性(对部分变量的)\* 4:964
- 稳定性(对策局势的) 4:965
- 稳定性(对策论中的)\* 4:965
- 稳定性(关于同态的) 3:785
- 稳定性(关于一类轨道的) 4:965
- 稳定性(计算过程的)\* 4:967
- 稳定性(计算算法的)\* 4:966
- 稳定性(绝对的)\* 4:960
- 稳定性(可变形系统的) 4:967
- 稳定性理论 4:973
- 稳定性理论(逻辑中的) 4:974
- 稳定性(逻辑理论的) 4:976
- 稳定性(特征指数的)\* 4:969
- 稳定性条件(冲击波的) 4:812
- 稳定性条件(关于微分方程的)  
2:90
- 稳定性准则 4:962
- 稳定性准则(首次近似的) 2:142
- 稳定性(自治系统平衡位置的)  
3:583
- 稳定性(Dirichlet 问题的) 3:250;  
4:136
- 稳定性(Steenrod 平方的) 4:1021
- 稳定性(Steenrod 约化幂的)  
4:1020
- 稳定一维逻辑理论 4:975
- 稳定有限差分问题 1:195
- 稳定于一些数的序列 4:514
- 稳定值(函数的) 4:978
- 稳定值域条件 4:979
- 稳定秩 4:978
- 稳定秩(环的) 4:978
- 稳定秩(子环的) 4:979
- 稳定状态 2:505
- 稳定子集(基数的) 5:88
- 稳定子空间(切空间的) 2:950
- 稳定自由模 4:339
- 稳定作用量原理 3:219
- 稳定作用原理 3:327
- 稳定 Auslander - Reiten 箭图  
4:595
- 稳定  $N$  维框架 3:257
- 稳定 Yang - Mills 场 5:530
- 稳健估计 2:391
- 稳健估计量 4:543
- 稳健(鲁棒)控制 4:963
- 稳健(鲁棒)稳定性设计问题  
2:795
- 稳健(鲁棒)系统 2:312
- 稳健统计 4:679
- 稳健性 4:679
- 稳态作用原理 2:808;3:327

- 问题演算 2:471
- 瓮模型 5:360**
- 瓮(排列中的) 1:234
- 瓮问题 4:478
- 涡层 1:907
- 涡管 1:906
- 涡环 5:444**
- 涡迹 5:513
- 涡面 1:906
- 涡丝 1:906
- 涡线 1:906
- 涡旋流 5:414
- 蜗牛线 1:628**
- 无不动点的群表示 4:899
- 无不动点自同构 4:544
- 无不合格品验收原则 4:711
- 无处连通的拓扑空间 1:780
- 无处连通性 1:780
- 无底棱锥 4:227
- 无定向道路 2:64**
- 无反射位势 3:290
- 无放回抽样 2:955;4:710
- 无分支单纯复形 4:370
- 无负载储备 4:577
- 无关联的图形偶 2:469
- 无规则选择序列 3:153
- 无后效过程 3:621
- 无迹张量 4:597
- 无记忆信道 3:710**
- 无记忆性 2:418
- 无记忆性(概率过程的) 2:335
- 无记忆自动机 1:273
- 无监督学习 4:110
- 无教师学习 4:109
- 无接触弧 1:218**
- 无接触圈 1:218
- 无接触线段 1:218
- 无结果停止(算法的) 1:119
- 无截 Gentzen 形式系统 2:697
- 无界区域 2:276
- 无界算子 5:314**
- 无界 Burnside 问题 1:451
- 无矩壳体理论 4:808
- 无理不变量(Weierstrass  $\mu$  函数的) 5:468
- 无理代数数 3:180
- 无理分支(环面的) 2:134
- 无理数 3:180
- 无理性度量 3:705
- 无量词逻辑-数学演算 3:561
- 无量纲量(物理中的) 2:186
- 无挠模(无扭模) 5:230**
- 无挠群 2:791
- 无挠射影联络 4:331
- 无扭模 5:230**
- 无扭模(Bass 意义下的) 1:46
- 无偏点估计量 4:995
- 无偏估计量 5:311**
- 无偏检验 5:314**
- 无偏统计估计量 2:390
- 无偏性要求 1:741
- 无前史常微分方程 2:139
- 无切触弧 4:197
- 无穷 3:67**
- 无穷大函数 3:61**
- 无穷大序列(数的) 3:440
- 无穷公理 3:68**
- 无穷公理(简单类型论中的) 5:305
- 无穷和 4:791
- 无穷积 3:57**
- 无穷积(在区域内部绝对收敛的) 3:57
- 无穷积(在区域内部收敛的) 3:57
- 无穷积(在区域内部一致收敛的) 3:57
- 无穷集 3:67
- 无穷阶方程 2:374**
- 无穷阶微分方程(复域中的) 2:374
- 无穷阶微分方程组 2:133**
- 无穷矩阵 2:66
- 无穷可分分布 3:59**
- 无穷可分分布的因子分解 3:61**
- 无穷可分随机函数 3:59
- 无穷可分特征函数 3:59
- 无穷拉丁方 3:354
- 无穷微分方程组 2:133
- 无穷维表示(无限维表示) 3:51**
- 无穷维空间(无限维空间) 3:55**
- 无穷(无限)代数运算 1:100
- 无穷(无限)维分析 5:215
- 无穷(无限)维复形 1:707
- 无穷(无限)维流形 3:601
- 无穷(无限)维球 1:299
- 无穷(无限)维球面 4:937
- 无穷(无限)维向量空间 5:418
- 无穷(无限)维 Cantor 流形 1:463
- 无穷(无限)维 Cartan 代数 3:406
- 无穷(无限)维 Fourier 变换 5:491
- 无穷(无限)维 Lie 代数 3:405
- 无穷小变换 3:66
- 无穷小不可约有理表示 4:500
- 无穷小等价 3:52
- 无穷小等价表示 2:378
- 无穷小等价的拟单表示 4:441
- 无穷小对称 3:917
- 无穷小方法(Lie 群表示的) 3:52
- 无穷小分析 3:633
- 无穷小函数 3:62**
- 无穷小函数(高阶的) 4:7
- 无穷小结构 3:66**
- 无穷小结构(一阶的) 2:151
- 无穷小结构( $r$  阶的) 2:151
- 无穷小解析形变 2:26
- 无穷小联络 3:65**
- 无穷小量分析 3:633
- 无穷小齐性结构 5:43
- 无穷小生成元(半群的) 4:760
- 无穷小生成元(变换群的) 3:1018
- 无穷小生成元(分布半群的) 4:764
- 无穷小生成元(算子半群的) 4:762;5:248
- 无穷小生成元(Марков 过程的) 5:248
- 无穷小算子 3:66**
- 无穷小算子(半群的) 2:693
- 无穷小算子(分布半群的) 4:764
- 无穷小算子(算子半群的) 4:762
- 无穷小算子(右位移算子的) 2:681
- 无穷小算子(左位移算子的) 2:681
- 无穷小特征标(拟单表示的) 4:441
- 无穷小弯曲 1:642
- 无穷小弯曲(曲面的) 2:31
- 无穷小稳定映射 4:865
- 无穷小楔 2:953
- 无穷小形变 3:65**



无穷小形变(概形的) 2:28  
 无穷小序列 3:440  
 无穷小演算 3:62  
 无穷小运动 3:260  
 无穷小自同构 3:260;3:917  
 无穷小坐标卡( $k$  阶的) 1:565  
 无穷序列(事件的) 4:315  
 无穷远鞍点 4:705  
 无穷远点 3:4  
 无穷远点(复空间的) 3:59  
 无穷远点(复平面的) 3:58  
 无穷远点(数空间的) 3:58  
 无穷远点(数轴的) 3:58  
 无穷远奇点(常微分方程的)  
     1:179  
 无穷远元 3:58  
 无穷远圆点 3:935  
 无穷远直线 1:768;3:59  
 无穷 Kalman 滤波器 5:20  
 无圈流形 2:41  
 无圈曲线 2:41  
 无失效运行概率 4:576  
 无特征的域(特征零的域,特征无限的域) 1:563  
 无条件概率 1:734  
 无条件基 1:317;4:36  
 无条件基(Banach 空间中的)  
     1:308  
 无条件极值 1:733  
 无条件可和性 5:316  
 无条件实验(控制系统检验中的)  
     4:575  
 无条件收敛 5:315  
 无条件收敛级数 1:307;1:732  
 无限的域扩张 2:422  
 无限对策 3:56  
 无限多边形 4:224  
 无限非合作对策 3:931  
 无限归纳法 3:57  
 无限归纳法则 3:57  
 无限几何复形 2:708  
 无限连通区域 3:58  
 无限轮换 4:133  
 无限强冲击波 4:813  
 无限区域(无界区域) 2:276  
 无限群 2:783  
 无限群的表示 4:596

无限凸体 1:847  
 无限完全凸曲面 1:850  
 无限维表示 3:51  
 无限维空间 3:55  
 无限维拓扑空间(在大归纳维数意义下) 3:55  
 无限维拓扑空间(在小归纳维数意义下) 3:55  
 无限(无穷)分配律 3:540  
 无限小齐性张量场 4:79  
 无限小数 2:18  
 无限小数展开式 3:51  
 无限型集 2:722  
 无限循环小数 2:18  
 无限制可除性(空间的) 3:737  
 无限制随机游走 4:486  
 无限置换群 4:131  
 无限自动机 1:272  
 无向图 2:752  
 无效估计量 3:48  
 无效统计量 3:48  
 无心曲线 4:738  
 无源的线性电网络 3:893  
 无噪声决斗 2:300  
 无赘交(准素理想的) 3:301  
 无 $\lambda$ 连接闭包(语言的) 2:514  
 吴(文俊)定理 4:1037  
 吴(文俊)类 4:1037  
 吴(文俊)生成元 1:558  
 五角星(五角星形) 4:225;4:548  
 五角星形 4:548  
 五角形数 1:233  
 五球坐标 4:118  
 误差 2:387  
 误差(测量的) 4:999  
 误差(差方格式逼近的) 2:86  
 误差(代换型) 1:633  
 误差度(逼近度)(逼近论中的)  
     1:210  
 误差积分 4:309  
 误差积累 1:29  
 误差理论 2:390  
 误差(码中的) 1:633  
 误差(模型的) 2:387  
 误差(求积公式的) 4:391;5:264  
 误差向量(点估计量的) 4:201  
 误差(一类问题中计算解法的)

3:1049

误差(用网格方程逼近边值问题的)  
     3:466

## X

西瓜定理 3:739  
 西田幂零定理 4:940  
 吸附等温线 1:48  
 吸附作用 1:48  
 吸收边界(随机游动中的) 4:486  
 吸收(乘法下的) 5:537  
 吸收集 1:310  
 吸收集(对另一集合的) 5:211  
 吸收律 1:24  
 吸收状态 1:24  
 吸引点 4:585  
 吸引集 3:568  
 吸引偏域 1:253  
 吸引区域 4:585;5:29  
 吸引区域(局部极值的) 3:849  
 吸引区域(排斥子的) 4:585  
 吸引区域(平凡解的) 1:266  
 吸引区域(稳定分布的) 1:252  
 吸引域(稳定分布的)\* 1:252  
 吸引子 4:585  
 吸着动力学 2:314  
 希腊数系 3:1008  
 析取 2:242  
 析取表示 2:243  
 析取补集 2:242  
 析取范式 2:242  
 析取范式(关于另一个析取范式为极小的) 1:395  
 析取(公式中项的) 1:73  
 析取和 2:243  
 析取集 2:242  
 析取项(逻辑命题的) 2:242  
 析取消去 2:22  
 析取引入法则 2:22  
 析取余集(析取补集) 2:242  
 析取元 2:242  
 析取中间逻辑 3:130  
 析因环(唯一因子分解环)  
     2:447  
 稀疏点 1:193

- 稀疏矩阵 4:906  
 稀疏性质 4:833  
 系紧 Brown 运动 3:1016  
 系数 1:634  
 系数(代数方程的) 1:82  
 系数的指标(Riemann-Hilbert 问题的) 4:625  
 系数(多面体内部的) 4:228  
 系数(多项式的) 4:232  
 系数(反演的) 3:172  
 系数(关于拓扑基分解的) 1:316  
 系数矩阵 3:298  
 系数空间(二次型的) 4:385  
 系数(幂级数的) 4:279  
 系数(区域的) 4:225  
 系数群 1:627  
 系数群(广义上同调论的) 2:677  
 系数群(上同调论的) 2:913  
 系数群(同调论的) 2:913  
 系数(三角级数的) 5:274  
 系数体 1:469  
 系数问题 1:635  
 系数系统(上同调理论的) 2:381  
 系数(线性代数方程组的) 3:461  
 系数(线性积分方程的) 3:94  
 系数(线性微分算子的) 3:474  
 系数(有理函数的) 4:496  
 系数周期(周期系数的线性微分方程组的) 3:508  
 系数(Riemann-Hilbert 问题的) 4:625  
 系统程序 5:124  
 系统程序设计 5:124  
 系统(范畴中的) 5:120  
 系统工程 5:124  
 系统识别 3:585  
 系统误差 1:352;2:390;3:368;4:319;5:999  
 系统误差(点估计的) 4:201  
 系统执行(程序的) 4:323  
 系统 S 的公理 1:288  
 系统 Z 的非逻辑公理 1:291  
 系综的极限等价原理 4:992  
 细胞阵列模型 3:591  
 细胞自动机 1:273  
 细川多项式 1:67  
 细分 5:58  
 细分(边的) 3:753  
 细分(复形的) 5:59  
 细分(几何单纯复形的) 5:58  
 细分(图形的) 1:449  
 细覆盖(集合的) 2:185  
 细极限 2:471  
 细极限点 2:471  
 细邻域 2:471  
 细调和函数(关于细拓扑的调和函数) 2:831  
 细拓扑 2:471  
 狭义谓词演算 3:558;4:285  
 狭义相对论 4:567  
 狭义 Denjoy 积分 2:43  
 狭义 Denjoy 可积函数 2:43  
 辖域(词位的) 1:129  
 下半格 4:770  
 下半连续多值映射 3:853  
 下半连续分解 4:753  
 下半连续分解(拓扑空间的) 1:811  
 下半连续函数 4:753  
 下半连续集值映射 4:754  
 下半连续性 4:753  
 下半连续映射 4:753  
 下半模格 4:772  
 下半平面 2:804  
 下半鞅 2:804  
 下半有界算子 2:426  
 下包络(函数族的) 4:136  
 下底(棱锥的) 4:376  
 下根(代数的子类的) 4:471  
 下根(单代数类的划分的) 4:471  
 下根类 4:471  
 下估计 5:302  
 下广义上调和函数 5:358  
 下过桥 3:269  
 下函数 4:137;5:358  
 下极限 3:570  
 下极限(函数在一点处的) 5:359  
 下极限(集合序列的) 5:360  
 下极限(数列的) 3:570  
 下极限(投射谱的) 4:328  
 下极限(拓扑空间中集合序列的) 3:570  
 下极限(序列的) 5:359  
 下集 3:3  
 下渐近密度 1:245  
 下降法 2:58  
 下降方法(关于说明过程的) 4:318  
 下降理论 2:509  
 下降数据 2:509  
 下降(线性算子的) 4:927  
 下解(Dirichlet 问题的) 5:359  
 下界 3:569  
 下界(函数的) 2:587  
 下界(集合的) 1:808;3:569  
 下界(算子的) 1:430  
 下界(拓扑族的)\* 3:569  
 下类(分割的) 2:21  
 下类(根型的) 4:471  
 下类(全序集的分割的) 5:236  
 下料问题 1:915  
 下临界分支过程 1:438  
 下密度(序列的) 3:317  
 下抛物函数 5:67  
 下配边 1:401  
 下配边类 1:401  
 下配边流形 1:401  
 下配边奇异流形 1:402  
 下配边群 1:402  
 下奇异指数 4:847  
 下强导数 1:193  
 下确界 5:357  
 下确界(集合的) 5:357  
 下确界(拓扑族的) 3:570  
 下确界(最大下界)(偏序子集的) 4:101  
 下热函数 5:67  
 下三角形矩阵 5:268  
 下四分位数 4:417  
 下松弛法 4:570  
 下调和函数 5:61  
 下调和函数(在宽的意义下的) 4:136  
 下调和振动 2:506  
 下调和周期解 4:127  
 下推字母表 2:515  
 下推自动机 2:515;3:590  
 下拓扑极限 3:442  
 下外密度 1:193  
 下小数近似 2:18  
 下鞅 2:804;3:629



- 下一致有界性 5:320  
 下移(张量的指标的) 5:146  
 下诣零根 3:911  
 下有界复形 2:54  
 下有界函数 2:587  
 下有向集 2:206  
 下有向偏序集 1:682  
 下右 Dini 导数 2:188  
 下置信限 3:151;3:906  
 下中心列(群的) 1:537;2:492  
 下中心列(Lie 代数的) 3:413  
 下中心指数 1:532  
 下中心子群列 5:60  
 下锥 4:101  
 下左 Dini 导数 2:188  
 下 Baer 根 4:472  
 下 Bohl 指数 2:134  
 下 Darboux - Stieltjes 和 4:1038  
 下 Darboux 和 2:9  
 下 Darboux 积分 2:9  
 下  $p$  中心序列 4:236  
 下 Wirtinger 表示 3:270  
 下 Привалов 算子 4:304  
 厦 5:111;5:180  
 仙人掌形 1:455  
 先验分布 1:2  
 先验概率 1:2  
 先验估计(差分问题的) 2:86  
 先验估计法 2:947;4:714  
 先验估计(偏微分方程的) 1:335  
 纤维 4:837;3:611  
 纤维丛 2:466;5:123;1:628  
 纤维丛(具有构造群的) 2:618  
 纤维丛(具有纤维  $F$ 、底空间  $B$ 、构造群  $G$  的) 2:618  
 纤维丛(相配于主纤维丛的具有构造群的) 2:618  
 纤维对象(范畴中的) 1:502  
 纤维范畴 1:505  
 纤维(概形的态射的) 4:719  
 纤维和(态射的) 1:658  
 纤维化 2:465  
 纤维化的平方 3:45  
 纤维化底空间 2:466  
 纤维化(以固定空间为纤维的) 2:466  
 纤维化(自旋标架的) 4:951  
 纤维化(Kan 意义下的) 2:923;4:840  
 纤维积 2:465  
 纤维积(范畴中对象的)\* 2:465  
 纤维结构 2:712  
 纤维空间 2:466  
 纤维空间(代数向量场的) 5:410  
 纤维空间同构 2:466  
 纤维空间(一点上的) 2:466  
 纤维流形 3:180;4:97  
 纤维细小性 5:202  
 纤维(纤维丛的) 2:618  
 纤维(纤维空间中的) 2:466  
 纤维(一点上的概形的态射的) 1:313  
 弦 1:585  
 弦度量 2:420  
 弦法 1:585  
 弦畸变定理 2:252  
 弦距离 4:632  
 弦聚值集 1:615  
 弦(圆的) 1:590  
 弦振动方程 2:532  
 显式差分方程 1:33  
 显式多步法 1:33  
 显式方法(Adams 类型的) 4:1039  
 显式方法(Runge - Kutta 类型的) 4:1039  
 显式格式 1:197  
 显式构造(Plancherel 测度的) 5:342  
 显式数值解法 2:136  
 显式同伦群(球面的) 4:940  
 显式 Campbell - Hausdorff 公式 1:459  
 显式 Störmer 公式 2:137  
 显著性检验 4:822  
 显著性水平 4:821  
 现在代数 4:416  
 线(长方矩阵的) 4:746  
 线丛 5:410;5:412  
 线丛(圆锥曲线的) 3:604  
 线段 1:299;4:742  
 线段(空间中的) 4:742  
 线段(偏序集中的) 4:101  
 线段(平面上的) 4:742  
 线汇 1:765  
 线汇的级 1:765  
 线汇的焦网 2:501  
 线汇(圆锥曲线的) 3:604  
 线积分(第二类) 1:913  
 线积分(第一类) 1:913  
 线积分(关于弧长的) 1:913  
 线积分(关于坐标的) 1:913  
 线积分(曲线积分) 1:913  
 线积分(向量场沿闭曲线的) 1:593  
 线积分(沿闭曲线的) 1:593  
 线(曲线) 3:454  
 线(射影空间中的) 4:344  
 线(射影平面中的) 4:340  
 线伸缩(在区域中的) 4:421  
 线束(Лобачевский 几何学中第二类的) 3:525  
 线束(Лобачевский 几何学中第三类的) 3:525  
 线束(Лобачевский 几何学中第一类的) 3:525  
 线素 2:207  
 线素场 2:208  
 线性 - 正则随机过程 3:515  
 线性包 3:485  
 线性包络(集合的) 5:417  
 线性包络(模元素的集合的) 1:315  
 线性包络(线性包) 3:485  
 线性逼近方法 1:200;1:208  
 线性闭包 3:469  
 线性边界条件(扩散方程的) 2:174  
 线性边值问题 3:466  
 线性边值问题(常微分方程的) 1:423  
 线性边值问题,数值方法 3:466  
 线性变分(集合的) 5:376  
 线性变换 3:511  
 线性变换群 3:25  
 线性变换(Lie 代数的与一点相伴的) 3:411  
 线性表示 3:505  
 线性表示(半群的) 4:590  
 线性表示的不变量 3:506  
 线性表示(晶体群的) 1:899  
 线性表示(群的) 3:458;4:588

线性表示(向量空间中的) 4:600  
 线性不等式 3:489  
 线性不等式的多面封闭组 3:490  
 线性参数规划问题 4:89  
 线性插值法 3:491  
 线性常微分方程 3:496  
 线性常微分方程(常系数的)\*  
     3:500  
 线性常微分方程的秩 4:491  
 线性常微分方程(二阶的)\*  
     3:498  
 线性常微分方程组 3:185;2:616  
 线性常微分方程组( $n$  阶的)  
     1:496  
 线性常微分方程( $n$  阶的) 2:397  
 线性常微分算子 2:166;3:474  
 线性常微分算子(常系数的)  
     2:166  
 线性簇 3:513  
 线性代数 3:457  
 线性代数方程 3:460  
 线性代数方程数值方法的分类  
     3:460  
 线性代数方程组 4:1022  
 线性代数群 3:462  
 线性代数群(约化的) 4:532  
 线性代数群的算术理论 3:464  
 线性代数中的数值方法 3:458  
 线性等价除子 2:270  
 线性等价性(除子的) 2:270  
 线性递归序列 2:465  
 线性典范组 2:810  
 线性典型群 3:468  
 线性电网络 3:893  
 线性叠加原理 2:330  
 线性动态输入输出系统 5:118  
 线性多步法 1:523  
 线性反射 4:536  
 线性反射群 4:537  
 线性泛函 3:482  
 线性方程 3:480  
 线性方程组 3:480  
 线性方程组的扰动 4:139  
 线性分析的基本原理 3:493  
 线性复形群 5:111  
 线性共轭问题 1:425;1:428;  
     4:625

线性共轭性问题 4:853  
 线性估计量 3:481  
 线性规划 3:503  
 线性规划松弛法 4:718  
 线性函数 3:482  
 线性化定理(常微分方程组的)  
     3:983  
 线性化方程 4:402  
 线性化方法 3:513  
 线性化过程(恒等式的) 4:157  
 线性化碰撞积分 1:548  
 线性化碰撞算子 1:549  
 线性化(微分方程的) 3:165  
 线性化(问题的) 4:5  
 线性化子(群的) 3:431  
 线性化 Boltzmann 方程 1:386  
 线性化 Boltzmann 方程(气体动力  
     学理论中的) 1:386  
 线性回归 3:505  
 线性回归方程 3:505  
 线性回归模型 4:994  
 线性回归(一个随机变量对另一个  
     随机变量的) 3:505  
 线性积分方程 3:490  
 线性积分方程(第二类) 2:881;  
     3:94  
 线性积分方程(第三类) 3:94  
 线性积分方程(第一类) 3:94  
 线性积分方程组 3:94  
 线性积分算子 3:112;2:857  
 线性畸变(地图投影的) 1:489  
 线性极空间 4:216  
 线性几何对象 2:712  
 线性计算算法 1:726  
 线性假设 3:488  
 线性结构模型 2:446  
 线性结构( $W$  型的) 5:42  
 线性紧模 3:514  
 线性紧模(狭义的) 3:515  
 线性均方回归 4:541  
 线性可表示性(Lie 群的) 3:424  
 线性空间 3:506  
 线性控制系统 3:596;5:123  
 线性亏格(代数曲面的) 1:102  
 线性离心率 2:317  
 线性连通拓扑空间 1:780  
 线性连通性 1:780

线性连通性(点在真态射下的逆象  
     的) 5:536  
 线性联络 3:469  
 线性联络(微分流形上的) 3:469  
 线性联络(纤维丛上的) 3:469  
 线性联络(向量丛上的) 3:469  
 线性流形 2:23;3:462;3:506;  
     3:513  
 线性流形(仿射空间中的) 1:58  
 线性滤波问题 5:19  
 线性码 2:388  
 线性码的对偶线性空间 2:389  
 线性迷向群 3:201;3:202  
 线性迷向群(变换 Lie 伪群的)  
     4:368  
 线性模型(回归分析的) 4:543  
 线性内插(随机过程的) 5:21  
 线性抛物型偏微分方程和方程组  
     3:501  
 线性偏微分方程 3:503  
 线性偏微分方程(混合型的)  
     2:112  
 线性偏微分方程(在区域中抛物型  
     的) 2:111;3:501  
 线性偏微分方程(在一点处双曲型  
     的) 2:111  
 线性偏微分方程(在一点处椭圆型  
     的) 2:111  
 线性偏微分算子 3:474  
 线性平坦联络 4:82  
 线性齐次几何对象 2:712  
 线性奇异过程 3:516  
 线性强椭圆型偏微分算子 3:478  
 线性求和法 3:506  
 线性群 3:483  
 线性群(除环上的) 3:484  
 线性群(环上的) 3:484  
 线性群( $n$  阶的) 3:483  
 线性弱拓扑 5:39  
 线性三元域 5:150  
 线性时间最优控制问题 5:179  
 线性双曲型偏微分方程和方程组  
     3:485  
 线性算子 3:491  
 线性算子的核 3:254  
 线性算子的谱分解 4:912  
 线性算子方程 5:436



- 线性算子(弱型( $p, q$ )的) 3:142  
 线性算子(限制弱型( $p, q$ )的)  
 3:142  
 线性算子(有限维空间上的)  
 3:492  
 线性算子(作用在一向量空间上的)  
 3:491  
 线性算子( $((p, q)$ 型的) 3:142  
 线性椭圆型方程(一般形式的)  
 2:431  
 线性椭圆型偏微分方程和方程组  
 3:477  
 线性椭圆型偏微分算子 3:477  
 线性拓扑 3:511  
 线性拓扑空间 3:511  
 线性拓扑性质(Banach 空间的)  
 1:306  
 线性微分 2:165;1:759  
 线性微分对策 2:149  
 线性微分方程 2:40  
 线性微分方程(具有非解析算子的)  
 3:471  
 线性微分方程(具有解析算子的)  
 3:470  
 线性微分方程(具有有界算子的)  
 3:470  
 线性微分方程组(殆周期系数的)\*  
 3:507  
 线性微分方程组(周期系数的)\*  
 3:508  
 线性微分方程(Banach 空间中的)\*  
 3:469  
 线性微分算子 3:474  
 线性微分算子复形 3:476  
 线性微分算子(关于群不变的)  
 3:475  
 线性微分算子(广义的) 3:474  
 线性微分算子(狭义的) 3:474  
 线性微分算子(主型的) 3:476  
 线性微分算子( $l$  阶的) 2:104  
 线性维数(Hilbert 空间的) 2:873  
 线性文法 2:751  
 线性问题(随机过程统计中的)  
 4:1012  
 线性问题(小除数的) 4:873  
 线性无关 3:488  
 线性无关度量 3:489  
 线性无关度量(自然数的) 3:489  
 线性无关集 5:417  
 线性无关向量序列(Hilbert 空间中  
 的) 2:873  
 线性无关向量组 3:488;5:405  
 线性无关性(数的) 3:488  
 线性无关元量组(Abel 群中的)  
 1:13  
 线性无关(Hilbert 空间中的)  
 2:873  
 线性无缘代数 3:515  
 线性无缘扩张 3:515  
 线性系 3:506  
 线性系(子簇的) 5:121  
 线性线丛 5:541  
 线性相关 3:469  
 线性相关向量组 3:488;5:405  
 线性相关元素组(Abel 群中的)  
 1:13  
 线性型 3:481  
 线性性质(Riemann 积分的)  
 4:628  
 线性性(Shapley 值的) 4:801  
 线性序集(全序集) 5:236  
 线性序(全序) 5:481  
 线性一致椭圆型偏微分算子  
 3:478  
 线性映射 5:418  
 线性映射(拓扑单形之间的)  
 4:833  
 线性映射(拓扑有序单形之间的)  
 4:833  
 线性语言 2:751  
 线性预测(随机过程的) 5:22  
 线性约化线性代数群 4:532  
 线性运算(向量上的) 5:404  
 线性真椭圆型偏微分算子 3:479  
 线性振动理论 4:46  
 线性振子 4:49  
 线性正规可解算子 2:562  
 线性正规曲线 3:916  
 线性秩统计量 4:492  
 线性主部(函数增量的) 2:92  
 线性子半群(群的) 4:667  
 线性子空间 3:506  
 线性自动机 1:256  
 线性自治常微分方程(带偏差变元  
 的) 2:140  
 线性组合(模元素的) 1:315  
 线性组合(向量的) 5:417  
 线性坐标 1:857  
 线性 Diophantus 逼近 2:191  
 线性 Hamilton 方程组(具周期系数  
 的) 2:812  
 线性 Hamilton 系统 2:810  
 线性 Hausdorff 测度 2:842  
 线性 Hausdorff 零测度 1:614  
 线性 Lie 代数 3:411  
 线性 Lie 群 3:411  
 线性  $N$  宽度 5:501  
 线性 Verone 空间 3:926  
 线性 Volterra 积分方程(第二类)  
 5:435  
 线性 Volterra 积分方程(第一类)  
 5:435  
 线性 Volterra 积分算子 5:437  
 线性  $\Omega$  代数 3:851  
 线元场(流形上的) 3:268  
 限位排列 1:663  
 限制(标量的) 3:796  
 限制(表示到不变子空间上的)  
 1:822  
 限制(表示的) 1:822  
 限制(测度的) 3:699  
 限制对称群 5:100  
 限制多重性集 5:336  
 限制泛包络结合代数 3:433  
 限制(函数的) 2:586  
 限制和乐群 2:892  
 限制交错群 5:100  
 限制量词 4:611  
 限制密码体制 1:893  
 限制圈积 5:524  
 限制三体问题 1:598;5:169  
 限制(算子的) 2:425  
 限制同态 4:284  
 限制谓词演算 4:611  
 限制(纤维丛的) 2:618  
 限制(纤维化的) 2:466  
 限制(纤维空间的) 2:466  
 限制演算(约束演算) 4:254  
 限制(映射的) 3:609  
 限制直积 3:5  
 限制最大值原理(关于位势的)

- 4:659  
 限制 Burnside 问题 1:451  
 限制( $G$  空间的) 3:721  
 限制 Lie 代数 3:406;3:433  
 限制  $\omega$  法则 1:479  
 陷门 1:892  
 陷门秘密 1:896  
 乡村理发师悖论 1:187  
 相 4:128;4:409  
 相-场方程 4:508  
 相伴变分问题 3:211  
**相伴变换 1:668**  
 相伴变量 1:874  
 相伴常微分方程组 2:141  
 相伴代数数 1:96  
 相伴代数整数 1:96  
 相伴等距极小曲面族 3:751  
 相伴方程(组) 5:259  
 相伴环元 2:268  
 相伴极值曲线 3:211  
 相伴平坦上链 2:496  
 相伴平坦形式 2:496  
 相伴群(拟群的) 4:429  
 相伴收敛半径(幂级数的) 2:221  
 相伴线性形式组 1:482  
 相伴型簇 1:528;1:586  
 相伴元 4:289  
 相伴准线(椭圆的) 2:341  
**相变 4:155**  
 相变量 1:826  
 相变问题 2:727  
**相错直线 4:870**  
 相等的角 1:182  
 相等的(全等的)图形 1:764  
 相等多项式 4:233  
 相等关系 1:364  
 相等关系(分数的) 2:543  
 相等集合 4:799  
 相等三向量 5:282  
 相等向量 5:404  
**相等性公理 2:373**  
 相等映射 3:609  
 相等整数对 4:498  
 相点(动力系统的) 2:309  
 相对比例尺(地图投影的) 1:489  
 相对标量丛(权  $g$  的) 2:105  
 相对不变量 2:712;3:790  
 相对不变量(型的) 3:167  
 相对不变量(Weierstrass  $p$  函数的) 5:468  
 相对差积(域扩张的) 2:238  
 相对稠密集 4:520  
 相对稠密集(殆周期的) 1:138  
 相对稠密集( $\epsilon$  殆周期的) 1:138  
 相对导出函子 4:562  
 相对导子层 2:52  
 相对等周差(凸体的) 3:197  
**相对度量 4:563**  
 相对范畴 1:502  
 相对分量(几何对象的) 2:712  
 相对复杂性(终端析取范式与最短析取范式的) 1:398  
**相对根系 4:563**  
 相对积分不变量 3:109  
 相对极小模型 3:746  
**相对几何学 4:562**  
 相对计算 5:291  
 相对接近性 3:727  
 相对紧函数序列 1:814  
**相对紧集 4:564**  
 相对精度 4:316  
**相对开(闭)集 4:564**  
 相对可定义初等理论 2:338  
 相对列紧集 1:679  
**相对论 4:567**  
 相对论的数学工具 4:568  
**相对论性不变性 4:566**  
**相对论性动力学 4:565**  
 相对论性光速 4:567  
 相对论性光速加法定律 4:568  
**相对论性流体力学中的数子问题 4:565**  
 相对论性能量 4:406  
**相对论性热力学中的数学问题 4:566**  
**相对论性天体物理学中的数学问题 4:564**  
 相对切层(态射的) 4:631  
 相对冗余度(编码的) 1:633  
 相对熵 3:73  
 相对上角盈 4:654  
 相对上同调 1:652  
 相对上同调群 4:563  
 相对上同伦群 1:657  
 相对射影常数 1:307  
 相对伸长(弹性理论中的) 2:329  
 相对算法 5:291  
**相对同调 4:562**  
**相对同调代数 4:562**  
 相对同伦 2:918  
 相对同胚 1:531  
 相对凸子群 1:849  
**相对拓扑 4:563**  
 相对微分不变式 2:163  
 相对微分层 2:104  
 相对伪补运算 1:446  
 相对误差 2:387  
 相对误差界 2:387  
 相对相容逻辑理论 1:781  
 相对相容性 1:288  
 相对相容性(形式算术的) 3:562  
 相对效率 2:320  
 相对效率(统计估计量的) 4:995  
**相对性原理 4:567**  
 相对序列紧集 1:679  
 相对一致收敛 4:661  
 相对有补格 3:359  
 相对张量 4:374  
 相对自由代数 5:126  
 相对自由对象 5:353  
 相对自由群 2:567  
 相对坐标(几何对象的) 2:712  
 相对 CW 复形 1:917  
 相对 de Rham 复形 2:2  
 相对 de Rham 上同调 2:15  
 相对 de Rham 上同调层 2:15  
 相对 Picard 概形 4:159  
 相对 Picard 函子 4:159  
 相对 Runge 区域 4:700  
 相对 Weyl 群 4:563  
 相对  $\epsilon$  熵 2:315  
**相反定理 1:825**  
 相反抛物子群 4:74  
 相反偏序集 4:101  
 相反实数 4:514  
 相反数(实数的) 4:514  
 相反向量 5:404  
 相反 Borel 子群 1:406  
 相(复数的) 1:714  
**相干态 1:642**  
 相干向量 1:642



- 相关比** 1:864  
**相关表** 1:864  
**相关泛函**(广义平稳随机过程的) 4:987  
**相关分析** 1:864  
**相关关系** 1:315  
**相关函数** 1:861  
**相关函数**(平稳随机过程的) 4:988  
**相关函数**(实随机过程的) 1:861  
**相关函数组** 2:589  
**相关函数组**(区域上的) 2:589  
**相关集** 1:315  
**相关集**(向量空间中的) 2:571  
**相关(矩)阵** 1:864  
**相关理论**(平稳随机过程的) 4:985  
**相关逻辑** 5:33  
**相关群**(字母表上一条链的点的) 5:114  
**相关试探法** 3:823  
**相关(统计学中的)** 1:863  
**相关图** 1:865  
**相关文法**(简单支配文法) 2:750  
**相关系数** 1:861  
**相关性**(函数的) 2:588  
**相关性**(集合元素的) 1:314  
**相关选择**(偏序集中的) 4:102  
**相关选择原理** 4:102  
**相关蕴涵** 2:22  
**相轨道** 4:154  
**相轨道**(动力系统的) 2:309  
**相函数**(Fourier 积分算子的) 2:530  
**相合估计量** 1:782  
**相合检验** 1:782  
**相合矩阵** 3:978  
**相合谱估计量** 4:917  
**相合统计估计量** 4:996  
**相合统计估计量序列** 4:994  
**相合统计检验** 1:782  
**相合统计检验序列** 4:1004  
**相互独立** 3:35  
**相互换位子**(子群的) 3:851  
**相互摩擦系数** 5:301  
**相互能量**(非负测度的) 2:359  
**相互锁定**(进程的) 4:81  
**相互替换**(一个串用另一个串的) 1:166  
**相互正交拉丁方** 4:28  
**相互作用绘景** 3:127  
**相积分方法** 4:153  
**相交定理**(关于准素理想的) 1:38  
**相交理论** 3:147  
**相交理论**(代数簇上的) 3:147  
**相交链复形** 3:146  
**相交面**(流的) 4:197  
**相交数** 3:148  
**相交数**(平面曲线的) 1:915  
**相交同调** 3:146  
**相交形式** 2:527  
**相交直线**(双曲平面中的) 4:196  
**相交直线**(Лобачевский 几何学中的) 3:525  
**相交指数**(代数几何学中的) 3:146  
**相交指数**(同调类的) 3:147  
**相交指数**(同调论中的) 3:147  
**相交重数**(除子的) 3:146  
**相空间** 4:153  
**相空间**(动力系统的) 2:309  
**相平衡图** 4:153  
**相平面** 4:153  
**相切点**(线丛的直纹面的) 1:715  
**相切局部坐标卡** 1:565  
**相切球面** 4:119  
**相切映射** 2:171  
**相切圆**(四圆坐标中的) 5:153  
**相容测度** 2:823  
**相容初等理论** 2:337  
**相容范数**(局部凸空间上的) 1:871  
**相容方向**(叶状结构的叶的) 3:268  
**相容分布** 1:689  
**相容概率测度系** 1:690  
**相容概率分布系** 1:690  
**相容公式集** 1:107  
**相容弧集**(竞赛图的) 5:236  
**相容量子化** 3:401  
**相容逻辑公式集** 2:734  
**相容梅坦寿春条件期望** 4:415  
**相容求和法** 1:689  
**相容容许关系** 5:183  
**相容算子** 3:476  
**相容随机过程** 5:16  
**相容线性不等式组** 3:489  
**相容线性代数方程组** 3:461  
**相容形式系统** 1:781  
**相容性** 1:781  
**相容性**(部件系统和从属树的) 5:114  
**相容性**(两范数的) 3:966  
**相容性**(逻辑理论的) 4:898  
**相容性(求和法的)\*** 1:689  
**相容性条件**(关于乘性 Cousin 数据的) 1:873  
**相容性条件**(关于加性 Cousin 数据的) 1:872  
**相容性条件**(关于中立型微分方程的解的) 3:898  
**相容性**(线性方程组的) 3:480  
**相容性准则**(线性方程组的) 3:298  
**相容质量格式** 5:393  
**相容子集**(序偏集的) 5:88  
**相容坐标卡** 1:565  
**相容坐标卡**(类  $C^1$  的) 1:565  
**相容 Hoare 逻辑** 5:156  
**相似** 4:824  
**相似变换** 1:751  
**相似变换半群** 5:246  
**相似变换群** 4:824  
**相似不变量**(矩阵的) 3:977  
**相似代数运算** 1:105  
**相似关系** 1:105  
**相似环元** 1:238  
**相似集** 4:823  
**相似几何对象** 2:711  
**相似检验** 4:824  
**相似矩阵** 4:823  
**相似理论** 4:825  
**相似求积公式** 4:391  
**相似区域** 4:825  
**相似全序集** 4:9  
**相似算子** 4:823  
**相似统计量** 4:823  
**相似图形** 4:824  
**相似**(图形的) 4:824  
**相似位置的图形** 2:917  
**相似**(物理现象的) 4:825

- 相似系数 4:824
- 相似型 1:108
- 相似映射 4:823
- 相似置换群 4:131
- 相似(置换群的) 4:131
- 相似准则(矩阵的) 3:672
- 相似准则(物理现象的) 4:825
- 相似 Lie 变换群 3:437
- 相速度 2:247;2:789
- 相速度向量 4:155**
- 相速度向量(动力系统中的)  
2:309
- 相同点(构造度量空间的) 1:791
- 相同信息 3:70
- 相图 2:109
- 相图(相图象) 2:110;4:154;  
4:154
- 相图象 4:154
- 相位积分方法 5:521
- 相位流 1:282
- 相位(自由谐振动的) 2:567
- 相依数 1:641**
- 相异代表定理 2:500
- 相异代表系 5:120**
- 相异代表系定理 4:745
- 相遇问题 4:130
- 相最优轨道 3:1046
- 相坐标 1:826
- 镶嵌定理(铺石定理) 2:180;  
3:378
- 镶嵌结构 1:273
- 详细搜索 3:849
- 向后差分 2:473
- 向后单侧移位 2:427
- 向后方程 2:177
- 向后分析 3:460
- 向后热传导方程 3:171
- 向后追赶(搜索) 2:137
- 向后 Колмогоров 方程 2:176
- 向后 Колмогоров 方程(逆向 Колмо-  
горов 方程) 3:235;3:284
- 向量 5:403
- 向量部分(四元数的) 4:443
- 向量测度 5:415**
- 向量测度(有界半变差的) 5:415
- 向量测度(有界变差的) 5:415
- 向量场 5:413**
- 向量场的流量 2:500**
- 向量场的旋转度 4:689**
- 向量场的源 5:414**
- 向量场(流形上的)\* 5:413**
- 向量场(球面上的) 1:656
- 向量场(沿映射的) 5:413
- 向量丛 5:408**
- 向量丛(代数的)\* 5:410**
- 向量丛(解析的)\* 5:411**
- 向量丛映射 2:105
- 向量丛(与层相伴的) 5:410
- 向量代数 5:404**
- 向量的分量 1:721**
- 向量点公理学 5:408
- 向量分析 5:407**
- 向量格 5:415**
- 向量格(有界元素的) 4:773
- 向量公理学 5:408**
- 向量管 5:419**
- 向量函数 5:414**
- 向量函数代数 5:415**
- 向量函数空间 3:998
- 向量和(集合的) 1:33
- 向量环 5:417**
- 向量积 5:416**
- 向量积(叉积) 1:889**
- 向量矩阵代数 1:528
- 向量(具有始点  $a$  和终点  $b$  的)  
1:58
- 向量空间(除环上的) 5:417
- 向量空间的复化 1:718**
- 向量空间的性质 5:417
- 向量空间上的张量 5:145**
- 向量空间(域上的) 5:417**
- 向量密度 5:145
- 向量群 5:415**
- 向量实现(泛函的) 4:215
- 向量随机过程 5:13
- 向量微分方程 2:107
- 向量微分形式 2:145
- 向量位势 4:260
- 向量线 5:419
- 向量(向量空间中的) 5:417
- 向量演算 5:412**
- 向量值殆周期函数 2:674
- 向量值最优化 3:842
- 向量量子空间 3:506
- 向量最优化问题 3:1024
- 向量 Laplace 方程 3:340
- 向内半度(图顶点的) 3:597
- 向前差分 2:473
- 向前方程 2:177
- 向前消元法 2:656
- 向前追赶(搜索) 2:137
- 向前 Колмогоров 方程 2:176
- 向外半度(图顶点的) 3:597
- 项 5:149**
- 项(超限级数的) 5:246
- 项(多项式的) 4:232
- 项(多重序列的) 3:860
- 项(函数级数的) 4:794
- 项(级数的) 4:791
- 项(经典谓词演算中的) 3:557
- 项(逻辑语言的) 4:284;4:1034
- 项(幂级数的) 4:279
- 项目 4:324
- 项目管理和进度安排的数学理论  
4:324**
- 项目进度安排 4:717
- 项目评估技术—时间问题(一般网  
络中的) 4:325
- 项目评估技术网络(PERT 网络)  
4:324
- 项(数项级数的) 4:792
- 项数(序列的) 4:784
- 项(序列的) 4:784
- 项秩( $(0-1)$ 矩阵的) 3:288
- 项(Постников 系统的) 4:256
- 项( $\Omega$  系统中的) 1:106
- 象(超渡下的) 5:247
- 象(对应的) 1:866
- 象法 3:611
- 象(集合在函数下的) 2:586
- 象(集合在映射下的) 3:610
- 象(态射的)\* 3:12**
- 象(同态的) 3:12;4:673
- 象(投影下的) 4:326
- 象(线性算子的) 3:491
- 象限 4:379**
- 象限(平面的) 1:488;4:379
- 象(向量丛态射的) 5:409
- 象形符号 3:1008
- 象形文字的数系 3:1008
- 象(有理映射下的) 4:498



- 象(元素在对应下的) 1:866
- 象(元素在一个函数下的) 2:586
- 象原函数(Laplace 变换的) 3:346
- 象原(Laplace 变换的) 3:346
- 象源 3:611
- 象征模(线性微分算子的) 3:476
- 象征(偏微分算子的) 1:554
- 象征(算子的)\* 5:92**
- 象征(椭圆复形的) 3:41
- 象征(微分算子的) 2:168
- 象征(伪微分算子的) 4:362
- 象征(线性微分算子的) 3:475
- 象征(Fourier 积分算子的) 2:531
- 象征(Wiener-Hopf 方程的) 3:97
- 肖(荫堂)定理 2:430
- 消没闭链 5:371**
- 消没闭链函子 5:371
- 消没平均振动函数 2:818
- 消没上同调空间 3:814
- 消灭空间 3:260**
- 消灭同伦群 2:925
- 消去半群 3:914
- 消去定理 4:973
- 消去定理(关于投射模的) 1:94;  
4:338
- 消去(附加环柄的) 2:815
- 消去规则 2:697
- 消去律 3:15
- 消去律(双重否定的) 2:282
- 消去同调基方法 4:606
- 消去(未知数的) 4:612
- 消去性(加法的) 3:1003
- 消息传送模型 3:591
- 消息空间 1:896
- 消元法(线性代数方程的) 3:458
- 消元理论 2:339**
- 小半群簇 4:401
- 小波 5:455
- 小波变换 5:455
- 小波分析 5:455**
- 小波基 5:456
- 小波群 5:455
- 小参数方法 4:875**
- 小参数方法(常微分方程的)  
4:876
- 小参数方法(偏微分方程的)  
4:878
- 小除数 4:873
- 小对偶原理 2:56
- 小对象 4:875**
- 小范畴 4:873**
- 小分母 4:873**
- 小归纳维数 2:184
- 小林-竹内定理 5:176
- 小林度量 2:943
- 小林距离 2:776
- 小内射模 3:82
- 小配分函数 4:992
- 小平-Spencer 形变理论 2:27
- 小平-Spencer 映射 2:27
- 小平定理 3:280**
- 小平曲面 2:355
- 小平射影嵌入定理 2:886;3:245
- 小平维数 3:279**
- 小平消灭定理 3:280
- 小前提 3:802
- 小丘(程序的) 4:322
- 小群 4:949
- 小扰动法 1:413
- 小数部分(分数部分) 2:547**
- 小数部分(数的) 3:114
- 小数点 4:201**
- 小数近似(实数的)\* 2:17**
- 小数近似( $n$  阶的) 2:18
- 小统计和 4:992
- 小纤维具体范畴 5:206
- 小象 4:875**
- 小星形十二面体 4:549
- 小振动方程(摆的) 5:390
- 小正则系综 4:1006
- 小子模 5:65
- 小 Giraud 定理 3:542
- 小  $O$  符号 4:7
- 小  $o$  符号 4:7
- 小  $o$  关系 4:7
- 小 Seifert 纤维化 4:743
- 效果(动力系统的) 1:921
- 效率(渐近的)\* 2:320**
- 效率(统计方法的)\* 2:320**
- 效率(统计估计量的) 3:48
- 效用函数 3:399
- 效用理论 5:362**
- 校正公式 1:33
- 校正子(修正子) 4:1042
- 楔 2:953
- 楔的穴 2:953
- 楔棱定理 2:954;4:632
- 楔体 2:953
- 楔(向量空间中的) 5:463**
- 协方差 1:874**
- 协方差窗 4:917
- 协方差泛函(平稳随机过程的)  
4:987
- 协方差分析 1:874**
- 协方差函数 4:916
- 协方差函数(平稳随机过程的)  
4:985
- 协方差(解数的)\* 1:875**
- 协方差矩阵 1:874**
- 协方差算子 2:663
- 协方差算子(测度的) 1:562
- 协调定向 3:28
- 协议 5:155
- 斜边 2:962**
- 斜冲击波 4:812
- 斜导数 3:1011**
- 斜对称 1:145
- 斜对称多项式 5:101
- 斜对称多重线性映射 3:856
- 斜对称化多重线性映射 3:856
- 斜对称矩阵 4:871**
- 斜对称双线性型 4:871**
- 斜对称张量 4:872**
- 斜对称 Fredholm 核 2:562
- 斜多边形 4:223
- 斜多项式环 4:300
- 斜钩形(Young 图中的) 5:533
- 斜积 4:871**
- 斜积(遍历理论中的) 4:871
- 斜积(定向类的) 4:193
- 斜积流 3:861
- 斜积(拓扑学中的) 4:871
- 斜积(向量的) 4:871
- 斜角坐标系 1:488
- 斜率函数(平稳曲线场的) 2:435
- 斜螺旋面 2:849
- 斜群环 1:890
- 斜驶的分式线性映射 2:546
- 斜驶线 3:571**
- 斜线 3:29**
- 斜线(对平面的) 3:29

- 斜线(对直线的) 3:29  
 斜线(椭圆空间中的) 4:624  
 斜向地图投影 1:489  
 斜星形线 1:240  
 斜轴测投影 1:293  
 斜 Hermite 型 2:856  
 斜 Hermite Fredholm 核 2:562  
 谐波 2:835  
 谐和振动 2:835  
 谐振动 2:567  
 谐振子 4:49  
 心射切面地图投影 1:497  
 心脏线 1:475  
 辛变换 5:111  
 辛不变量 5:111  
 辛几何学 5:69  
 辛结构 5:112  
 辛矩阵 2:811  
 辛空间 5:111  
 辛联络 5:109  
 辛流形 5:111  
 辛配边理论 1:622  
 辛配极 1:860  
 辛配极群 4:217  
 辛平延 5:109  
 辛齐性空间 5:110  
 辛群 5:109  
 辛群(除环上  $n$  个变量的) 1:601  
 辛算子 5:111  
 辛微分同胚 2:76  
 辛向量场 5:110  
 辛形式 5:110  
 辛 Понтрягин 类 1:557  
 《新近几何学研究的比较考察》  
 (F. Klein 著) 2:385  
 新息过程 3:207;5:17  
 新息随机过程 5:17  
 信道 3:78  
 信道传输速率 5:255  
 信道(多方向的)\* 1:545  
 信道容量 1:633  
 信道(有反馈的)\* 1:544  
 信道(有限记忆的)\* 1:543  
 信道(有限状态的)\* 1:544  
 信号量 4:81  
 信念分布 2:466  
 信息 3:70  
 信息(包含于一个随机变量中关于  
 另一随机变量的) 3:70  
 信息不等式 4:495  
 信息部分(程序设计中语句的)  
 4:983  
 信息产生率 3:75  
 信息处理器 1:918  
 信息传输 3:78  
 信息传输速率 3:81  
 信息存储 3:590  
 信息的变换 3:590  
 信息的量化 3:75  
 信息发生器 1:919  
 信息复制 3:73  
 信息复制精确度 3:73  
 信息集 3:75;1:125  
 信息集(对策中的) 4:247  
 信息矩阵 3:74  
 信息距离 3:72  
 信息(控制系统的记忆中的)  
 1:827  
 信息类 1:125  
 信息离差 3:73  
 信息量 3:72  
 信息量(关于对象的) 1:128  
 信息量(观测中所含的) 4:996  
 信息率 2:388  
 信息率(二进制码的) 2:388  
 信息论 3:77  
 信息判别(微分对策中对手的)  
 2:148  
 信息区域(可控系统状态的)  
 3:1044  
 信息树 1:260  
 信息梯度 3:69  
 信息提取 4:820  
 信息稳定性 3:79  
 信息稳定序列(随机变量对的)  
 3:79  
 信息相关系数 3:72  
 信息向量 1:125  
 信息源 3:76  
 信息源(无记忆的) 3:76  
 星多边形 4:225  
 星共轭算子 2:163  
 星积 2:29  
 星算子 3:344  
 星五边形 4:225  
 星形-三角形方程 5:528  
 星形(单形的) 3:516  
 星形单叶函数 1:635;1:842  
 星形(点的) 2:454  
 星形(点关于集族的) 1:882;  
 4:535  
 星形多边形 4:224  
 星形仿紧拓扑空间 4:76  
 星形函数 4:982  
 星形函数(复变量的) 1:468  
 星形(函数元的)\* 4:982  
 星形函数( $\alpha$  阶的) 4:982  
 星形集 2:850;4:981  
 星形(集合关于集族的) 1:882  
 星形加细 1:882  
 星形加细(覆盖的) 4:76  
 星形加细(开覆盖的) 2:671  
 星形可数覆盖 4:76  
 星形内接集族 1:882  
 星形奇函数 1:635  
 星形区域 4:981  
 星形体 4:981  
 星形细分 4:227  
 星形细分(复形的) 5:59  
 星形细分(几何单纯复形的) 5:59  
 星形线 1:239  
 星形性半径 3:446  
 星形性极限 3:446  
 星形性界 3:446  
 星形性精确半径 3:446  
 星形性准则 3:446  
 星形有限复形 1:707  
 星形有限覆盖 1:882;4:76  
 星形正多边形 4:224  
 星形重分 4:164  
 星形  $n$  边形 4:548  
 星正规空间 3:738  
 行动规划 3:655  
 行动联盟 1:621;2:634  
 行进波法 5:265  
 行进波问题(关于反应扩散方程的)  
 4:507  
 行进管法 5:264  
 行为对策策略 4:247  
 形变 2:25  
 形变(保持共轭网的) 1:351



- 形变(表示的) 1:822  
 形变(代数簇的) 2:27  
 形变(代数几何学中的) 5:124  
 形变(代数学中的) 5:124  
**形变的基** 1:313  
 形变的主基(曲面的) 2:31  
**形变(等距的)\*** 2:30  
 形变(概形的) 2:27  
 形变(解析几何学中的) 5:124  
 形变(解析结构的) 2:25  
 形变(可微映射的) 4:866  
 形变(空间的子集的) - 2:30  
 形变理论(代数簇的奇点的)  
     4:857  
 形变(曲面的) 2:10;2:41  
**形变收缩核** 2:32  
 形变(微分几何学中的) 5:124  
 形变(问题的) 1:804  
 形变(亚纯微分方程的) 2:29  
 形变(运动基上的) 2:32  
**形变张量** 2:32  
 形变(真闭链的) 4:350  
**形变(主基上的)\*** 2:31  
 形式伴随的线性微分算子 3:475  
 形式变换(控制论系统的) 1:919  
 形式(标准伪群结构的) 4:370  
 形式不可解性(连续统假设的)  
     1:820  
 形式不可判定的命题 2:736;  
     5:357  
 形式参数(过程的) 4:318  
 形式程序设计语言(算法语言)  
     1:128  
 形式次数(表示的) 2:229  
 形式次数(平方可积表示的) 3:86  
**形式(代数结构的)\*** 2:509  
**形式(代数群的)\*** 2:508  
**形式导数** 2:510  
 形式的 Lagrange 伴随算子 5:459  
 形式等价的  $G$  结构 2:620  
 形式地不可解的逻辑公式 1:705  
 形式定义(对策的) 2:634  
 形式定义(分数的) 2:543  
 形式泛形变(概形的) 2:27  
 形式非线性表示 4:194  
 形式概形 4:351;5:135  
 形式刚性代数(在一代数类中的)  
     2:29  
 形式公理理论 3:716  
 形式化的演化关系 3:1030  
**形式化方法** 2:521  
**形式化语言** 2:521  
**形式积(三角级数的)\*** 2:519  
 形式计算定律不变性原则 3:1002  
 形式可驳公式(在给定逻辑公式系  
     统中的) 4:540  
 形式可积性 3:476  
 形式可判定的逻辑公式 4:540  
**形式理论** 5:157  
 形式流形 4:164  
 形式逻辑系统 3:716  
**形式幂级数** 2:518  
 形式幂级数代数 2:369  
 形式模概形(概形的) 2:27  
 形式谱(环的) 4:351  
**形式群** 2:510  
 形式群律 2:510  
 形式实域 4:11  
**形式数学分析** 2:517  
**形式算术** 1:229  
 形式体系化(微分对策的) 2:148  
 形式通用形变(概形的) 2:27  
 形式完全化(Noether 概形的)  
     4:351  
 形式维数(平方可积表示的) 3:86  
**形式文法** 2:750  
**形式系统** 2:520  
**形式系统的等价** 2:520  
 形式相容的形式系统 1:781  
 形式向量场 Lie 代数 3:404  
 形式形变(代数的) 2:29  
 形式形变(概形的) 2:27  
 形式隐函数分支 3:24  
 形式隐函数芽 3:24  
 形式有界级数 5:473  
**形式语言** 2:512  
**形式语言(机器可表示的)\***  
     2:513  
 形式语言(数学语言学中的)  
     2:512  
**形式语言与自动机** 2:513  
 形式语言(字母表上的) 2:514  
**形式主义** 2:520  
 形式主  $G$  对象 4:298  
 形式自伴微分算子 4:927  
 形式 Laurent 级数域 3:360  
 形数 1:232;4:226  
 形心 4:172  
 形心(代数的) 3:599  
 形心(三角形的) 3:706  
 形状算子 2:718  
**型** 2:508  
 型(半群的理想扩张的) 2:424  
 型(边界点的) 4:361  
 型(变换的 Lie 伪群) 4:368  
 型(代数系统的) 1:105  
 型(单演半群的) 3:816  
 型(单演半群元的) 3:816  
 型的可数性原理 4:547  
 型(典型积的) 1:462  
 型(对称 Riemann 空间的) 2:732  
 型(复丛的局部截面的) 4:361  
 型(割补术的) 3:832  
 型(关系的) 4:561  
 型(关系结构的) 3:786  
 型(链环的) 3:273  
 型(逻辑中的) 4:975;4:976  
 型(逻辑中的模型的) 3:785  
 型(纽结的) 3:844  
 型(偏微分方程的) 3:774  
 型(平面实代数曲线的) 4:170  
 型(强连续半群的) 5:39  
 型(算子半群的) 4:762  
 型(图形的) 1:469  
 型微分维数 2:184  
 型微分维数(不可约集的) 2:95  
 型域(点的) 5:443  
 型(整函数的) 2:362  
 型(Abel 群的) 1:13  
 型(Abel 群中的) 1:13  
 型(Bernstein 代数的) 2:696  
 性质(T)(对二次型的) 5:518  
 匈牙利方法 5:259  
 修饰(辩的) 1:433  
 修整变换 2:769  
**修正** 3:787  
 修正(复空间的) 2:412  
 修正(解析空间的) 3:787  
 修正(随机变量的) 5:5  
 修正(随机过程的) 5:5  
 虚变元 1:341;3:588

- 虚部(复数的) 1:713
- 虚部(有界线性算子的) 2:250
- 虚二次曲线 4:737
- 虚二次域 4:381
- 虚二次锥面 1:769
- 虚功原理 5:429
- 虚渐近网 5:430
- 虚拟区方法 2:645
- 虚数 3:13
- 虚数单位 3:13
- 虚速度原理 5:429
- 虚算术亏格 1:231
- 虚椭球面 2:342
- 虚椭圆 2:341
- 虚椭圆柱面 1:932;2:346
- 虚位移(完整系统中的) 2:891
- 虚位移原理 5:429
- 虚圆点 1:592
- 虚轴 1:713
- 虚轴(双曲线的) 2:941
- 需求函数 3:637
- 需求映射 3:637
- 序 4:4
- 序半群 4:13
- 序对 2:585
- 序对偶(Riesz 空间的) 4:661
- 序公理 3:1003
- 序关系 4:6;4:6
- 序关系(微分算子的) 2:277
- 序贯分析 4:787
- 序贯概率比检验 4:787
- 序贯决定法则 4:787
- 序广群 4:11
- 序和 4:14
- 序和(偏序集的) 4:14
- 序环 4:12
- 序集 4:14
- 序(集合上的) 4:6
- 序理想 4:661
- 序连续范数 1:739
- 序连续算子 4:661
- 序列 4:784
- 序列逼近法 4:789
- 序列的正则化 4:559
- 序列范畴 4:785
- 序列(范畴中的) 2:71
- 序列概形 4:791
- 序列函数系统 2:606
- 序列合成(算法的) 1:134
- 序列集(对策中的) 4:247
- 序列紧空间 4:790
- 序列紧拓扑空间 1:679
- 序列紧性 1:682
- 序列空间 4:790
- 序列零化带(半群的) 1:309
- 序列熵 3:725
- 序列(图中的) 2:760
- 序列完全局部凸拓扑向量空间 5:216
- 序列相关系数 4:791
- 序列序连续算子 4:661
- 序模 4:4
- 序模(Dedekind 整环上的) 4:6
- 序群 4:11
- 序收敛性 4:9;4:660;4:773
- 序数 4:15
- 序数递归函数类 1:229
- 序数和(半群的) 1:309
- 序数和(偏序集的) 4:15
- 序数积(集合的) 3:399
- 序数(在 von Neumann 意义下的) 2:506
- 序同态 4:11
- 序拓扑 4:9
- 序完全理想 1:691
- 序完全有序向量空间 4:772
- 序型 4:9
- 序有界集 1:430
- 序有界算子 1:430;4:661;4:774
- 序域 4:10
- 序域扩张 4:11
- 悬挂顶点 2:753
- 悬链环 2:411
- 悬链面 1:507
- 悬链线 1:507
- 旋度 1:906
- 旋度点 1:907
- 旋度(曲线的) 2:701
- 旋度(曲线坐标系中的) 3:335
- 旋度(向量场的) 3:126;5:407
- 旋度(柱面坐标系中的) 1:926
- 旋量 4:949
- 旋量表示 4:950
- 旋量场 2:468;4:952
- 旋量丛 4:951
- 旋量结构 4:951
- 旋量紧 Lie 群 3:427
- 旋量亏格(二次型的) 4:383
- 旋量群 4:950
- 旋量指标 4:244
- 旋轮类曲线 1:923
- 旋转 4:687
- 旋转标形 4:688
- 旋转槽谷 5:283
- 旋转程序 1:804
- 旋转(第二类的) 4:687
- 旋转(第一类的) 4:687
- 旋转定理 4:690
- 旋转度(向量场的)\* 4:689
- 旋转法 4:688
- 旋转法(带闸的) 4:688
- 旋转法(选择最优元的) 4:688
- 旋转反射( $(n-q)$ 平面上的) 4:687
- 旋转抛物坐标 4:75
- 旋转曲面 4:690
- 旋转群 4:25
- 旋转(绕唯一不动点的) 4:687
- 旋转(绕  $p$  平面的) 4:687
- 旋转数 4:689
- 旋转双曲面 2:951
- 旋转图 4:691
- 旋转图(无穷小形变的) 3:66
- 旋转向量 4:688
- 旋转指标定理 4:689
- 旋转中心 4:687
- 旋转轴 4:687
- 旋转锥 1:738
- 旋转锥面 1:769
- 旋转子群(三维空间中的) 1:822
- 迭代法的连续模拟 1:809
- 选举方案 1:893
- 选言三段论 5:32
- 选择 4:745
- 选择定理 4:745
- 选择法 3:7;3:822
- 选择公理 1:286
- 选择公理(分析中的) 2:518
- 选择(关于多值映射的) 3:853
- 选择函数 1:286
- 选择密文破译 1:895



选择明文破译 1:894  
 选择(偏序集中的) 4:102  
 选择序列 3:152  
 选择原则 5:537  
 选择子 4:746  
 穴 2:953  
 寻常点(曲面上的) 2:154  
 寻常点(曲线的) 4:6  
 寻常点(三角剖分了的二维流形的) 5:297  
 寻常点(微分方程的) 4:860  
 寻常平面束 5:122  
 寻常曲线 4:6  
 寻常直线束 5:122  
 寻常  $r$  重点(平面实代数曲线上的) 4:170  
 循环半群 1:923  
 循环逼近(周期变换的) 1:194  
 循环表示( $C^*$ 代数的) 4:249  
 循环不变量(理论程序设计中的) 5:156  
 循环差集 2:89  
 循环代数 2:625  
 循环(代数函数元的) 1:85  
 循环单位 1:924  
 循环道路 4:458  
 循环迭代法(关于线性代数方程的) 3:459  
 循环多胞形 4:230  
 循环合成 4:440  
 循环截线 1:462  
 循环类 1:664  
 循环模 1:922  
 循环区组设计 1:376  
 循环群 1:922  
 循环顺序 4:624  
 循环(算法语言中的) 1:129  
 循环算子 3:980  
 循环体(算法语言中的) 1:129  
 循环位移 4:195  
 循环无限小数 3:51  
 循环向量 5:340  
 循环旋转法 4:688  
 循环酉表示 5:340  
 循环指数(群的) 1:663  
 循环周期(第三类 Abel 积分的) 1:15

循环周期(解析微分的) 4:605  
 循环周期(Abel 微分的) 1:11  
 循环追赶(循环双搜索) 2:287  
 循环自动机 1:256  
 循环左模 1:922  
 循环坐标 1:922  
 循环坐标(力学中的) 2:809  
 循环 BCH 码 2:389  
 循环 Steiner 系 4:1029  
 循环(Turing 机的) 5:317  
 循序可测性(关于一个  $\sigma$  代数族的) 1:830  
 循序可测 Марков 过程 3:622  
 训练序列 4:109  
 驯顺箭图 4:459  
 驯顺结合代数 4:594  
 驯顺嵌入 5:129  
 驯顺嵌入(多面体的) 5:222  
 驯顺嵌入(紧统的) 5:222  
 驯顺嵌入(流形的) 5:222  
 驯顺拓扑嵌入的表征 5:222

## Y

压力(函数的) 5:192  
 压缩 1:821  
 压缩半群 1:823  
 压缩代数 2:695  
 压缩(类  $C_0$  的) 4:926  
 压缩算子 1:823  
 压缩线性算子(Крейн 空间中的) 3:294  
 压缩映射原理 1:820  
 芽 2:727  
 芽层(除子的) 1:873  
 芽层(解析向量场的) 2:104  
 芽层(解析映射的) 1:302  
 芽层(全纯函数的) 3:713  
 芽层(亚纯函数的) 3:713  
 芽的分类 4:866  
 芽(函数的) 2:727  
 芽(解析函数的) 1:161; 1:693  
 芽(解析集的) 2:727  
 芽(解析空间的) 3:181  
 芽(可微映射的) 4:864  
 芽(可微映射在一点的) 4:864

芽(亚纯函数的) 2:727  
 芽(映射的) 2:727  
 芽(约化复空间的) 3:180  
 哑 5:309  
 哑代数 5:310  
 哑记号 5:310  
 哑算子 5:310  
 哑演算 5:309  
 哑移位 5:310  
 雅典记数制 1:589  
 亚纯超越函数 5:241  
 亚纯单叶函数类  $\Sigma$  2:252  
 亚纯点(多复变量的解析函数的) 2:392  
 亚纯点(多复变量函数的) 4:856  
 亚纯函数 3:712  
 亚纯函数(单复变量的) 3:712  
 亚纯函数的亏值 2:23  
 亚纯函数的亏值(Valiron 意义下的) 2:23  
 亚纯函数的  $P$  序列 1:616  
 亚纯函数(多复变量的) 3:713  
 亚纯函数(在区域内的) 1:154  
 亚纯矩阵函数 1:178  
 亚纯微分(Riemann 曲面上的) 2:164  
 亚纯映射 3:714  
 亚纯映射(复空间的) 3:714  
 亚纯约化丛 5:181  
 亚交换群簇 5:400  
 亚紧拓扑空间 4:77  
 亚幂零群 4:220  
 亚声速流动 5:513  
 亚调和函数 4:219  
 亚椭圆型偏微分算子 1:425  
 亚椭圆型算子 4:364  
 亚椭圆型线性微分算子 3:476  
 亚循环群 3:717  
 亚 Abel 的 Lie 代数 3:420  
 亚 Abel 恒等式 4:157  
 亚 Abel 群 3:715  
 湮没算子 1:183  
 延迟常微分方程 2:138  
 延迟(功能元的) 2:73  
 延迟(功能元图的) 2:73  
 延迟(功能元图中链的) 2:73  
 延迟器 1:277

- 延迟趋向于极限 4:619  
 延迟微分方程 2:139;2:600  
 延拓(几何对象场的) 2:712  
 延拓(解的) 4:347  
 延拓(开拓,扩张)( $G$ 空间的)  
     3:721  
 延拓(微分方程解的)\* 4:347  
 延拓(映射的) 3:609  
 延拓( $r$ 阶偏微分方程组的) 4:98  
 延续集(状态空间中的) 1:833  
 严格凹函数 1:843  
 严格遍历性 5:35  
 严格遍历性(测度的) 2:134  
 严格单调函数 3:820  
 严格单群 4:828  
 严格等价多项式矩阵 5:123  
 严格等价矩阵束 5:123  
 严格递减函数 2:20  
 严格递减序列 2:21  
 严格递增函数 3:32  
 严格递增序列 3:32  
 严格点(直纹曲面的) 4:698  
 严格多重次调和定义函数(区域的)  
     1:326  
 严格多重下调和函数 4:187  
 严格非唯一性定理(关于 Monge-  
     Ampère 方程的) 3:810  
 严格负元(序广群中的) 4:12  
 严格归纳极限 3:545  
 严格函数完全泛代数 5:349  
 严格极大点 3:689  
 严格极小点 3:689  
 严格局部环 2:851  
 严格可解对策 3:932  
 严格控制策略 2:278  
 严格迷向子空间 1:860  
 严格幂级数环 5:135  
 严格偏序 4:12  
 严格偏序广群 4:12  
 严格强制形式 1:637  
 严格切触变换 1:802  
 严格切触结构 1:801  
 严格切触流形 1:802  
 严格切触无穷小变换 1:802  
 严格商对象 4:462  
 严格双曲型多项式 2:945  
 严格双曲型偏微分方程组 3:486  
 严格同构(形式群律的) 2:511  
 严格凸范数 4:238  
 严格凸函数 1:416;1:843  
 严格凸空间 4:884  
 严格凸 Banach 空间 1:306  
 严格唯一性定理(关于 Monge-  
     Ampère 方程的) 3:810  
 严格伪凸的区域(在一点上)  
     3:393  
 严格伪凸区域 2:277  
 严格稳定分布 4:977  
 严格下调和函数 5:63  
 严格线(直纹曲面的) 4:698  
 严格辛齐性空间 5:110  
 严格序 4:6  
 严格遗传根 4:471  
 严格意义的包络级数 2:370  
 严格蕴涵 5:32  
 严格蕴涵演算 5:32  
 严格正序列 4:253  
 严格正元(序广群中的) 4:12  
 严格正则环 4:551  
 严格 Hensel 环 2:851  
 严格  $k$  传递群 5:251  
 严格 Levi 伪凸区域 2:277  
 严格 Levi 伪凸性(有一点上)  
     3:393  
 严格  $p$  伪凸函数 4:360  
 严格( $p, q$ )凸-凹映射 4:360  
 严格 1 凸复空间 2:891  
 言语 5:40  
 岩澤不变量 5:137  
 岩澤分解 3:208  
 岩澤流形 4:895  
 沿动力系统的流的微分法 2:170  
 衍射(绕射)的数学理论 2:172  
 衍射问题(偏微分方程的) 2:119  
 演算 1:455  
 演绎定理 2:22  
 演绎法则(生成文法中的) 3:643  
 演绎法则(系统  $S$  的) 1:288  
 演绎完全等式系统 1:75  
 演绎系统 1:455;2:520  
 演绎型算法语言 1:130  
 验收控制的工作特征 4:989  
 验证 5:421  
 验证问题 5:151  
 燕尾 5:165  
 鞅 3:629  
 鞅变换 3:630  
 鞅表示定理 1:833  
 杨(振宁)-Baxter 方程 5:528  
 杨(振宁)-Baxter 模型 3:277  
 杨(振宁)-Mills 场 5:529  
 杨(振宁)-Mills 方程 5:529  
 氧气扩散-消耗方程 2:120  
 样本 4:708  
 样本超越系数 2:414  
 样本点 4:711  
 样本方差 4:711  
 样本分布 2:356  
 样本分位数 4:711  
 样本函数 4:708  
 样本回归系数 4:542  
 样本极差 4:8;4:489  
 样本极大值 4:8  
 样本极小值 4:8  
 样本矩 4:711  
 样本均值 4:708  
 样本空间 4:711  
 样本路径 4:708  
 样本偏相关系数 4:96  
 样本区间 4:708  
 样本区组 4:708  
 样本束 4:708  
 样本特征 4:708  
 样本相关系数 1:864  
 样本中位数 4:710  
 样本自相关 4:791  
 样本自相关函数 4:932  
 样条 4:952  
 样条逼近 4:953  
 样条逼近的线性方法 4:954  
 样条插值 4:955  
 样条配置 2:561  
 么半群 3:817  
 么本原置换群 4:291  
 么(单)Schur 环 4:727  
 么模 5:339  
 么模变换 5:333  
 么模格 5:332  
 么模矩阵 5:333  
 么模群 5:332  
 么模群(除环上的  $n$  个变元的)



- 1:601  
 么模射影群 4:337  
 么模同余矩阵 4:744  
 么模同余(矩阵的) 4:744  
 么模线性变换 5:333  
 么模向量 5:332  
 么模元 5:332  
 么模正规化 2:545  
 么拟群 3:564  
 么拟群的核 3:254  
 么拟群(解析的)\* 3:565  
 么元的除子 5:337  
 腰(梯形的) 5:264  
 腰椭圆 2:741  
 腰椭圆(单叶双曲面的) 2:951  
 要素(数理经济学中的) 3:636  
 野水算子 3:162  
 叶的成长特征(叶状结构的)  
   2:504  
 叶(叶状结构的) 2:503  
 叶状结构 2:503  
 叶状结构(解析簇的) 2:961  
 叶状结构(有限维流形上的)  
   2:503  
 叶状下配边 1:402  
 曳物线 5:238  
 一般常微分算子 2:166  
 一般代数 5:126  
 一般代数(学) 2:666  
 一般单值化定理(对 Riemann 曲面的) 4:636  
 一般导数 4:733  
 一般地具有某性质 4:202  
 一般递归函数 2:669  
 一般递归集(自然数的) 2:17  
 一般递归算子 2:669  
 一般点(对应于点格的框架的)  
   5:443  
 一般归纳定义 4:349  
 一般环算法 1:396  
 一般混合 Бицадзе 问题 3:775  
 一般价(张量的) 5:145  
 一般结合律方程 4:429  
 一般可解的逻辑公式 2:472  
 一般框架(点格的) 5:443  
 一般密码体制 1:893  
 一般偏微分算子 2:166  
 一般随机滤波问题 5:19  
 一般拓扑学 2:670  
 一般微分群( $k$  阶的) 3:421  
 一般位置 2:667  
 一般位置点 4:202  
 一般位置对策 2:635  
 一般系数定理(Jenkins 定理)  
   3:223;4:380;5:347  
 一般系统理论 5:124  
 一般线性模型(回归分析的)  
   4:543  
 一般线性群 2:667  
 一般线性群(除环上  $n$  个变量的)  
   1:601  
 一般线性秩(环的) 4:978  
 一般型代数曲面 2:672  
 一般旋轮线 4:693  
 一般余辛张量 3:401  
 一般正交级数 5:274  
 一般正弦曲线 4:868  
 一般指数 3:470;4:847  
 一般秩(群的) 4:489  
 一般中间性方程 4:430  
 一般组合格式 1:664  
 一般组合格式(交换对称情形)  
   1:664  
 一般组合格式(交换非对称情形)  
   1:664  
 一般坐标系 1:488  
 一般 Denjoy 积分(广义 Denjoy 积分) 2:43  
 一般 Dirichlet 级数 2:217  
 一般 Dirichlet 级数(具有正指数的)  
   2:217  
 一般 Galileo 变换 2:623  
 一般 Hausdorff 变换 2:843  
 一般 Lie 代数 3:404  
 一般 Lie 容许括号 3:401  
 一般 Lie 容许张量 3:401  
 一般 Lorentz 群 3:567  
 一般 Riccati 方程 4:616  
 一般 Riemann - Roch 定理 1:625  
 一般 Stokes 定理 3:126  
 一次代数线束 5:123  
 一次用密码本 1:894  
 一个半群通过另一半群的扩张  
   2:424  
 一阶边值问题 2:111  
 一阶变分 2:490  
 一阶变分的方程 5:391  
 一阶变分(泛函的) 5:375  
 一阶变分(集合的) 5:376  
 一阶差分 2:472  
 一阶常微分方程 2:240  
 一阶代数导数 1:482  
 一阶导数(函数的) 2:100  
 (一阶)等差数列 1:232  
 一阶段验收控制方案 4:989  
 一阶对称导数 4:733  
 一阶刚性 4:669  
 一阶函数演算 4:285  
 一阶极性 4:603  
 一阶结构 1:108  
 一阶理论 3:562  
 一阶偏导数(多元函数的) 2:101;  
   4:96;4:97  
 一阶偏微分方程 2:127  
 一阶上同调运算 1:655  
 一阶微分参数 2:168  
 一阶微分(函数的) 2:101  
 一阶谓词演算 4:285  
 一阶问题 2:924  
 一阶线性(耦合)常微分方程组  
   2:107  
 一阶延拓几何对象(几何对象场的)  
   2:712  
 一阶语言 3:784  
 一阶语言模型的抽述集 3:784  
 一阶  $\epsilon$  邻近性条件 5:458  
 一维多边形 4:223  
 一维连续统 3:455  
 一维流形 3:1016  
 一维奇异积分算子 3:112  
 一维算子 5:372  
 一维随机过程 5:13  
 一维网络模型 3:894  
 一维问题(大范围变分学中的)  
   5:385  
 一维叶状结构 3:268  
 一维最优化 3:687  
 一一对应 3:1019  
 一一态射(范畴中的) 1:362  
 一一映射 1:359  
 一一映射(由 Bendixson 球面生成

- 的) 1:324
- 一元变元 3:781
- 一元代数 5:311
- 一元代数运算 1:100
- 一元对象 4:800
- 一元谓词演算 3:558
- 一元运算 3:875;3:1021
- 一致逼近 5:320
- 一致闭 Riesz 空间 5:532
- 一致遍历定理 3:1028
- 一致差分格式 2:86
- 一致超滤子 5:308
- 一致代数 5:319
- 一致殆周期轨道 2:252
- 一致殆周期函数 1:138;1:383
- 一致等度收敛级数 2:376
- 一致等价度量 3:730
- 一致度量 3:723
- 一致度量(Riesz 空间中的) 5:532
- 一致分布(均匀分布)\* 5:322
- 一致分布序列 2:255
- 一致分布序列(模 1 的) 2:255
- 一致覆盖 4:355
- 一致光滑 Banach 空间 1:306
- 一致归纳维数 5:325
- 一致恒等式(半群簇中的) 5:401
- 一致化集 2:60
- 一致化问题(描述集合论中的) 2:60
- 一致化元 5:329
- 一致基 1:312
- 一致极小序列(Banach 空间元素的) 1:308
- 一致较好决策规则 4:990
- 一致结构 5:323;5:327
- 一致结构(自动机理论中的) 1:273
- 一致解析推导(集合上的) 2:64
- 一致解析运算(集合上的) 2:63
- 一致近性空间 5:205
- 一致空间 5:323
- 一致空间的完全化\* 1:706
- 一致离散子空间 2:230
- 一致连续算子 1:818
- 一致连续性 5:321
- 一致连续性(拓扑群上的) 5:321
- 一致连续映射 5:203
- 一致抛物型偏微分方程 3:501
- 一致奇异的奇异积分 4:849
- 一致嵌入 5:324
- 一致收敛 5:321
- 一致收敛代数 1:71
- 一致收敛的点(级数的) 5:330
- 一致收敛(函数序列的) 5:321
- 一致收敛级数 5:329
- 一致收敛级数的性质 5:330
- 一致收敛拓扑 5:225
- 一致收敛拓扑(弱有界子集上的) 5:39
- 一致收敛无穷积 3:57
- 一致收敛序列 5:329
- 一致收敛序列的性质 5:321
- 一致收敛(映射序列的) 5:321
- 一致收敛(质量空间上的) 5:321
- 一致双曲型偏微分方程 3:487
- 一致凸光滑 Banach 空间 1:306
- 一致凸性模 1:306
- 一致凸 Banach 空间 1:306
- 一致凸 Banach 空间(在每个方向上) 1:567
- 一致椭圆型偏微分方程 2:352
- 一致椭圆型偏微分算子 1:425
- 一致椭圆型线性偏微分方程 2:111
- 一致拓扑 5:327
- 一致稳定解 3:497
- 一致稳定线性常微分方程组 3:497
- 一致稳定性 5:326
- 一致性 1:39
- 一致性质(邻近空间的) 4:355
- 一致有界定理 5:320
- 一致有界函数族 5:320
- 一致有界性 5:320
- 一致有界映射族 5:320
- 一致有界原理 1:308;5:320
- 一致子空间 5:324
- 一致子群 5:326
- 一致最大功效检验 5:331
- 一致 Boole 代数 1:391
- 一致 Hölder 条件 2:887
- 一致 Poisson 稳定轨道 4:520
- 一致  $y$  稳定性(关于  $t$  的) 4:964
- 一致 Ляпунов 数 3:580
- 一致 Ляпунов 指数 3:580
- 伊代尔 3:4
- 伊代尔类群 1:596;3:5
- 伊代尔群 1:40;3:5
- 伊代尔群特征标(在点上非分歧的) 5:356
- 伊甸园 1:274
- 伊甸园问题 1:274
- 伊藤 - Segal - Wick 映射 2:502
- 伊藤 - Wick - Segal 同构 5:499
- 伊藤定理 1:830
- 伊藤公式 3:206
- 伊藤过程 3:207
- 伊藤随机积分 5:3;5:7;5:31
- 伊藤随机微分 5:3
- 伊藤随机微分方程 2:176
- 伊藤演算 1:456
- 依变差收敛 1:837
- 依变差收敛(概率测度的) 2:262
- 依变差收敛(概率分布的) 2:262
- 依测度收敛 1:836
- 依范数收敛 1:836
- 依分布收敛 1:836
- 依概率收敛 1:836
- 依概率有界性 5:2
- 依赖性(微分方程组解的性质对参数的) 1:281;4:398
- 依赖性(自治系统解对参数的) 1:281
- 依赖于参数的积分 4:84
- 依赖于机器的程序最优化变换 4:322
- 依赖域 1:521;2:277
- 依赖域(微分方程解的) 1:871
- 依赖域(Cauchy 问题点的) 1:521
- 仪器误差 4:319
- 移位 4:807
- 移位变换 5:94
- 移位参数 4:810
- 移位动力系统 4:809
- 移位(加性函数由向量的) 4:803
- 移位算子 4:810
- 移位算子(关于根系的) 4:685
- 移位(QR 算法中的) 3:204
- 遗传不可分解的连续统 2:852; 3:33
- 遗传不可分解的连续统 2:852



- 遗传不可判定理论 2:392  
遗传不连通拓扑空间 1:780;  
2:249;5:234  
遗传不连通性 1:780  
**遗传代数 2:695**  
遗传的集类 3:700  
遗传仿紧拓扑空间 4:76  
遗传根 4:471;5:230  
遗传环 4:459  
遗传群类 1:132  
遗传商映射 4:372  
遗传正规拓扑空间 3:988;5:235  
遗传最终渊藪 5:208  
遗传 $\sigma$ 环 3:700  
已知明文破译 1:894  
**以概率1收敛 1:841**  
义务维修 4:576  
异步算法 4:81  
异步自动机 1:272  
异常上同调论 2:676  
异方差性 2:917  
异末元素原则 4:10  
异首元素原则 4:10  
**异宿点 2:860**  
异宿解 2:860  
异态射 4:258  
异型恒等式(半群簇中的) 5:401  
**译码 2:19**  
译码错误概率 2:386  
译码器 2:389  
译码问题 2:388  
**诣零半群 3:911**  
**诣零代数 3:910**  
**诣零根 3:912;4:472;4:1027**  
**诣零根(Lie代数的) 3:413**  
**诣零根(Малыцев代数的) 3:598**  
**诣零理想 3:911**  
**诣零流 3:911**  
**诣零流形 3:911**  
**诣零群 3:911**  
诣零子集(环的) 3:911  
**诣零Lie代数 3:412**  
意义的合成原理 2:522  
因果性 4:408  
**因式 2:269**  
因式(多项式的) 2:269  
因式分解(函数的) 3:97  
因式分解(态射的) 3:12  
**因数 2:269**  
因数(乘法中的) 3:860  
**因子 2:269**  
**因子 2:445**  
**因子表示 2:447**  
因子(次正规子群列的) 5:60;  
5:66  
因子的合取(公式中的) 1:73  
**因子分解 2:447**  
因子分解(程序最优化变换的)  
4:322  
**因子分解定理 2:448**  
因子分解定理(对概率分布族的)  
5:70  
因子分解定理(拓扑空间的)  
1:681  
因子分解方程 5:528  
**因子分解恒等式 2:448**  
因子分解(图论中的) 2:447  
因子分解(在带形内解析的函数的)  
5:505  
因子分解准则 2:448  
**因子分析 2:446**  
因子化差分算子 2:80  
因子化算子 2:235  
因子集(群扩张的) 2:423  
因子空间 3:613  
因子空间的降维问题 3:847  
因子(理想列的) 3:4  
因子(群的合成列的) 1:723  
因子(图的) 2:447  
因子维数(余维数)(向量子空间的)  
1:630  
因子系 1:444  
因子映射 3:613  
因子映射(分量映射) 3:609  
因子载荷 2:446  
因子(正规列的) 3:987  
因子(子群列中的) 5:60  
因子(子群系统的) 5:61  
因子组(结合环的) 1:889  
因子( $I_n$ 型的) 5:442  
荫度 2:448  
荫度(图的) 2:759  
音叉形分歧 4:694  
音位 5:41  
引进参数法 3:321  
**引力 2:765**  
**引力理论 2:767**  
引力质量 3:631  
引入规则 2:697  
引式(微分多项式的) 2:98  
**隐函数 3:22**  
**隐函数(代数几何学中的) 3:24**  
隐函数定理 3:22  
隐函数定理(对局部环的) 2:851  
隐式差分方程 1:33  
隐式多步法 1:33  
隐式格式 1:197  
隐式数值方法 2:136  
隐式 Störmer 公式 2:137  
**隐算子 3:25**  
隐义全称公式 1:110  
隐障碍 1:834  
印度-阿拉伯数系 2:18  
印度数字 1:590  
应变 2:549  
应变变量(函数的) 2:586  
应变张量 2:33  
应力 2:549  
应力场的复数表示 2:331  
应力函数 1:358  
应力集中问题(在各向同性的板  
中孔边的) 2:333  
应力集中问题(在各向异性的板  
中孔边的) 2:333  
应力强度因子 2:550  
**应力张量 5:32**  
应用程序设计 4:323  
应用程序员  
应用非扩散模型的控制 1:834  
应用公设 4:349  
应用性的词位出现 1:129  
应用演算 3:561  
赢家 1:855  
赢家联盟 1:855  
影响函数 4:679  
**影响域 2:277**  
影响域(常微分方程组的稳定根的)  
2:141  
影响域(点的) 2:277  
影响域(Cauchy数据的) 1:521  
**映射 3:609**

- 映射(把空间偶 $(X, A)$ 映入类似空间偶的) 2:918  
 映射(从一集合到一集合中的) 3:609  
 映射(到集合上的) 3:609  
 映射(到集合中的) 3:609  
 映射的变差 5:376  
 映射的截口 4:739  
 映射的图象 2:760  
 映射的微分法 2:171  
 映射的主网 3:612  
 映射的 I 阶值 1:455  
 映射度 2:38  
 映射法 3:611  
 映射(关于自同构半线性的) 4:770  
 映射函数 3:719  
 映射空间 5:213  
 映射空间(拓扑的)\* 4:901  
 映射类 3:612  
 映射类群 4:641  
 映射(实现覆盖的) 4:77  
 映射(拓扑向量空间之间的) 5:214  
 映射维数(拓扑空间的) 4:978  
 映射(线性系所定义的) 3:506  
 映射(相对于时间推移为共变的) 4:416  
 映射(在零点小的) 2:171  
 映射(在一点连续的) 3:440; 5:199  
 映射柱 3:611  
 映射柱(谱映射的) 4:935  
 映射锥 1:738; 3:610  
 映射锥构造法 3:610  
 映射锥(谱映射的) 4:935  
 硬币投掷 1:893  
 硬 Lefschetz 定理 3:381  
 \永久绝热不变量 1:41  
 永久求和法 4:556  
 永田定理 1:691; 2:272  
 永田环 2:411  
 优层 2:470  
 优化闭曲线的区域 4:655  
 优化集(有序向量空间中的) 4:772  
 优化(实数组的) 3:595  
 优化序 3:595  
 优化映射 4:655  
 优化(有序向量空间中集合的) 4:773  
 优环 2:411  
 优势局部环 5:365  
 优势(局部环的) 5:365  
 优势(偏好)(对策论中的) 1:855  
 优拓扑 1:687  
 优先定义(Algol 语言中的) 1:118  
 优先方法 4:303  
 优先关系 4:324  
 优子集(偏序集的) 5:365  
 《忧郁》(Dürer 著) 3:594  
 游荡点 5:449  
 游荡集 5:449  
 友典范形式(矩阵的) 3:979  
 友矩阵 3:978  
 友算子 3:295  
 友形式矩阵 3:673  
 友型矩阵(友形式矩阵) 1:563; 3:673  
 有补格 3:359  
 有补模 4:888  
 有补模格 3:793  
 有初始结构的范畴 5:205  
 有初始结构的具体范畴 5:206  
 有反馈信道 1:544  
 有根树 5:266  
 有后效模型 4:221  
 有监督学习 4:110  
 有教师学习 4:109  
 有界逼近性质 3:997  
 有界逼近性质(算子的) 3:996  
 有界变差 5:374  
 有界变差测度 4:920  
 有界变差函数 2:590  
 有界点有限基 1:312  
 有界定理 3:578  
 有界非线性算子 3:947  
 有界分次对象 1:710  
 有界复形 2:54  
 有界函数 2:587  
 有界函数(允许无穷小上界的) 4:964  
 有界畸变映射 4:421  
 有界集 1:430  
 有界集(拓扑向量空间中的) 5:211  
 有界紧集 1:430  
 有界局部有限基 1:312  
 有界可和性域 5:72  
 有界量词 4:293  
 有界平均振动函数(BMO 函数) 1:516; 2:818  
 有界区域 2:276  
 有界曲率的二维流形 5:297  
 有界曲率空间 4:649  
 有界收敛拓扑 3:1029  
 有界算法问题 1:127  
 有界算子 1:430  
 有界算子(一对空间的) 3:141  
 有界特征的函数类 1:416  
 有界特征函数 2:589  
 有界完全分布族 2:262  
 有界完全基 1:318  
 有界线性算子 3:493, 1026  
 有界线性算子(允许等价正则化的) 4:852  
 有界线性算子(允许双边正则化的) 4:852  
 有界线性算子(允许右正则化的) 4:852  
 有界线性算子(允许左正则化的) 4:852  
 有界向量测度 5:415  
 有界型函数 2:590  
 有界型局部凸拓扑向量空间 5:213  
 有界型空间 3:81  
 有界性定理(伪微分算子的) 4:363  
 有界性条件(高的) 4:158  
 有界性准则(线性拓扑空间中集合的) 4:661  
 有界真假值表可归约性 4:528  
 有界 Berel 集环 5:364  
 有界 Bernoulli 随机游动 1:332  
 有界 Burnside 问题 1:451  
 有界 Vitali 变差 5:433  
 有矩壳体理论 4:807  
 有理逼近 1:150  
 有理逼近定理 4:702  
 有理变换 2:516



- 有理表示** 4:499  
**有理簇** 4:502  
 有理代数数 1:169  
 有理等价代数闭链 1:81  
 有理等价泛代数簇 5:402  
 有理点 2:196  
 有理点(仿射代数簇的) 1:60  
 有理点( $k$  概形的) 4:719  
 有理二重点 4:501  
 有理分式 4:499  
**有理函数** 4:496  
 有理函数(代数簇上的) 4:497  
 有理函数域 4:169  
 有理函数域( $n$  元的) 1:86  
 有理函数(最佳逼近的) 1:210  
 有理解(不定 Diophantus 方程的) 2:196  
**有理奇点** 4:501  
 有理区域 2:467  
**有理曲面** 4:502  
**有理曲线** 4:496  
 有理三角和 5:276  
**有理数** 4:498  
 有理数逼近代数数的问题 2:192  
**有理同伦论** 4:498  
 有理形式幂级数 4:518  
**有理性定理** 4:503  
 有理性定理(艾达尔上同调中的) 2:393  
 有理性准则 4:502  
**有理映射** 4:498  
 有理正规形式(矩阵的) 3:978  
 有理直纹曲面 4:698  
 有理  $G$  模 4:499  
 有理  $l$  进上同调 3:314  
 有理  $p$  进数 4:57  
 有利于事件的结果 4:313  
 有目标的动力系统 1:922  
**有偏估计量** 1:351  
 有穷论证明 1:289  
 有色辫 1:431  
 有限变差 5:374  
 有限表现半群 4:767  
 有限表现代数 2:25  
 有限表现模 3:796  
**有限表现群** 2:483  
 有限表现(群的) 4:287  
 有限测度 3:699;3:706  
 有限层循环分歧覆叠(链环的) 3:275  
**有限差分** 2:472  
 有限差分法 1:32;2:85;3:722;4:70  
 有限差分法(数值求解 Poisson 方程的) 4:207  
 有限差分方程 2:474;3:1030  
 有限差分格式 2:645  
**有限差分演算** 2:472  
 有限差( $k$  阶的) 1:808  
**有限单群** 4:827  
**有限到一的映射** 2:481  
 有限对称群 5:100  
 有限非合作对策 2:635  
 有限分次对象 1:710  
 有限复形 1:707  
 有限格元 1:815  
 有限公理化类(语言模型的) 1:293  
 有限广义四角形( $(s, t)$  阶的) 4:378  
 有限和公理 2:183  
 有限迹算子 3:995  
 有限迹( $C^*$  代数上的) 5:238  
 有限迹(von Neumann 代数上的) 5:441  
 有限积分变换 3:121  
 有限基的群簇 5:400  
 有限极小化算子 4:293  
 有限几何 1:662;2:716  
 有限几何复形 1:708;2:708  
**有限记忆随机点过程** 5:12  
**有限记忆信道** 1:543  
 有限加性测度 1:35;3:699  
 有限加性集函数 1:35;3:698  
 有限加性 Gauss 测度 5:489  
 有限间隙位势 3:290  
 有限交错群 5:100  
 有限交性质 1:458;1:682;4:111  
 有限角问题(断层照相法中的) 5:185  
 有限决定的芽 4:866  
**有限决定函数** 2:482  
 有限决定芽 5:165  
 有限可逼近半群 4:602  
 有限可逼近代数系统 1:110  
 有限可逼近模态逻辑系统 3:782  
 有限可逼近群 4:602  
 有限可逼近中间逻辑 3:131  
 有限可表现代数 4:720  
 有限可表现理想 1:641  
 有限可表现模 1:641  
 有限可表现态射(概形的) 4:720  
 有限可测分解(关于自同构不变的测度空间的) 1:194  
 有限可定义拟簇 1:111  
 有限可分解的积分核(可分核) 3:102  
 有限可公理化代数系统 1:110  
 有限可基的代数系统簇 1:112  
 有限可解的逻辑公式 2:472  
 有限可验证的逻辑公式 2:472  
**有限可验证性** 2:471  
 有限离散主序环 3:301  
 有限理论 5:349  
 有限连通域 2:275;3:866  
 有限临界点(二次微分的) 4:380  
 有限幂等元(Baer 环的) 4:551  
 有限描述(计算模型的特例的) 3:664  
 有限平面 4:168  
 有限区域 2:276  
 有限确定的 Banach 解析集 1:302  
 有限确定性自动机 2:515  
**有限群** 2:478  
**有限群表示** 2:479  
**有限群概形** 2:480  
 有限三角和 5:274  
 有限删除 1:107  
 有限射影平面 4:340  
 有限射影直线 4:345  
 有限生成半群 4:767  
 有限生成表现(群的) 4:287  
 有限生成的微分域扩张 2:420  
 有限生成对象(范畴中的) 4:875  
 有限生成模 3:795  
 有限生成模型(逻辑中的) 3:605  
**有限生成群** 2:482  
 有限生成域扩张 2:422  
 有限生成域(在一个子域上的) 2:467  
 有限生成 Abel 群的基本定理

- 1:13  
 有限生成 Banach 代数 1:674  
 有限时间浸渐不变量 1:41  
 有限识别器 1:276  
**有限数学 2:481**  
 有限态射 1:57  
 有限态射(概形的) 4:351;4:719  
 有限特征标( $C^*$  代数上的)  
 1:551  
 有限投射谱 4:328  
 有限投影(属于 von Neumann 代数的) 5:441  
 有限凸对策 1:845  
**有限维表示 2:477**  
 有限维表示(连通半单 Lie 群的)  
 2:477  
 有限维表示(Lie 代数的) 4:589  
 有限维不定度规空间 4:904  
 有限维代数 4:673  
 有限维分布(随机过程的) 3:227;  
 4:316  
 有限维复形 1:707  
**有限维结合代数 2:476**  
 有限维滤波 5:19  
 有限维拓扑空间 2:178  
 有限维线性算子 3:493  
 有限维向量空间 5:418  
 有限维酉表示 2:477  
 有限维 Banach 空间的基本定理  
 1:307  
 有限位置对策 4:247  
 有限下级亚纯函数亏量的性质  
 5:367  
 有限线性群 3:484  
 有限相关表现(群的) 4:287  
 有限形式(图减缩定理的) 3:765  
 有限型层 1:641  
 有限型代数 4:720  
 有限型集 2:722  
 有限型区域 4:361  
 有限型伪凸域 1:326  
**有限性定理 2:483**  
 有限性定理(代数几何学中的)  
 2:483  
 有限性定理(关于在真态射下模层的)  
 4:351  
 有限性定理(解析空间理论中的)  
 2:484  
 有限性定理(解析映射的) 1:165  
 有限性条件(半群的) 4:766  
 有限性条件(群论中的) 2:790  
**有限性问题 2:471**  
 有限性展形(扇) 2:450  
 有限序贯机器映射 2:482  
 有限序列 4:784  
 有限一阶差分 2:472  
 有限因子 5:442  
 有限映射 2:481  
**有限域 2:477**  
 有限域扩张 2:422;2:627  
 有限域(Galois 域) 2:477;2:625  
 有限元法 2:81;3:468;4:954;  
 5:257  
 有限元方法 2:352  
**有限增量公式 2:481**  
 有限支集函数 1:316  
 有限直线 5:28  
 有限秩(半群的) 4:767  
 有限秩算子 3:994  
 有限置换群 4:131  
**有限主义 2:484**  
 有限转换器 1:276  
 有限状态文法 2:514;2:751  
 有限状态信道 1:544  
**有限状态信道 1:544**  
 有限状态序列函数 4:573  
 有限状态语言 2:514  
 有限字母表 1:724  
**有限自动机 1:275**  
 有限 Baer 环 4:551  
 有限 Coxeter 群 1:884  
 有限  $G$  集 3:312  
 有限 Möbius 平面 3:780  
 有限 Newton 级数 3:903  
 有限 Radon 变换 5:186  
**有限 Riemann 曲面 2:481**  
 有限 Vitali 变差 5:433  
 有限 von Neumann 代数 5:441  
 有限  $\epsilon$  链 1:819  
 有向包含族(拓扑空间中集合的)  
 1:17  
 有向泛函 2:207  
**有向泛函方法 2:206**  
 有向极限 3:443  
**有向集 2:206**  
 有向集族 1:682  
 有向偏序集 1:682  
 有向曲面(模型曲面的) 3:838  
 有向圈(围道) 2:761  
 有向树 5:266  
 有向体积 5:439  
 有向图 2:752;2:760  
 有向网络 3:893  
**有向序 2:206**  
 有向 Coxeter 图 4:683  
 有效除子 1:78;2:270  
 有效除子理想 2:275  
 有效的 Diophantus 逼近问题  
 2:190  
 有效的 Weil 除子 2:270  
 有效定义域(函数的) 5:79  
**有效估计量 2:321**  
 有效化(Diophantus 几何中定性定  
 理的) 2:200  
**有效检验 2:321**  
 有效亏格(单行曲线的) 5:319  
 有效频率(脉冲传输的) 5:301  
 有效生产 3:636  
 有效生产方法 3:636  
**有效数字 4:823**  
 有效数字位数 4:694  
 有效统计估计量 5:312  
 有效形式形变(概形的) 2:27  
 有效性准则 4:302  
 有效性(Shapley 值的) 4:801  
 有效右  $G$  空间 2:618  
 有效主题范畴 3:837  
 有效作用(Lie 群的) 3:436  
 有效 Lie 变换群 3:436  
 有心闭集系 1:685  
 有心集  
**有心集族 1:539**  
 有心 Gauss 测度 1:562  
 有序单纯复形 4:834  
 有序多元属性 3:845  
 有序射影直线 4:345  
 有序拓扑空间 1:849;2:671  
 有序文法 2:747  
 有序向量空间 4:772  
 有序自同构群( $\Omega$  系统的) 1:109  
 有序  $n$  样本 1:234



- 有序  $T_2$  紧统 1:680
- 有余子空间(Banach 空间中的) 1:307
- 有噪声决斗 2:300
- 有秩序性(概率过程的) 2:335
- 酉半群 1:823
- 酉半相似 1:823
- 酉变换 5:343
- 酉表示 5:340
- 酉等价表示 5:338
- 酉等价算子 5:338
- 酉等价(线性算子的) 3:492
- 酉反射 4:536
- 酉矩阵 5:339
- 酉空间 5:343
- 酉配边 1:622
- 酉配边理论 1:622
- 酉配极群 4:217
- 酉膨胀(压缩半群的) 1:823
- 酉群 5:338
- 酉群表示 1:141
- 酉群(除环上  $n$  个变元的关于半双线性型的) 1:601
- 酉群(相对于半线性型的) 5:338
- 酉群(与 Hermite 形式相伴的) 2:856
- 酉射影表示(群的) 4:342
- 酉算子 5:339
- 酉特征标(局部紧 Abel 群的) 2:823
- 酉下配边 1:402
- 酉线性变换 3:513
- 酉线性算子(Крейн 空间中的) 3:294
- 酉向量空间 2:858
- 酉辛群 5:110
- 酉映射 5:343
- 酉诱导表示 3:46
- 酉元 1:454
- 酉元(对合代数中的) 3:178
- 酉正算子 4:252
- 右半链环 4:751
- 右半平面 2:804
- 右半遗传环 2:568
- 右伴随 3:565
- 右伴随函子 1:44
- 右伴随(映射的) 4:603
- 右本原环 4:294
- 右本原理想 4:292
- 右边(割线的) 1:915
- 右边(积分方程的) 3:94
- 右不变度量 2:487
- 右不变积分(群上的) 3:160
- 右不变平均(群上的) 3:158
- 右不变条件(测度的) 2:797
- 右不变 Haar 测度 2:797
- 右测地曲率 2:701
- 右除(形式语言的) 2:513
- 右传递求和法 5:254
- 右殆周期函数 1:141
- 右单半群 4:831
- 右单位元 5:339
- 右导出函子 2:55
- 右导数 3:1019
- 右导数(函数的) 2:100
- 右等价芽 5:166
- 右等价正则化子(有界线性算子的) 4:852
- 右短正合序列 2:411
- 右多边形(么半群上的) 4:226
- 右非奇异双线性型 1:360
- 右分解(群对子群的) 1:867
- 右核(双线性型的) 1:360
- 右核(双线性映射的) 1:361
- 右核(么拟群的) 3:564
- 右恒等元(模理想的) 3:793
- 右基座 3:745
- 右基座(环的) 3:745
- 右基座(模的) 4:888
- 右极限(函数的) 3:1019
- 右焦点 2:502
- 右结合元(么拟群的) 3:254
- 右截尾分布 5:284
- 右界定(进入的) 3:13
- 右近似单位元(Banach 代数中的) 3:179
- 右近似极限 1:193
- 右可逆元(有单位元的半群的) 3:176
- 右可序的 4:667
- 右理想 3:1
- 右理想(范畴的) 3:3
- 右连续函数(在一点上的) 1:812
- 右连续性 1:812
- 右链环 1:543
- 右列环 4:751
- 右零对象 2:470
- 右零化子(集合的) 1:184
- 右零因子 5:539
- 右零元(半群的) 5:537
- 右螺旋线 2:848
- 右幂零性(交错环中的) 1:146
- 右拟基本解 4:94
- 右逆(线性算子的) 3:491
- 右逆映射 3:170
- 右凝聚环 1:641
- 右陪集(子群在群中的) 1:867
- 右平衡模 1:297
- 右平移 4:429
- 右平移(半群的) 5:253
- 右奇异半群 3:5
- 右奇异理想 4:749
- 右群 4:667
- 右弱维数 2:181
- 右三元组(向量的) 5:406
- 右商(群元的) 2:781
- 右商(序半群中元素的) 4:14
- 右上下文相关文法 2:749
- 右上下文相关语言 2:749
- 右随机过程 1:834
- 右同余 2:770
- 右退化双线性映射 1:361
- 右拓扑半群 5:198
- 右拓扑模 5:195
- 右完满环 4:122
- 右伪自同构(么拟群的) 3:565
- 右位移 4:429
- 右位移算子 2:680
- 右稳定秩(环的) 4:978
- 右线性文法 2:751
- 右象征(算子的) 5:92
- 右序模(环中的) 4:5
- 右序群 4:667
- 右序(群上的) 4:667
- 右旋度(流形上曲线的) 1:851
- 右么元 5:337
- 右遗传环 2:568
- 右翼(字的出现的) 3:13
- 右跃度(函数在点上的) 3:234
- 右正合函子 2:410
- 右正则表示(代数的) 4:550

- 右正则表示(群的) 1:677  
 右正则超复函数 2:951  
 右正则化子(有界线性算子的)  
   4:852  
 右中  $r$  区域(随机分配的) 4:477  
 右追赶(右双搜索) 2:287  
 右自内射环 4:749  
 右自由理想环 2:568  
 右  $A$  模 3:794  
 右 Archimedes 半群 1:219  
 右 Artin 环 1:235  
 右  $F$  拟群 4:429  
 右  $G$  对象 4:298  
 右  $G$  模 3:794  
 右  $G$  同变群作用 2:624  
 右 Haar 测度 3:703  
 右 Noether 环 3:921  
 右 Ore 环 2:568  
 右 Ore 条件 4:749  
 右 Ore 整环 4:749  
 右  $r$  区域(随机分配的) 4:477  
 右 Rickart 环 4:620  
 诱导变换 4:199  
 诱导变换群 2:381  
 诱导表示 3:45  
 诱导表示到子群上的限制定理  
   3:45  
 诱导表示的合成定理 3:45  
 诱导层 4:672  
 诱导代数 5:440  
 诱导单项表示 3:818  
 诱导定向 3:28  
 诱导度量 5:298  
 诱导内积(外微分形式上的)  
   3:344  
 诱导算子 5:342  
 诱导拓扑 4:563  
 诱导纤维丛 3:44  
 诱导纤维化 3:44  
 诱导映射 5:440  
 诱导自同构(测度空间的) 2:53  
 诱导 Dirichlet 特征标 2:209  
 诱导 Haefliger 结构 2:802  
 余伴随表示(上伴随表示)  
   1:620  
 余标架丛( $k$  阶的) 5:42  
 余标架( $k$  阶的) 1:565  
 余代数 1:617  
 余代数(上三元组的) 1:503  
 余单纯对象 4:836  
 余单子 5:280  
 余等化子 3:48  
 余等距算子 2:427  
 余法层(态射的) 3:987  
 余法层(子概形的) 3:987  
 余法层(子空间的) 3:988  
 余法层(子流形的) 3:987  
 余法线 1:781  
 余反射子(范畴中的) 5:204  
 余高(素理想的) 2:847  
 余割 1:866  
 余核偶(范畴中态射的) 3:256  
 余核(上核) 1:658  
 余核(上核)(范畴中态射的)  
   1:658  
 余核(线性算子的) 3:491  
 余核(向量丛的态射的) 5:409  
 余积(范畴中一族对象的) 1:858  
 余积(上积) 1:858  
 余局部小范畴 4:462  
 余空间(链环的) 3:273  
 余理想 1:617  
 余理想(上理想)(范畴的对象的)  
   3:3  
 余良势范畴 4:462  
 余模 1:618  
 余切 1:870  
 余切丛 5:130  
 余切空间 5:130  
 余切空间(解析空间在一点上的)  
   1:174  
 余切曲线 5:132  
 余切向量 5:133  
 余圈拟阵 3:678  
 余确定场函数 2:712  
 余三元组(范畴中的) 1:647  
 余三元组(上三元组) 1:503;  
   3:313  
 余数(整数除法的) 4:579  
 余添加(函子的) 1:44  
 余图拟阵 3:678  
 余维数 1:630  
 余维数(代数子簇的) 1:630  
 余维数(解析子空间的) 1:630  
 余维数(奇点的) 5:165  
 余维数(向量空间的) 1:630  
 余维数(叶状结构的) 2:503  
 余维数(子流形的) 1:630  
 余维数(Hilbert 子空间的) 2:873  
 余维数  $k$  的叶状结构 5:121  
 余维数  $k$  的  $d$  罗 3:507  
 余维数(Pfaff 结构的) 4:152  
 余弦 1:867  
 余弦定理 1:867  
 余弦定理(边的) 4:948  
 余弦定理(角的) 4:948  
 余弦积分 3:93  
 余弦曲线 4:868  
 余向量(尖锐链的) 4:802  
 余项 4:578  
 余指数(临界点的) 3:829  
 余质量 4:802  
 余质量(上链的) 3:632  
 余质量(形式的) 3:632  
 余质量( $r$  向量的) 3:632  
 余质量( $r$  余向量的) 3:362  
 余子集 1:690  
 余自反子范畴 4:539;5:204  
 隅角的磨光 2:814  
 宇宙半径 1:869  
 宇宙常数 1:868  
 宇宙模型 1:868  
 宇宙模型的奇异性 1:869  
 羽状结构 2:454  
 羽状空间 2:454  
 语法 5:115  
 语法从属树 5:113  
 语法定理 5:115  
 语法规则(系统  $S$  的) 1:288  
 语法分析(程序的) 1:129  
 语法(符号体系的) 3:391  
 语法结构 5:113  
 语法上的一词多义 5:114  
 语法树(程序的) 1:129  
 语法(数理逻辑中的) 5:115  
 语法语言 5:112  
 语句 1:236  
 语句(程序设计中的)\* 4:983  
 语句的谓词(类型的) 3:311  
 语句的主词(类型的) 3:311  
 语句(关于类型的) 3:311



- 语句演算 4:353
- 语句(一阶语言的) 1:108
- 语言 5:40
- 语言(被自动机识别的) 2:515
- 语言(被  $L$  系统生成的) 3:315
- 语言簇 2:513
- 语言的共时研究 5:41
- 语言的构形(具有结式的秩为 1 的) 1:166
- 语言的解析模型 1:165**
- 语言的历时研究 5:41
- 语言等式的形式系统(上下无关语言中的) 2:747
- 语言(符号和常量上的) 1:74
- 语言破译 3:643
- 语言(系统  $S$  的) 1:288
- 语言(由范畴文法定义的) 2:746
- 语言(由生成文法所生成的) 2:750
- 语言(由文法所生成的) 2:514
- 语言(由 EOL 系统生成的) 3:315
- 语言(字母表上的) 2:512;2:514
- 语言( $k$  度歧义的) 2:515
- 语言  $L_{\infty}$  3:931
- 语言  $\mathcal{L}_\omega$ (带有量词“至少存在  $\omega$  个”的) 3:931
- 语言(Petri 网的) 4:147
- 语义悖论 1:187
- 语义(程序的) 5:155
- 语义分析(程序的) 1:129
- 语义(符号体系的) 3:391
- 语义过程 1:129
- 语义(数理逻辑中的) 4:750
- 语义学 4:750**
- 语义永真公式 1:704
- 语义永真逻辑公式 1:704
- 语义语言 3:643
- 语义蕴涵 3:130;3:559
- 玉河测度 5:128**
- 玉河数 5:128**
- 玉河数(线性代数群的) 3:465
- 预报区域 4:1000
- 预报式 1:523
- 预报校正 Milne 法 3:741
- 预测度 1:931
- 预测度(准测度)\* 4:283**
- 预测区间 4:543
- 预测子 4:1042
- 预层 4:284**
- 预层(环的) 4:284
- 预层(集合的) 4:284
- 预层(截面的) 4:803
- 预层(模的) 4:284
- 预层(群的) 4:284
- 预处理 1:571
- 预处理(代数方程组的) 1:28
- 预处理器 1:571
- 预等价数据集 4:116
- 预等价数据组 4:116
- 预范数(准范数)\* 4:283**
- 预防性维修 4:577
- 预概形 4:720
- 预估-校正法(预期算子-修正算子方法) 1:523;1:804;2:136
- 预估公式 1:33
- 预解核 3:871
- 预解集 4:610**
- 预解集(集合论中一个问题的) 3:575
- 预解集(算子的) 4:609;4:934
- 预解集( $n$  阶的) 4:763
- 预解式 4:609**
- 预解式(代数方程的) 4:609
- 预解式(积分方程的) 4:609
- 预解式(积分核的) 3:897
- 预解式(算子的) 2:594
- 预解式(线性算子的) 3:493
- 预解式(线性微分算子的) 3:476
- 预解式(Banach 代数元的) 1:300
- 预解式(Fredholm 核的) 2:557
- 预解式( $n$  阶的) 4:763
- 预解式(Марков 过程的) 5:248
- 预滤子 2:206
- 预期算子-修正算子方法 2:645
- 预算集 3:637
- 预语言 4:318
- 预正规子群 4:348**
- 预周期点 3:233
- 预 Abel 加性范畴 1:35
- 预  $\lambda$  环 3:312
- 域 2:467**
- 域的特征 1:562**
- 域的位 4:166**
- 域公理 3:1003
- 域扩张 2:422**
- 域扩张(有限型的) 2:627
- 域上的范数 3:968**
- 域塔 5:237**
- 域(维数  $\leq 1$  的) 2:623
- 域元素(在位中有限的) 4:166
- 寓 5:180
- 渊数 5:207
- 元定理 3:716**
- 元理论 3:716**
- 元逻辑 3:716**
- 元数(代数运算的) 1:105
- 元数(关系的) 1:105
- 元数(理论程序设计中符号的) 5:155
- 元数学 3:716**
- 元数(运算的) 3:1021
- 元素(超限序列的) 5:246
- 元素的谱 4:933**
- 元素(多重序列的) 3:860
- 元素分类问题的一般(不严格)提法 3:847
- 元素(集合的) 4:798
- 元素(解析函数的)(解析函数元) 1:155;1:691
- 元素(描述集合论中类  $\alpha$  的) 2:60
- 元素(区组设计的) 1:375
- 元素(序列的) 4:784
- 元素序列(集合的) 4:784
- 元素(与另一元素有二元关系的) 1:364
- 元素(与一集合是析取的) 2:242
- 元素(展形的) 4:958
- 元素(种类的) 3:153
- 元素(准素 Abel 群中的高为  $n$  的) 1:13
- 元素(准素 Abel 群中的无限高的) 1:13
- 元素(最佳逼近的)\* 2:334**
- 元素(Noether 环的完全化中在此环上代数的) 3:24
- 元语言 3:716**
- 元元理论 3:717
- 原点(径向量的) 4:473
- 原根 4:294**
- 原根(模  $m$  的) 1:761;4:294

- 原函数 4:291  
 原函数(函数的) 3:87  
 原假设 4:1002  
 原始递归 4:292  
 原始递归变换 3:154  
 原始递归(递归理论中函数的)  
 4:524  
 原始递归关系 4:293  
 原始递归函数 4:293  
 原始递归函数(大值域的) 3:981  
 原始递归描述 4:521  
 原始递归算术 3:561  
 原始关系 1:105  
 原始瓦片 4:59  
 原始周期 4:125  
 原始周期(单周期函数的) 4:842  
 原始周期(双周期函数的) 2:283  
 原田-Norton 群 4:957  
 原象(对应下元素的) 1:866  
 原象(投影下的) 4:326  
 原象(在函数作用下集合的)  
 2:586  
 原象(在函数作用下元素的)  
 2:586  
 原意 Minkowski 不等式 3:761  
 原因(动力系统的) 1:921  
 原状点 1:217  
 原子 1:251  
 原子测度 3:930  
 原子(测度空间中的) 3:699  
 原子(范畴中的) 1:251  
 原子分布 1:251  
 原子(分布的) 1:251  
 原子分解(函数类  $H^p$  的) 2:817  
 原子格 1:251  
 原子公式 1:774;2:518;3:557;  
 3:559  
 原子环 1:251  
 原子(环中的) 1:251  
 原子区间(偏序集的) 2:335  
 原子(样本空间中的) 1:811  
 原子(Lisp 语言中的) 3:522  
 圆 1:590  
 圆把 1:590  
 圆变换 1:592  
 圆地图投影(广义的) 1:493  
 圆地图投影(狭义的) 1:493  
 圆点 1:592  
 圆对称化 1:593  
 圆法 1:590  
 圆弓形 4:741  
 圆函数 5:273  
 圆弧 1:590  
 圆弧段三角形 4:689  
 圆环 3:801  
 圆环猜想 5:293  
 圆环的模 3:801  
 圆环调和函数 5:227  
 圆环域 3:798  
 圆环坐标 5:227  
 圆几何学 1:753  
 圆解析函数元 1:160  
 圆盘 2:220  
 圆盘代数 5:320  
 圆盘空间 2:551  
 圆频率(自由谐振动的) 2:567  
 圆频率(自由谐振动的) 2:567  
 圆平面 3:779  
 圆扇形 4:739  
 圆束 1:590;3:890;5:122  
 圆四角形 4:172  
 圆(四圆坐标中的) 5:153  
 圆椭圆积分 2:349  
 圆(椭圆平面中的) 4:623  
 圆网 3:890  
 圆问题 1:591  
 圆限制三体问题 5:169  
 圆心 1:590  
 圆心角 1:590;3:85  
 圆形部分和(二重级数的) 2:286  
 圆形集 2:562  
 圆形集(拓扑向量空间中的)  
 5:211  
 圆形区域 3:281  
 圆形(区)域(二次微分的) 2:731  
 圆性质(分式线性映射的) 2:545  
 圆周率(数  $\pi$ ) 4:158  
 圆柱体 1:926  
 圆锥 1:738  
 圆锥极线 1:903  
 圆锥平截头台 1:738  
 圆锥平台 1:738  
 圆锥曲线 1:768  
 《圆锥曲线》(Appolonius 著)  
 1:768  
 圆准则(关于稳定性的) 4:961  
 圆自反几何学 1:592  
 源点(运输网络的) 3:893  
 源(范畴中的) 5:206  
 源(树的) 5:266  
 源(态射的) 1:502  
 源(向量场的)\* 5:414  
 源支路(网络的) 3:893  
 远距流 2:311  
 远离点对 2:251  
 远离动力系统 2:251  
 约化闭子概形 1:611  
 约化(不定二次型的) 4:387  
 约化(不定二元二次型的) 4:387  
 约化(不定  $n$  元二次型的) 4:388  
 约化次数(不可约多项式的)  
 4:781  
 约化代数 3:402  
 约化点窝 5:526  
 约化定理(关于联络的) 2:892  
 约化多项式 1:75  
 约化(多项式同类项的) 4:233  
 约化二次型 4:386  
 约化范式 4:530  
 约化仿射概形 1:57  
 约化复空间 4:1027  
 约化(复空间的) 4:1027  
 约化概形 4:530  
 约化根系 4:683  
 约化关联代数 2:369  
 约化广义上同调群 2:677  
 约化迹 2:238  
 约化积 4:935  
 约化(既约)环 3:986  
 约化(简化)(表示到不变子空间上  
 的) 1:822  
 约化(简化)(表示的) 1:822  
 约化结构(齐性空间中的) 4:656  
 约化解析空间 1:174  
 约化(解析空间的) 1:175  
 约化空间 4:532  
 约化拉丁方 3:354  
 约化零维同调群 3:989  
 约化幂 4:1020  
 约化模(单连通域的) 3:801  
 约化配边群 1:622



- 约化齐性空间 2:899  
**约化群 4:532**  
 约化容许代数 3:402  
 约化剩余有限半群 4:602  
 约化同调群 2:913  
 约化同调序列 2:914  
 约化同态 5:477  
 约化(统计问题的) 5:70  
 约化投影算子 4:919  
 约化椭圆纤维化 2:354  
 约化微分多项式 2:98  
 约化纬垂 5:90  
 约化系数(第二基本形式的) 3:884  
 约化(线性算子向 Jordan 形式的) 3:492  
 约化因子(估计中的) 5:278  
 约化映射锥 1:739  
 约化(折合)密度矩阵 2:45  
 约化(正定二次型的) 4:386  
 约化秩(代数群的) 4:491  
 约化准素分解 1:38  
 约化准则(多项式的不可约性的) 3:182  
 约化子空间 1:822  
 约化字 4:723  
 约化自由群 2:567  
 约化 Abel 群 1:13  
 约化  $C^*$  代数 5:342  
 约化  $K$  理论 4:503  
 约化  $k$  秩(线性代数群的) 4:491  
**约化 Lie 代数 3:415**  
 约化 Lie 群 3:415  
 约化 Lie 子代数 3:415  
 约化 von Neumann 代数 5:440  
 约化 Whitehead 群 3:484; 5:493  
 约束闭包(微分域的) 2:421  
 约束闭微分域 2:421  
**约束变量 1:409**  
 约束变量(逻辑公式中的) 3:310  
 约束出现 3:558  
 约束出现(变量的) 1:409; 2:571  
 约束同伦 2:918  
 约束微分方程 4:572  
 约束微分域扩张 2:421  
 约束微分域扩张元素族 2:421  
**约束向量 1:409**  
 约元(除子、因子)(环元素的) 2:268; 2:269  
 跃变点 2:222  
 跃变跃度(函数在一点上的) 2:222; 3:234  
 跃变运算 2:39  
 跃度 3:234  
 跃度函数 3:234  
**运筹学 3:1023**  
 运筹学模型 3:1024  
**运动 3:836**  
 运动(第二类) 3:836  
 运动(第一类) 3:836  
 运动(度量空间的) 2:487  
 运动方程 4:535  
 运动方程(振动保守系统的) 2:322  
 运动(仿射联络空间的) 3:837  
 运动积分 4:1005  
 运动积分(三体问题中质心的) 5:169  
**运动群 2:788**  
 运动群(具有仿射联络的空间的) 3:318  
 运动群(Riemann 流形的) 3:319  
 运动(伪 Euclid 空间中的) 4:366  
 运动(伪 Euclid 空间中第二类的) 4:366  
 运动(伪 Euclid 空间中第一类的) 4:366  
 运动学测度 3:105  
 运动学可能的加速度(完整系统的) 2:891  
 运动学可能的速度(完整系统的) 2:891  
 运动质量 4:567  
 运动(Euclid 空间的) 3:836  
 运动(Hamilton 系统的) 1:582  
 运动(Riemann 空间的) 3:836  
 运动(Riemann 空间中的) 4:646  
 运输网络 3:893  
**运输问题 5:258**  
 运算(超函数上的) 3:739  
 运算(代数理论中的) 5:349  
**运算对象 3:1021**  
 运算符(算法语言中的) 1:129  
 运算数 5:257  
 运算(网络中的) 3:894  
 运算(形式语言上的) 2:512  
 运算(粘贴环柄的) 2:814  
 运算(侦出一个映射的) 1:654  
 运算(自动机的) 1:276  
 运算( $D$  模上的) 2:2  
**蕴涵 3:22**  
 蕴涵悖论 5:32  
 蕴涵闭包 1:111  
 蕴涵(从一个格元素到一个格元素的) 4:357  
**蕴涵范式 3:22**  
 蕴涵公式 3:22  
**蕴涵命题演算 3:22**  
 蕴涵元(Boole 函数的) 4:530

## Z

- 杂交密码体制 1:896  
 杂质(固体中的) 2:549  
 载荷矩阵 2:446  
 载荷(因子分析中的) 2:446  
 再生凸锥 5:463  
 再生性质(Bergman 核函数的) 1:325  
 再生正锥 4:248  
 再生锥 1:739  
 择一假设 4:1002  
 曾(炯之)定理 1:444  
 增长比较(算术函数的) 4:234  
**增长标形 2:791**  
 增长函数(代数的) 4:234  
 增长函数(群的) 4:234  
 增长函数( $DOL$  系统的) 3:316  
 增长阶(算术函数的) 4:234  
 增长矩阵( $DOL$  系统的) 3:316  
 增长(算术函数的) 4:234  
 增长性量度(亚纯函数的) 5:366  
 增长(亚纯函数的) 5:367  
 增长指标 2:362  
 增长指标函数 1:407  
 增长指数(整函数的) 2:295  
 增长指数(Laplace 积分变换中象原的) 3:346  
 增广 2:570

- 增广函子 1:646  
 增广理想 4:236  
 增函数(递增函数) 3:32  
 增量的剩余(非线性算子的)  
     3:947  
 增量翻译程序 1:130  
 增生算子 2:250  
 增实数序列 3:439  
 增益底限 4:303  
 增益函数 2:620  
 增益(自动机的) 1:274  
 增映射 3:199  
 增殖的 L 系统 3:315  
 闸函数 1:310  
 闸函数(复变函数论中的) 1:311  
 闸函数(关于一点的) 1:311;  
     4:269  
 闸函数(解析函数论中的) 1:158  
 闸函数(位势论中的) 1:310  
 窄收敛(负荷的) 1:837  
 窄拓扑(有界测度的空间上的)  
     1:837  
 粘合 2:733  
 粘合定理 2:734  
 粘合法 2:734  
 粘合(环柄的) 5:294  
 粘合冒号 1:660  
 粘贴球面(环柄的) 2:814  
 粘贴映射 2:814  
 展开列(展开) 3:738;3:826;  
     4:535  
 展开面 2:409  
 展开面(多面体表面的) 2:409  
 展开(曲线的) 1:52;4:331  
 展形 4:55  
 展形定律 4:958  
 展形(拓扑空间的) 1:472  
 展形(直觉主义逻辑中的) 4:958  
 占据时间(占位时) 5:509  
 占有数 2:461  
 占有问题 4:478  
 张(辰中)量词 4:403  
 张(辰中)双基数猜想 4:872  
 张量 1:59;2:712  
 张量表示 5:146  
 张量场 5:42;5:144  
 张量场( $(p, q)$ 型的) 5:42  
 张量丛 5:144  
 张量代数 5:142  
 张量的对称化\* 5:105  
 张量的分量 1:59  
 张量的缩并 1:823  
 张量分析 5:142  
 张量(关于一组指标对称的)  
     5:103  
 张量积 5:146  
 张量积(代数表示的) 5:148  
 张量积(代数的) 5:147  
 张量积的构造 2:593  
 张量积范数 3:993  
 张量积(核型空间的) 3:998  
 张量积(局部凸空间的) 2:562  
 张量积(矩阵的) 5:148  
 张量积(群表示的) 5:148  
 张量积(双代数表示的) 5:148  
 张量积(向量丛的) 5:148  
 张量积(向量空间的) 5:419  
 张量积(幺模的) 5:147  
 张量积(酉表示的) 5:148  
 张量积(Hilbert 空间的) 2:874  
 张量积(Lie 代数表示的) 5:148  
 张量结构 5:42  
 张量密度 5:144  
 张量容量 4:374  
 张量微分形式 4:331  
 张量(向量空间上的)\* 5:145  
 张量演算 5:144  
 张量( $(p, q)$ 型的) 5:145  
 张量  $\Delta$  密度 5:145  
 张量  $\Delta$  密度(权  $w$  和反权  $w'$  的)  
     4:374  
 障碍数(形变的) 1:104  
 障碍问题 1:428  
 照明问题 3:12  
 折点 1:445  
 折点 2:503  
 折点(超越曲线上的) 5:240  
 折点(关于稳定性的) 4:877  
 折点(函数的) 4:571  
 折极值曲线 2:222;2:398;2:433  
 折扣因子 1:832;5:474  
 折线变分(泛函的) 5:373  
 针变分 4:243  
 针形变分(泛函的) 5:373  
 侦出(映射的) 1:654  
 真闭链 4:350  
 真闭逻辑公式 4:515  
 真不连续群作用 3:267  
 真除子 1:873  
 真仿射球面 1:59  
 真分数 2:543  
 真概形 4:351  
 真公式(秩为 2 的) 1:796  
 真公式(Kripke 模型中的) 3:397  
 真假值 2:285  
 真假值表 5:284  
 真假值表度 5:285  
 真假值表可归约集(自然数的)  
     5:284  
 真假值表可归约性 5:284  
 真假值函数 4:354  
 真假值集(模型的) 1:398  
 真解析映射 1:165  
 真空 4:407  
 真空图 5:499  
 真空向量 2:501  
 真面(复形的元素的) 1:707  
 真命题(二阶逻辑语言中的)  
     3:930  
 真逆半群 3:176  
 真全纯映射 1:326;1:359;1:173  
 真商对象 4:462  
 真时间(固有时) 3:763;4:569  
 真实误差 2:390  
 真双全纯映射 1:326  
 真态射 4:351  
 真态射基本定理 4:351  
 真凸锥 5:463  
 真无限 von Neumann 代数 5:441  
 真有理函数 3:1009  
 真语句(部分正确性的) 5:156  
 真正的类似 4:361  
 真正的奇异同调群 2:908  
 真正交代数群 4:27  
 真支集的伪微分算子 4:363  
 真值 3:145  
 真值函数系统 2:606  
 真值集(Diophantus 谓词的)  
     2:201  
 真子模 5:65  
 真子群 3:683;5:59



- 诊断问题 4:575;5:152  
 诊断问题(医学中的) 5:152  
 阵发(1型—3型) 4:695  
 阵列探测 2:726  
 振荡函数 3:564  
**振荡核 4:45**  
 振荡积分 4:985;1:526  
**振荡矩阵 4:45**  
 振荡(振动) 2:300  
 振动的常微分方程 2:811  
 振动的向量微分方程 2:811  
 振动的 Hamilton 微分方程 2:811  
 振动定理 2:883  
 振动方程 3:650  
 振动方程(均匀弦的) 2:686  
**振动解 4:46**  
**振动理论 4:46**  
**振动微分方程 4:44**  
 振动性质(线性 Hamilton 方程组解的) 2:811  
 振幅—相位特征 3:1010  
 振幅—相位特征(线性定常控制系统的) 5:243  
 振幅(第一类不完全椭圆积分的) 2:349  
**振幅(函数的)\* 4:46**  
 振幅函数(函数的) 4:46  
 振幅(强迫振动的) 2:505  
 振幅(事件的) 4:414  
**振幅(椭圆积分的)\* 1:149**  
 振幅(伪微分算子的) 4:363  
 振幅(自由谐振动的) 2:567  
 震颤控制 3:1041  
 整闭半群 4:14  
**整闭包的导子 1:738**  
 整闭包(环的) 3:104  
 整闭包(Dedekind 环的) 2:21  
 整闭包(Dedekind 整环上的) 4:6  
 整闭的整环 3:104  
 整闭环 2:21  
 整部分(偏序群的) 4:100  
 整部(假分式的) 4:497  
 整部(假有理函数的) 4:497  
 整超越函数 5:241  
 整除 2:268  
 整除(被 11) 2:267  
 整除(被 13) 2:267  
 整除(被 2) 2:267  
 整除(被 3) 2:267  
 整除(被 37) 2:267  
 整除(被 4) 2:267  
 整除(被 7) 2:267  
 整除(被 8) 2:267  
 整除(被 9) 2:267  
 整除性函数(关于整数的) 2:267  
**整除性(环中的)\* 2:267**  
 整除性(一个环元素被另一环元素的) 2:268  
**整除准则 2:267**  
 整除子 3:3  
 整除子(环中的) 2:270  
 整代数(环上的) 1:56  
**整点 3:114**  
**整点的分布 3:114**  
**整对象(范畴的)\* 3:111**  
 整二元二次型 1:364  
 整概形 3:986  
 整函数 2:361  
**整函数 2:361**  
**整函数的亏格 2:699**  
 整函数(完全正则增长的) 2:362  
 整函数(无穷型的) 2:362  
 整函数(无限阶的) 4:5  
 整函数(有限阶的) 2:362;4:5  
 整函数(有限下阶的) 5:368  
 整函数(有限型的) 2:362  
 整函数(正规型的) 2:362  
 整函数(指数型的) 1:407;2:375  
 整函数(最大型的) 2:362  
 整函数(最小型的) 2:362  
**整环 3:94**  
 整基 2:238  
 整基(域的) 1:97  
**整扩张(环的)\* 3:104**  
**整理想 3:109**  
 整全纯映射 1:359  
 整全序半群 4:14  
**整数 3:85**  
**整数部分 3:114**  
 整数乘法 1:895  
**整数的剩余 4:579**  
**整数分拆数 2:49**  
 整数分拆问题 1:36;1:37  
 整数分式 4:498  
**整数规划 3:85**  
 整数环 3:85  
 整数环(Dedekind 整环上的) 4:6  
 整数线性规划 3:85  
 整态射 1:56  
 整体必要条件(变分问题中对极值的) 5:382  
 整体参模理论 3:800  
 整体存在性定理(范子群的) 1:596  
 整体单射半径(Riemann 流形上一点的) 4:653  
 整体等距浸入 3:189  
 整体定律(概率数论中的) 3:1007  
 整体动力系统 2:310  
 整体对称仿射空间 5:102  
 整体对称伪 Riemann 空间 5:102  
**整体对称 Riemann 空间 2:732**  
 整体对称 Riemann 空间(非紧型的) 5:103  
 整体对称 Riemann 空间(紧型的) 5:103  
 整体对称 Riemann 空间(Euclid 型的) 5:103  
 整体分析 3:945  
 整体化(局部 Lie 变换群的) 3:436  
 整体几何学 2:717  
 整体结构(二次微分的轨道的) 2:731  
**整体结构(轨道的)\* 2:731**  
 整体结构(Lie 群的) 3:424  
 整体解析几何学 1:175  
 整体可平行化动力系统 1:694  
 整体可直化动力系统 1:694  
 整体扩张映射 4:235  
 整体内射维数 2:181  
 整体切片 4:198  
 整体弱维数(环的) 2:905  
 整体维数 2:181  
 整体维数(解析空间的) 1:174  
 整体相交指数 3:147  
 整体性质(自治系统解的) 1:281  
**整体域 2:731**  
 整体最小值点 3:655  
 整体 Lie 变换群 3:436  
 整体 Torelli 问题 5:226

- 整形法(孤立子方程的) 4:895  
 整性定理 2:500  
 整性相关方程 3:104  
**整有理函数** 2:363  
 整元 3:104  
 整元(环的) 3:986  
**整自同构** 3:89  
 整自同构(本原二元二次型的) 1:364  
 整自同构(二次型的) 4:383  
 正八面体 3:1015  
 正半槽谷 5:283  
 正半定二次型 4:755  
 正半定自伴线性变换 4:748  
 正半定 Hermite 矩阵 2:857  
 正半轨道 4:4  
 正本征向量(Hilbert 空间上正算子的) 4:251  
 正本征值(算子的) 4:251  
 正本征值(Hilbert 空间上正算子的) 4:251  
 正比例 4:277  
 正闭流动形 2:430  
 正流动形 4:188  
 正变差(负荷的) 1:564  
**正变差(函数的)\*** 4:253  
 正瓣 1:433  
 正锥(偏序群中的) 4:100  
 正标量 4:404  
 正部(格序群的元素的) 3:358  
 正常的极值曲线族 2:442  
 正常的  $m$  维超平面 3:528  
 正常点(Лобачевский 空间的) 3:528  
 正常二分性 2:73  
 正常分布 2:33  
 正常函数 5:79  
 正常基(核型空间中的) 3:999  
 正常极值曲线场 2:434  
 正常结点 3:915  
 正常偶(解析延拓的) 4:854  
 正常气体 4:812  
 正常球面(Лобачевский 几何学中的) 3:525  
 正常三角组 2:914  
 正常生成元(范畴的) 2:694  
 正常收敛的算子序列 1:836  
 正常态射(概形的) 1:691  
 正常(通常)椭圆曲线 2:344  
 正常相交 3:148  
 正常相似 4:824  
 正常旋转 4:687  
 正常意义下的椭圆函数 2:346  
 正常圆(Лобачевский 几何学中的) 3:525  
 正常运动 3:836  
 正常 Lorentz 变换 3:567  
 正常 Lorentz 群 3:567  
 正常 Pólya 频率函数 1:322  
 正常 Марков 链 5:250  
 正超越系数 2:414  
 正冲击波 4:812  
 正除子 1:78;1:597;2:270  
 正除子(环中的) 2:270  
 正除子理想 2:275  
 正递归集 5:449  
**正定算子** 4:250  
 正定二次型 3:362;4:382;1:592  
 正定理(逼近论中的) 1:202;1:211  
 正定理(函数逼近论中的) 3:209  
 正定测度(群上的) 5:340  
 正定自伴线性变换 4:748  
 正定矩阵 4:249  
 正定 Hermite 矩阵 2:857;2:745  
 正多胞形 4:232;4:549  
**正多边形** 4:548  
 正多面角 4:227  
**正多面体** 4:548  
 正二次微分 4:380  
 正二次微分(有限 Riemann 曲面上的) 4:380  
**正泛函** 4:251  
 正泛函存在定理 4:773  
 正泛函(具有对合的代数上的) 4:251  
**正方形** 4:959  
 正方形图式(范畴中的) 2:71  
 正方形准则 3:354  
 正非对称性 1:244  
 正分次对象 1:710  
 正分次模 2:742  
**正负号函数** 4:823  
**正割** 4:735  
 正根(根系中的) 4:683  
 正惯性指数(二次型的) 4:383  
 正规半群 1:823  
 正规闭包(域的) 3:975  
 正规闭链 3:989  
 正规表示 3:52  
 正规并(算法的) 1:134  
 正规测度空间 3:975  
 正规常微分方程组 3:93  
 正规超椭圆积分(第一类) 2:940  
 正规除子 3:989  
**正规单态射** 3:984  
 正规点(解析空间的) 3:971  
 正规对射(直线丛的) 1:715  
**正规方程** 3:975  
 正规方程(最小二乘法中的) 3:369  
 正规仿射概形 1:57  
 正规分叉 5:287  
 正规分块(空间的) 5:443  
 正规分配格 3:682  
 正规分支(算法的) 1:134  
 正规复空间 4:1027  
**正规复形** 3:972  
 正规复形(半群的) 3:972  
**正规概形** 3:986  
 正规公理 4:783  
 正规公式 1:796  
 正规共形联络 1:749  
 正规(规范化)化条件(对正交多项式系的) 4:30  
 正规函数 1:616  
 正规函数代数 1:72  
 正规合成(算法的) 1:134  
 正规恒等式(半群簇中的) 5:401  
 正规化测度空间 3:376  
 正规化定理 4:839  
 正规化定理(复空间的) 4:1027  
 正规化定理(构造逻辑中的) 1:788  
 正规化方程 3:975  
 正规化(复空间的) 4:1027  
 正规化(概形的) 3:986  
 正规化函子 1:9;2:918  
 正规化基本矩阵(在一点上的) 3:497  
 正规化基本矩阵(在原点处的)



- 3:501  
 正规化夹层矩阵 4:534  
 正规化拉丁长方 3:353  
 正规化曲面 4:562  
 正规化数(在浮点记号中的)  
 4:201  
 正规化(随机变量的) 2:244  
 正规化(随机变量序列的) 2:244  
 正规化条件(共形映射的) 1:754  
 正规化(系的) 3:990  
 正规化因子 3:975;3:990  
 正规化引理 1:172  
 正规化元素系 3:990  
 正规化原理 3:990;1:130;3:970  
 正规化原理 3:990  
 正规化(约化解析空间的) 3:971  
 正规化子 3:990  
 正规化子条件 3:990  
 正规化坐标变换 3:981  
 正规化 Abel 微分 1:10  
 正规化 Boole 代数 4:480  
 正规化 Gauss 函数 5:491  
 正规化 Hadamard 矩阵 2:799  
 正规环 3:986  
 正规迹(von Neumann 代数上的)  
 5:441  
 正规基本解组 3:983  
 正规基(拓扑空间的) 1:683  
 正规解 3:9  
 正规解析函数族(区域内的)  
 3:975  
 正规解析函数族(在一点的)  
 3:976  
 正规解析空间 3:971  
 正规解析空间(在一点上的)  
 3:971  
 正规解(线性常微分方程的  $p$  阶  
 的) 4:491  
 正规局部环 3:971;3:986  
 正规矩阵 3:984  
 正规可解方程 3:991  
 正规可解算子 3:991  
 正规可解性 3:988  
 正规可数仿紧拓扑空间 1:20  
 正规空间 3:988  
 正规空间的绝对收缩核 1:20  
 正规扩张 3:975  
 正规扩张(域的) 3:975  
 正规列 3:987  
 正规列(子群的) 2:627  
 正规邻接的拓扑空间 1:684  
 正规邻近性 4:354  
 正规邻域(法邻域) 2:419;2:704  
 正规零维闭链 3:989  
 正规满态射 3:975  
 正规模式分析 2:948  
 正规平坦概形 3:817  
 正规齐性 Riemann 空间 4:656  
 正规嵌入的子空间 3:990  
 正规球面纤维化 4:199  
 正规区域 2:705  
 正规三角形矩阵 5:268  
 正规商对象 4:462  
 正规实形式(复 Lie 群的) 4:956  
 正规数 3:984  
 正规算法 3:970  
 正规算法的记录 1:126  
 正规算法(可应用于一个字的)  
 3:970  
 正规算法(转换字的) 3:970  
 正规算法(字母表上的) 3:970  
 正规算法(字母表中的) 3:970  
 正规算子 3:985  
 正规同余 4:429  
 正规椭圆积分(第二类) 2:349  
 正规椭圆积分(第三类) 2:349  
 正规椭圆积分(Weierstrass 形式下  
 第三类) 2:349  
 正规拓扑空间 4:783;5:200  
 正规围道 3:775  
 正规吸引域(稳定分布的) 1:253  
 正规楔 1:739  
 正规形式(闭 Riemann 曲面的)  
 4:635  
 正规形式表示 4:194  
 正规形式(产生算子的) 2:502  
 正规形式(常微分方程组的)  
 2:107  
 正规形式(殆线性双曲方程组的)  
 4:434  
 正规形式(典范椭圆积分的)  
 2:349  
 正规形式(对策的) 2:637  
 正规形式(二次型的) 4:383  
 正规形式, 范式 3:977  
 正规形式(分式线性映射的)  
 2:546  
 正规形式级数( $p$  阶的) 4:491  
 正规形式(矩阵的) 3:977  
 正规形式(双曲型偏微分方程的)  
 3:487  
 正规形式(算子的) 3:980  
 正规形式(微分方程组的) 3:981  
 正规形式(湮没算子的) 2:502  
 正规形式(有限 Riemann 曲面的)  
 4:635  
 正规形式(自伴算子的) 3:980  
 正规性条件(对奇异积分方程的)  
 4:851  
 正规性条件(对奇异积分算子的)  
 4:851  
 正规性原理 3:825  
 正规性准则(概形的) 3:986  
 正规亚纯函数(多连通区域内的)  
 3:976  
 正规亚纯函数(区域内的) 3:976  
 正规亚纯函数族 3:976  
 正规演算 4:257  
 正规域扩张 2:422  
 正规元 1:454  
 正规元(对合代数中的) 3:178  
 正规重复(算法的) 1:134  
 正规锥 1:739;4:248  
 正规锥(有序向量空间中的)  
 4:774  
 正规子半群 3:989  
 正规子对象 3:984  
 正规子拟群 4:429  
 正规子谱系 4:661  
 正规子群 3:989  
 正规子群列 5:60  
 正规子群系统 5:61  
 正规族 3:975  
 正规 Abel 积分(第二类) 1:15  
 正规 Abel 积分(第三类) 1:15  
 正规 Abel 积分(第一类) 1:14  
 正规 Abel 微分(第三类) 1:10  
 正规 Moore 空间问题 3:826;  
 4:535;5:220  
 正规  $p$  补 3:985  
 正规  $\theta$  函数 5:162

- 正合公理 2:677;2:913;4:1019  
 正合函子 2:410  
 正合迹(von Neumann 代数的)  
   5:441  
 正合偶 4:921  
 正合同调论 2:916  
 正合同伦序列(带基点空间对的)  
   2:919  
 正合序列 2:411  
 正合序列局部族 2:920  
 正合序列(态射的) 2:411  
 正合序列(向量丛的态射的)  
   5:409  
 正合自同态 2:410  
 正合 Mayer-Vietoris 序列 1:94  
 正合 Weyl 乘子 4:38  
 正核 4:249  
 正后退轨道 3:448  
 正积分核 2:813  
 正极限(归纳极限) 3:48;4:337;  
   5:120  
 正渐近点 3:447  
 正交伴(不定度规空间的子空间的)  
   4:905  
 正交伴侣(拉丁方的) 3:354;4:27  
 正交变换 4:40  
 正交标架 2:550  
 正交表 4:23  
 正交补 4:43  
 正交补(闭 Hilbert 子空间的)  
   4:326  
 正交补定理(Hilbert 空间中的)  
   2:872  
 正交补(向量子空间的) 5:418  
 正交补(正交余) 4:35;1:691  
 正交补(子模的) 1:361  
 正交补(Hilbert 空间中集合的)  
   2:872  
 正交部分拉丁方 4:29  
 正交测度 3:871  
 正交代数群 4:27  
 正交的 Legendre 多项式 3:384  
 正交点(椭圆线上的) 4:623  
 正交对称 Lie 代数 2:732  
 正交多项式 4:30  
 正交多项式(复域上的) 4:34  
 正交多项式(关于区域和权函数的)  
   1:902  
 正交多项式(区域上的) 4:34  
 正交多项式(围道上的) 4:34  
 正交多项式(圆上的) 4:34  
 正交关系(表示的矩阵元的)  
   2:229  
 正交关系(局部紧群的表示的)  
   3:86  
 正交轨道 4:40  
 正交轨道(二次微分的) 4:380  
 正交函数系 4:39;1:141;2:453  
 正交和(半群的) 3:1011  
 正交和的构造 2:593  
 正交和(双线性映射的) 1:362  
 正变化 4:41  
 正变化方法 4:42  
 正变化过程 4:41  
 正变化(函数系的)\* 4:42  
 正交基 4:23  
 正交级数 4:35  
 正交矩阵 4:29  
 正交拉丁长方 3:353  
 正交拉丁方 4:27  
 正交幂等元 3:5  
 正交模格 4:43  
 正交模律 4:43  
 正交拟群 4:430  
 正交配边 1:623  
 正交配边理论 1:622  
 正交配极群 4:217  
 正交群 4:25  
 正交群(域上  $n$  个变量的) 1:601  
 正交射影 1:695  
 正交算子 3:494  
 正交态射 4:28  
 正交投影 4:326  
 正交投影算子 4:35  
 正交投影算子的部分 4:35  
 正交投影线性方法 1:208  
 正交网 4:30  
 正交系 4:38  
 正交线性变换 3:513  
 正交向量系 4:38  
 正交向量(Hilbert 空间中的)  
   2:872  
 正交形式 2:490  
 正交性 4:40  
 正交性(函数的) 4:41  
 正交性(球面的) 4:119  
 正交性条件(对 Sheffer 序列的)  
   5:310  
 正交性(正交投影算子的) 4:35  
 正交性质(球面调和函数的)  
   4:944  
 正交性质(Dirichlet 特征标的)  
   2:209  
 正交性(Hilbert 空间中的) 4:40  
 正交映射 4:30  
 正交元素 1:360  
 正交元素(格序群中的) 3:358  
 正交元素(Крейн 空间中的)  
   3:294  
 正交圆(四圆坐标中的) 5:153  
 正交阵列 4:23  
 正交(直角)坐标系 4:38;1:488  
 正交直线 4:135  
 正交追赶法 4:24  
 正交子空间(Hilbert 空间的)  
   2:872  
 正交子模 1:361  
 正交 Descartes 坐标 5:405  
 正交 Weyl 分解 3:344  
 正矩阵 3:677  
 正棱柱 4:304  
 正棱锥 4:376  
 正定核 4:250  
 正流形(Крейн 空间中的) 3:294  
 正逻辑公式 3:785  
 正逻辑演算 3:558  
 正命题演算 4:252  
 正能量表示 5:427  
 正偏差(亚纯函数的) 2:414  
 正偏斜度 1:244  
 正切 5:129  
 正切公式 5:132  
 正切曲线 5:131  
 正确性(程序的) 4:323  
 正确性(语义的) 3:130  
 正确语义 3:130  
 正群特征标 3:160  
 正射线函数 4:504  
 正十二面体 2:275  
 正时 Lorentz 群 3:567  
 正实数 4:513



- 正视地图投影 1:489;1:494  
 正视曲线 3:185  
**正算子 4:251**  
 正算子(包含锥的向量空间上的) 4:251  
 正算子(对合代数上的) 4:252  
 正算子(复 Hilbert 空间上的) 4:251  
 正算子(Banach 空间上的) 4:252  
 正算子(Hilbert 空间上的) 4:251  
 正态超越系数 2:414  
**正态动力系统 3:975**  
**正态分布 3:973**  
 正态分数检验 3:957  
 正态概率分布 3:973  
 正态概率图纸 4:309  
 正态过程 2:664  
 正态联合分布 3:974  
 正态随机元 4:479  
**正态吸引带 5:550**  
 正统(纯正)半群 4:554  
 正统群 1:607  
 正统 Clifford 半群 1:607  
 正投影 2:59  
 正投影面 2:59  
 正定 Finsler 空间 2:485  
 正问题(数学模型化的) 3:647  
 正系统 5:120  
 正系统(范畴中的) 5:120  
**正弦 4:843**  
**正弦定理 4:846**  
 正弦积分 3:120  
**正弦螺成 4:868**  
**正弦曲线 4:868**  
 正弦振动 2:835  
**正弦 Gordon 方程 4:844**  
 正弦 Gordon 方程在量子场论中的应用 4:845  
 正弦 Gordon 型方程 4:846  
 正线性逼近方法 1:208  
 正线性泛函 1:301;1:453;3:178  
 正线性算子 4:773  
 正相关随机变量 4:248  
**正向量丛 4:253**  
 正象同态 3:148  
 正星形多面体 4:549  
 正性公理 2:834  
 正性区域(向量空间中的) 5:463  
 正性锥(二次型的) 4:385  
 正序半群 4:14  
**正序列 4:253**  
 正应力(法向应力) 2:329;5:32  
 正映射 4:251  
 正有理数 4:499  
 正有理数基本序列 4:513  
**正元 4:251**  
 正元(具有对合的代数中的) 4:251  
 正元(内积空间中的) 2:877  
 正元(偏序群中的) 3:876  
 正元(全序群中的) 5:235  
 正元(序半群中的) 4:13  
 正元(序广群中的) 3:876;4:12  
 正元( $C^*$  代数中的) 2:877  
 正元(Крейн 空间中的) 3:294  
 正蕴涵命题演算 3:22  
 正则阿列夫 1:65  
**正则半群 4:553**  
 正则闭包(算法的) 1:613  
 正则闭超滤子 1:17  
 正则闭集 1:17;1:462  
 正则闭曲线(Peano 型的) 4:112  
**正则边界点 4:544**  
 正则边界点(关于 Dirichlet 问题的) 5:165  
 正则边值问题 5:165  
 正则边着色 2:755  
 正则变换(序列的) 4:556  
 正则表达式 2:514  
**正则表示 4:550**  
 正则表示(代数的) 4:550  
 正则表示(群的) 4:550  
 正则部分(微分方程解的渐近展开式的) 4:877  
 正则部分(Laurent 级数的) 3:359  
 正则参数(集合的) 5:432  
**正则测度 4:548**  
 正则插值矩阵 3:136  
 正则超复变函数 2:951  
 正则簇 3:185  
 正则簇(一元代数的) 5:311  
 正则代数 5:125  
 正则代数曲面 1:102  
 正则代数群元 4:491  
 正则单参数子群 4:556  
 正则单态射 3:255  
 正(则)地图投影 1:489  
 正则(典范)变换 1:580  
 正则(典范)变换(力学中的) 2:810  
 正则(典范)变量变换 2:810  
 正则(典范)方程组 2:806;2:809  
 正则典范系统 4:255  
 正则(典范)形式体系 2:810  
 正则(典范)Hamilton 方程组 5:397  
 正则点(遍历集中的) 2:382  
 正则点(关于范式中合取的) 1:395  
 正则点(积分方程的核的) 4:135  
 正则点(极值曲线上的) 4:546  
 正则点(解析函数的) 1:154  
 正则点(解析集的) 1:173;1:888  
 正则点(解析空间的) 1:174  
 正则点(可微映射的) 4:864  
 正则点列(构造度量空间的) 1:791  
 正则点(曲面的) 2:154  
 正则点(曲线的) 2:152  
 正则点算法 1:395  
 正则点(算子的) 2:594  
 正则点(态空间的) 1:1007  
 正则点(微分流形光滑映射的) 1:888  
 正则点(位势论中的) 4:267  
 正则顶点着色 2:755  
 正则度量(凸曲面上的) 1:851  
 正则端点(边值问题的) 4:928  
 正则端点(Sturm-Liouville 问题的) 5:48  
 正则对(插值矩阵和插值结点集的) 2:854  
 正则对易关系 4:134  
 正则对易关系表示 5:499  
 正则反对易关系 4:134  
 正则泛函 5:467  
 正则范畴 3:13  
 正则仿射概形 1:57  
 正则分布 2:729  
 正则分解 2:19  
 正则分支(解析函数的) 1:435

- 正则覆盖 1:879  
 正则概形 4:553  
 正则格 4:547  
 正则公理 1:291  
 正则共轭半群元 4:545  
 正则共轭基对(拓扑空间的)  
     1:703  
 正则构形 1:742  
 正则广义函数 2:684  
 正则广义函数(在  $L_p$  意义下的)  
     3:18  
 正则函数 4:547  
 正则函数代数 1:71  
 正则函数集(逻辑中的) 3:607  
 正则函数元 1:691  
 正则函数(在无穷远点的) 4:830  
 正则函数(在一点上的) 4:547  
 正则函数(在一区域内的) 4:547  
 正则函数(Riemann 曲面上的)  
     2:164  
 正则恒等式(半群簇的) 5:401  
 正则化 4:557  
 正则化参数 2:561  
 正则化程序(重构算法的) 5:185  
 正则化方法 4:557  
 正则化(广义函数的) 2:684  
 正则化过程 3:656  
 正则化迹(Sturm - Liouville 问题)  
     5:51  
 正则化极小化序列 3:9  
 正则化解 3:8  
 正则化算子 3:8  
 正则化算子的构造 3:8  
 正则化特征行列式(线性算子的)  
     2:870  
 正则化问题(奇异积分方程的)  
     4:852  
 正则化行列式 4:557  
 正则化序列 4:559  
 正则化(序列的)\* 4:559  
 正则化子(有则线性算子的)  
     4:852  
 正则环柄分解 2:814  
 正则环(交换代数中的) 4:550  
 正则环面 4:556  
 正则环(von Neumann 意义下的)  
     4:551  
 正则换位子 1:314  
 正则积分元 4:150  
 正则积分元(分次微分子层的)  
     4:151  
 正则基 1:312;3:737  
 正则基(核型空间中的) 3:999  
 正则基数 1:474  
 正则极值曲线 4:546  
 正则集 4:269  
 正则集(关于合取的) 2:395  
 正则集函数 4:554  
 正则交换 Banach 代数 4:924  
 正则解(偏微分方程的) 2:111  
 正则解释 3:145  
 正则解析函数 1:154  
 正则解析函数元 1:161  
 正则解析函数(Riemann 曲面上的)  
     2:164  
 正则解析曲线 1:151  
 正则解析微分(Riemann 曲面上的)  
     2:164  
 正则局部方程 4:152  
 正则局部方程(关于  $r$  阶偏微分方  
     程组零点的) 4:98  
 正则局部环 2:906  
 正则局部 Noether 环 4:550  
 正则矩 2:844  
 正则矩阵 4:556  
 正则矩阵束 5:123  
 正则开集 1:462;3:128  
 正则空间 4:555  
 正则理想 4:547  
 正则连分数 1:806  
 正则邻域(子多面体的) 4:231  
 正则滤过(滤层) 4:921  
 正则罗 5:462  
 正则幂么元 5:333  
 正则模型 3:784  
 正则内点 2:705  
 正则偶(解析延拓的) 4:854  
 正则齐次边值问题(常微分方程的)  
     1:424  
 正则奇点 4:555  
 正则奇点(常微分方程的) 1:24  
 正则奇点(二阶线性常微分方程的)  
     3:499  
 正则奇点(矩阵函数的) 1:178  
 正则奇异性(完整  $D$  模的) 2:3  
 正则奇异性(微分算子的) 2:3  
 正则嵌入 3:873  
 正则嵌入图 2:761  
 正则强间断性(弹性理论方程的解  
     的) 2:305  
 正则求和法 4:556  
 正则区间列 5:450  
 正则区域 4:136  
 正则区域(关于 Dirichlet 问题的)  
     4:544  
 正则区域(有理映射的) 4:498  
 正则曲线 1:689  
 正则圈积 5:524  
 正则商对象 4:462  
 正则事件 4:545  
 正则收敛级数 5:329  
 正则收敛算子序列 1:836  
 正则收敛 Volterra 级数 5:438  
 正则数(齐次线性积分方程的)  
     3:95  
 正则数(齐次线性积分方程的核的)  
     3:95  
 正(则)双曲面 2:951  
 正则双曲型偏微分方程 3:487  
 正则四面体 5:154  
 正则素数 4:550  
 正则算子 4:661  
 正则随机过程 3:238  
 正则条件分布 1:733  
 正则条件概率 1:734  
 正则同伦 3:20  
 正则统计估计问题 4:993  
 正(则)凸多面体 1:900  
 正则凸曲面 1:851  
 正则图嵌入 2:758  
 正则图( $k$  度的) 2:753  
 正则拓扑空间 4:783;5:200  
 正则外测度 4:548  
 正则完整  $D$  模 2:3  
 正则微分方程 2:581  
 正则微分方程组 2:581  
 正则微分算子 4:401  
 正则微分形式 2:146  
 正则微分形式(代数簇上的)  
     2:147  
 正则微分(Riemann 曲面上的)



- 2:164
- 正则文法** 2:751
- 正则问题(离散规化的) 2:228
- 正则细分(多边形的) 4:112
- 正则线性系统** 4:547
- 正则型点(对称算子的) 2:426
- 正则型(逻辑中的) 4:975
- 正则(性)定理 4:364
- 正则性定理(广义解的) 3:809
- 正则性公理 4:547
- 正则性准则** 4:556
- 正则性(Poisson 方程的解在无穷远处的) 2:431
- 正则序列 5:125
- 正则序列(环元素的) 1:639
- 正则序数 4:15
- 正则依赖性(对小参数的) 4:876
- 正则映射(在平面实代数曲线上的) 4:169
- 正则有理函数的展开 5:317
- 正则语言 2:514
- 正则域扩张 1:369
- 正则元** 4:545
- 正则元(半群的) 4:545
- 正则元(环的) 4:749
- 正则元(环面上的) 4:556
- 正则元(解析函数的) 4:634
- 正则元(Lie 代数的) 1:485
- 正则约束组(变分学中的) 3:328
- 正则值(非线性算子的) 3:948
- 正则值(齐次线性积分方程的) 3:95
- 正则值(齐次线性积分方程的核的) 3:95
- 正则值(算子的) 2:23
- 正则值(微分流形光滑映射的) 1:888
- 正则置换群 4:131
- 正则锥 1:739
- 正则子代数(Boole 代数的) 1:391
- 正则子空间(不定度规空间的) 1:905
- 正则自同构** 4:544
- 正则坐标函数(Галеркин 方法中的) 2:83
- 正则 A 系统 1:2
- 正则 Borel 测度 1:404
- 正则  $\supset$  类 2:770
- 正则  $G$  度规 2:876
- 正则 Gibbs 分布 2:728
- 正则 Gibbs 统计系综 2:730
- 正则 Gibbs 系综 4:991
- 正则  $i$  元微分形式(代数簇上  $r$  次的) 2:147
- 正则 Lie 代数元 4:490
- 正则  $p$  群** 4:548
- 正则 Pfaff 结构 4:152
- 正则 Sturm-Liouville 问题 5:48
- 正则 Weil 域 1:327
- 正整数的加性分拆个数问题 1:600
- 正轴测投影法 1:293
- 正相关** 4:248
- 正定型** 4:248
- 正定 Hermite 核 2:857
- 正定函数(群上的) 5:340
- 正定函数** 4:249
- 正完全连续算子 4:251
- 正状态类(Марков 链的) 3:615
- 正锥** 2:248
- 正锥(序环的) 4:12
- 正锥(有序向量空间中的) 1:739; 4:772
- 正子空间(不定度规空间的) 4:905
- 正 Hermite 核 2:857
- 正 Lagrange 稳定性 3:329
- 正  $n$  边形 2:708
- 正  $p$  边形的作图 2:628
- 正 Poisson 稳定点 3:447
- 正 Poisson 稳定集 5:449
- 正 Poisson 稳定性 3:447
- 正  $(p, p)$  型微分形式( $p$  阶的) 4:188
- 正 Weil 除子 2:270
- 证明** 4:348
- 证明论** 4:348
- 支撑半空间(凸集的) 1:848
- 支撑超平面** 5:81
- 支撑超平面(凸集的) 1:848
- 支撑超平面( $n$  维空间中集合的) 5:81
- 支撑点 4:884
- 支撑泛函 5:80
- 支撑函数** 5:80
- 支撑函数(卵形线的) 4:53
- 支撑函数(凸集的) 1:848
- 支撑平面 5:81
- 支撑直线 1:843; 5:82
- 支付函数 2:621; 2:635; 4:707
- 支付(微分对策的) 2:147
- 支付向量 2:278
- 支集(测度的)\*** 5:81
- 支集(层的截面的) 4:803
- 支集(广义函数的)\*** 5:81
- 支集(函数的)\*** 5:80
- 支集(解释的) 1:145
- 支集(解析泛函的) 1:161
- 支集(扩散过程的) 5:31
- 支集(模的)\*** 5:81
- 支集(奇异单形的) 4:848
- 支集(束的) 5:122
- 支集(素端的) 3:446
- 支集族 1:645
- 支集(Cartier 除子的) 2:271
- 支集(Cauchy 问题的初始条件的) 3:82
- 支配空间** 2:277
- 支配权(表示的) 4:500
- 支配权(控制权) 2:278
- 支配权(Lie 代数的表示的) 4:589
- 支配态射(控制态射) 2:278; 3:986
- 支配特征标 4:500
- 支配文法** 2:749
- 支配序 3:596
- 支配与约束理论 2:752
- 直方图** 2:883
- 直观识别算法 4:109
- 直和** 2:206
- 直和(二次型的) 4:382
- 直和(范畴中对象的) 1:8
- 直和(范畴中一族对象的) 1:858
- 直和(根系的) 4:683
- 直和(局部凸空间的) 5:213
- 直和(双线性映射的) 1:362
- 直和(拓扑群的表示的) 4:591
- 直和(向量空间的) 5:419
- 直和序列 4:956
- 直和(Hilbert 空间的) 2:873; 5:213

- 直积 2:205**  
 直积分(表示的) 5:340  
 直积分(Hilbert 空间的) 2:69  
 直积分(von Neumann 代数的) 5:441  
 直积(广义函数的) 2:686  
 直积(向量空间的) 5:419  
 直积(自动机的) 1:257  
 直积(von Neumann 代数的) 5:440  
 直极线 1:903  
 直角 1:182  
**直角边 1:507**  
**直角旋转仿射量 5:422**  
 直角坐标系 1:488  
 直接变分方法 2:220  
 直接插值问题 3:134  
 直接乘法(形式语言中的) 2:512  
 直接代数余子空间(直接代数补子空间) 1:690  
**直接法 2:204**  
 直接法(变分学中的) 5:380  
 直接法(参数变值的) 1:805  
 直接法(对策论中的) 2:150  
 直接法(构造区组设计的) 1:376  
 直接法(构造算子的极小化序列的) 3:761  
 直接法(解线性组的) 1:422  
 直接法(求解线性代数方程组的) 3:458  
 直接法(确定矩阵的本征值与本征向量的) 3:459  
 直接法(线性代数中的) 3:458  
 直接法(最优控制理论中的) 2:440  
 直接分量文法(上下文相关文法) 2:748  
 直接合同的三角形 4:943  
 直接(或向前)Колмогоров 方程 2:503;3:235;3:284  
**直接计数 2:204**  
 直接解析延拓 1:150  
 直接扩张(赋值的) 5:366  
 直接圈积 5:523  
 直接数值方法(变分学中的) 5:387  
 直接拓扑余 1:690  
 直接相似变换 2:75  
 直接象(正象)(层的) 2:394; 4:806  
 直接证明(算法不可判定性的) 5:317  
 直接值(单层位势的法向导数的) 4:830  
 直接值(单层位势法向导数的) 4:263  
 直接值(单层 Newton 位势法向导数的) 3:905  
 直接值(双层位势的) 4:263  
 直接值(双层 Newton 位势的) 3:906  
 直接追赶法(直接双搜索) 2:286; 4:24  
 直接子群 4:900  
**直径 2:73**  
 直径(八面体的) 5:502  
 直径(二次超曲面的) 4:394  
 直径(二次曲线的) 1:768; 2:73  
 直径(卵形面的) 1:389  
 直径(抛物线的) 4:66  
 直径(双曲线的) 2:941  
 直径(图的) 1:393;2:753  
 直径(椭圆的) 2:341  
 直径维数 3:1000  
 直径(一族连续统的) 1:429  
 直径(圆的) 1:590  
**直觉主义 3:151**  
 直觉主义的拓扑解释 3:153  
 直觉主义分析 3:154  
**直觉主义逻辑 3:155**  
**直觉主义命题演算 3:155**  
 直觉主义命题演算(带等号的) 3:558  
 直觉主义数学 2:861  
**直觉主义算术 3:155**  
 直觉主义算术演算 3:153  
**直觉主义谓词演算 3:155**  
 直觉主义形式数学分析 2:518  
 直觉主义选择公理 3:154  
 直觉主义演算 3:558;2:735  
 直觉主义语义 2:737  
 直棱柱 2:864;4:304  
 直螺旋面 2:849  
 直母线(直纹曲面的) 4:698  
 直母线(Clifford 曲面的) 4:624  
 直谱 1:472  
**直射变换 1:658**  
 直通信信道 1:919  
 直谓分析 2:518  
 直谓类型论系统 5:304  
 直谓形式理论 2:518  
**直谓性 4:286**  
 直谓性质 3:960  
**直纹曲面 4:698**  
 直纹曲面(代数几何学中的) 4:698  
 直纹曲面(微分几何学中的) 4:698  
 直纹旋转曲面 4:690  
**直线 5:28**  
**直线丛 1:715**  
 直线丛的相切线(直纹面的) 1:715  
 直线法 1:523  
 对称抽样法 3:823  
**直线角(二面角的)\* 3:465**  
 直线空间 2:702  
 直线(旗空间中  $m$  阶的) 2:495  
 直线三角剖分 5:269  
 直线三角剖分(多面体的) 4:163  
 直线(射影平面上的) 4:340  
 直线实现(拓扑多面体的) 4:163  
 直线束 5:122  
 直线特解(三体问题的) 5:169  
 直线网 3:890  
 直线(向量空间中的) 4:417  
 直线(Riemann 空间中的) 4:650  
 直向表示结合代数 4:595  
 直圆柱 1:926  
 直圆锥 1:738  
 值(闭表示式的) 1:399  
 值(代数运算在一点上的) 1:105  
 值(多项式在一点上的) 4:669  
 值(二人零和对策的) 5:302  
**值分布论 5:366**  
 值分布论的抛物情形 5:368  
 值分布论的双曲情形 5:368  
 值分布(亚纯函数的) 1:616  
 值函数 1:829  
 值(函数的) 2:586



- 值函数(最优控制中的) 3:1042
- 值(混合对策的) 3:675
- 值集 2:585
- 值集(函数的) 4:488
- 值(连分数的) 1:806
- 值群(赋值的) 5:364
- 值(微分对策的) 2:148
- 值(无穷积的) 3:57
- 值(序列的项的) 4:784
- 值域(对应的) 1:866
- 值域(泛函的) 5:345
- 值域(函数的) 4:488**
- 值域(算子的) 3:919;3:1025
- 值域(线性算子的) 4:927
- 值域(映射的) 3:609
- 值( $\Omega$ 系统中项的) 1:106
- 指标 3:38**
- 指标(半伪 Euclid 空间的) 4:775
- 指标(包括图形的) 2:469
- 指标(点关于一条曲线的) 3:556
- 指标定理 1:559
- 指标方程 2:24
- 指标(方程的) 3:919
- 指标方程(Euler 方程的) 2:397
- 指标(非 Fredholm 算子的) 3:41
- 指标公式 3:39**
- 指标公式(值在  $K$  群中的) 3:42
- 指标(函数的) 4:851
- 指标(函数在临界点的) 4:706
- 指标(活动容量)(上下文无关文法的) 2:748
- 指标集(枚举集)(递归可枚举集族的) 2:367
- 指标(局部算法的) 1:126
- 指标类 1:559
- 指标(配极的) 4:217
- 指标(奇点的)\* 4:863**
- 指标(奇异积分方程的) 4:851
- 指标(奇异积分算子的) 4:851
- 指标(算子的)\* 3:43**
- 指标(伪 Euclid 空间的) 4:366; 4:775
- 指标(线性微分算子复形的) 3:476
- 指标(向量场的) 4:690
- 指标(序列的项的) 4:784
- 指标(一个数模  $m$  的) 3:38
- 指标(整函数的) 2:791
- 指标转移张量 5:422**
- 指标(Fredholm 算子的) 2:562
- 指标(Kronecker 指标)(不动点的) 3:379
- 指标(Riemann-Hilbert 问题的) 4:625
- 指标(Wiener-Hopf 方程的) 3:97
- 指称的语义 5:155
- 指定曲率 4:652
- 指令 4:321
- 指令(Snobol 语言中的) 4:885
- 指令(Turing 机的) 5:290
- 指示变量 1:874
- 指示函数(随机事件的) 3:35
- 指示函数(特征函数)(集合的) 1:561
- 指示函数(特征函数)(区间的) 4:493
- 指示矩阵 3:508
- 指数 2:419
- 指数(半群的) 3:816
- 指数(半群元素的) 3:816
- 指数(边值问题的) 1:418;1:427
- 指数不等式(概率论中的) 1:569
- 指数(不可约多项式的) 4:781
- 指数陈特征标 4:630
- 指数簇 5:399
- 指数的算子半群 4:764
- 指数(迭代的) 3:202
- 指数定律 4:277
- 指数独立性定理(Dedekind 环中的) 1:585
- 指数(二次型的) 3:362;4:707
- 指数二分性 2:73;3:498;4:400
- 指数(反射群的) 4:537
- 指数方程 2:374
- 指数分布 2:417**
- 指数分布族(条件概率密度的) 4:495
- 指数分离的子空间 5:390
- 指数覆盖 1:879
- 指数(割补术的) 3:832
- 指数(轨道的) 3:831
- 指数函数 2:418**
- 指数函数回归 4:541
- 指数函数(实的)\* 2:419**
- 指数和 5:277
- 指数积分 3:103
- 指数(积分方程问题的) 2:127
- 指数积分函数 1:747;3:742
- 指数界(大偏差概率的) 4:311
- 指数可解 Lie 群 3:432
- 指数扩张(微分域的) 2:421
- 指数(流形的) 4:821
- 指数密度 2:638
- 指数(幂的) 2:419
- 指数幂级数代数 2:369
- 指数(区域在链环的投影下的) 3:270
- 指数曲线 2:418
- 指数(群的)\* 2:417**
- 指数生成函数(母函数) 2:693
- 指数(数  $a$  模  $m$  关于底的) 1:761
- 指数条件稳定点(流形的) 1:735
- 指数条件稳定性 1:735
- 指数拓扑 2:419**
- 指数(拓扑空间的) 2:419
- 指数(完全连续向量场的) 2:493
- 指数(稳定分布的) 4:977
- 指数稳定性 3:582;4:400;4:961
- 指数稳定性(抽象微分方程的解的) 3:582
- 指数稳定性(点关于映射的) 3:582
- 指数稳定性(Riemann 流形上微分方程解的) 3:583
- 指数(线性共轭问题的) 1:428
- 指数形式(复数的) 1:714
- 指数型函数 2:591**
- 指数映射 2:419**
- 指数映射(具有联络的流形的) 2:419
- 指数映射(Lie 群的) 2:419
- 指数(有限群的) 4:726
- 指数(振荡矩阵的) 4:45
- 指数正则化 4:559
- 指数(指标)(广义 Riemann-Hilbert 问题的) 1:419;2:676
- 指数(指标)(向量场的) 2:493; 4:690
- 指数增长(群和代数中的) 4:234
- 指数(子群的)\* 5:60**

- 指数(子群在群中的) 1:867;5:60  
 指数组(模  $m$  的) 3:38  
 指数(Coxeter 群的) 1:884  
 指数(Del Pezzo 曲面的) 4:502  
 指数 Diophantus 集 2:197  
 指数(Dirichlet 级数的) 2:217;  
 2:219  
 指数(Fano 簇的) 2:451  
 指数(Fredholm 问题的) 1:425  
**指数 Lie 代数 3:407**  
 指数(Lie 代数的) 1:652;  
 3:409  
 指数 Lie 代数自同构 2:74  
**指数 Lie 群 3:427**  
 指数(Morse 指数)(临界点的)  
 3:829;4:706  
 指向相同的向量 5:404  
 指针机器 3:591  
**制图投影 1:489**  
 制图网格 1:489  
**制图学中的数学问题 1:493**  
 质点 2:312  
**质量 3:631**  
 质量(多面体链的) 3:632  
 质量泛流(泛流质量) 1:223  
**质量分布的位势 4:261**  
**质量和余质量 3:631**  
 质量集中 5:393  
 质量亏损 3:631  
 质量流 4:812  
 质量判据 3:655  
 质量(区间估计的) 1:741  
**质量算子 3:632**  
 质量问题 2:19  
 质量( $r$  向量的) 3:632  
**秩 4:489**  
 秩(本原置换群的) 4:292  
 秩(本征值的) 2:557  
 秩(代数的) 4:489  
**秩(代数群的)\* 4:491**  
 秩(代数向量丛的) 5:410  
 秩(对称空间的) 2:732  
 秩(二次型的) 4:383  
 秩(复 Lie 群的) 4:490  
 秩(赋值的) 5:365  
 秩(根系的) 4:683  
 秩(关系的) 4:561  
 秩函数(偏序集上的) 4:552  
 秩函数(正则环上的) 4:552  
**秩和检验 4:492**  
 秩(基的) 1:315  
 秩(几何对象的) 2:711  
**秩检验 4:493**  
 秩(解析向量丛的) 5:411  
 秩(局部自由层的) 3:550  
 秩(局部自由群的) 3:549  
 秩(矩阵的) 3:461  
 秩(离散范数的) 2:228  
**秩(模的)\* 4:490**  
 秩(拟阵子集的) 3:678  
 秩(偏序集元素的) 4:552  
**秩(奇点的)\* 4:491**  
**秩(群的)\* 4:489**  
 秩(实 Lie 群的) 4:490  
 秩数(图的) 2:759  
 秩(双线性型的) 1:360  
 秩(算子的) 3:994  
 秩(随机向量的分量的) 4:493  
**秩统计量 4:492**  
 秩(投射模的) 4:490  
 秩(图形的) 2:469  
 秩(椭圆曲线的) 2:346  
 秩(外微分形式的) 1:482  
 秩(微分多项式环上的) 2:98  
 秩(稳定自由模的) 4:978  
 秩(厦的) 5:180  
 秩(线性不等式组的) 3:489  
**秩(线性常微分方程的)\* 4:491**  
 秩(线性常微分方程组的) 4:492  
 秩(线性代数群的) 1:485  
 秩(线性映射的) 4:489  
**秩向量 4:493**  
 秩(向量空间的) 3:488  
 秩(向量组的) 4:489  
 秩(有限群概形的) 2:480  
 秩(自由半群的) 2:570  
 秩(自由代数系统的) 2:565  
 秩(自由模的) 2:569  
 秩(自由群的) 2:567  
 秩(自由 Lie 代数的) 3:408  
 秩(组合几何中子集的) 1:666  
 秩(左模的) 4:490  
 秩(Abel 群的) 1:13  
 秩( $(h, h, n)$  流形的) 3:604  
**秩(Lie 代数的)\* 4:490**  
**秩(Lie 群的)\* 4:490**  
 秩(Pfaff 方程组的) 4:149  
 秩(Pfaff 结构的) 4:152  
 《致 Eratosthenes 的信》(Archimedes  
 的) 3:63  
 滞后(常微分方程中自变量的)  
 2:139  
 滞后窗 4:917;4:932  
 置换 2:781;4:130  
**置换关系 4:133**  
 置换关系(湮没算子和对易算子的)  
 1:184  
 置换恒等式(半群簇中的) 5:401  
**置换(集合的)\* 4:132**  
 置换矩阵 3:818  
 置换密码 1:894  
**置换(排列) 4:130**  
**置换群 4:131**  
 置换秩 5:251  
**置换子 4:134**  
 置换自动机 1:256  
**置信概率 1:741**  
**置信估计 1:740**  
 置信估计量 3:906  
**置信集 1:741**  
**置信界 1:740**  
**置信区间 1:741**  
 置信区域 3:151  
**置信水平 1:741**  
 置信系数 1:741  
 中点法 2:403  
 中点规则(中点法则) 3:741;  
 4:391  
 中点凸函数 1:844  
 中断机制 4:81  
 中断 Марков 过程 3:623  
 中核(么拟群的) 3:564  
 中继触点电路 4:572  
**中继触点模式 4:572**  
 中继触点网络 4:572  
 中间积分(微分方程的) 3:111  
 中间结果(算法的) 1:120  
 中间结合元素(么拟群的) 3:254  
 中间可归约性 5:285  
 中间律 2:264  
**中间逻辑 3:130**



- 中间命题演算 3:130;4:352  
 中间拟群 4:429  
 中间曲面(平均曲面) 1:642;2:31  
**中间数 3:707**  
 中间值定理 4:291  
 中间值性质 4:291  
 中间 Banach 空间 3:141  
**中间 Jacobi 簇 3:129**  
**中立型微分方程 3:898**  
 中面 4:807  
 中山引理 3:222;3:795  
 中微子 4:567  
 中位曲面 4:691  
**中位数(统计学中的) 3:706**  
**中线 3:706**  
 中线(三角形的) 3:706;4:172  
 中线(梯形的) 3:706;5:264  
 中心 1:537;1:538  
 中心薄片定理 5:184  
 中心差分 2:473  
 中心差分(函数的) 4:1026  
 中心(冲击绝热线的) 4:813  
**中心代数 1:532**  
**中心单代数 1:537**  
 中心电荷 5:427  
 中心对称集 4:981  
 中心(对称谓词的) 3:608  
 中心(多圆盘的) 4:223  
 中心(二次曲面的) 4:394;  
 5:85  
 中心(二次曲线的) 1:768;  
 4:737  
 中心(反演的) 3:172  
 中心(泛包络代数的) 1:498  
 中心仿射变换 1:540  
 中心仿射弧长 1:55  
**中心仿射几何学 1:540**  
**中心仿射空间 1:540**  
 中心仿射曲率 1:55  
 中心仿射群 1:59  
 中心函数 2:681  
**中心和焦点问题 1:539**  
 中心化参数 4:712  
**中心化子 1:537**  
**中心(环的)\* 1:539**  
 中心(环面的) 5:231  
 中心混合矩 3:843  
 中心混合矩( $k$  阶的) 3:803  
**中心积(群的)\* 1:537**  
**中心极限定理 1:534**  
 中心极值曲线场 2:434  
 中心集值曲线族 2:442  
 中心(交错环的) 1:146  
**中心焦点 1:540**  
 中心焦点型轨道 4:397  
 中心(解析函数元的) 1:160  
 中心矩( $k$  阶的) 3:802  
 中心可除代数 2:269  
 中心列 3:913  
**中心列(群的)\* 1:537**  
 中心流形理论 4:399  
 中心幂等元 4:594  
 中心(幂级数的) 4:279  
 中心(模范畴的) 3:797  
 中心(抛物型圆网的) 3:890  
 中心膨胀 2:917  
**中心(偏序集的)\* 1:539**  
 中心(球面的) 4:936  
 中心(球面罗的) 5:461  
 中心区域(随机分配的) 4:477  
**中心(群的)\* 1:539**  
 中心群扩张 1:647  
 中心群元 1:539  
 中心(双曲线的) 2:941  
 中心(双圆形域的) 2:276  
 中心顺序统计量 4:8  
 中心投影 4:139,326  
 中心(图的) 2:753  
 中心(椭球面的) 2:342  
 中心(椭圆的) 2:341  
 中心(椭圆空间中球面的) 4:624  
**中心(拓扑动力系统的)\* 1:538**  
 中心(位似变换的) 2:917  
 中心谓词 3:608  
 中心下标(幂级数的) 3:683  
 中心(线汇中射线的) 1:765  
 中心(线束的) 3:525  
 中心型奇点(微分方程的) 4:860  
 中心因子(子群列中的) 1:537  
 中心(有心)曲面 5:85  
 中心(有心)曲线 4:737  
 中心(有心)圆锥曲线 1:768  
 中心元 3:243  
 中心(圆束的) 5:122  
 中心(圆网的) 3:890  
 中心(圆锥曲线的) 1:768  
 中心直射变换 2:907  
 中心(直线丛中射线的) 1:715  
**中心指数 1:532**  
 中心(中心仿射空间的) 1:540  
 中心轴测投影 1:293  
 中心子群 5:60  
 中心子群列 5:60  
 中心子群系统 5:61  
 中心(Loos 对称空间的) 5:103  
 中性函数微分方程 2:601  
 中性(零性)元(内积空间中的)  
 2:877  
 中性流形(Крейн 空间中的)  
 3:294  
 中性曲线(Orre-Sommerfeld 方程  
 的) 4:22  
 中性双线性型 5:516  
 中性元(超群中的) 2:682  
 中性元(偏序集的) 1:539  
 中性元(Крейн 空间中的) 3:294  
 中性子空间(不定度规空间的)  
 4:905  
 中性子空间(切空间的) 2:950  
 中央存储器(机器中的) 3:591  
 中野定理 5:532  
 中野负向量丛 3:888  
 中野正向量丛 4:253  
 中值定理 1:141;2:481;2:829  
 中值公式(Riemann 积分的)  
 4:628  
 中值公式(Stieltjes 积分的)  
 4:1039  
 中缀算符(Algol 语言中的) 1:118  
 中缀运算 3:1021  
 中子流方程 3:898  
 中子流函数 3:898  
**中子流理论 3:898**  
 中子年龄 3:898  
 中子年龄方程 3:898  
 中子年龄理论(中子流理论)  
 3:898  
 中子迁移 5:433  
 中子输运的运动论方程 2:174;  
 2:175  
**忠实表示 2:450**

- 忠实函子** 2:449  
**忠实矩阵表示**(结合代数的) 2:476  
**忠实模** 3:794  
**忠实平坦态射** 2:497  
**忠实平坦下降定理** 2:509  
**忠实群表示** 2:449  
**忠实线性表示** 4:145  
**忠实状态**(von Neumann 代数上的) 4:413  
**忠实自同态** 2:449  
**终点**(触点网络的) 1:800  
**终点**(道路的) 4:108  
**终端**(多方向信道的) 1:545  
**终端奇点** 3:746  
**终端域**(二次微分的) 2:731  
**终端字母表**(EDL 系统的) 3:315  
**终对象** 2:470  
**终对象**(范畴的) 3:1001  
**终对象**(范畴的) 3:1001  
**终极脉络** 1:17  
**终极试验**(对失效函数表的) 4:575  
**终极析取范式** 2:16  
**终极组**(Boole 函数的变元的) 1:394  
**终集**(部分等距算子的) 1:696  
**终结代换公式** 3:970  
**终结点**(超越曲线上的) 5:240  
**终结状态** 1:276  
**终紧空间**(Lindelof 空间) 3:452  
**终紧拓扑空间** 1:685;1:881; 3:990  
**终紧性** 1:685;5:201  
**终紧性条件** 5:201  
**终止点** 4:202  
**终止符**(范畴文法中的) 2:746  
**终止符**(生成文法中的) 2:750  
**终止隔离子性质** 5:202  
**终止构形**(Turing 机器的) 5:290  
**终止集**(动态策略中的) 2:304  
**终止阶段**(大粒子方法中的) 3:350  
**终止位置**(对策中的) 4:247  
**终止支付**(动态策略中的) 2:304  
**终止状态集** 2:515  
**终止状态**(Turing 机器的) 5:290  
**钟形对策** 1:322  
**种类** 4:909  
**种**(算术群元素的)\* 2:699  
**种子**(伪随机生成器的) 1:895  
**众数** 3:783  
**重力波** 5:456  
**重力勘探** 2:725  
**重球法** 2:845  
**重心加细** 1:882  
**重心加细**(单纯复形的) 4:835  
**重心加细**(覆盖的) 4:76  
**重心**(三角形的) 3:706  
**重心重分** 1:312  
**重心重分**(单纯复形的) 4:835  
**重心重分**(几何复形的) 1:312  
**重心**(重心坐标中的) 1:311  
**重心坐标** 1:311  
**重要性选择算法** 3:823  
**重子守恒定律** 4:566  
**重子数** 4:406  
**周长** 4:123  
**周长**(可测集的) 4:123  
**周长**(可求长曲线所围平面区域的) 4:123  
**周期**(摆线的) 1:923  
**周期半群** 4:126  
**周期半群簇** 5:401  
**周期**(半群的) 3:816  
**周期**(半群元素的) 3:816  
**周期倍增** 4:694  
**周期倍增通向浑沌的道路** 4:694  
**周期边界条件** 5:49  
**周期变换逼近** 1:194  
**周期超平行体**(Abel 函数的) 1:12  
**周期带**(复变函数的) 4:125  
**周期**(单周期函数的) 4:842  
**周期**(第二类正规椭圆积分的) 2:349  
**周期**(第三类正规椭圆积分的) 2:349  
**周期点** 4:126  
**周期点**(动力系统的) 4:126  
**周期**(动力系统的点的) 4:126  
**周期**(二次型的链中的) 4:387  
**周期**(范畴中的对合的) 3:177  
**周期非平稳的随机过程** 4:915  
**周期分布函数**(动态对策中的) 2:304  
**周期**(复变函数的) 4:125  
**周期格**(双周期函数的) 2:283  
**周期关系**(Jacobi  $\theta$  函数的) 3:212  
**周期轨道** 4:128  
**周期函数** 4:125  
**周期**(函数的)\* 4:124  
**周期函数**(复变量的) 4:125  
**周期基**(双周期函数的) 1:315; 2:283  
**周期基**(Abel 函数的) 1:12  
**周期加倍的场景**(对动力系统中的浑沌的) 5:350  
**周期解** 4:127  
**周期解**(常微分方程或方程组的) 4:127  
**周期解**(近于间断的) 4:571  
**周期矩阵** 5:226  
**周期矩阵**(环面的) 1:717  
**周期矩阵**(Abel 函数的) 1:12  
**周期矩阵**(Abel 微分的) 5:163  
**周期矩阵**(Abel 微分的基的) 1:14  
**周期矩阵**(Riemann 曲面的) 3:220;4:641  
**周期模可比的点**(关于双周期函数的) 2:283  
**周期模**(双周期函数的) 2:283  
**周期模**(椭圆积分的) 2:348  
**周期模**(Abel 函数的) 1:11  
**周期平行四边形** 1:531;2:283  
**周期平行四边形**(双周期函数的) 2:283  
**周期谱**(Hill 算子的) 2:883  
**周期强迫阻尼摆** 4:118  
**周期群** 4:126  
**周期**(群的)\* 4:125  
**周期群**(复变函数的) 4:125  
**周期群**(双周期函数的) 2:283  
**周期群**(Abel 函数的) 1:11  
**周期**(双周期函数的) 2:283  
**周期态射** 4:257  
**周期图** 4:128  
**周期图**( $m$  阶的) 4:129  
**周期**(椭圆积分的) 2:348  
**周期**(伪周期函数的) 4:372  
**周期问题**(大范围变分学的) 5:384



- 周期吸引子 1:181  
 周期系数的线性微分方程组 3:508  
 周期系(Abel 函数的) 1:11  
 周期相关的随机过程 4:915  
 周期(谐和振动的) 2:835  
 周期性定理 4:27  
 周期性特征(矩阵的) 5:162  
 周期(循环小数的) 3:51  
**周期映射 4:123**  
 周期映射(范畴中的) 3:177  
 周期与拟周期系( $\theta$  函数的) 5:161  
 周期运动 2:311;3:164  
 周期振荡 2:826  
 周期(周期解的) 4:127  
 周期(自由谐振动的) 2:567  
 周期(Abel 函数的) 1:11  
 周期(Riemann 曲面上微分的) 2:164  
**周期 Марков 链 3:619**  
 周期(Марков 链的正状态类的) 3:616  
**周(炜良)簇 1:586**  
**周(炜良)定理 1:586**  
 周(炜良)概形 1:586  
**周(炜良)环 1:585**  
 周(炜良)相交理论 3:148  
 周(炜良)型簇 1:528  
 周(炜良)移动引理 3:148  
 周(炜良)引理 1:691  
 周(炜良)坐标 1:586  
 周(炜良)坐标(簇的) 1:529  
 粥样区域 4:1024  
**轴测投影法 1:293**  
 轴(关于向量的) 5:405  
 轴(抛物线的) 4:66  
 轴(劈锥曲面的) 1:781  
 轴平面(椭圆空间中球面的) 4:624  
 轴(双曲抛物面的) 2:944  
 轴(双曲线的) 2:941  
 轴(椭圆抛物面的) 2:351  
 轴(椭圆平面上的圆的) 4:623  
 轴向点(流形上的) 2:342  
**轴向量 1:286**  
 轴圆(环面的) 5:231  
 轴(直圆柱的) 1:926  
 轴(锥的) 1:738  
**逐步语义系统 4:1033**  
 逐次超松弛法 2:960;4:570  
 逐次代换法 3:217;3:942  
 逐次计划改进法 4:833  
 逐次诱导定理 3:46  
 逐点遍历定理 1:370  
 逐点收敛拓扑 3:1029  
 逐项可积性(函数级数的) 4:795  
 逐项可积性(一致收敛级数的) 5:330  
 逐项可微性(函数级数的) 4:795  
 逐项微分条件(级数在一致收敛下的) 5:331  
 逐字母编码 1:632  
 主比例尺(地图投影的) 1:489  
 主不可分解左  $A$  模 1:481  
 主部(函数增量的) 2:93  
 主部(拟线性双曲组的) 4:433  
**主部(微分算子的)\* 4:300**  
 主部(向量丛元素的) 1:779  
 主部选择法 3:823  
 主部(Laurent 级数的) 1:154; 3:359  
 主猜想(组合拓扑学的) 4:163; 4:231;4:240  
 主超滤子 5:307  
 主除子 1:78;2:270  
 主除子(环元素的) 2:270  
 主除子(环中的) 2:270  
 主丛 2:151  
 主带( $K$  空间中的) 4:774  
 主的格元素 3:862  
 主定理(Galois 扩张的) 2:626  
 主定理(Galois 理论的) 2:627  
 主动力 2:312  
 主动密码分析员 1:896  
 主动算法 3:1049  
 主对偶理想 4:299  
 主多项式(一个代数的元素的) 2:237  
**主法线 4:300**  
 主法线(曲线的) 2:153  
 主范畴(范畴文法的) 2:746  
 主范数(一个代数的元素的) 2:237  
**主方向 4:296**  
 主方向(地图投影的) 1:489  
 主方向(曲面上的) 2:155  
 主分式理想 4:299  
 主函数类(Riemann 曲面上的) 4:639  
 主化子(逻辑公式的) 1:796  
 主迹(一个代数的元素的) 2:237  
 主积分表示(超几何函数的) 2:957  
**主基本解 4:297**  
**主基上的形变 2:31**  
 主极化 4:217  
 主间隙(逻辑中的) 4:975  
 主交叉同态 1:647;1:890  
 主接合 1:780  
 主解 4:847  
**主解析纤维化 4:294**  
 主开集 4:933  
 主可计算枚举 2:367  
 主类(扩张中域的) 1:98  
 主理想 4:299  
 主理想定理 1:597;2:847  
**主理想环 4:300**  
 主理想整环 2:21;4:300  
**主列 4:301**  
 主滤子 2:469  
 主滤子(格中的) 4:299  
 主枚举 5:252  
 主抛物线(椭圆抛物面的) 2:351  
 主平面(线汇的) 1:766  
**主平移 4:301**  
**主齐性空间 4:298**  
 主齐性  $G$  集 4:298  
 主球(束中的) 1:752  
**主曲率 4:296**  
 主曲面 3:604  
 主曲面(线汇的) 1:766  
 主曲面(直线丛的) 1:715  
 主确定场函数 2:712  
 主确定几何对象函数 2:711  
**主特征标 4:295**  
 主题 2:884  
 主题范畴 3:838  
**主题理论 3:837**

- 主题上同调空间函子 3:837  
 主体(Snobol 语言中的) 4:885  
 主同构(类域论中的) 1:595  
 主同构(整体类域论中的) 1:595  
 主同痕 3:200  
 主同痕(广群的) 3:200  
 主同余子群 1:766  
 主同余子群(水平  $N$  的) 3:792  
 主投影性质 4:662;5:532  
 主网(区域中映射的) 3:612  
 主未知量(相容线性代数方程组的)  
 3:461  
 主系列表示 4:796;3:53  
 主系列(表示的) 1:818  
 主系(线性微分算子的) 3:475  
**主纤维丛 4:297**  
 主纤维丛(具有构造群的) 2:618  
 主向量 2:327  
 主象征(经典伪微分算子的)  
 4:363  
 主象征(算子的) 5:93  
 主象征(微分算子的) 4:301  
 主象征(Fourier 积分算子的)  
 2:531  
**主型偏微分算子 4:301**  
 主型偏微分算子(具有常系数的)  
 4:301  
 主序模 2:237  
 主序模(域的) 1:100  
 主序模(Dedekind 整环上的) 4:6  
 主要部件(字母表上链的部件系统  
 的) 5:114  
 主要地极化的 Abel 簇 5:98  
 主要定理(有限维结合代数的)  
 2:476  
 主要谓词 1:125  
 主伊代尔 3:4  
 主伊代尔群 1:596  
**主因子 4:296**  
 主因子(半群的) 4:296  
 主因子(子群列的) 3:987  
 主元 2:657;3:173  
 主支(反三角函数的) 3:171  
 主值(对数的) 3:553  
 主值(复数辐角的) 1:714  
 主值积分 3:28  
 主轴(圆锥曲线的) 1:768  
 主子模 5:65  
 主子群列 5:60  
 主子式 3:764  
 主子式(线性代数方程组的)  
 3:461  
**主  $G$  对象 4:298**  
 主  $G$  对象(范畴中的) 4:298  
 主 Weil 除子 2:270  
 驻值问题(绕射的) 2:172  
 驻值作用量原理 5:396  
**柱测度 1:931**  
 柱测度(多实变函数论中的)  
 1:931  
 柱测度(拓扑向量空间上的)  
 1:931  
 柱代数 1:931  
 柱定理 4:650  
**柱函数 1:926**  
 柱函数(半整数阶的) 1:927  
 柱函数(第二类) 1:927  
 柱函数(第三类) 1:927  
 柱函数(第一类) 1:927  
 柱函数(任意阶的) 1:926  
 柱函数(整数阶的) 1:927  
**柱集 1:931**  
**柱结构 1:931**  
**柱面 1:931**  
 柱面地图投影 1:489  
 柱面螺线 2:848  
 柱面投影 4:326  
 柱面相空间 4:198  
**柱面坐标 1:926**  
 柱面( $n$  次的) 1:932  
**柱体 1:926**  
**柱形面 1:932**  
 柱  $\sigma$  代数 1:931  
 专用密文破译 1:894  
 砖 2:725  
 转换程序 1:129  
 转换规则(正规椭圆积分的)  
 2:349  
 转换矩阵(向量空间的基之间的)  
 3:512  
 转换器 1:276  
 转换算子(沿轨道的) 1:519  
 转换图 5:155  
 转换(Petri 网中的) 4:146  
 转(迁)移图(正则文法的) 2:751  
 转向点 4:876  
 转向点(微分方程的) 1:62  
 转向点问题 4:145  
**转移(带禁忌的)\* 5:250**  
 转移(到商空间的) 2:593  
 转移点(微分方程的) 1:62  
 转移定理 3:781  
 转移定理(关于射线函数的)  
 2:724  
**转移定理(Diophantus 逼近中的)  
 5:243**  
**转移概率 5:249**  
**转移概率矩阵 3:676**  
 转移概率密度 3:615  
 转移过程 1:266  
**转移函数 5:247**  
 转移函数(主解析纤维化的)  
 4:295  
 转移矩阵 2:614;2:617;3:508  
 转移矩阵(拓扑 Марков 链的)  
 5:94  
 转移矩阵(自动机的) 1:260  
 转移密度 5:248  
 转移密度(Марков 过程的) 5:508  
 转移期望 4:415  
 转移速率 5:249  
**转移算子半群 5:248**  
 转移系统 1:276  
 转移现象(带小参数常微分方程的)  
 2:142  
 转移(由容许控制的) 4:242  
**转置方程(组) 5:259**  
 转置积分方程 2:563  
**转置矩阵 5:259**  
 转置 Fredholm 核 2:562  
 转置 Young 图 5:533  
**装备流形 4:666**  
 装备(流形的) 4:666  
 装备(向量丛的) 3:832  
 装备 Hilbert 空间 4:666  
**装备 Hilbert 空间 4:666**  
 装配场 2:713  
 装配对象 2:713  
 装配流形 2:713  
 装饰物 4:537  
 装置 1:264;1:919



- 状态变量 1:827
- 状态反馈 5:123
- 状态反馈标准形式 5:124
- 状态公理 1:921
- 状态和 2:728
- 状态集 1:275
- 状态集(通信信道的) 1:544
- 状态空间 1:428
- 状态空间反馈 1:268
- 状态空间系统 1:921
- 状态同构(自动机的) 1:259
- 状态同态(自动机的) 1:259
- 状态约束 2:440
- 状态字母表 2:515
- 状态坐标 1:827
- 状态( $C^*$ 代数上的) 4:250
- 追赶法(双搜索法)\* 2:286
- 追随者(对策中的) 2:634
- 追逃对策 4:376
- 追逃和规避对策 2:148
- 追踪对策 4:376
- 追踪对策(具有预定持续时间的) 4:376
- 追踪曲线 1:912
- 锥 1:738
- 锥点 4:663
- 锥点(凸曲面的) 5:131
- 锥顶地图投影 1:489
- 锥顶点(完全凸曲面上的) 1:850
- 锥(链复形的态射的) 1:711
- 锥面 1:769
- 锥面螺线 2:848
- 锥(实向量空间中的) 1:739
- 锥条件 1:740
- 锥(拓扑空间上的) 1:738
- 锥(外接于球面的) 3:84
- 锥(向量空间中的) 5:463
- 锥形投影 4:326
- 锥形网 1:769
- 锥(一点的) 1:715
- 锥(Banach 空间中的) 1:739
- 锥(Euclid 空间中的) 1:738
- 准测度 4:283
- 准范数 4:283
- 准基 4:282
- 准紧集 1:679
- 准紧空间 4:282
- 准紧收敛拓扑 3:1029
- 准紧一致结构 5:324
- 准可序群 4:283
- 准口径(拓扑空间的) 1:458
- 准流形 3:601
- 准内积 4:283
- 准内积空间 4:283
- 准确到  $n$  位有效数字 4:823
- 准确度的局部阶(数值方法的) 2:138
- 准确有效数字 4:823
- 准素表示 4:289
- 准素泛代数 5:349
- 准素分解 4:288
- 准素根 1:38
- 准素环 4:289
- 准素既约表示(理想的) 1:39
- 准素理想 4:288
- 准素理想(交换环的) 4:288
- 准素理想(Banach 代数的) 1:72
- 准素群 1:13;4:58
- 准素循环群 1:13
- 准素真子模 4:288
- 准素子模(Noether 环上的) 4:288
- 准桶型空间 3:81
- 准完全类(代数的) 3:606
- 准完全类(自动机的) 1:256
- 准线 2:208
- 准线(二次曲线的) 1:768
- 准线(抛物线的) 4:66
- 准线(双曲线的) 2:941
- 准线(椭圆的) 2:341
- 准线(线汇的) 1:766
- 准线(圆锥曲线的) 1:768
- 准线(直纹曲面的) 4:698
- 准线(柱面的) 1:931
- 准线(锥面的) 1:769
- 准 Hilbert 空间 4:283
- 资源受约束的项目评估技术—费用问题 4:325
- 资源受约束的项目评估技术—时间问题 4:325
- 子标架 2:181
- 子表示 4:594;4:601
- 子表示(表示的)\* 5:68
- 子表述性质 5:59
- 子层 4:804
- 子场所 3:540
- 子超图 2:959
- 子程序 4:979
- 子丛(向量丛的) 5:408
- 子簇 5:65
- 子簇(对合的) 5:69
- 子簇格 1:112
- 子簇(环的) 5:401
- 子簇系 5:121
- 子代数(代数系统的) 1:105
- 子代数格 5:56
- 子对象 5:66
- 子对象(范畴中对象的) 5:66
- 子对象(几何对象的) 2:711
- 子多面体 4:230
- 子范畴 5:57
- 子复形 1:707
- 子复形(胞腔复形的) 1:532
- 子覆盖(拓扑空间的覆盖的) 1:881
- 子格 5:64
- 子公式性质 3:697
- 子过程(Марков 过程的) 2:605
- 子函子 2:611
- 子环 4:669
- 子基 4:282
- 子基(拓扑的) 5:360
- 子集环 1:564
- 子集(控制 Riesz 空间的) 4:662
- 子矩阵 5:65
- 子空间(生成子空间的) 5:262
- 子空间(由集合生成的) 3:485
- 子空间有限偏序集 4:590
- 子空间(组合几何中的) 1:666
- 子流形 5:64
- 子流形系 5:121
- 子流形(在一点横截的) 5:262
- 子流形(Riemann 空间的) 4:647
- 子幂等扭根 4:471
- 子模 5:65
- 子模型(模型的) 1:105
- 子谱系 4:661
- 子群 5:59
- 子群的指数 5:60
- 子群格 2:783
- 子群列 5:60
- 子群系统 5:61

- 子群(由集合生成的) 5:59
- 子群(有限指数的) 5:60
- 子群(元素交换的) 4:956
- 子群(整阿代尔的) 1:40
- 子群(主阿代尔的) 1:40
- 子群(Lie 群的) 3:423
- 子商定理 1:818
- 子式 3:764
- 子式( $k$  阶的) 3:764
- 子图 3:753
- 子图(由顶点集产生的) 3:753
- 子图(由顶点集导出的) 3:753
- 子拓扑邻近空间 5:204
- 子网 4:103
- 子午线 4:943
- 子午线(环面的) 5:231
- 子午线(链环的分支的) 3:273
- 子午线(模型曲面的) 3:838
- 子午线(纽结分支的) 3:271
- 子午线(旋转曲面的) 4:690
- 子系统(代数系统的) 1:105
- 子系统(控制论系统的) 1:918
- 子移位 4:809
- 子移位(有限型的) 5:94
- 子语言 4:318
- 子域(域的) 3:647
- 子字 2:514;3:13
- 子 Lagrange 平面 5:446
- 子 Wronski 行列式( $i$  阶的) 5:526
- 紫外发散 4:582
- 紫外截断 4:408
- 字 5:522
- 字长 5:522
- 字的等价问题 1:131
- 字的级数 1:630
- 字典 2:512;2:750;3:643
- 字典函数(词函数) 2:482;3:643
- 字典积 4:10
- 字典积(集合的) 3:399
- 字典序 3:399
- 字段(Snobol 语言中的) 4:885
- 字符串(在生成文法中可导出的) 2:750
- 字符串(Snobol 语言中的) 4:885
- 字合同 5:420
- 字合同(代数系统的) 5:420
- 字恒等问题 3:6
- 字积 5:421
- 字母 3:391
- 字母表 1:144
- 字母表编码 1:630
- 字母表(非终结的) 2:514
- 字母表上的算法 1:124
- 字母表示法(数的) 1:589
- 字母表数系 3:1008
- 字母表(系统的) 1:288
- 字母表(终结的) 2:514
- 字母表(状态的) 1:272
- 字母(Snobol 语言中的) 4:885
- 字问题 1:131;2:19,566;3:6
- 字问题(关于有限表现群的) 2:786
- 字问题(关于自由格的) 2:569
- 字问题(Coxeter 群中的) 1:884
- 字(由不变量不可分的) 1:725
- 字子群 5:421
- 字组合 5:113
- 自伴半群 1:823
- 自伴边值问题 4:747
- 自伴代数 4:440
- 自伴扩张(微分算子的) 4:927
- 自伴算子 4:748
- 自伴微分方程 4:747
- 自伴线性边值问题 4:747
- 自伴线性变换 4:748
- 自伴线性常微分方程组 4:747
- 自伴线性算子(Крейн 空间中的) 3:294
- 自伴形式(Bessel 方程的) 1:341
- 自伴元(对合代数中的) 3:178
- 自伴子集( $C^*$  代数的) 1:453
- 自伴 Hilbert - Schmidt 积分算子 2:869
- 自变量 1:225
- 自变量(函数的) 1:225;2:586
- 自变量(自变数)(函数的) 2:586
- 自变数 2:586
- 自稠密核(拓扑空间的) 1:296
- 自稠密空间(完满空间) 2:56
- 自稠密子集(拓扑空间中的) 1:296
- 自调节自动机 1:272
- 自动编码 1:630;1:632
- 自动程序设计 1:270
- 自动翻译 1:271
- 自动机 1:272
- 自动机的代数理论 1:255
- 自动机的等价 1:258
- 自动机的叠加 1:257
- 自动机的符合目标的行为 1:275
- 自动机的合成 1:257
- 自动机的极小化 1:263
- 自动机的描述方法 1:259
- 自动机的试验 1:258
- 自动机的同步叠加 1:256
- 自动机的同态 1:259
- 自动机的完全系 1:256
- 自动机的行为 1:274
- 自动机的行为(初始有限的) 1:276
- 自动机的行为(初始自治的) 1:276
- 自动机的行为(随机介质中的) 1:274
- 自动机(概率的)\* 1:278
- 自动机集体 1:275
- 自动机(可变结构的) 1:273
- 自动机控制 5:152
- 自动机理论 1:263
- 自动机理论的宏观方法 1:275
- 自动机理论的微观方法 1:275
- 自动机试验的分类 1:258
- 自动机(树上的) 1:256
- 自动机算子 2:606
- 自动机网络
- 自动机(无记忆的) 1:273
- 自动机(无信息损失的) 1:273
- 自动机(线性策略的) 1:275
- 自动机(项上的) 1:256
- 自动机(有限存储空间的) 1:273
- 自动机(有限的)\* 1:275
- 自动机(有限记忆的) 1:273
- 自动机状态简单试验可分性定理 1:259
- 自动控制理论 1:264
- 自动文法 2:746
- 自对偶构形 1:742
- 自对偶联络 4:530
- 自对偶齐性凸锥 2:897
- 自对偶射影平面 4:340
- 自繁殖问题 1:273



- 自反半双线性型 1:601;1:860
- 自反传递闭包(关系的) 2:514
- 自反点几何学 1:192
- 自反二元关系 1:365
- 自反几何学 1:150**
- 自反局部凸拓扑向量空间 5:214
- 自反空间 4:539**
- 自反拓扑群 4:241
- 自反性 4:540**
- 自反准则(Banach 空间的) 1:305
- 自反子范畴 4:539**
- 自反 Banach 空间 1:305
- 自共轭矩阵 2:857
- 自共轭子群 3:989
- 自环 2:752
- 自回归 1:255**
- 自回归过程 1:255**
- 自回归滑动平均过程 3:773
- 自回归谱估计量 3:690
- 自交点 4:749**
- 自交点(实曲面的) 4:863
- 自交点(实曲线的) 4:862
- 自命名 1:283**
- 自命名用法(表示式的) 1:283
- 自内射环 4:749**
- 自(配)极三角形 4:213
- 自(配)极三角形(椭圆平面上的) 4:623
- 自(配)极图形 4:213
- 自(配)极线 5:541
- 自切点 4:750**
- 自然边界(函数的) 1:692
- 自然边界(解析函数的) 4:855
- 自然边界条件 5:391
- 自然边缘同态 2:919
- 自然变换 1:502
- 自然变换(函子的) 2:611
- 自然标架 3:874**
- 自然参数 3:875**
- 自然参数化 3:875
- 自然参数化(曲线的) 2:152
- 自然策略 1:830
- 自然存在域 1:692
- 自然定义域(解析函数的) 2:276
- 自然度量 5:298
- 自然对偶性(拓扑向量空间的) 2:296
- 自然对数 3:552;3:553
- 自然方程 3:874**
- 自然函子变换 1:502
- 自然控制 1:830
- 自然扩张(延拓)(自同构的) 2:410
- 自然滤子 3:442
- 自然逻辑演绎 3:874**
- 自然满同态 4:460
- 自然密度 1:245
- 自然偏序关系(逆半群上的) 3:175
- 自然偏序(幂等元上的) 3:5
- 自然偏序(正则半群上的) 4:554
- 自然三棱形 2:153;2:572;3:874
- 自然数 3:875**
- 自然数集(枚举中可约的) 2:368
- 自然数序列 3:875
- 自然同态 4:462
- 自然投射(直积的) 2:205
- 自然推导系统 2:696
- 自然无挠联络 4:533
- 自然系统 2:923;4:258
- 自然性(上同调运算的) 1:655; 4:245
- 自然性(Steenrod 平方的) 4:1021
- 自然性(Steenrod 约化幂的) 4:1020
- 自然序 3:596
- 自然序广群 3:876**
- 自然序列 3:875**
- 自然演绎系统 2:696
- 自然约化齐性 Riemann 空间 4:657
- 自然约化伪 Riemann 空间 4:533
- 自然约化 Riemann 空间 4:533
- 自然正则半群 4:554
- 自守函数 1:279**
- 自守条件 3:788
- 自守形式 1:278**
- 自守形式(权  $m$  的) 1:280
- 自守形式( $j$  型的) 1:280
- 自守因子 1:280
- 自同构 1:281**
- 自同构(不定二次型的) 4:388
- 自同构(测度空间的) 1:497; 1:811;3:725
- 自同构(代数曲面的) 1:104
- 自同构(单位多圆柱的) 2:546
- 自同构(单位球的) 2:546
- 自同构的模 3:801**
- 自同构的派生(测度空间的) 4:907
- 自同构(二次型的) 4:25
- 自同构(共形结构的) 1:758
- 自同构(构形的) 1:742
- 自同构列到一个自同构的邻近(关于可测分解的) 1:194
- 自同构群 2:423;2:667
- 自同构群(双线性型的) 1:360
- 自同构群(Steiner 系的) 4:1028
- 自同构群( $\Omega$  系统的) 1:109
- 自同构(射影平面的) 3:935
- 自同构(双线性型的) 1:360
- 自同构(四元数结构的) 4:445
- 自同构(有限维中心单代数的) 1:532
- 自同构(域扩张的) 2:422
- 自同构族(代数簇的) 1:117
- 自同构(Hermite 空间的) 2:856
- 自同构(Steiner 系的) 3:669
- 自同构( $\Omega$  系统的) 1:109
- 自同态 2:357**
- 自同态半群 2:358**
- 自同态(测度空间的) 1:194; 1:497;3:725
- 自同态代数 2:358
- 自同态(代数系统的) 2:357
- 自同态的仿样 4:585**
- 自同态分类的问题 3:492
- 自同态(关于双线性型共轭的) 1:361
- 自同态环 2:358**
- 自同态(么半群上多边形的) 4:226
- 自同态域 3:682
- 自稳定模型 4:525
- 自相关 1:253**
- 自相关函数 4:988
- 自相关(随机过程的) 1:253
- 自相关图 1:253**
- 自相关图(随机过程的) 1:253
- 自相交多边形 4:224
- 自相似 2:187

- 自校正控制模式 4:574  
 自校正控制模式的设计 4:574  
**自协方差** 1:255  
 自协方差函数 4:988  
 自信息量度量 3:848  
**自旋** 4:949  
 自旋流形 2:527  
 自旋转(曲线的) 5:91  
 自学习 4:109  
**自由半群** 2:570  
 自由边界(偏微分方程的) 2:132  
 自由边界问题(偏微分方程的)  
 2:120  
 自由边值问题 1:420  
**自由变量** 2:571  
**自由变元(自由变量)\*** 2:571  
 自由超滤子 5:307  
 自由超曲面 4:433  
 自由出现 3:558;4:285  
 自由出现(变量的) 2:571  
 自由出现(变元的) 2:571  
 自由出现(命题变元的) 4:353  
**自由代数** 2:564  
 自由代数范畴 5:280  
**自由代数(环上的)\*** 2:564  
**自由代数系统** 2:564  
 自由点 5:169  
 自由点方法 4:103  
 自由独立性 4:415  
 自由度(概率分布的) 2:491  
 自由度(完整系统的) 2:891  
 自由度( $\chi^2$  分布的) 1:583  
 自由对象 1:648  
 自由对象(在一个对象上的) 1:44  
 自由多幂零群 4:220  
 自由非交换仿射环 4:158  
**自由分解** 2:570  
**自由格** 2:569  
**自由广群** 2:567  
 自由函子 1:503  
**自由合成** 2:566  
 自由弧(无接触弧) 1:218  
 自由环 2:564  
**自由积** 2:569  
 自由积(具有共合子群的群的)  
 1:149  
**自由积(群的)\*** 2:569  
 自由基 1:315  
**自由集** 2:571  
 自由交换环 1:504  
**自由结合代数** 2:566  
 自由浸入(流形的) 2:720  
 自由可解群 4:897  
 自由块字表 1:314  
 自由理想 1:238  
**自由理想环** 2:568  
 自由粒子 2:702  
 自由量子场 2:468;4:407  
 自由量子化 5:315  
 自由流动性 4:26  
 自由码 1:631  
 自由幂零群 3:913  
**自由模** 2:569  
 自由嵌入 3:873  
 自由曲面 3:485  
**自由群** 2:567  
 自由三向量 5:282  
 自由生成系(在泛代数类中的自由  
 代数的) 2:564  
 自由生成元(半群的) 2:570  
 自由生成元系(群的) 2:567  
 自由输入信号(控制论系统的元的)  
 1:918  
 自由双向量 1:372  
 自由同伦 1:609;2:918  
 自由投射  $p$  群 4:307  
 自由微分学(Fox 的) 3:275  
 自由未知量(相容线性代数方程组  
 的) 3:461  
 自由系统 2:860  
**自由向量** 2:571  
 自由项(逻辑公式中对于变元的)  
 3:558  
 自由项(线性代数方程组的)  
 3:461  
 自由项(线性积分方程的) 3:94  
 自由项(Volterra 积分方程的)  
 5:435  
**自由谐振动** 2:567  
**自由形成序列** 2:571  
 自由选择序列 1:790  
 自由么半群 2:570;5:523  
 自由运动 2:702  
 自由振动 2:322  
 自由质点 4:565  
 自由终止时间最优化问题 3:1048  
 自由子群定理(线性群的) 3:484  
 自由自动机 1:256  
 自由族(模元素的) 1:315  
 自由作用的离散变换群 2:226  
 自由作用的置换群 4:131  
**自由 Abel 群** 2:564  
**自由 Boole 代数** 2:566  
 自由 Euclid 场(具有质量为  $m$  的)  
 1:793  
**自由 Lie 代数** 3:408  
 自由 Lie 代数(环上的) 3:408  
 自由  $T$  扩张(环的) 3:14  
 自由 Tate 代数 5:135  
 自约化微分多项式 2:98  
**自振动** 1:253  
 自振动系统 1:253  
 自正递归集 5:449  
 自正交拉丁方 4:28  
 自治问题 3:1046  
**自治系统** 1:281  
 自治系统(常微分方程的) 1:281  
 自治系统(等价的) 1:282  
 自治系统(可微等价的) 1:282  
 自治系统(拓扑等价的) 1:282  
 自治自动机 1:276  
**自周长** 4:749  
 综合(电网络的) 3:894  
 综合几何学 2:715  
 综合(快速调节器的) 3:267  
 《综合算术》(M. Stifel 著) 4:107  
**综合微分几何学** 5:119  
**综合问题** 5:115  
 综合问题(控制论中的) 1:266  
 综合问题(自动机的) 4:546  
 综合问题(DOL 系统的增长函数  
 的) 3:316  
 综合(最优控制的) 3:1042  
 总计 2:43  
 总计( $T_{2s}$ ) 2:43  
 总加权完成时间 4:717  
 总内能 5:160  
 总熵 5:160  
**总体** 2:665  
 总体(参数化集) 1:315  
 总体(动力系统的) 2:310



- 总支付 1:833  
 总指标(发展算子的) 4:400  
 总指数(线性共轭问题的) 1:428  
 纵聚合解析模型(语言的) 1:166  
 纵向椭圆型微分算子 3:41  
**纵坐标 4:16**  
 纵坐标(点的) 1:488  
 纵坐标(仿射坐标系中的) 1:54  
 纵(坐标)轴 1:161;1:488  
 纵坐标轴(仿射坐标系中的) 1:54  
 族函子 3:799  
**阻碍 3:1012**  
 阻碍理论 2:925  
 阻留边界(随机游动中的) 4:486  
 组方法(求解部分本征值问题的) 4:99  
**组合 1:661**  
 组合(从  $m$  个元素中取  $n$  个元素的) 1:661  
 组合等价 2:76  
 组合等价复形 4:163  
 组合等价三角剖分 5:269  
 组合等价三角剖分(二维流形的) 5:295  
 组合定理(Klein 群理论中的) 3:267  
 组合法(直接和迭代参数变值的) 1:805  
**组合分析 1:661**  
 组合共振 4:92  
 组合构形 1:661  
 组合积分几何学 3:108  
 组合(集合元素的) 1:661  
**组合几何 1:666**  
 组合几何方法(离散变换群论中的) 2:227  
**组合几何学 1:665**  
 组合扩张(集族的) 3:548  
 组合流形 4:164  
**组合逻辑 1:667**  
 组合群论 2:783  
 组合三角剖分(流形的) 4:231  
 《组合术》(Leibniz 著) 1:661  
**组合数学 1:666**  
 组合数值方法 4:87  
**组合拓扑学 1:666**  
**组合学 1:667**  
 组合(有重复的) 1:661  
 组合正则半群 4:553  
 组合子 1:667  
 组合子演算 1:667  
 组合最优化 2:229  
 钻石 5:89  
**最不利分布 3:366**  
 最不利先验分布 3:367;4:990  
 最大包络(函数集的) 5:358  
 最大保证结果 4:302  
**最大保证结果原理 4:302**  
**最大不变量 3:682**  
 最大步长(格点分布的) 3:357  
 最大存在区间(解的) 4:347  
 最大分划(半群到带的) 1:309  
**最大公因数 2:769**  
**最大功效检验 3:836**  
 最大角畸变(地图投影中的) 1:494  
 最大解析延拓 1:150  
 最大流和最小割定理 2:500  
 最大流问题 2:500;2:757  
 最大流最小割定理 2:757  
 最大幂零理想(Lie 代数的) 3:413  
**最大模原理 3:691**  
 最大模原理的局部表述 3:691  
 最大模原理的整体表述 3:691  
 最大匹配定理 2:500  
 最大偏差(Bernoulli 随机游动中的) 1:332  
 最大商分划(半群到带的) 1:309  
**最大熵谱估计量 3:689**  
**最大似然法 3:690**  
 最大似然估计量 3:438;3:690;4:994  
 最大位势物体定理 3:586  
 最大下界 4:102  
 最大下界(偏序子集中的) 4:101  
**最大相关系数 3:681**  
 最大元(偏序子集中的) 4:101  
 最大值(集合的) 5:358  
**最大值原理 3:692**  
 最大值原理(差分方程的) 2:78  
 最大值原理(Riesz 位势的) 4:659  
 最短测地线 2:931  
 最短范式(Boole 函数的) 1:394  
 最短曲线(凸曲面上的) 1:850  
 最短曲线延伸的唯一性 2:487  
 最短曲线(Riemann 空间中的) 4:646  
 最短生成树问题 5:266  
**最短线 4:816**  
 最短线的局部可延长性(Riemann 空间中的) 4:654  
 最短线锥(由一点在曲线上张成的) 4:655  
 最富有信息变量的选择问题 3:847  
**最高代数精度的求积公式 4:392**  
 最高权(表示的) 1:486;4:601;4:597  
 最高权(不可约有理表示的) 4:500  
 最高权向量 1:486;4:601;4:597  
 最高项(多项式的) 4:233  
 最坏情形策略 3:1034  
 最坏情形设计 4:1002  
**最佳逼近 1:345**  
**最佳逼近代数多项式 1:101**  
 最佳逼近定理(有理数的) 1:807  
**最佳逼近多项式 4:237**  
 最佳逼近泛函 1:345  
 最佳逼近函数 1:200  
 最佳逼近(函数的) 1:346  
 最佳逼近(函数类的) 1:345  
 最佳逼近算子 3:726  
**最佳逼近序列 1:346**  
**最佳逼近元素 2:334**  
 最佳逼近(Banach 空间中的) 1:304  
 最佳部分逼近 1:347  
 最佳代数逼近 1:101  
 最佳地图投影 1:495  
 最佳调和强函数 2:831  
 最佳近似解 2:559  
 最佳扩张(函数的) 5:477  
**最佳平均逼近 1:346**  
 最佳强函数的问题 2:830  
**最佳求积公式 1:348**  
**最佳完全逼近 1:347**  
**最佳线性方法 1:347**  
 最佳样条逼近 4:953  
 最佳一致逼近 1:566  
 最简单的输入流(呼唤的) 4:448

- 最近整数算法 2:68  
 最强拓扑 1:687  
 最弱拓扑 1:687  
 最速下降 1:771  
**最速下降法 4:1022**  
**最速下降法(关于积分的) 3:722**  
 最速下降围道 4:707  
 最小包络(函数类的) 4:358  
 最小闭扩张(算子的) 1:610  
 最小表达式演算 3:747  
 最小不动点 5:155  
 最小测试(控制论中的) 5:151  
**最小充分统计量 3:749**  
 最小调和强(优)函数 2:831;5:62  
 最小调节域 1:266  
**最小二乘法 3:367**  
 最小二乘法(几个未知数的)  
   3:370  
 最小二乘法(几个线性相关未知数  
   的) 3:369  
 最小二乘法(一个未知数的)  
   3:368  
 最小二乘估计 5:19  
 最小二乘线性回归 3:505  
**最小反作用原理 4:302**  
 最小非负剩余(整数模  $m$  的)  
   4:579  
 最小费用流问题 2:500  
 最小峰度控制函数(有界函数的)  
   4:787  
 最小覆盖 1:879  
 最小覆盖问题 1:879  
**最小公倍数 3:366**  
 最小化(Boole 函数的) 5:153  
 最小基(域的) 1:100  
 最小距离(整数集合的) 1:629  
 最小距离( $q$  元码的) 2:388  
 最小绝对偏差的线性回归 3:505  
**最小零偏差多项式 4:237**  
**最小命题演算 3:747**  
 最小偏差多项式(与函数的)  
   1:101  
 最小偏差多项式(与零的) 4:237  
 最小平方中位数 4:679  
 最小曲率原理 2:859;5:396  
 最小群同余 3:176  
 最小上界(偏序子集中的) 4:101  
**最小数算子 3:367**  
 最小完全类(决策规则的) 4:990  
**最小谓词演算 3:744**  
 最小泄露证明 1:893  
 最小元(偏序子集中的) 4:101  
 最小约束原理 2:657  
 最小值(集合的) 5:358  
 最小值(射线函数在格上的)  
   2:721  
 最小值原理 2:834;4:243;5:359  
 最小值原理(控制理论中的)  
   4:243  
 最小周期(周期函数的) 4:127  
 最小作用原理(Lagrange 形式的)  
   3:328  
 最小  $\rho$  距离的线性回归 3:505  
**最优保证策略 3:1033**  
 最优闭环控制 3:1032;3:1036;  
   3:1045  
 最优部分递归函数 1:127  
 最优策略 1:829;1:831  
 最优策略(在一点上) 1:831  
**最优程序控制 3:1034**  
 最优点 3:655  
 最优调节器的解析设计 1:267  
 最优反馈控制 3:1032;3:1036;  
   3:1045  
 最优分析(变式的) 5:388  
 最优估计(计算解法中的误差的)  
   3:1049  
 最优规划 3:1024  
**最优轨道 3:1046**  
**最优滑动模态 3:1040**  
 最优化 1:841  
**最优化(计算方法的)\* 3:1048**  
 最优化问题 3:1023  
 最优计划 3:655  
 最优计算解方法(一类问题中的)  
   3:1048  
 最优决策 3:1023  
 最优开环控制 3:1032;3:1036;  
   3:1045  
**最优控制 3:1030**  
 最优控制(不确定性条件下的)  
   3:1031;3:1035  
**最优控制的数学理论 3:1030**  
 最优控制问题 3:1030;4:242  
   5:382  
 最优控制问题(按 Понтрягин 形式  
   的) 3:328  
 最优控制(在一点上) 1:183  
 最优控制中的问题 5:382  
 最优码 1:631  
 最优满负载储备 4:578  
 最优奇异控制(奇异最优控制)  
   3:1037  
**最优奇异模态 3:1037**  
**最优求积公式 3:1036**  
 最优求积公式(一类求积公式中的)  
   3:1037  
 最优求积公式(最佳求积公式)  
   1:348  
 最优随机镇定 3:1043  
 最优停时 4:787  
 最优停止 1:834  
 最优停止问题 5:27  
 最优统计估计量 4:995  
 最优统计检验 1:741  
 最优无偏估计量 5:312  
 最优无偏位计检验 1:741  
 最优系列(产品的) 4:980  
 最优线性滤波(平稳随机过程的)  
   4:987  
 最优线性内插(平稳随机过程的)  
   4:987  
 最优线性外推(平稳随机过程的)  
   4:987  
 最优消元法(线性代数方程组的)  
   3:458  
 最优行为(自动机在介质中的)  
   1:274  
**最优性的充分条件 3:1047**  
**最优性原理 3:1046**  
 最优性原理(对固定的对策策略的)  
   5:29  
**最优译码 3:1033**  
 最优译码错误概率 2:386  
 最优镇定(可控系统的) 3:1043  
**最优综合控制 3:1042**  
 最优 Bayes 解 4:787  
 最直接路径 5:396  
 最直接路径原理 5:396  
 最直路径 2:859  
 最终结构 5:204



- 最终稳定的群序列 4:973  
 最终渊藪 5:207  
 最终运动(三体问题中的) 5:169  
 左半链环 4:751  
 左半平面 2:804  
 左半遗传环 4:767  
 左伴随 3:565  
 左伴随函子 1:44;1:501  
 左伴随(映射的) 4:603  
 左本原环 4:294  
 左本原理想 4:292  
 左边(割线的) 1:915  
 左不变度量 2:487  
 左不变积分(群上的) 3:160  
 左不变平均(群上的) 3:158  
 左不变条件(测度的) 2:797  
 左不变向量场(Lie 群上的) 3:423  
 左不变 Haar 测度 2:797  
 左测地曲率 2:701  
 左除(形式语言的) 2:512  
 左传递求和法 5:254  
 左殆周期函数 1:141  
 左单半群 4:831  
 左单位元 5:337  
 左单位元(模一个理想的) 3:793  
 左导出函子 2:902  
 左导数 3:1019  
 左导数(函数的) 2:100  
 左等价类(射影空间中行的)  
     4:344  
 左等价正则化子(有界线性算子的)  
     4:852  
 左短正合序列 2:411  
 左对称恒等式 3:402  
 左多边形(么半群上的) 4:226  
 左非奇异双线性型 1:360  
 左分解(群对于子群的) 1:867  
 左核(双线性型的) 1:360  
 左核(双线性映射的) 1:361  
 左核(么拟群的) 3:254;3:564  
 左基座 3:745  
 左基座(环的) 3:745  
 左基座(模的) 4:888  
 左极限(函数的) 3:1019  
 左焦点 2:502  
 左结合的元素(么拟群的) 3:254  
 左截尾分布 5:284  
 左界定(进入的) 3:13  
 左近似单位元(Banach 代数中的)  
     3:179  
 左近似极限 1:193  
 左局部小范畴 1:45  
 左可逆元(有单位元的半群的)  
     3:176  
 左理想 3:1  
 左理想(范畴的) 3:3  
 左连续函数(在一点上的) 1:812  
 左连续性 1:812  
 左连续正则环 4:551  
 左链环 1:543  
 左列环 4:751  
 左零对象 2:470  
 左零化子(集合的) 1:184  
 左零因子 5:539  
 左零元(半群的) 5:537  
 左拟基本解 4:94  
 左逆(线性算子的) 3:491  
 左逆映射 3:170  
 左凝聚环 1:641  
 左陪集(子群在群中的) 1:867  
 左平衡模 1:297  
 左平移 4:429  
 左平移(半群的) 5:253  
 左奇异半群 3:5  
 左群 4:667  
 左弱维数 2:181  
 左三元组(向量的) 5:406  
 左商(群元素的) 2:781  
 左商(序半群中元素的) 4:14  
 左上下文相关文法 2:749  
 左上下文相关语言 2:749  
 左同余 2:770  
 左退化双线性映射 1:361  
 左拓扑模 5:195  
 左完满环 4:122  
 左完全范畴 1:45  
 左伪自同构(么拟群的) 3:565  
 左伪 Frobenius 环 4:428  
 左位移 4:429  
 左位移算子 2:680  
 左稳定秩(环的) 4:978  
 左线性文法 2:751  
 左象征(算子的) 5:92  
 左旋度(流形上曲面的) 1:851  
 左旋螺线 2:848  
 左么模序列(环元素的) 4:978  
 左么元 5:337  
 左翼(出现的) 3:13  
 左有界整体维数(环的) 2:905  
 左跃度(函数在点上的) 3:234  
 左整体维数(环的) 2:905  
 左正合函子 2:410  
 左正则表示 4:131  
 左正则表示(代数的) 4:550  
 左正则表示(群的) 1:677  
 左正则超复变函数 2:952  
 左正则化子(有界线性算子的)  
     4:852  
 左中  $r$  区域(随机分配的) 4:477  
 左追赶(左双搜索) 2:287  
 左自内射环 4:749  
 左自由理想环 2:568  
 左  $A$  模 3:794  
 左 Archimedes 半群 1:219  
 左 Artin 环 1:235  
 左  $F$  拟群 4:429  
 左  $G$  对象 4:298  
 左  $G$  模 3:794  
 左  $g$  么模的环元素序列 4:979  
 左 Haar 测度 3:703  
 左 Haar 积分 3:160;1:300  
 左 Noether 环 3:921  
 左 Ore 环 5:230  
 左 Ore 集 5:231  
 左 Ore 条件 5:231  
 左  $PF$  环 4:428  
 左  $QF-3$  环 4:428  
 左  $QF-3$  环 4:428  
 左  $r$  区域(随机分配的) 4:477  
 左 Rickart 环 4:620  
 左  $RR$  环 4:620  
 佐藤基本定理 3:739  
 佐藤微局部化 3:740  
 作用 1:31  
 作用点(向量的) 5:404  
 作用量-角变量 2:810  
 作用量-角坐标 1:922;4:938  
 作用量泛函 3:834  
 作用量函数 5:397  
 作用量(物理系统中的) 5:396  
 作用量(作用)\* 1:31

作用(群的) 2:310  
 作用(群在流形上的)\* 1:32  
 作用(群在一元代数上的) 5:311  
 作用域 5:444  
 作用运算 1:667  
**坐标 1:857**  
 坐标(点关于坐标卡的) 1:563  
 坐标方法 1:857  
**坐标方式的下降法 1:856**  
 坐标化(格的) 3:356  
 坐标化(射影代数的除环的)  
 4:329  
 坐标环(仿射代数集的) 1:52  
**坐标卡 1:565**  
 坐标卡(局部平凡纤维丛的)  
 3:551  
 坐标空间 1:233  
 坐标(控制系统的) 1:827  
 坐标(流形坐标卡中的) 2:90  
 坐标拟群(代数网的) 4:430  
 坐标平面 1:488  
 坐标平面(仿射坐标系的) 1:54  
 坐标曲面 1:857  
 坐标曲线 1:857  
 坐标(三向量的) 5:282  
 坐标(双向量的) 1:372  
 坐标(图形的) 2:469  
 坐标系 1:857  
 坐标系(对 Галеркин 法的) 2:621  
 坐标线(曲面上的) 2:154  
 坐标(向量空间元素的) 1:316  
 坐标(向量在给定基下的) 5:405  
 坐标原点 1:488  
 坐标原点(仿射坐标系的) 1:54  
 坐标(张量的) 1:825  
 坐标轴 1:488  
 坐标轴(仿射坐标系的) 1:54

## 以西文字母起首的复合词

## A

A 标量算子 2:597  
 A 表示 3:52  
 A 点(解析函数的) 5:335  
 a 点(亚纯函数的) 2:377

A 法 1:7  
 $\mathcal{A}$  反射 5:204  
 $\alpha$  复形 4:163  
 “A”和“B” Сушкевич 公设 4:429  
**A 积分 1:1**  
 $\mathcal{A}$  集 1:2  
 $A_n$  集 4:343  
 $\mathcal{A}$  集(集系生成的) 1:3  
 $\mathcal{A}$  集(A 系统生成的) 1:3  
 $\mathfrak{A}$  进拓扑 1:672  
 A 可比整函数 1:687  
 A 可积可测函数 1:1  
 $\hat{A}$  亏格 4:244  
 A 零化同余 4:469  
 A 强无穷维正规空间 3:56  
 A 弱无穷维空间 4:460  
 A 弱无穷维正规空间 3:56  
 A 熵 3:724  
 A 示性类 4:240  
 $\hat{A}$  示性类 4:240  
 A 算法 1:395  
 A 条件(关于半群的) 5:39  
 A 稳定  $r$  步法 4:1041  
**A 系统 1:2**  
 A 相伴解析函数 1:687  
 A 型整函数 1:687  
 A 序模 4:6  
 A 演算 2:596  
 A 么拟群 3:565  
 A 域 4:383  
 $\mathcal{A}$  运算 1:1  
 A 周期(调和微分的) 2:165  
 $[a, b]$  紧性 1:685  
 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  紧性条件 5:200  
 AB 可去紧统(Riemann 曲面上的)  
 4:639  
**AB 正规子群 1:17**  
 abc 方法 5:270  
 Abel Baer 环 4:551  
 Abel-Jacobi 映射 3:130  
 Abel Lie 代数扩张 2:423  
 Abel-Poisson 法 1:6  
 Abel-Poisson 求和法 1:6  
 Abel-Ruffini 定理 1:84  
 Abel S 概形  
 Abel-Гончаров 插值级数 1:4  
 Abel-Гончаров 问题 1:4

Abel 半群 4:810  
**Abel 变换 1:8**  
 Abel 不变量(链环的) 3:275  
 Abel 不变量(纽结的) 3:275  
 Abel 不等式 1:5  
 Abel 除子定理 3:713  
**Abel 簇 1:16**  
 Abel 簇(非 Archimedes 域上的)  
 5:135  
 Abel 簇(精确到同源的) 3:186  
 Abel 第二定理 4:280  
 Abel 第一定理 4:280  
**Abel 定理 1:7**  
 Abel 定理(关于除子的) 2:272  
 Abel 定理(关于除子的有理等价关系的) 3:220  
 Abel 定理(关于代数方程的) 1:7  
 Abel 定理(关于幂级数的) 1:7  
 Abel 定理(关于亚纯函数的)  
 3:714  
 Abel 定理(关于 Abel 积分的)  
 1:15  
 Abel 定理(关于 Dirichlet 级数的)  
 1:7  
 Abel 多算子群 3:851  
**Abel 范畴 1:8**  
**Abel 概形 1:15**  
**Abel 函数 1:11**  
 Abel 函数方程 2:600  
 Abel 函数域 1:12  
 Abel 核 1:5  
 Abel 积定理 4:794  
**Abel 积分 1:14**  
 Abel 积分(第二类) 1:14  
 Abel 积分(第三类) 1:15  
 Abel 积分(第一类) 1:14  
**Abel 积分方程 1:5**  
 Abel 积分方程(具有固定积分限的) 1:5  
 Abel 局部紧群 1:300  
 Abel 可和性(半群的) 5:39  
 Abel 空间 2:920  
**Abel 扩张的导子 1:738**  
 Abel 连续性定理 1:7  
 Abel 幂等元(Baer 环的) 4:551  
 Abel 平均值 3:1028  
**Abel 求和法 1:7**



- Abel 群 1:12  
 Abel 群簇 5:400  
 Abel 群的周期部分 1:13  
 Abel 群对象 2:787  
 Abel 收敛准则(函数项级数的) 1:3  
 Abel 收敛准则(数项级数的) 1:3  
 Abel 投影 5:442  
 Abel 微分 1:10  
 Abel 微分(第二类) 1:10  
 Abel 微分(第三类) 1:10  
 Abel 微分(第一类) 1:10  
 Abel 微分方程 1:3  
 Abel 问题 1:6  
 Abel 引理 1:512  
 Abel 域扩张 1:595;2:422;2:626  
 Abel 准则 1:3  
 Abel 自动机 1:256  
 Achilles 和乌龟 1:186  
 ad 半单元(Lie 代数的) 4:779  
 Adams - Bashforth 法 1:33  
 Adams  $e$  不变量 4:939  
 Adams - Moulton 法 1:33  
 Adams - Новиков 谱序列 1:626  
 Adams 不变量 2:930  
 Adams 法 1:32  
 Adams 谱序列 2:922  
 Adams 一阶上同调运算 1:656  
 Adams 运算 3:312  
 ADE 问题 4:859  
 Adem 关系 4:1018  
 Adem 关系(Steenrod 平方的) 4:1021  
 Adem 关系(Steenrod 约化幂的) 4:1020  
 adic 拓扑 1:41  
 Ado 定理 3:404;3:411  
 Adyan - Rabin 定理 1:132  
 Agnesi 箕舌线 5:515  
 Ahlfors 定理 4:63  
 Ahlfors 定理(关于可去奇点的) 1:150  
 Ahlfors 解析测度 1:150  
 Ahlfors 有限性定理 3:267  
 Airy - Каврайский 准则(关于地图投影的) 1:495  
 Airy - Фок 函数 1:61  
 Airy 方程 1:61  
 Airy 函数 1:61  
 Airy 准则(关于地图投影的) 1:495  
 Aitken 格式 1:63  
 Alaoglu - Bourbaki 定理 3:546  
 Alaoglu 定理 5:218  
 Albanese 簇 1:63  
 Albert 代数 3:927  
 Albert 定理 3:200;3:564  
 Albert 分类问题 3:400  
 Albert 环 3:927  
 Alexander - Gardner - Jones 稳定性指数 4:508  
 Alexander - Spanier 上链 4:804  
 Alexander - Spanier 上同调 1:531  
 Alexander - Колмогоров 积 2:912  
 Alexander - Колмогоров 上同调群 2:908  
 Alexander - Колмогоров 同调群 3:283  
 Alexander - Понтрягин - Ситников 对偶性 4:1019  
 Alexander - Понтрягин 定理 1:66  
 Alexander - Понтрягин 对偶性 1:66  
 Alexander 不变量 1:66  
 Alexander 定理 4:164  
 Alexander 定理(关于三维流形的) 3:276  
 Alexander 定理(关于 Betti 数的) 1:66  
 Alexander 对偶性 1:65  
 Alexander 多项式 1:67;3:275  
 Alexander 多项式(Neuwirth 纽接的) 3:898  
 Alexander 覆叠矩阵 1:67  
 Alexander 矩阵(链环的) 3:275  
 Alexander 理想 1:67  
 Alexander 链环矩阵 1:67  
 Alexander 模(覆叠的) 3:275  
 Alexander 模(链环的) 1:66;3:275  
 Alexander 模(纽结的) 3:275  
 Alexander 球面 5:511  
 Alexander 约化多项式 1:67  
 Alexander 约化理想 1:67  
 Alexander 约化模 1:67  
 Algol - 68 语言 1:118  
 Algol 语言 1:117  
 AM 码 1:629  
 Ambit 语言 4:889  
 Amitsur 上同调 1:648  
 Ammann 菱体 4:84  
 Analytic 语言 4:889  
 Andreoli 积分方程 3:102  
 Anger 函数 1:181  
 Antoine 紧统 5:221  
 AP 积分 1:450  
 Apollonius 定理 1:188  
 Apollonius 问题 1:188  
 Apollonius 圆 1:188  
 Appell 变换 1:191  
 Appell 超几何级数 2:959  
 Appell 多项式 1:189  
 Appell 多项式的类 1:190  
 Appell 多项式(二元的) 1:190  
 Appell 多项式系 1:190  
 Appell 方程 1:189  
 Appell 方程(拟坐标系中的) 1:189  
 Archimedes Riesz 空间 4:661  
 Archimedes 半群 1:219  
 Archimedes 除环 3:543  
 Archimedes 的“笔记本”(Archimedes 致 Eratosthenes 的通信) 3:64  
 Archimedes 等价半群元 1:218  
 Archimedes 等价关系 1:218  
 Archimedes 范数 3:968  
 Archimedes 公理 1:218  
 Archimedes 环 1:219  
 Archimedes 类 1:218  
 Archimedes 立体 3:187  
 Archimedes 螺线 1:219  
 Archimedes 全序群 5:235  
 Archimedes 群 1:219  
 Archimedes 体 1:218  
 Archimedes 性质 4:512  
 Archimedes 有序向量空间 4:773  
 Archimedes 原理(关于序关系的) 1:739  
 Arens - Royden 定理 1:674  
 Arf 不变量 1:225  
 Argand 图 3:13

Aristotle 三段论法 1:456  
 ARMA 过程 3:773  
 Aronszajn - Panitchpakdi 定理 3:730  
 Arrow 不可能性定理 3:639  
 Artin - Hasse 指数 3:313;5:280;5:520  
 Artin  $L$  级数 3:314  
 Artin - Rees 条件 4:289  
 Artin - Rees 引理 1:42  
 Artin - Schmidt  $\zeta$  函数 5:545  
 Artin - Schreier 理论 3:304  
 Artin 逼近定理 2:28  
 Artin 猜想(关于 Diophantus 方程的) 5:308  
 Artin 单环 4:289  
 Artin 导子 1:737  
 Artin 定理(关于交错环的) 1:146  
 Artin 分支 4:501  
 Artin 符号 1:99;2:575  
 Artin 互反律 1:99;2:659  
 Artin 环 1:235  
 Artin 假设 2:199  
 Artin 交错环 1:146  
 Artin 结构 3:844  
 Artin 模 1:235  
 Artin 偏序集 4:102  
 Artin 群 1:234  
 Arzelà - Ascoli 定理 1:235  
 Arzelà - Александров 定理 4:442;5:330  
 Arzelà 变差 1:235  
 Arzelà 定理 1:814  
 Ascoli - Arzelà 定理 1:814  
 Asgeirsson 定理 3:488  
 Askey - Wilson 多项式 5:511  
 Askey 表 5:512  
 Atiyah - Bott 指标公式 3:42  
 Atiyah - Hirzebruch - Whitehead 谱序列 4:921  
 Atiyah - Hirzebruch 谱序列 1:656  
 Atiyah - Singer 定理 1:579  
 Atiyah - Singer 公式 3:240  
 Atiyah - Singer 指标定理 1:559;3:40  
 Atiyah - Singer 指标公式 3:39  
 Atiyah 对偶性定理 5:168

Auerbach 系 1:308  
 Aumann 定理 3:638  
 Auslander - 倉西第二定理 4:901  
 Auslander - 倉西定理 4:900  
 Auslander - Buchsbaum 定理 4:550  
 Auslander - Reiten 变换 4:595  
 Auslander - Reiten 箭图 4:595  
 Auslander - Reiten 序列 4:595  
 Auslander 定理 4:595  
 Auslander 条件 5:483  
 Ax - Kochen 定理 5:308

## B

$B^*$  代数 3:179  
 $b$  函数 2:3  
 $B$  积分 1:384  
 $B$  集 1:405  
 $B$  集系 1:407  
 $B$  可测函数 1:403  
 $B$  可测集 1:405  
 $B$  可测映射 1:404  
 $B$  可分集 3:576  
 $B$  空间 1:304  
 $B_0$  空间 5:355  
 $B_0^*$  空间 5:355  
 $B$  模型 1:398  
 $B$  曲面 1:351  
 $b$  群 3:267  
 $B$  态射 2:466  
 $B$  同构 1:404  
 $B$  完全局部凸拓扑向量空间 5:214  
 $B_r$  完全局部凸拓扑向量空间 5:214  
 $B$  线汇 1:350  
 $B$  周期(调和微分的) 2:165  
 Baby 大魔群 4:957  
 Bachmann 公理系统(几何学的) 2:524  
 Baer  $*$  环 4:621  
 Baer - Levi 半群 4:831  
 Baer 半群 3:356  
 Baer 乘法 1:295  
 Baer 环 4:551

Baer 积 1:295  
 Baer 准则(关于模的内射性的) 3:82  
 Bahadur 效率 2:320  
 Baire 测度 1:404  
 Baire 定理 1:297  
 Baire 定理(关于半连续函数的) 1:297  
 Baire 定理(关于完全拓扑空间的) 1:297  
 Baire 范畴 5:335  
 Baire 范畴定理 1:297;1:506  
 Baire 分类(函数的) 1:296  
 Baire 函数 1:296  
 Baire 函数类 2:59  
 Baire 集 1:296  
 Baire 可测函数 1:296  
 Baire 空间 1:296  
 Baire 类 1:296  
 Baire 性质 1:296  
 Baker - Benyon 对偶性 4:661  
 Baker - Campbell - Hausdorff 公式 1:459  
 Baldwin - Lachlan 定理 4:975  
 Banach - Alaoglu 定理 4:213  
 Banach - Grothendieck 定理 5:214  
 Banach Lie 代数 3:426  
 Banach Lie 群 3:426  
 Banach - Mazur 定理 3:728  
 Banach - Mazur 泛函 1:303  
 Banach - Mazur 可计算的泛函 1:303  
 Banach - Mazur 可计算的函数 1:303  
 Banach - Mazur 算子 1:303  
 Banach  $S$  性质 3:574  
 Banach - Steinhaus 定理 1:308  
 Banach - Stone 定理 1:306  
 Banach - Tarski 悖论 5:135  
 Banach - Zaretskii 定理 3:574  
 Banach 不动点定理 1:821  
 Banach 超群代数 2:682  
 Banach 代数 1:299  
 Banach 代数的上同调 1:649  
 Banach 代数(具有单位元的) 1:299



- Banach 定理 3:493;5:214  
 Banach 对合代数 3:178  
**Banach 格 1:302**  
 Banach 函数系 3:319  
 Banach 基问题 5:210  
 Banach 解析集 1:301  
 Banach 解析空间 1:301  
 Banach 解析流形 1:302  
 Banach 开映射定理 3:171  
**Banach 空间 1:304**  
 Banach 空间中的线性微分方程 3:469  
 Banach 空间  $H^\infty$  2:794  
 Banach 空间(Rademacher 型  $p$  的) 4:465  
 Banach 空间(Rademacher 余型  $q$  的) 4:465  
 Banach 连续函数定理 3:933  
 Banach 流形 2:91  
**Banach 模 1:304**  
 Banach 同胚定理 3:1020  
 Banach 问题(关于自反可分空间的) 3:996  
 Banach 圆盘 5:307  
**Banach 指标 1:302**  
 Banchoff 两片性质 5:175  
 Bang - Mandelbrojt 条件 4:418  
 Bar - Hillel 引理 2:515  
**Barbier 定理 1:310**  
 Barcan 公式 3:781  
 Barlet 定理(关于  $b$  函数的) 2:3  
 Barsotti - Tate 群 4:58  
**Bartlett 检验 1:311**  
 Bass - Heller - Swan 定理 4:973  
 Bass 定理 4:561, 978  
 Bass 稳定秩 4:973  
 Bass 消去定理 4:339  
**Bateman 法 1:318**  
**Bateman 函数 1:318**  
 Baudet 猜想 5:370  
 Bauer 空间 4:269  
 Bauer 收敛性质 2:838  
**Bayes 方法 1:319**  
**Bayes 方法(经验的)\* 1:320**  
 Bayes 风险 1:321  
**Bayes 公式 1:319**  
**Bayes 估计量 1:321**  
 Bayes 决策规则 4:990  
**Bayes 决策函数 1:321**  
 BBGKY 方程 1:379  
 BBGKY 方程级列 2:936  
 BBGKY 级列 4:1007  
 BCH 码 2:388  
 Bebutov - 角谷定理 4:809  
 Bebutov 系统 4:519  
 Behnke - Sommer 定理 1:808  
**Behnke - Stein 定理 1:321**  
**Behrens - Fisher 问题 1:322**  
 Beilinson - Бернштейн - Deligne - Gabber 分解定理 2:3  
 Beilinson 猜想 3:314;3:838  
 Bellman - Hamilton - Jacobi 方程 1:832  
**Bellman - Harris 过程 1:323**  
**Bellman 方程 1:322**  
 Bellman 函数 3:1042  
 Bellman 函数方程 1:832  
 Bellman 原理 1:829  
 Bellman 最优性原理 2:308  
 Beltrami - Enneper 定理 1:323  
 Beltrami - Klein 解释(Лобачевский 空间的) 3:528  
 Beltrami 定理 4:698  
 Beltrami 定理(关于 Desargues 几何学的) 2:57  
**Beltrami 法 1:324**  
 Beltrami 方程 1:323  
 Beltrami 方程组 4:422  
 Beltrami 公式 1:324  
**Beltrami 解释 1:323**  
 Beltrami 微分参数 2:169  
 Beltrami 系数 4:421  
**Beltrami 坐标 1:323**  
**Bendixson 变换 1:324**  
 Bendixson 公式 4:740  
**Bendixson 球面 1:324**  
**Bendixson 准则 1:324**  
**Bergman - Weil 表示 1:326**  
 Bergman - Weil 公式 1:326  
 Bergman - Weil 型积分 1:327  
 Bergman 边界 1:411  
 Bergman 定理(关于一元多项式代数的) 1:238;2:566  
 Bergman 度量 1:325  
 Bergman 核 1:325  
**Bergman 核函数 1:325**  
 Bergman 射影 1:326  
 Bernard 张量( $G$  结构的) 2:619  
 Bernays 引理 2:735  
**Bernoulli 定理 1:332**  
 Bernoulli 动力系统 3:238  
**Bernoulli 多项式 1:330**  
**Bernoulli 法 1:328**  
**Bernoulli 方案 1:332**  
**Bernoulli 方程 1:328**  
**Bernoulli 分布 1:327**  
 Bernoulli 积分 1:328  
**Bernoulli 试验 1:333**  
**Bernoulli 数 1:329**  
 Bernoulli 双纽线 1:328  
 Bernoulli 随机游动 1:331  
 Bernoulli 系统 4:809  
 Bernoulli 性质 2:365  
 Bernoulli 移位 5:94  
**Bernoulli 自同构 1:327**  
 Bernstein 代数 2:696  
 Bernstein 定理(关于等势的) 1:465  
 Bernstein 公式 1:65  
 Bernstein 集 3:955;5:234  
**Berry - Esseen 不等式 1:338**  
 Bers - Веква 方程组 2:676  
 Bers 面积不等式 3:267  
**Bertini 定理 1:339**  
 Bertini 对合 1:887  
**Bertrand 悖论 1:339**  
**Bertrand 假设 1:340**  
**Bertrand 曲线 1:339**  
 Bertrand 曲线对 1:339  
 Bertrand 收敛准则(关于级数的) 1:339  
 Bertrand 问题 1:191  
**Bertrand 准则 1:339**  
**Besicovitch 殆周期函数 1:340**  
 Besicovitch 距离 2:673  
 Bessel - Macdonald 运算 3:17  
**Bessel 不等式 1:343**  
**Bessel 插值公式 1:343**  
**Bessel 方程 1:340**  
 Bessel 方程的约化形式 1:341  
**Bessel 函数 1:342**

- Bessel 函数(第一类) 4:897  
 Bessel 函数(二阶的) 3:897  
 Bessel 函数系(Bessel 系)  
     1:344  
 Bessel 函数(虚变元的) 1:341  
 Bessel 核 1:344  
 Bessel 恒等式 1:343  
 Bessel 积分表示(柱函数的)  
     1:928  
 Bessel 求积公式 2:402  
 Bessel 微分多项式 2:421  
 Bessel 微分方程 2:533  
 Bessel 位势 1:344  
 Bessel 系 1:344  
 BET 方程 1:48  
 Beth 可定义性定理 3:785  
 Betti 群 1:350  
 Betti 数 1:350  
 Betti 数(代数簇的) 5:478  
 Betti 数(局部环的) 3:535  
 Beurling 定理 2:818  
 Bezout 定理 1:350  
 Bezout 定理(关于多项式除以线性  
     二项式的) 1:350  
 Bezout 定理(关于齐次方程的)  
     1:350  
 Bezout 恒等元 1:350  
 Bezout 环 1:350  
      $(b, f)$  结构 1:625  
 Bianchi 变换 1:351  
 Bianchi 恒等式 1:351  
 Bianchi 曲面 1:351  
 Bianchi 线汇 1:350  
 BIB 设计(平衡不完全区组设计)  
     1:376  
 Bichteler - Dellacherie 定理 5:8  
 Bieberbach - Eilenberg 单叶函数  
     1:635  
 Bieberbach - Eilenberg 函数  
     1:355  
 Bieberbach 不等式 3:194  
 Bieberbach 猜想 1:354  
 Bieberbach 定理(关于晶体群的)  
     2:232; 4:232  
 Bieberbach 定理(关于 Euclid 空间中  
     的运动的) 2:231  
 Bieberbach 多项式 1:356  
 Bieberbach 群 4:900  
 Bieberbach 性质(Lie 群的) 2:232  
 Bieberbach 子群 4:900  
 Bienaymé - Чебышев 不等式  
     1:568  
 Binet - Cauchy 定理 4:129  
 Binet - Cauchy 公式 2:65  
 Binet 公式(关于 Fibonacci 数的)  
     2:464  
 Bing 犬骨状分解 1:488  
 Bing 准则 3:737  
 Biot 数 4:825  
 Birch - Swinnerton - Dyer 猜想  
     2:200  
 Birch 定理 1:591  
 Birkhoff - Frink 定理 5:56  
 Birkhoff - Tarski 不动点原理  
     2:493  
 Birkhoff - von Neumann 定理  
     1:860  
 Birkhoff - Witt 定理 1:370  
 Birkhoff - Хинчин 遍历定理  
     4:986  
 Birkhoff 遍历定理 1:370  
 Birkhoff 插值 2:854; 3:136  
 Birkhoff 插值问题 3:136  
 Birkhoff 定理 1:107; 1:112  
 Birkhoff 定理(关于基本解组的)  
     4:876  
 Birkhoff 定理(关于 Lagrange 稳定  
     性的) 3:329  
 Birkhoff 回复定理 4:520  
 Bishop 定理 2:429  
 Bjorling 问题 1:373  
 BL 代数 1:363  
 Blackwell 定理 4:993  
 Blackwell 可测空间 3:704  
 Blackwell 空间 4:316  
 Blanchfield 形式 3:275  
 Blaschke - Weyl 公式 1:375  
 Blaschke - Привалов 定理 4:305  
 Blaschke 定理(关于有界全纯函数  
     零点的) 1:374  
 Blaschke 刚性定理 2:31  
 Blaschke 函数 1:374  
 Blaschke 和 1:34  
 Blaschke 积 1:374  
 Blaschke 紧性原理 1:375  
 Blaschke 选择定理 1:375  
 Blaschke 因子 1:374  
 Blichfeldt 定理 2:722; 3:764  
 Bloch 定理 1:375; 3:338  
 Bloch 公式 1:586  
 Block - Wilson 分类定理 3:434  
 Block 常数 1:375  
 Blotto 对策 1:377  
 Blum 公理 1:719  
 BMO 函数 2:818  
 bo 线性算子 4:661  
 Bochner 变换 3:121  
 Bochner - Fejér 求和法 1:140  
 Bochner - Martinelli 表示 1:378  
 Bochner - Martinelli 公式 1:378  
 Bochner - Martinelli 核 1:378  
 Bochner - Martinelli 算子 3:390  
 Bochner - Martinelli 型积分 1:379  
 Bochner - Хинчин 定理 2:539  
 Bochner 殆周期函数 1:377  
 Bochner 定理 4:250  
 Bochner 定理(等距群的) 3:319  
 Bochner 定理(关于正定函数表示  
     的) 2:683  
 Bochner 定理(关于 Riesz 平均的)  
     2:536  
 Bochner 定理(Fourier - Stieltjes 变  
     换的) 1:561  
 Bochner 分析定理(关于正定函数一  
     般形式的) 4:986  
 Bochner 积分 1:377  
 Bochner 可积函数 1:377  
 Bochner 可积性准则 1:378  
 Bockstein 同态 1:654  
 Bohl - Bohr 定理 4:402  
 Bohl 殆周期函数 1:382  
 Bohl 定理 4:966  
 Bohl 区间 2:134  
 Bohl 指数 2:134  
 Bohl 指数(在零点的) 2:134  
 Bohr - Favard 不等式 1:384  
 Bohr - Sommerfeld 量子理论 1:41  
 Bohr 不等式 2:453  
 Bohr 殆周期函数 1:383  
 Bohr 殆周期函数空间 1:305  
 Bohr 对应原理 4:752



- Bohr 紧化 1:383  
 Bohr 紧统 1:383  
 Boks 积分 1:384  
 Bol 么拟群 3:565  
 Boltzmann  $H$  定理 1:386  
 Boltzmann 常数 4:1006  
 Boltzmann 方程 1:385  
 Boltzmann 方程(线性化的)\*  
     1:386  
 Boltzmann 分布 1:384  
 Boltzmann 统计法 1:387  
 Bolyai - Gerwien 定理 5:135  
 Bolyai - Лобачевский 几何学  
     3:935  
 Bolza 问题 1:387  
 Bolzano - Weierstrass 定理 1:388  
 Bolzano - Weierstrass 定理(关于紧  
     集的极限点的) 1:686  
 Bolzano - Weierstrass 条件 4:791  
 Bolzano - Weierstrass 选择原理  
     1:388  
 Bombieri - 小平定理 2:672  
 Bombieri - Виноградов 定理 2:45  
 Bombieri 定理 2:259  
 Bonnesen 不等式 1:389  
 Bonnet 定理 1:389  
 Bonnet 定理(关于卵形面直径的)  
     1:389  
 Bonnet 定理(关于曲面的存在和唯  
     一性的) 1:389  
 Bonnet 公式(关于 Riemann 积分的)  
     4:628  
 Bonnet 曲面 2:409  
 Bonnet 网 1:389  
 Bonnet 中值定理 1:389  
 Bony 例子 3:739  
 Boole 代数 1:390  
 Boole 代数(集合的) 1:315  
 Boole 方程 1:392  
 Boole 格 1:390  
 Boole 规划 3:1024  
 Boole 函数 1:392  
 Boole 函数的度量理论 1:392  
 Boole 函数的范式 1:397  
 Boole 函数的极小化 1:394  
 Boole 环 1:398  
 Boole 矩阵 1:392  
 Boole 空间 3:1020  
 Boole 全称公式 1:110  
 Boole 运算 1:390  
 Boole 值模型 1:398  
 Boone - Новиков 定理 1:132  
 Boor 定理 5:84  
 Booth 双纽线 1:399  
 Borel - Cantelli 引理 1:403  
 Borel - Lebesgue 覆盖定理 1:404  
 Borel - Lebesgue 条件 4:421  
 Borel - Pompeiu 公式 1:515  
 Borel - Морозов 定理 1:403  
 Borel  $\sigma$  代数 1:76  
 Borel  $\sigma$  域 5:177  
 Borel 变换 1:407  
 Borel 不动点定理 1:403  
 Borel 测度 1:404  
 Borel 测度(直线上的) 1:404  
 Borel 超渡定理 5:247  
 Borel 稠密性定理(关于 Lie 子群的)  
     2:232  
 Borel 代数 1:403  
 Borel 定理 1:557  
 Borel 定理(关于正规数的) 3:733  
 Borel 多边形 1:406  
 Borel 分层 2:62  
 Borel 分层(集合的) 2:863  
 Borel 函数 1:403  
 Borel 积分变换 1:407  
 Borel 积分表示 1:687  
 Borel 积分求和法 5:74  
 Borel 级数变换 2:295  
 Borel 集 1:405  
 Borel 集(超限类的) 1:405  
 Borel 集的判别准则 1:405  
 Borel 集(二阶的) 1:405  
 Borel 集(零阶的) 1:405  
 Borel 集(歧义类的)\* 1:405  
 Borel 集系 1:407  
 Borel 集(一阶的) 1:405  
 Borel 集(有限阶的) 1:405  
 Borel 集域 1:403  
 Borel 集族(由集系生成的) 1:403  
 Borel 可测函数 1:403  
 Borel 可测集 1:405  
 Borel 可分集 3:576  
 Borel 扩张引理 5:496  
 Borel 类 2:678  
 Borel 例外值(亚纯函数的) 2:413  
 Borel 连带函数 1:236  
 Borel 零一准则 1:403  
 Borel 强大数律 1:405  
 Borel 求和法 1:406  
 Borel 事件域(事件 Borel 域)  
     1:403  
 Borel 同构 1:404  
 Borel 引理 1:404  
 Borel 域(拓扑空间的) 5:364  
 Borel 正规数 3:984  
 Borel 正则测度 4:554  
 Borel 子代数 1:406;3:419  
 Borel 子群 1:406  
 Borg 定理 2:883  
 Born 近似 4:724  
 Borsuk 对 1:638  
 Borsuk 对径点定理 1:188  
 Borsuk 问题 1:407  
 Bose - Choudhuri - Hocquenghem 码  
     2:388  
 Bose 统计法 1:408  
 Bose 系统 1:408  
 Bose 子 2:501  
 Bose 子独立性 4:415  
 Bose 子正则对易关系 5:490  
 Bose 子  $\Phi_{OK}$  空间 2:501  
 Boss - Einstein 统计法 1:407  
 Bott 理论 5:385  
 Bott 式 2:860  
 Bott 周期定理 1:408  
 Bouck - Ryser - Chowla 定理  
     1:377  
 Bourbaki 筛 3:577  
 Bourget 函数 1:431  
 Boussinesq 方程 5:289  
 Boutet de Monvel 代数 2:350  
 Brahmagupta 公式 4:172  
 Brandt 半群 1:443  
 Brandt 广群 1:443  
 Brauer - Grothendieck 群 1:444  
 Brauer - Hasse - Noether 定理  
     2:625  
 Brauer - Manin 阻碍(对 Hasse 原理  
     的) 2:196  
 Brauer - Severi 簇 1:444

- Brauer - Severi 概形 1:445  
 Brauer - Siegel 定理 4:381  
 Brauer - Thrall 问题 4:593  
 Brauer 等价 1:890  
 Brauer 定理 4:726  
 Brauer 定理(关于群特征标的)  
     2:478  
 Brauer 群 1:443  
 Brauer 群(域的) 1:443, 647  
 Brauer 特征标 2:480  
 Bravais 格 1:900  
 Bravais 类型 1:899  
 Bravais 子群 1:899  
 Breiman 遍历定理 3:724  
 Brelot 定理 4:136  
 Brelot 空间 4:269  
 Brelot 收敛性质 2:838  
 Brianchon - Pascal 构形 1:742  
 Brianchon 点 1:445  
 Brianchon 定理 1:445  
 Brianchon 六边形 1:445  
 Brieskorn 群 1:434  
 Briot - Bouquet 方程 1:445  
 Brouwer - Bohl 定理 2:595  
 Brouwer - Hopf 定理 4:938  
 Brouwer - Урысон 定理(关于连续  
     函数扩张的) 1:817  
 Brouwer 不动点 1:804  
 Brouwer 不动点定理 1:446; 2:915  
 Brouwer 代数 1:446  
 Brouwer 定理 1:446  
 Brouwer 定理(关于区域不变性的)  
     1:447  
 Brouwer 格 1:446  
 Brouwer 公理(度量形式的)  
     2:183  
 Brouwer 公理(一般形式的)  
     2:183  
 Brouwer 结构 1:446  
 Brouwer 可推导性概念原理 2:51  
 Brouwer 连续性原理 2:862; 3:154  
 Brouwer 区域不变性定理 1:447  
 Brouwer 扇定理 2:450  
 Brouwer 无穷引理 4:102  
 Brouwer 直觉主义 3:152  
 Browder 映射度 2:38  
 Brown - McCoy 根 4:472  
 Brown - Peterson 上同调 1:625  
 Brown - Robinson 迭代法 3:675  
 Brown - Robinson 迭代法 3:675  
 Brown 桥 3:959  
 Brown 运动 1:447  
 Brown 运动过程 4:21  
 Bruck - Ryser 定理 4:29  
 Bruhat 分解 1:447  
 Bruhat 序 3:597  
 Brun 定理 1:448  
 Brun 筛法 1:447  
 Brunauer - Emmett - Teller 方程  
     1:48  
 Brunauer 方程 1:48  
 Brunn - Minkowski 定理 1:448  
 Brunn 链环 3:273  
 Brunovsky 典范形式 5:124  
 Brunowski - Kalman - Morse - Won-  
     ham 定理 3:597  
*btt* 可归约性 4:528; 5:284  
 Budan - Fourier 定理 1:448  
 Buekenhout - Tits 几何学 3:29  
 Buffon 投针问题 1:448  
 Buffon 问题 1:448  
 Burali - Forti 悖论 1:187  
 Burau 表示 1:433  
 Burgers 方程 2:175  
 Burgers 向量 5:229  
 Burgess 定理 2:256  
 Burkholder 不等式 3:630  
 Burkill - Колмогоров 积分 1:450  
 Burkill 不定积分 1:449  
 Burkill 积分 1:449  
 Burkill 上积分 1:449  
 Burkill 下积分 1:449  
 Bürmann - Lagrange 级数 1:450  
 Bürmann 定理 1:450  
 Burnside 环 3:312  
 Burnside 簇 5:400  
 Burnside 定理 3:483; 3:673;  
     3:985  
 Burnside 问题 1:451  
 Burnside 问题(有限群的) 1:451  
 Burnside 问题(周期群的) 1:451  
 Burnside 型问题 3:928  
 Burnside 引理 1:664  
 Busemann  $G$  空间 1:608  
 $(B, \varphi)$  割补术 3:833  
 $(B, \varphi)$  结构 1:295  
 $(B, \varphi)$  流形 1:295  
 $(B, \varphi)$  下配边流形 1:622  
 $(B, \varphi)$  下配边性 1:622  
 C  
 $C^*$  代数 1:453  
 $C^*$  代数的谱 4:932  
 $C^*$  代数的特征标 1:551  
 $C$  代数化空间 1:716  
 $C^*$  代数(具有连续迹的) 1:454  
 $C^*$  代数上的迹 5:238  
 $C^*$  代数(I 型的) 1:454  
 $\mathbb{C}$  反射 4:538  
 $C'^a$  光滑流形 3:20  
 $C'^a$  光滑曲面 3:20  
 $c$  核心 1:856  
 $C^*$  结构 2:90  
 $C'^a$  浸入 3:20  
 $C$  可定向广义上同调论 2:678  
 $C$  可约 Finsler 空间 2:486  
 $C^*$  类映射 2:91  
 $C'^a$  流形 3:20  
 $C^*$  流形 2:90  
 $c$  平面 4:651  
 $C^*$  嵌入 2:91  
 $C'^a$  曲面 3:20  
 $C^n$  上的域(覆盖域) 1:880  
 $C^*$  态射 2:91  
 $C_0$  条件(关于半群的) 5:39  
 $C_1$  条件(关于半群的) 5:39  
 $\mathbb{C}$  调和空间 4:269  
 $C^*$  同构 2:91  
 $C$  凸包定理 1:381  
 $C^*$  图册 2:90  
 $C^\infty$  微分同胚 3:601  
 $C^*$  微分同胚结构 2:91  
 $C^*$  微分同胚流形 2:91  
 $C$  系统 5:527  
 $C$  型格 5:444  
 $C$  型区域 4:881  
 $C^*$  映射 2:91  
 $C_0$  域 5:308  
 $C_1$  域 5:308  
 $C_i$  域 5:308



- $C^\infty$  预备定理 5:99  
 $C^k$  子流形 2:91  
 $C\mathcal{A}$  集 1:455  
 $CA_n$  集 4:343  
 Caccioppoli - De Giorgi 周长 3:197  
 Caesar 密码 1:891  
 Cairns 定理 5:297  
 Calabi - 丘(成桐)流形 3:246  
 Calabi 猜想 3:246  
 Calderón - Lions 复插值方法 3:141  
 Calderón - Zygmund 算子 1:457  
 Calderón 换位子 1:516  
 Calderón 投影 2:351  
 Calkin 代数 2:563  
 Campbell - Baker - Hausdorff 公式 1:459  
 Campbell - Hausdorff 公式 1:458  
 Campbell 测度 5:12  
 Canley 指数 4:507  
 Cantelli 定理 4:465  
 Cantelli 条件 5:36  
 Cantor - Bendixson 定理 1:465; 2:56  
 Cantor - Bendixson 高度 2:56  
 Cantor - Bernstein 定理 1:465; 1:474; 1:475  
 Cantor - Lebesgue 定理 5:275  
 Cantor 悖论 1:464  
 Cantor 定理 1:465  
 Cantor 定理(关于唯一性集的) 5:275  
 Cantor 定理(关于一致连续性的) 1:812  
 Cantor 对角线法 2:69  
 Cantor 对角线过程 2:69  
 Cantor 对角线化过程 1:465  
 Cantor 对角线化原理 5:316  
 Cantor 对角线论证 2:69  
 Cantor 分布 4:846  
 Cantor 公理 1:462  
 Cantor 环面 4:439  
 Cantor 集 1:464  
 Cantor 阶梯 1:464  
 Cantor 立方体 1:661; 2:303  
 Cantor 流形 1:463  
 Cantor 密断统 1:463  
 Cantor 区间套原理 1:686; 4:512  
 Cantor 曲线 1:463  
 Cantor 三分点集 1:464  
 Cantor 三元集 2:542  
 Cantor 完满集 1:463; 1:464  
 Cantor 型集 5:336  
 Cantor 型集(常数比的) 5:336  
 Cantor 状集 1:464  
 Capelli 恒等式 4:157  
 Cappell - Shaneson 定理(关于矩阵的拓扑相似性的) 1:283  
 Carathéodory - Fejér 定理 1:469  
 Carathéodory - Fejér 问题 1:469  
 Carathéodory - Toeplitz 定理 1:468  
 Carathéodory 测度 1:470  
 Carathéodory 定理 1:470  
 Carathéodory 定理(关于素端在共形映射下的) 3:446  
 Carathéodory 定理(关于质量的重心的) 1:845  
 Carathéodory 定理(关于 Stieltjes 积分参数表示的) 4:89  
 Carathéodory 度量 2:943  
 Carathéodory 端 3:446  
 Carathéodory 分类(素端的) 3:446  
 Carathéodory 距离 2:776  
 Carathéodory 扩张 1:410; 3:703  
 Carathéodory 扩张定理 3:703  
 Carathéodory 类 1:468  
 Carathéodory 内测度 3:703  
 Carathéodory 区域 1:469  
 Carathéodory 素端 3:628  
 Carathéodory 条件 1:423  
 Carathéodory 外测度 1:470; 3:703  
 Cardano 公式 1:471  
 Carleman - Milloux 问题 2:428  
 Carleman 边值问题 1:476  
 Carleman 不等式 1:476  
 Carleman 定理 1:477  
 Carleman 定理(关于矩问题的) 1:477  
 Carleman 定理(关于拟解函数类的) 1:477  
 Carleman 定理(关于平均逼近的) 1:477  
 Carleman 定理(关于用整函数一致逼近的) 1:477  
 Carleman 多项式 1:477  
 Carleman 方程组 2:676  
 Carleman 核 1:476  
 Carleman 类 1:477  
 Carleman 连续统 1:477  
 Carleman 条件 1:476; 4:418  
 Carleman 条件(关于概率分布的矩的) 3:803  
 Carleman 原理 2:428  
 Carleson - Hunt 定理 1:478  
 Carleson 定理 1:478  
 Carleson 集 1:478  
 Carlson 不等式 1:478  
 Carlson 法 1:479  
 Carnap 法则 1:479  
 Carnot 定理 1:479  
 Carnot 原理(热力学中的) 5:396  
 Carson 变换 1:480  
 Cartan - 仓西定理 1:484  
 Cartan - 仓西延拓定理 4:98  
 Cartan - Kahler 定理 1:484  
 Cartan - Kahler 定理(关于由理想定义的微分方程组的) 4:150  
 Cartan - Killing 型 3:259  
 Cartan - Poincaré 积分不变量 3:110  
 Cartan - Serre 定理 A 1:874  
 Cartan - Serre 定理 B 1:874  
 Cartan - Serre 基 4:1018  
 Cartan - Serre 系统 4:259  
 Cartan - Serre 有限性定理 2:484  
 Cartan - Thullen 定理 2:276  
 Cartan - Weyl 基 1:487  
 Cartan - Липцев 定理 1:777  
 Cartan 半单性准则 3:259  
 Cartan 第一基本定理 1:368  
 Cartan 定理 1:486  
 Cartan 定理(多复变函数论中的) 1:486  
 Cartan 定理(关于常负曲率空间的) 1:594  
 Cartan 定理(关于解析群的) 1:163  
 Cartan 定理(关于射影联络测地线

- 的) 4:331
- Cartan 定理(关于细极限的) 2:471
- Cartan 定理(关于最高权向量的) 1:486
- Cartan 定理(关于 Lie 群态射的) 3:424
- Cartan 定理(关于 Pfaff 方程组的) 4:150
- Cartan 定理 A 1:486
- Cartan 定理 A 和 B 4:1026
- Cartan 定理 B 1:486
- Cartan 度量 3:259
- Cartan 分解 1:480
- Cartan 公式(关于 Steenrod 平方的) 4:1021
- Cartan 公式(关于 Steenrod 约化幂的) 4:1020
- Cartan 积 4:500
- Cartan 基(Lie 代数的) 3:416
- Cartan 结构方程组 1:483
- Cartan 矩阵 1:480
- Cartan 可解性准则 3:259
- Cartan 控制原理 2:278
- Cartan 联络 1:779
- Cartan 联络系数 2:485
- Cartan 挠率张量 2:485
- Cartan 曲面 3:891
- Cartan 数(Pfaff 方程组的) 1:482
- Cartan 外形式法 1:481
- Cartan 型代数 3:434
- Cartan 型 Lie 代数 3:404
- Cartan 引理 1:480
- Cartan 准则(关于半单性的) 3:416
- Cartan 准则(关于可解性的) 3:419
- Cartan 子代数 1:484
- Cartan 子群 1:485
- Cartan 最大值原理 2:278
- Cartan 定理 1:487
- Cartan 子群 1:487
- Cartier 除子 2:271
- Cartier 第二定理(关于形式群律的) 2:512
- Cartier 第三定理(关于形式群律的) 2:512
- Cartier 第一定理(关于形式群律的) 2:512
- Cartier 定理 2:789;4:530
- Cartier 对偶性 2:75
- Cartier 环 5:521
- Casimir 算子 1:498
- Casimir 元素 1:498
- Casimir 元素(线性表示的) 1:498
- Casimir 元素(Lie 代数关于双线性型的) 1:498
- Casorati - Weierstrass 定理 1:417
- Cassini 卵形线 1:498
- Castelnuovo 有理性准则 4:502
- Catalan 立体 3:187
- Catalan 曲面 1:499
- Catlin 条件 P 4:362
- Cauchy  $d$  滤子基 1:511
- Cauchy - Dirichlet 问题 3:501, 772
- Cauchy - Fantappiè 公式 1:515; 3:390
- Cauchy - Fantappiè 核 1:379
- Cauchy - Green 公式 1:379, 515
- Cauchy - Hadamard 不等式 1:512
- Cauchy - Hadamard 定理 1:511
- Cauchy - Hadamard 公式 1:511
- Cauchy - Hadamard 公式(关于 Dirichlet 级数的) 2:217
- Cauchy - Lagrange 积分 5:513
- Cauchy - Lagrange 积分(关于流体动力学方程的) 1:328
- Cauchy - Lebesgue 积分 1:515
- Cauchy - Lebesgue 型积分 4:305
- Cauchy - MacLaurin 积分准则 1:510
- Cauchy - Neumann 问题 3:772
- Cauchy - Poincaré 定理 1:157
- Cauchy - Pompeiu 公式 1:379
- Cauchy - Riemann 定理(关于可去奇点的) 4:579
- Cauchy - Riemann 方程 1:153
- Cauchy - Riemann 方程组 1:156
- Cauchy - Riemann 复形 3:895
- Cauchy - Riemann 算子 1:326; 3:478
- Cauchy - Riemann 条件 1:524
- Cauchy - Riemann 微分算子 2:166
- Cauchy - Saalschütz 积分 2:639
- Cauchy - Schwarz 不等式 1:449
- Cauchy - Stieltjes 积分 1:515
- Cauchy - Stieltjes 奇异积分 4:305
- Cauchy - Stieltjes 型积分 1:514
- Cauchy - Stolz 准则 1:509
- Cauchy - Ковалевская 定理 1:517
- Cauchy 变换 4:892
- Cauchy 并项定理 4:793
- Cauchy 并项检验法 1:510
- Cauchy 不等式 1:512
- Cauchy 不等式(关于 Dirichlet 级数的) 2:218
- Cauchy 代数不等式 1:449
- Cauchy 定理 1:525
- Cauchy 定理(关于多面体的) 1:525
- Cauchy 定理(关于广义解析函数的) 2:117
- Cauchy 定理(关于凸多面体全等的) 1:847
- Cauchy 定理(关于 Cauchy 问题的) 1:179
- Cauchy 定理(关于  $k$  角形数的) 1:233
- Cauchy 定理(群论中的) 1:526
- Cauchy 分布 1:510
- Cauchy 公式 5:378
- Cauchy 公式(关于卵形线长度的) 4:53
- Cauchy 函数 1:548
- Cauchy 函数方程 2:599
- Cauchy 核 1:517
- Cauchy 核(管状区域的) 4:212
- Cauchy 积 4:793
- Cauchy 积分 1:512
- Cauchy 积分定理 1:516
- Cauchy 积分公式 1:153, 513
- Cauchy 积分公式(多圆柱域上的) 1:157
- Cauchy 积分公式(无限区域上的) 1:513
- Cauchy 积分判别法 1:510
- Cauchy 介值定理 1:526;1:812
- Cauchy 矩阵 1:518
- Cauchy 可积函数 3:91



- Cauchy 滤子 1:511  
 Cauchy 滤子基 1:511  
 Cauchy 判别法 1:510  
 Cauchy 收敛定理(关于级数的) 1:510  
 Cauchy 收敛性准则(关于反常积分的) 1:21, 504  
 Cauchy 收敛性准则(关于级数的) 1:510  
 Cauchy 收敛性准则(关于数列的) 1:508  
 Cauchy 数据 1:520; 3:81  
 Cauchy 算子 1:518  
 Cauchy 特征问题 1:507  
 Cauchy 条件 5:199  
 Cauchy 网 2:615  
 Cauchy 问题 1:519  
 Cauchy 问题, 常微分程的数值解法 1:522  
 Cauchy 系统 1:317  
 Cauchy 形式(通解的) 2:670  
 Cauchy 形式(Taylor 公式中余项的) 5:140  
 Cauchy 型积分 1:513; 4:891  
 Cauchy 序列 1:525  
 Cauchy 一致收敛准则(关于反常积分的) 1:509  
 Cauchy 一致收敛准则(关于级数的) 1:509  
 Cauchy 主值 2:953  
 Cauchy 主值积分 3:28  
 Cauchy 准则 1:508  
 Cauchy 准则(关于多变量函数极限存在的) 1:509  
 Cauchy 准则(关于反常积分收敛性的) 3:27  
 Cauchy 准则(关于函数族一致收敛性的) 1:509  
 Cauchy 准则(Cauchy 判别法)\* 1:510  
 Cavalieri 原理 1:527  
 Cayley - Darboux 方程 1:527  
 Cayley - Dickson 代数 1:527  
 Cayley - Dickson 过程 1:527  
 Cayley - Dickson 环 1:528  
 Cayley - Klein 参数 1:529  
 Cayley - Klein 射影解释 (Лобачевский 空间的) 3:528  
 Cayley - Noether 假定公式 1:102  
 Cayley 变换 1:530  
 Cayley 表 1:530  
 Cayley 代数 1:527  
 Cayley 定理 4:131  
 Cayley 分裂代数 1:528  
 Cayley 曲面 1:530  
 Cayley 曲线(三次曲线的) 1:904  
 Cayley 数 1:530  
 Cayley 型 1:528  
 Cayley 型(簇的) 1:586  
 CCR 代数 1:670  
 CCR 群 5:341  
 Cecchini 的 Марков 性分析(von Neumann 代数中的) 4:415  
 Cecchini - Petz 状态扩张理论 4:415  
 Čech - Lebesgue 维数 3:373  
 Čech - Pospíšil 定理 1:473  
 Čech - Stone 紧化 5:25  
 Čech 定理 3:729  
 Čech 复形 1:644  
 Čech 嵌入定理 2:70  
 Čech 上同调 1:531  
 Čech 上同调(覆盖的取值于 Abel 群层的) 1:644  
 Čech 同调 4:918  
 Čech 完全拓扑空间 1:699  
 Čech 轴 4:339  
 Cesáro 可和性(半群的) 5:39  
 Cesáro 平均值 3:1028  
 Cesáro 求和法 1:541  
 Cesáro 曲线 1:540  
 Ceva 定理 1:541  
 Ceva 线 1:541  
 CF 文法 2:746  
 Chacon - Ornstein 遍历定理 4:20  
 Chandra - Kozen - Stockmeyer 交错型 3:591  
 Chapman - Enskog 法 1:548  
 Chapman - Колмогоров 方程 3:282  
 Charlier - Poisson 多项式 1:565  
 Charlier 多项式 1:564  
 Charlier 分布 1:564  
 Charve 约化(二次型的) 4:387  
 Charve 约化法 4:387  
 Chasles 定理 1:566  
 Chasles 关系 5:404  
 Chen - Fox - Lyndon 基 1:314  
 Chen - Grätzer 定理 5:26  
 Chen 分解定理 4:193  
 Chevalley 定理 1:481; 3:535  
 Chevalley 定理(关于代数簇的可构造子集的) 1:784  
 Chevalley 定理(关于同余式的) 1:762  
 Chevalley 法(关于单群的) 2:74  
 Chevalley 基 1:481  
 Chevalley 基(Lie 代数的) 3:416  
 Chevalley 结构定理 1:675  
 Chevalley 群 1:582  
 Chevalley 生成元 1:481  
 Choquet 单形 1:585  
 Cholesky 法 1:29  
 Chomsky - Schützenberger 定理 2:515  
 Chomsky 范式(上下文无关文法的) 2:747  
 Chomsky 范式文法 2:515  
 Chomsky 文法 2:750  
 Choquet 边界 1:411  
 Choquet 定理 1:468; 2:64; 3:545  
 Choquet 空间 5:202  
 Choquet 容量 1:468  
 Choquet 唯一表示定理 1:585  
 Christoffel - Darboux 公式 1:586  
 Christoffel - Schwarz 公式 1:587  
 Christoffel - Schwarz 积分 1:587  
 Christoffel 符号 1:588  
 Christoffel 符号(二次微分形式的) 1:588  
 Christoffel 符号(线性联络的) 1:588  
 Christoffel 数 1:587  
 Christoffel 问题 3:763  
 Christoffel 系数 1:587  
 Church - Rosser 系统 4:322  
 Church - Turing 论题 1:121  
 Church  $\lambda$  抽取 1:589  
 Church 论题 1:589  
 Church 示数 3:311  
 CI 么拟群 3:565

$(C, k)$ 求和法 1:541  
 Clairaut 常微分方程 2:4  
 Clairaut 定理 4:690  
 Clairaut 方程 1:593  
 Clairaut 偏微分方程 1:594  
 Clapeyron - Clausius 方程 4:153  
 Clebsch 接合 1:780  
 Clebsch 条件 1:604  
 Clebsch 引理 4:260  
 Clifford - Klein 问题(空间形式的) 4:899  
 Clifford - Lipschitz 数 2:952  
 Clifford - Wolf 离散群(等距的) 4:657  
 Clifford 半群 1:606  
 Clifford 代数 1:605  
 Clifford 定理 1:607  
 Clifford 平行线 1:606  
 Clifford 平行性 1:606  
 Clifford 平移 4:657  
 Clifford 曲面 1:606  
 Clifford 群 1:605  
 Clifford 数 1:147  
 Cobol 语言 1:621  
 Codazzi - Mainardi 方程 2:719  
 Codazzi 方程 1:751  
 Cohen - Macaulay 概形 1:639  
 Cohen - Macaulay 环 1:639  
 Cohen - Macaulay 模 1:639  
 Cohen - Moore - Neisendorfer 指数定理 4:940  
 Cohen 结构定理 4:550  
 Cohn - Vossen 变换 1:642  
 Cohn - Vossen 不等式 2:652  
 Cohn - Vossen 定理 1:852  
 Cohn 定理 1:238  
 Collingwood 极大性定理 1:616  
 Combescour 对应 4:82  
 Connes 循环同调 3:241  
 Constantinescu - Cornea 定理 3:627  
 Conway 多项式 3:275  
 Conway 群 4:957  
 Cook 算法 2:748  
 Cornish - Fisher 展开 1:859  
 Cornu 螺线 1:859  
 Corson 紧空间 5:220

Cotes 公式 1:870  
 Cotes 系数 1:870  
 Couette 流 3:877  
 Coulomb 定律 1:797  
 Coulomb 对数 3:336  
 Courant - Friedrichs - Lewy 条件 1:871  
 Courant 定理 1:872  
 Courant 数 1:871  
 Courant 条件 2:946  
 Courant 稳定性准则 2:645  
 Cousin 第二定理 5:471  
 Cousin 问题 1:872  
 Cox 过程 5:11  
 Coxeter 数 4:537  
 Coxeter 矩阵 1:883  
 Coxeter 抛物子群 1:884  
 Coxeter 群 1:883  
 Coxeter 图 1:883;4:232;4:683  
 Coxeter 系统 1:543  
 Coxeter 元 1:884  
 CP 积分 1:450  
 CP 破坏 1:869  
 CPM 网络 4:324  
 Craig 定理 3:130  
 Cramér - Rao 不等式 4:495  
 Cramér - von Mises - Смирнов 检验 1:885  
 Cramér - von Mises 检验 1:885  
 Cramér 定理 1:885  
 Cramér 定理(关于正态分布的) 3:974  
 Cramér 法则 1:885  
 Cramér 公式 1:885  
 Cramér 级数 1:885  
 Cramér 条件 1:885  
 Cremona 变换 1:887  
 Cremona 变换群 4:502  
 Cremona 群 1:886  
 Crofton 公式 3:106  
 Crook 模型 1:51  
 Cross 簇 3:420  
 Cuesta Dutari 分割 5:87  
 Curry 算子方法 3:310  
 Curry 算子(逻辑公式的) 3:310  
 CW 复形 1:916  
 CW 谱 4:936

## D

D 积分 2:43  
 $D^*$  积分 2:43  
 D 可积函数 2:43  
 $D^*$  可积函数 2:43  
 D 模 2:1  
 D 群 2:268;2:791  
 $D_q$  群 2:824  
 $d$  生成元群 2:482  
 $d$  特征(算子的) 3:991  
 $d$  凸性 1:853  
 D 系统(耗散系统) 2:251  
 $d$  正规算子 3:991  
 $\mathfrak{D}$  自由群 2:567  
 DAD 定理 5:9  
 Dahlquist 稳定性 3:741  
 d'Alembert - Euler 条件 2:4  
 d'Alembert - Gauss 定理 1:713  
 d'Alembert - Lagrange 原理 2:5  
 d'Alembert 常微分方程 2:4  
 d'Alembert 方程 2:4  
 d'Alembert 公式 2:4  
 d'Alembert 公式(关于波动方程 Cauchy 问题的) 1:521  
 d'Alembert 函数方程 2:600  
 d'Alembert 偏微分方程 2:5  
 d'Alembert 算子 2:5  
 d'Alembert 原理 2:6  
 d'Alembert 准则(关于级数收敛性的) 2:4  
 Dandelin 法 3:527  
 Dandelin 球面 2:6  
 Daniell 格式 2:7  
 Daniell 积分 2:7  
 Dante 空间 2:7  
 Darboux - Picard 问题 2:741  
 Darboux - Sauer 定理 3:66  
 Darboux 标架 2:11  
 Darboux 不变量(曲线的) 2:10  
 Darboux 不变量(网的) 2:8  
 Darboux 常微分方程 2:8  
 Darboux 定理 2:11  
 Darboux 定理(关于殆辛结构可积性的) 1:143  
 Darboux 定理(关于 Pfaff 方程的)



- 4:149
- Darboux 定理(关于 Pffaf 形式的) 4:150
- Darboux 二次曲面 2:8
- Darboux 方程 2:8
- Darboux 方向 2:9
- Darboux 和 2:9
- Darboux 偏微分方程 2:8
- Darboux 曲面 2:10
- Darboux 曲线 2:10
- Darboux 三棱形 2:11
- Darboux 束 2:9
- Darboux 网不变量 2:8
- Darboux 问题 2:742;3:769
- Darboux 向量 2:11
- Darboux 性质 4:291
- Darboux 张量 2:10
- Darcy - Prandtl 数 4:282
- Darwin - Fowler 法 2:11
- Daubechies 基 5:456
- Davenport - Heilbron 定理 1:591
- Davis 不等式 3:630
- Davis 假设 2:197
- DBAR 问题 3:895
- de Jonquières 变换 1:887
- de la Vallée - Poussin 逼近法 2:13
- de la Vallée - Poussin 导数 2:12
- de la Vallée - Poussin 定理 2:14
- de la Vallée - Poussin 多点问题 2:12
- de la Vallée - Poussin 法(素数理论中的) 2:258
- de la Vallée - Poussin 公式(Dirichlet 问题的) 1:298;2:216
- de la Vallée - Poussin 和 2:13
- de la Vallée - Poussin 核 2:13; 2:14
- de la Vallée - Poussin 交错定理 2:14
- de la Vallée - Poussin 奇异积分 2:13
- de la Vallée - Poussin 求和法 2:14
- de la Vallée - Poussin 收敛准则 2:13
- de la Vallée - Poussin 收敛准则(关于 Fourier 级数的) 2:11
- de la Vallée - Poussin 素数分布定理 2:14
- de la Vallée - Poussin 准则 2:11
- de Moiver - Laplace 定理 2:15
- de Moiver 公式 2:15
- de Morgan 律 4:799
- de Rham 定理 2:16
- de Rham 定理(关于矩阵的拓扑相似性的) 1:283
- de Rham 分解 3:162
- de Rham 分解定理 3:163;4:531
- de Rham 复形 2:2;2:104;2:144
- de Rham 挠率 2:16
- de Rham 上同调 2:15
- de Rham 上同调群 2:15
- de Sitter 代数 1:822
- de Sitter 群 1:822
- Debreu 定理 3:639
- Debye 半径 2:16
- Debye 长度 2:16
- Dedekind - Hadamard 定理 5:72
- Dedekind ( $\sigma$ ) 完全有序向量空间 4:773
- Dedekind  $\zeta$  函数 2:22
- Dedekind  $\zeta$  函数(除子类的) 5:545
- Dedekind  $\zeta$  函数的主要性质 5:545
- Dedekind 定理 2:22
- Dedekind 法则 4:344
- Dedekind 分割 2:21
- Dedekind 分割(由一个实数造成的) 4:513
- Dedekind 格 2:21
- Dedekind 公理 1:807
- Dedekind 公理(实轴连续性的) 2:22
- Dedekind 环 2:21
- Dedekind 连续性(实数系的) 4:513
- Dedekind 判别式定理 2:238
- Dedekind 收敛性准则 2:21
- Dedekind 完全格 4:661
- Dedekind 完全有序向量空间 4:773
- Dedekind 无穷公理 3:68
- Dedekind 无限 Baer 环 4:551
- Dedekind 序 4:673
- Dedekind 有限集 3:187
- Dedekind 有限 Baer 环 4:551
- Dedekind 原理(实轴连续性的) 2:22
- Dedekind 整环 4:6
- Dedekind 准则(关于级数收敛性的) 2:21
- Deeblyn 条件 3:618
- Dehn 表示 3:270
- Dehn 不变量 2:373
- Dehn 基本判定问题(有群表现群的) 2:786
- Dehn 引理 2:39
- del Pezzo 曲面 1:905;2:451; 4:502
- Delambre 公式 4:948
- Delian 问题 2:303
- Deligne - Hodge 理论 3:838
- Deligne - Lusztig 理论 2:478
- Delsarte 广义位移算子 2:681
- Demoulin 定理 2:41
- Demoulin 曲面 2:41
- Demoulin 四边形 2:41
- Demoulin 四面体 2:41
- Demoulin 直线 2:41
- Denjoy - Carleman - Ahlfors 定理 1:249
- Denjoy - Carleman 拟解析定理 4:418
- Denjoy - Young - Sask 定理 2:44
- Denjoy - Лузин 定理 2:43
- Denjoy - Хинчин 定理 1:192
- Denjoy - Хинчин 积分 3:258
- Denjoy 定理(关于导数的) 2:44
- Denjoy 定理(关于环面上的流的) 2:134
- Denjoy 积分 2:43
- Denjoy 类 4:418
- Denjoy 条件 2:7
- Desargues 定理 2:56
- Desargues 格 3:794
- Desargues 构形 2:56

- Desargues 几何学 2:56  
 Desargues 假定 2:56  
 Desargues 空间 2:57  
 Desargues 平面 2:56;2:57  
 Desargues 射影平面 4:340  
 Desargues 数系 3:926  
 Descartes 闭范畴 1:504  
 Descartes 闭性 5:206  
 Descartes 定理 2:58  
 Descartes 积 1:488  
 Descartes 积(多值映射的) 3:853  
 Descartes 积( $\Omega$  系统的) 1:106  
 Descartes 卵形线 2:57  
 Descartes 圈积 5:523  
 Descartes 形式(复数的) 1:713  
 Descartes 叶形线 2:505  
 Descartes 因子分解 1:488  
 Descartes 正方形 1:488  
 Descartes 正负号法则 2:58  
 Descartes 直角坐标 1:162  
 Descartes 直角坐标系 1:488  
 Descartes 子群 5:421  
 Descartes 坐标 1:488  
 Descartes 坐标系 1:488  
 ( $\mathcal{D}$ ) 型空间 3:998  
 DFR 函数 4:576  
 DFS 型空间 2:690  
 Dialectica 解释(辩证解释) 1:788;  
 2:737  
 Dickson 不变量 2:74  
 Dickson 不变量(相似变换的)  
 2:75  
 Dickson 群 2:74  
 Dieudonné 环 2:75;2:512;  
 5:521  
 Dieudonné 模 2:75  
 Dieudonné 完全的拓扑空间  
 1:699  
 Dieudonné 行列式 2:66;4:908  
 Dilworth 定理 4:103  
 Dini - Cartan 引理 4:753  
 Dini - Lipschitz 条件 4:32  
 Dini - Lipschitz 准则 2:188  
 Dini 导数 2:188  
 Dini 定理 2:189  
 Dini 定理(关于一致收敛性的)  
 2:189  
 Dini 定理(关于 Liouville 曲面的)  
 3:520  
 Dini 收敛准则 2:188  
 Dini 收敛准则(关于 Fourier 级数  
 的) 2:188  
 Dini 条件 1:457;1:573  
 Dini 一致收敛性准则 2:189  
 Dini 准则 2:188  
 Dinostratus 割圆曲线 2:189  
 Diocles 蔓叶线 1:593  
 Diophantus 逼近 2:191  
 Diophantus 逼近的度量理论  
 2:189  
 Diophantus 逼近的度量途径  
 2:194  
 Diophantus 逼近的整体途径  
 2:194  
 Diophantus 逼近(幂级数域上的)  
 2:191  
 Diophantus 逼近问题(有效的)\*  
 2:190  
 Diophantus 逼近( $p$  进数域上的)  
 2:193  
 Diophantus 不等式 2:191  
 Diophantus 不定方程 2:195  
 Diophantus 方程 2:195  
 Diophantus 方程的可解性问题  
 2:197  
 Diophantus 方程(指数增长性的)  
 2:197  
 Diophantus 分析 2:189  
 Diophantus 集 2:201  
 Diophantus 几何 2:198  
 Diophantus 几何学中高的基本性质  
 2:846  
 Diophantus 加型问题\* 2:201  
 Diophantus 谓词 2:201  
 Dirac  $\delta$  函数 2:202  
 Dirac 测度 3:699  
 Dirac 方程 2:202  
 Dirac 绘景 3:127  
 Dirac 矩阵 2:204  
 Dirac 算子 4:952  
 Dirac 旋量 2:204  
 Dirac 旋量理论 2:230  
 Dirac 质量 3:699  
 Dirichlet - Douglas 泛函 4:91  
 Dirichlet - Jordan 检验法(Jordan 准  
 则) 3:229  
 Dirichlet  $L$  函数 2:212  
 Dirichlet  $L$  级数 2:212;4:627  
 Dirichlet - Вороной 胞腔 4:84;  
 4:386  
 Dirichlet - Вороной 分解 2:19  
 Dirichlet - Вороной 铺砖(铺砌)  
 2:725;4:59;5:444  
 Dirichlet - Вороной 区域 5:444  
 Dirichlet 胞腔 5:443  
 Dirichlet 变分问题 2:220  
 Dirichlet 抽屉原理(Dirichlet 盒子原  
 理) 2:208  
 Dirichlet 除数问题 2:273  
 Dirichlet 代数 1:72  
 Dirichlet 单位定理 2:219  
 Dirichlet 单位定理(关于代数数域  
 的) 2:219  
 Dirichlet 定理 2:219  
 Dirichlet 定理(关于代数数域的)  
 2:219  
 Dirichlet 定理(关于算术级数中的  
 素数的) 2:219  
 Dirichlet 定理(关于 Fourier 级数的)  
 2:220  
 Dirichlet 定理(Diophantus 逼近理论  
 中的) 2:219  
 Dirichlet 范数 2:360  
 Dirichlet 分布 2:210  
 Dirichlet 公式 2:210  
 Dirichlet 公式(关于除数个数的)  
 2:210;2:273  
 Dirichlet 公式(类数的) 4:384  
 Dirichlet 函数 2:210  
 Dirichlet 核 2:211  
 Dirichlet 盒子原理 2:208  
 Dirichlet 积分 2:211  
 Dirichlet 级数 2:217  
 Dirichlet 级数代数 2:369  
 Dirichlet 级数(对于解析殆周期函  
 数的) 2:219  
 Dirichlet 级数(具有复指数的)  
 2:218  
 Dirichlet 间断乘子 2:210  
 Dirichlet 空间 2:211;4:270  
 Dirichlet 铺砌 5:444



Dirichlet 奇异积分 2:211  
 Dirichlet 求和核 2:212  
 Dirichlet 区域 5:443  
 Dirichlet 区域(离散变换群的)  
   2:226  
 Dirichlet 收敛性准则 2:12  
 Dirichlet 数据 2:488  
 Dirichlet 素数定理 2:261  
 Dirichlet 特征标 2:208  
 Dirichlet 条件(函数上的) 2:220  
 Dirichlet 问题 2:215  
 Dirichlet 系数 2:219  
 Dirichlet 型 5:489  
 Dirichlet 原理 2:214  
 Dirichlet 指数 2:219  
 Dirichlet 主特征标 2:209;  
   4:295  
 Dirichlet 准则(关于级数收敛性的)  
   2:210  
 DOL 增长函数 3:316  
 Dolbeault - Serre 定理 2:890  
 Dolbeault 定理 2:145  
 Dolbeault 复形 2:890;3:895  
 Dold - Atiyah - Hirzebruch 谱序列  
   2:678  
 Dold 定理 4:1037  
 Donsker  $\delta$  函数 5:490  
 Donsker 定理 5:457  
 Doob - Meyer 分解 1:833;3:630  
 Doob 不等式 3:630  
 Doob 不等式(数学期望的) 3:630  
 Doob 定理 3:630  
 Doob 定理(关于平稳 Марков 过程  
   的) 3:630  
 Doob 收敛性 4:268  
 Doob 停止定理 3:631  
 Doppler 效应 2:279  
 Douglas 定理 4:178  
 Douglas 问题 2:287  
 Douglas - Nirenberg 椭圆性 2:350  
 Dowker 定理(关于正规空间覆盖维  
   数的) 2:179  
 Dowker 空间 3:989  
 Drozd 定理 4:595  
 $DS_n$  法(间断 Carlson 法) 1:479  
 du Bois - Reymond 定理 2:288  
 du Bois - Reymond 引理 2:288

du Bois - Reymond 准则 2:288  
 Du Val 奇点 4:501;4:858  
 Duffin - Kemmer 矩阵 2:203  
 Duffing 方程 2:300  
 Dugundji 定理 3:728  
 Duhamel 积分 2:301  
 Duhamel 积分公式 4:614  
 Duhamel 原理 2:301;4:612  
 Dunford - Pettis 定理 5:416  
 Dunford - Pettis 性质 5:416  
 Dupin 标形 2:302  
 Dupin 超曲面 2:302  
 Dupin 定理 2:302  
 Dupin 圆纹曲面 2:301  
 Dyck 语言 2:514  
 Dyson 猜想 4:685

## E

$E$  定向的丛 5:166  
 $E$  定向的向量丛 5:166  
 $E$  多项式 2:825  
 $e$  赋值( $\lambda$  演算中的) 3:311  
 $E$  函数 2:824;4:817;5:242  
 $\varepsilon$  局部小范畴 4:462  
 $E$  可定向丛 5:166  
 $E$  可定向向量丛 5:166  
 $E$  可定向性 5:166  
 $E$  空间 2:777  
 $E$  链 4:553  
 $\varepsilon$  商对象 4:461  
 $E^*$  上同调论(具有系数群的)  
   3:826  
 $e$ (数) 2:316  
 $(E)$  型 Lie 代数 3:407  
 Eberlein - Шульман 定理 1:306  
 Eberlein 定理 5:214  
 Eberlein 紧空间 5:220  
 Eberlein 紧统 2:316  
 Eberlein 紧拓扑空间 2:317  
 Eckert VI 地图投影 1:493  
 Eckhaus 不稳定性 5:289  
 Edgeworth 级数 2:319  
 Edgeworth 展开 2:320;1:859  
 Edmonds - Fulkerson 定理 5:121  
 Ehrenfest 扩散模型 5:360  
 Ehrenfeucht - Mostowski 定理

3:785  
 Ehrenfeucht - Mostowski 壳 4:975  
 Ehresmann 序 3:596  
 EIL 系统 3:316  
 EIL 语言 3:316  
 Eilenberg - MacLane 单纯集  
   4:838  
 Eilenberg - MacLane 空间 2:328  
 Eilenberg - MacLane 谱 4:935;5:  
   168  
 Eilenberg - Moore 构造 5:280  
 Eilenberg - Moore 谱序列 4:922  
 Eilenberg - Steenrod 公理 4:1019  
 Eilenberg - Zilber 引理 4:838  
 Einstein - Kähler 度量 3:246  
 Einstein - Смолюховский 方程  
   2:328  
 Einstein 场方程 1:429  
 Einstein 度量 3:246  
 Einstein 法则 2:328  
 Einstein 方程 2:328  
 Einstein 空间 4:618  
 Einstein 齐性 Riemann 空间 4:657  
 Einstein(求和)约定 2:328;2:6  
 Einstein 求和约定(Einstein 法则)  
   2:238;5:145  
 Einstein 相对论 4:567  
 Einstein 相对性原理 4:567  
 Einstein 引力理论 2:766  
 Einstein 宇宙模型 1:868  
 Einstein 约定 2:328  
 Einstein 张量 4:648  
 Eisenstein  $\theta$  级数 5:163  
 Eisenstein 级数 3:788;5:164  
 Eisenstein 级数(最低权的) 1:905  
 Eisenstein 准则 1:83  
 Emden - Fowler 方程 2:356  
 Emden - Fowler 型常微分方程  
   2:356  
 Emden - Fowler 型方程 4:44  
 Emden 方程 2:356  
 Engel 代数 2:360  
 Engel 定理 2:361  
 Engel 定理(Мальцев 代数中的)  
   3:598  
 Engel 恒等式 4:158  
 Engel 群 2:360

- Engel 群(有限类  $n$  的) 2:361  
 Engel 条件 2:360  
 Engel 元 2:360  
 Engel 指数 2:360  
 Enneper 曲面 2:361  
 Enriques - Castelnuovo 准则 2:412  
 Enriques 曲面 2:355  
 EOL 系统 3:315  
 EOL 语言 3:315  
 Epimenides 悖论 2:372  
 Epstein 型定理 2:954  
 Eratosthenes 筛法 2:381  
 Erdős - Kac 定理 3:1008  
 Erdős - Turan 猜想 5:370  
 Erdős 定理(关于数的有理逼近的)  
   3:734  
 Erdős 问题 2:382  
 Erdős 性质 2:382  
 Erlang 分布 2:385  
 Erlang 公式 4:452  
 Eubulides 悖论 2:394  
 Euclid 表达式(相对论不变性的)  
   1:793  
 Euclid 除法性质 4:444  
 Euclid 单形 4:832  
 Euclid 的《几何原本》 2:338  
 Euclid 定理 2:257  
 Euclid 度量 1:715  
 Euclid 环 2:395  
 Euclid 几何学 2:395  
 Euclid 空间 2:395  
 Euclid 空间形式 4:899  
 Euclid 联络 2:394  
 Euclid 量子场论 4:409  
 Euclid 平行公理(第五公设)  
   2:468  
 Euclid 群 1:59  
 Euclid 实现(复形的) 1:707  
 Euclid 素数定理 2:395  
 Euclid 算法 2:394  
 Euclid 向量丛 2:394  
 Euclid 型代数 2:732  
 Euclid 域 2:395  
 Euclid 运动 1:59;1:751  
 Euclid 运动群 1:59  
 Euclid 直径(紧集的) 5:243  
 Eudoxus 公理 1:218  
 Eudoxus 性质 4:404  
 Euler - Cauchy 法 2:402  
 Euler - Darboux - Poisson 方程  
   2:399  
 Euler - Darboux 方程 2:116  
 Euler - Fourier 公式 2:400  
 Euler - Knopp 求和法 2:405;  
   3:269  
 Euler - Lagrange 方程 2:401  
 Euler - Langrange 定理 1:806  
 Euler - MacLaurin 公式  
   2:401  
 Euler - MacLaurin 求和公式  
   2:401  
 Euler - Poincaré 公式 2:396  
 Euler - Poincaré 示性数 5:531  
 Euler - Poisson - Darboux 方程  
   2:132;2:399  
 Euler - Poisson 方程 2:398  
 Euler - Rodriguez 参数 1:529  
 Euler - Остроградский 方程 2:398  
 Euler - Урмаев 方程组 1:495  
 Euler B 函数 1:349  
 Euler  $\varphi$  函数 2:220  
 Euler 变换 2:406  
 Euler 变换(第二类) 2:407  
 Euler 变换(第一类) 2:406  
 Euler 变换(级数的) 3:564  
 Euler 变换(线性常微分方程的)  
   2:406  
 Euler 常数 2:397  
 Euler 常微分方程 2:397  
 Euler 代换 2:405  
 Euler 地图投影 1:496  
 Euler 递推关系(关于计算整数分拆  
   数的) 2:49  
 Euler 定理 2:406  
 Euler 定理(关于顶点棱和面数的)  
   4:228  
 Euler 定理(关于平方和的) 4:290  
 Euler 定理(图论中的) 2:755  
 Euler 多项式 2:404  
 Euler 法 2:402  
 Euler 方 4:27  
 Euler 方程 2:397  
 Euler 方法(气体动力学中的)  
   2:642  
 Euler 公式(关于顶点、边和面的)  
   2:761  
 Euler 公式(关于复指数的)  
   1:714;2:418;4:844  
 Euler 公式(关于齐次函数导数的)  
   2:898  
 Euler 公式(关于曲率的) 2:399  
 Euler 公式(关于曲面法方向的)  
   1:908  
 Euler 公式(关于主曲率的) 4:296  
 Euler 公式(指数函数与三角函数的  
   关系) 2:399  
 Euler 关系式(关于凸多面体的面  
   的) 1:846  
 Euler 函数 2:400  
 Euler 函数方程 2:600  
 Euler 函数方程(关于  $\Gamma$  函数的)  
   2:639  
 Euler 核 3:117  
 Euler 恒等式 2:400  
 Euler 积 2:404  
 Euler 积分 2:401  
 Euler 积分变换 2:406  
 Euler 积分表示(超几何函数的)  
   2:957  
 Euler 积公式(对  $\sin z$  的) 5:448  
 Euler 级数 2:404  
 Euler 检验(关于同余式的可解性  
   的) 4:279  
 Euler 角 2:396  
 Euler 阶段(大粒子方法中的)  
   3:350  
 Euler 解(三体问题的) 5:169  
 Euler 可和性 2:406  
 Euler 类 2:397  
 Euler 链 1:599;2:755  
 Euler 螺线(Cornu 螺线) 1:860  
 Euler 偏微分方程 2:399  
 Euler 求和法 2:405  
 Euler 圈 1:599;2:755  
 Euler 三角形 4:943  
 Euler 示性数 2:396  
 Euler 数 2:403  
 Euler 素数定理 4:290  
 Euler 图 2:755;4:112;  
   5:420  
 Euler 完全化公式( $\Gamma$  函数的)



2:639  
 Euler 线 2:405  
 Euler 向后法 2:403  
 Euler 向前法 2:403  
 Euler 有限差分法 5:387  
 Euler 运动方程 2:399  
 Euler 折线 2:402  
 Euler 折线法 5:380;5:387  
 Euler 直线(Euler 线) 3:914;  
 4:172  
 Euler 准则 2:397  
 Euler 准则(关于二次剩余的)  
 4:390  
 Euler 准则(关于幂剩余的) 5:303  
 Euler 组合恒等式 1:549  
 Euler 坐标(气体动力学中的)  
 2:642  
 Evan 定理 5:524  
 Evans - Hudson 流 4:416  
 Evans 猜想 3:355  
 Everett 插值公式 2:407  
 Everett 第二公式 4:1026

## F

$F$  比 2:491  
 $\varnothing$  初始配对(对象、态射的)  
 5:206  
 $F$  范数 5:355  
 $F$  分布 2:444  
 $F$  分布(Fisher  $F$  分布) 2:444;  
 2:491  
 $f$  环 4:12  
 $F$  集 2:731  
 $F_0$  集 4:799  
 $F$  检验 2:491  
 $F$  解析超复变函数 2:951  
 $F$  矩问题 3:805  
 $F$  可定向的上同调论 1:624  
 $F$  空间 5:355  
 $F^*$  空间 5:355  
 $F$  拟群 4:429  
 $F$  适应的随机过程 5:16  
 $F$  算子(Noether 算子, Fredholm 算子, 广义 Fredholm 算子,  $\Phi$  算子)  
 3:920  
 $\varnothing$  特许邻域 4:306

$F$  伪范数 5:355  
 $(\varnothing)$  型空间 3:998  
 $(F)$  型域 2:624  
 $f$  一致结构 5:325  
 $f$  因子(图的) 2:448  
 $F$  值  $p$  形式 2:144  
Faber - Schauder 基 4:37  
Faber - Schauder 系 2:445  
Faber 定理 4:37  
Faber 多项式 2:444  
Faber 级数 2:444  
Faber 展开式 2:444  
Fabry 定理 2:445  
Fabry 间隙定理 2:445  
Fabry 商定理 2:445  
Fagnano 问题 2:449  
Faltings 定理 4:819  
Fano 簇 2:451  
Fano 概形 2:450  
Fano 概形(域上的射影代数簇的)  
2:450  
Fano 公设 2:450  
Fano 曲面 2:450  
Farey 序列 2:451  
Farey 序列( $n$  阶的) 2:451  
Fatou 点 1:615;2:452;4:182  
Fatou 定理 2:452  
Fatou 定理(复变函数论中的)  
2:452  
Fatou 定理(关于全纯函数的径向边  
界值的) 1:415  
Fatou 定理(关于缺项三角级数的)  
3:319  
Fatou 定理(关于三角级数的收敛点  
的) 5:276  
Fatou 定理(关于 Lebesgue 积分的)  
2:452  
Fatou 弧 2:451  
Fatou 集 3:233  
Fatou 引理 2:453;3:703  
Favard 不等式 2:453  
Favard 测度 2:453  
Favard 常数 1:205  
Favard 定理 2:453  
Favard 问题 2:453  
Fay 三重割线等式 4:722  
FBI 变换 3:740

$FC$  群 2:790  
Fefferman 定理 1:359  
Feigenbaum 常数 4:695  
Feigenbaum 映射 5:350  
Fejér 定理(关于非负三角多项式的  
表示的) 4:32  
Fejér 定理(关于 Fourier 级数的)  
2:456  
Fejér 多项式 2:455  
Fejér 和 2:455  
Fejér 核 2:456;3:255;4:489  
Fejér 平均 2:456  
Fejér 奇异积分 2:455  
Fejér 求和法 2:456  
Fekete 点组 5:243  
Fell 等价 3:52  
Feller - Марков 过程 3:622  
Feller 半群 2:457;4:270  
Feller 过程 2:456  
Feller 链 2:456  
Fenchel - Moreau 定理 1:770;  
2:297  
Fenchel 变换 2:290  
Fenchel 定理(关于空间闭曲线的)  
1:911  
Fenchel 定理(关于胎紧平面曲线  
的) 5:175  
Fenichel 定理 3:111  
Fermat 大定理 2:457  
Fermat 定理 2:461  
Fermat 方程 2:196;2:457  
Fermat 螺线 2:460  
Fermat 数 2:337;1:926  
Fermat 素数 1:926;2:708;4:290  
Fermat 问题 2:195  
Fermat 问题(关于 Fermat 数的)  
1:926  
Fermat 小定理 2:460  
Fermat 原理 2:460  
Fermat 原理(光学中的) 5:398  
Fermat 著名定理(Fermat 大定理,  
Fermat 最后定理) 2:457  
Fermat 最后定理(Fermat 大定理)  
2:457  
Fermi - Dirac 统计法 2:461  
Fermi 粒子变量 2:431  
Fermi 统计法(Fermi - Dirac 统计

- 法) 2:461
- Fermi 子 4:407
- Fermi 子  $\Phi_{\text{ок}}$  空间 2:501
- Fermi 子独立性 4:415
- Fermi 坐标 2:461
- Ferrari 法 2:462
- Ferrers 图 5:533;5:534
- Feuerback 定理 3:914;4:172
- Feuerback 圆(九点圆) 3:914
- Feynman - Dyson 时序算子演算 3:1023
- Feynman - Kac 公式 2:463;  
3:114;4:416
- Feynman - Kac 微扰 4:416
- Feynman 测度 2:463
- Feynman 积分 2:462
- Feynman 路径积分(Feynman 积分) 2:462
- Feynman 图 4:408;4:409;5:499
- $F_o(G_o)$  型集 4:799
- Fibonacci 法 2:464
- Fibonacci 数 2:464
- Finsler 度量 2:486
- Finsler 度量张量 2:485
- Finsler 几何化(时空的) 2:486
- Finsler 几何学 2:485
- Finsler 空间 2:487
- Finsler 空间(广义的)\* 2:487
- Finsler 流形 2:487
- Finsler 推广(广义相对论的) 2:486
- Firey  $p$  和 1:34
- Fischer - Griess 群 4:957
- Fischer 群 4:957
- Fisher  $F$  分布 2:491
- Fisher - Riesz 积分方程组 2:122
- Fisher - Snedecor 分布(Fisher  $F$  分布) 2:491
- Fisher  $z$  分布 2:491
- Fisher 变换(随机变量的) 4:485
- Fisher 不等式 5:127
- Fisher 方程 4:507
- Fisher 距离(基于不变 Riemann 度量的) 3:73
- Fisher 信息矩阵 5:2
- Fisher 信息量 2:490
- Fisher 信息(Fisher 信息量) 2:490;3:74;4:495
- Fisk - Стратонвич 随机积分 5:30
- Fisk 随机积分 5:30
- Fitting 分解 5:475
- Fitting 分解(线性算子的) 4:927
- Fitting 分解(Banach 空间的) 4:927
- Fitting 根 2:492
- Fitting 零分支 1:484
- Fitting 引理 4:927
- Fitting 子群 2:492
- FitzHugh - 南雲方程组 4:507
- FLIC 方法 4:104
- Floquet - Ляпунов 定理 2:498;  
4:508
- Floquet - Ляпунов 定理 2:498
- Floquet 表示 2:498;4:401
- Floquet 乘子 3:536;2:950
- Floquet 定理 3:508;4:396;4:438
- Floquet 解 2:498
- Floquet 理论 2:498
- Floyd 方法 5:156
- Fokker - Planck - Колмогоров 方程 3:625
- Fokker - Planck 方程 2:503
- Ford - Fulkerson 定理(最大流最小割定理) 2:757
- Fortran 语言 2:522
- Founer 系数(Hilbert 空间元素关于规范正交基的) 4:24
- Fourier - Bessel 变换 5:476
- Fourier - Bessel 积分 2:527
- Fourier - Bessel 级数 2:527
- Fourier - Bros - Iagolnitzer 变换 3:740
- Fourier - Franklin 系数 2:551
- Fourier - Haar 级数 2:798
- Fourier - Haar 系数 2:798
- Fourier - Lebesgue 级数 2:534
- Fourier - Riemann 级数 2:534
- Fourier - Stieltjes 变换 2:539
- Fourier - Stieltjes 变换(测度的) 1:76
- Fourier - Stieltjes 代数 5:340
- Fourier - Stieltjes 级数 2:539
- Fourier - Чебышев 级数 1:573
- Fourier  $\lambda$  变换 2:530
- Fourier 变换 2:539
- Fourier 变换法 3:291
- Fourier 变换(广义函数的)\* 2:541
- Fourier 变换(广义函数的)\* 2:541
- Fourier 变换(广义函数卷积的) 2:541
- Fourier 变换(离散的)\* 2:541
- Fourier 变换(群上的) 2:823
- Fourier 变换( $L_2$  上的) 2:823
- Fourier 超函数 2:690;2:954
- Fourier 乘子 3:865
- Fourier 代数 1:300;5:340
- Fourier 单积分 2:528
- Fourier 法 2:532
- Fourier 反演公式 2:823
- Fourier 公式 4:39
- Fourier 公式(关于三角级数的系数的) 5:275
- Fourier 和 1:204
- Fourier 积分 2:528
- Fourier 积分方程 3:936
- Fourier 积分公式 2:528
- Fourier 积分(群上的) 2:823
- Fourier 积分算子 2:529
- Fourier 级数 2:533
- Fourier 级数(殆周期函数的) 2:538
- Fourier 级数的部分和的极小性 2:534
- Fourier 级数的求和 5:76
- Fourier 级数(关于三角函数系的) 2:533
- Fourier 级数(关于正交多项式的) 2:537
- Fourier 级数(广义函数的) 2:541
- Fourier 级数(一个函数关于正交函数系的) 2:537
- Fourier 级数与小除数 4:874
- Fourier 级数(Hilbert 空间元素关于一个系的) 4:24
- Fourier 级数(Hilbert 空间中元素的) 2:533
- Fourier 逆变换 2:540
- Fourier 三角级数 1:478



- Fourier 数 2:533  
 Fourier 系数 2:528  
 Fourier 系数(殆周期函数的)  
   1:139;2:528;2:538  
 Fourier 系数(殆周期函数的)  
   2:528  
 Fourier 系数(关于规范正交系的)  
   4:658  
 Fourier 系数(关于 Riesz 函数系的)  
   4:663  
 Fourier 系数(Hilbert 空间中元素  
   的) 2:873  
 Fourier 协变换 2:823  
 Fourier 余弦变换 2:528  
 Fourier 正弦变换 2:538  
 Fourier 指数(殆周期函数的)  
   2:528  
 Fourier 重构 5:185  
 Fowler 方程 2:356  
 Fox - Artin 弧 5:510  
 Fox - Trotter 对偶 1:67  
 FR 数 1:785  
 Francis QR 法 3:217  
 Frankl 问题 3:775  
 Franklin 函数系(Franklin 系)  
   2:551  
 Franklin 系 2:551  
 Franks 多项式增长定理 4:235  
 Franz 挠率 4:560  
 Fraser 图 2:552  
 Frattini 子群 2:552  
 Fréchet - Урысон 空间 1:473;  
   4:790  
 Fréchet 变差 2:554  
 Fréchet 不等式 4:495  
 Fréchet 层 1:640  
 Fréchet 导数 2:553  
 Fréchet 紧空间 1:680  
 Fréchet 距离 2:554  
 Fréchet 可微的非线性算子  
   3:947  
 Fréchet 可微函数 1:25  
 Fréchet 可微性 1:25;2:172  
 Fréchet 可微映射 2:553;2:553  
 Fréchet 空间 2:553  
 Fréchet 滤子 2:469  
 Fréchet 曲面 2:554  
 Fréchet 曲面 2:554;1:222  
 Fréchet 曲线 2:554  
 Fréchet 微分 2:553  
 Fréchet 微分 1:26;3:947  
 Fréchet 有界变差函数 2:554  
 Fréchet 有限变差函数 2:554  
 Fredholm 边值问题 1:425  
 Fredholm 定理 2:563  
 Fredholm 法(解第二类 Fredholm 方  
   程的) 2:556  
 Fredholm 方程 2:555  
 Fredholm 方程的近似解法 2:559  
 Fredholm 方程(第二类) 2:556  
 Fredholm 方程(第一类) 2:556  
 Fredholm 方程,数值方法 2:559  
 Fredholm 核 2:562  
 Fredholm 积分方程 1:797;2:114;  
   3:897  
 Fredholm 积分算子 2:562;3:112;  
   2:325  
 Fredholm 级数 2:557  
 Fredholm 抉择定理 2:554  
 Fredholm 理论 2:594  
 Fredholm 群 4:17  
 Fredholm 算子 2:562  
 Fredholm 问题 2:127  
 Fredholm 行列式 2:557  
 Fredholm 行列式的第  $p$  个子式  
   2:557  
 Fredholm 行列式公式 4:926  
 Fredholm 子式 2:557  
 Freedman - Keller 方程组 5:288  
 Frege 原理 2:522  
 Frénet 标架(Frenet 三棱形,自然三  
   棱形) 2:11;2:153;3:874  
 Frénet 公式 2:571  
 Frénet 求导公式 5:33  
 Frénet 三棱形 2:572  
 Fresnel 积分 2:573  
 Freudenthal - Канторович 定理  
   4:661  
 Freudenthal 单位 4:773  
 Freudenthal 公式 3:864  
 Freudenthal 紧化 2:574  
 Freudenthal 谱定理 4:662;5:532  
 Freudenthal 纬垂定理 2:921;  
   4:940  
 Freyd 伴随函子定理 1:45  
 Freyd 具体性定理 5:42  
 Friedman 定理 4:526  
 Friedman 度量 3:526  
 Friedmann 演化宇宙模型 1:869  
 Friedmann 宇宙模型 1:869  
 Friedrichs 不等式 2:574  
 Friedrichs 定理 3:408;4:751  
 Friedrichs 扩张 2:692  
 Friedrichs 扩张(算子的) 2:426  
 F. Riesz 和 M. Riesz 定理 1:615;  
   4:665  
 F. Riesz 和 M. Riesz 唯一性定理  
   1:615  
 F. Riesz 因子分解(Hardy 类函数  
   的) 2:817  
 Frobenius - Schur 定理 2:577  
 Frobenius - Wielandt 定理 2:577  
 Frobenius 猜想 4:938  
 Frobenius 代数 2:575  
 Frobenius 典范形式(矩阵的)  
   3:979  
 Frobenius 定理 2:576  
 Frobenius 定理的推广(关于完全可  
   积性的) 4:151  
 Frobenius 定理(关于正规  $p$  补的)  
   3:985  
 Frobenius 定理(关于 Abel 簇上除子  
   的) 2:577  
 Frobenius 定理(关于 Pfaff 方程的)  
   4:148  
 Frobenius 定理(关于 Pfaff 方程组  
   的) 2:577  
 Frobenius 定理(关于 Pfaff 结构的)  
   4:152  
 Frobenius 公式 2:576  
 Frobenius 互反定理 2:577;3:45;  
   3:593  
 Frobenius 互反性 4:600  
 Frobenius 矩阵 1:563  
 Frobenius 可积性条件 1:702  
 Frobenius 态射 3:380  
 Frobenius 条件 1:702  
 Frobenius 同态 3:313  
 Frobenius 运算 3:313  
 Frobenius 正规形式(矩阵的)  
   3:978

Frobenius 自同构 2:575  
 Frobenius 自同构(非分歧域扩张的) 2:575  
 Frobenius 自同态 2:575  
 Fröhlicher - Nijenhuis 刚性定理 2:26  
 Frommer 第二判定问题 4:741  
 Frommer 第一判定问题 4:741  
 Frommer 法 2:577  
 Frommer 扇形 4:740  
 Frommer 正常区域 4:740  
 Frommer 正规区域(第二类) 4:741  
 Frommer 正规区域(第三类) 4:741  
 Frommer 正规区域(第一类) 4:741  
 Froude 数 2:578  
 FS 型空间 2:690  
 Fubini - Pick 三次型 1:55  
 Fubini - Study 度量 2:580  
 Fubini 定理 2:580  
 Fubini 二次曲面 3:434  
 Fubini 法线 4:339  
 Fubini 公式(关于混合测度的) 5:12  
 Fubini 模型 2:579  
 Fubini 形式 2:579  
 Fuchs 方程 2:580  
 Fuchs 恒等式 2:581  
 Fuchs 类方程(Fuchs 方程) 2:580  
 Fuchs 滤过 5:482  
 Fuchs 群 2:582  
 Fuchs 群(第二种) 2:582  
 Fuchs 群(第一种) 2:582  
 Fuchs 条件 4:555  
 Fuchs 微分方程 1:178  
 Fuchs 微分方程组 1:178  
 Fueter 条件 2:951  
 Fueter 意义下解析超复变函数(F 解析超复变函数) 2:951  
 Furstenberg - Sarközy 定理 1:591  
 Furstenberg 结构定理 2:252

## G

G 层(Abel 群的) 1:645

G 等部件的多边形 2:373  
 G 度规 2:876;4:904  
 G 度规 4:904  
 G 对称算子 2:876  
 G 对象 2:710  
 G 对象场 2:710  
 $G_\delta$  集 4:799  
 G 集合 4:299  
 G 结构 2:619  
 G 结构(高阶的) 3:67;2:151  
 G 结构(流形上的) 2:619  
 G 结构(一阶的) 2:151  
 G 结构(有限型的) 2:620  
 G 距离 2:705  
 G 可积表示 3:52  
 G 空间 2:57;2:380;4:904  
 G 模 3:794  
 G 全等多边形 2:373  
 G 群 4:299  
 G 射线 2:705  
 G 态射 4:297  
 G 同变判决程序 3:156  
 G 同变统计判决程序 3:156  
 G 同构 4:297  
 G 投影 4:905  
 G 稳定性(概率分布的型的) 2:262  
 G 纤维化 2:618  
 G 线 2:705  
 G 线段 2:705  
 G 限制 3:721  
 G 向量丛 3:240  
 G 幺拟群 3:564  
 G 有限函数 4:587  
 G 有限元 4:145  
 G 正交补(不定度规空间的子空间的) 4:905  
 G 正交基(不定度规空间中的) 4:905  
 G 正交投影 4:905  
 G 正交向量 4:905  
 G 中心化子 3:201  
 G 自伴算子 2:876  
 Gabriel - Popescu 定理 1:9  
 Gabriel 维数 2:180  
 Gale - Ryser 定理 3:596  
 Gale - Steward 定理 2:63

Gale 不等式 3:194  
 Galileo 变换 2:622  
 Galileo 标架 3:50  
 Galileo 代数 1:822  
 Galileo 惯性定律 5:398  
 Galileo 空间 2:622  
 Galileo 螺线 2:622  
 Galileo 群 2:623;4:568  
 Galileo 系 4:568  
 Galileo 相对性原理 2:622  
 Galileo 坐标系 2:622  
 Galois 对应 2:625  
 Galois 对应定理 2:626  
 Galois 扩张 2:625  
 Galois 理论 2:626  
 Galois 理论的反问题 2:628  
 Galois 理论(环的)\* 2:629  
 Galois 理论(交换环的) 1:647  
 Galois 理论(微分域的) 2:625  
 Galois 模 3:795  
 Galileo 平面(Yaglom 的) 2:495  
 Galois 群 2:626  
 Galois 群(多项式的) 2:626  
 Galois 群(多项式方程的) 2:627  
 Galois 群(扩张域的) 2:422  
 Galois 群特征标(在一点上非分歧的) 5:356  
 Galois 群(域扩张的) 2:422  
 Galois 上同调 2:623  
 Galois 上同调群 1:647  
 Galois 拓扑群 2:629  
 Galois 微分群 2:625  
 Galois 下降 2:510  
 Galois 预解式(代数方程的) 4:609  
 Galois 域 2:625  
 Galton - Watson 过程 2:630  
 Gantt 图表 4:715  
 Garding 不等式 2:641  
 Garnier 定理 4:177  
 Garside 元素 1:433  
 Garside 正规形式(辫的) 1:433  
 Gassner 矩阵 1:433  
 Gâteaux 变分 2:650  
 Gâteaux 导数 2:649  
 Gâteaux 可微的非线性算子 3:947



- Gâteaux 可微函数 1:26  
 Gâteaux 可微性 1:26;2:171  
 Gâteaux 可微映射 2:649  
 Gâteaux 梯度 2:650  
 Gâteaux 梯度(Hilbert 空间的泛函在一点上的) 2:650  
**Gâteaux 微分 2:649**  
**Gauss - Bonnet 定理 2:651**  
 Gauss - Jacobi 迭代(Jacobi 法) 3:217  
 Gauss - Kronecker 曲率 2:660  
**Gauss - Laplace 分布 2:654**  
 Gauss - Mainardi - Codazzi 方程 4:145  
 Gauss - Manin 联络的解析形式 2:654  
 Gauss - Seidel 法 4:743  
 Gauss - Кузьмин 定理 3:734  
**Gauss - Манин 联络 2:654**  
 Gauss - Марков 定理 3:371  
 Gauss - Остроградский 公式 2:265  
 Gauss - Чебышев 求积公式(Mehler 求积公式) 3:708  
 Gauss  $\psi$  函数 4:375  
 Gauss 白噪声 5:488  
**Gauss 半群 2:659**  
**Gauss 变分问题 2:661**  
**Gauss 变换 2:661**  
 Gauss 不等式(概率论中的) 1:569  
 Gauss 测度 1:793  
**Gauss 插值公式 2:653**  
 Gauss 乘法公式(关于  $\Gamma$  函数的) 2:639  
**Gauss 定理 2:660**  
 Gauss 定理(关于多项式环的) 2:272  
 Gauss 定理(关于三个平方数之和的) 2:196  
 Gauss 定理(关于正多边形作图的) 4:225  
 Gauss 定理(关于 Gauss 曲率的) 2:490  
 Gauss 多项式 4:411  
 Gauss 二次型 4:382  
**Gauss 法 2:656**  
 Gauss 方程 2:116;2:660;2:955  
 Gauss 方程(浸入流形的基本方程) 2:718  
 Gauss 分布(Gauss - Laplace 分布, 正态分布) 2:654  
**Gauss 分解 2:652**  
 Gauss 分解(拓扑群的) 2:652  
 Gauss 分解(拓扑群中的) 2:652  
 Gauss 分解(一般线性群的) 2:653  
 Gauss 概率积分 4:310  
 Gauss 公式 1:343;2:265;4:52;5:408  
 Gauss 公式(超几何函数的) 2:959  
 Gauss 公式(关于球面三角形元素的) 4:949  
 Gauss 公式(关于双层位势的) 4:263  
 Gauss 公式(环绕数的) 5:525  
 Gauss 公式(体积位势的) 4:263  
 Gauss 关系式(超几何函数之间的) 2:957  
**Gauss 过程 2:663**  
 Gauss 过程(严平稳的) 2:664  
**Gauss 和 2:659**  
**Gauss 互反律 2:658**  
 Gauss 环 2:447;2:657  
 Gauss 积分 3:516  
 Gauss 积分公式 4:52  
 Gauss 级数 2:956;2:958  
 Gauss 假设(关于素数分布的) 2:14  
 Gauss 矩阵(二次型的) 4:382  
 Gauss 类比 4:949  
**Gauss 律 2:654**  
 Gauss 挠率 5:228  
**Gauss 求积公式 2:658**  
**Gauss 曲率 2:662**  
 Gauss 曲率(凸曲面的) 1:851  
 Gauss 三角插值公式 5:274  
 Gauss 收敛性准则(级数的) 2:652  
**Gauss 数 2:657**  
 Gauss 素数 2:657  
 Gauss 随机变量 2:663  
 Gauss 随机过程(以 Hilbert 空间为指标集的) 5:500  
 Gauss 随机元 4:479  
 Gauss 问题 4:422  
 Gauss 系数 5:310  
 Gauss 向后插值公式 2:653  
 Gauss 向前插值公式 2:653  
 Gauss 消元法 2:656  
**Gauss 信道 2:661**  
 Gauss 信息源 3:76  
 Gauss 鞅 5:507  
 Gauss 引理 3:182;4:292  
 Gauss 映射 4:947  
**Gauss 原理 2:657**  
 Gauss 圆问题 1:592  
 Gauss 整数 3:85  
 Gauss 准测度 3:704  
**Gauss 准则 2:652**  
 Gauss 组合恒等式 1:549  
 Gauss 最小强迫原理 5:395  
 $(G, B)$  态射 4:297  
 GCR 代数 1:454  
 Gear 定义(数值方法的 A 稳定性的) 4:1041  
 Gear 法 4:1042  
 Gear 方法 4:1042  
**Gegenbauer 变换 2:664**  
**Gegenbauer 多项式 2:664**  
 Geiser 对合 1:887  
 Gellerstedt 条件 3:769  
**Gellerstedt 问题 2:665**  
 Gentzen 定理 2:697  
 Gentzen 基本定理 4:786  
 Gentzen 命题演算 1:788  
**Gentzen 形式系统 2:696**  
 Gentzen 正规化定理 4:786  
**Gergonne 点 2:727**  
 Gergonne 问题 3:750  
 Geroch 群 1:429  
 Gerstenhaber - Hesselink 定理 3:596  
 Gibbs 不变测度 5:527  
 Gibbs 测度 2:384;5:192  
**Gibbs 分布 2:728**  
 Gibbs 巨正则系综 4:992  
 Gibbs 量子态 2:45  
 Gibbs 平衡分布 4:1006  
 Gibbs 热力学势 4:1006  
 Gibbs 随机场 4:481  
 Gibbs 态 2:384;4:1007  
**Gibbs 统计系综 2:730**  
 Gibbs 微正则系综 4:992

- Gibbs 现象 2:729  
 Gibbs 小正则系综 6:992  
 Gibbs 自由能 5:159  
 Gilmore - Gomory 算法 4:718  
 Gini 平均差 2:730  
 Gini 散布系数 2:730  
 Ginzburg - Landau 方程 5:289  
 Giraud 大定理 4:869  
 Giraud 条件 2:730  
 Giraud 条件(关于边值问题可解性的) 2:730  
 Giraud 小定理 4:869  
 Gisin 同态 4:631  
 Gleason 部分 1:72;1:411;1:675  
 Gleason 定理 5:26  
 Gleason 覆盖 5:539  
 Gleason 覆盖构造 1:706  
 $GL^k(n)$  空间 3:421  
 GNS 构造(Гельфанд - Наймарк - Segal 构造) 4:215;4:251  
 Godbillon - Weil 不变量 2:504  
 Gödel - Tarski 翻译 3:21  
 Gödel - Мальцев 定理 1:107; 3:787  
 Gödel 不完全性定理 2:736  
 Gödel 第二不完全性定理 2:736  
 Gödel 第二定理 1:781  
 Gödel 第一不完全性定理 2:736  
 Gödel 定理(关于模型的) 4:350  
 Gödel 定理(关于算术的不完全性的) 1:705  
 Gödel 翻译 4:349  
 Gödel 否定解释 3:21  
 Gödel 构造集 2:735  
 Gödel 解释 2:736  
 Gödel 解释(直觉主义算术的) 2:736  
 Gödel 紧性定理 3:785  
 Gödel 可构造集 2:735  
 Gödel 枚举 1:234  
 Gödel 配数 2:736  
 Gödel 配数(Gödel 数) 1:234; 4:524  
 Gödel 数(Gödel 配数) 1:234; 4:524  
 Gödel 双重否定 1:787  
 Gödel 完全性定理 2:734  
 Gödel 转换(Gödel 翻译) 1:787; 4:349  
 Gödel 字 5:317  
 Goldbach - Waring 问题 2:738  
 Goldbach 问题 2:737  
 Goldie 定理 1:238;1:603  
 Goldstone 定理 1:382  
 Golod - Gulliksen 猜想 4:235  
 Golod - Шафаревич 定理 4:236  
 Gonseth 悖论 1:187  
 Goodman 猜想 3:868  
 Goppa 多项式 2:740  
 Goppa 码 2:740  
 Gorenstein 概形 2:740  
 Gorenstein 孤立奇点 4:501  
 Gorenstein 环 2:740  
 Gottschalk 猜想 3:748  
 Goursat 公式 1:772;2:116;2:829  
 Goursat 曲面 2:409  
 Goursat 特征问题 3:768  
 Goursat 问题 2:741  
 Goursat 问题的线性情形 2:741  
 Goursat 线汇 2:741  
 Grad 法 1:549  
 Graeffe 法 3:527  
 Graeffe 平方根法 3:528  
 Gram - Charlier 级数 2:744  
 Gram - Charlier 级数(A 型的) 2:744  
 Gram - Charlier 级数(B 型的) 2:744  
 Gram - Schmidt 规范正交化步骤 2:873;4:43  
 Gram - Schmidt 正交化步骤(过程) 2:873;2:445;4:42  
 Gram - Schmidt 正交化方法 4:42;4:39  
 Gram 矩阵 2:745  
 Gram 行列式 2:745  
 Grassmann 变量 2:431  
 Grassmann 丛 4:1036  
 Grassmann 代数 1:481;2:430  
 Grassmann 代数(流形上的) 1:483  
 Grassmann 流形 2:764  
 Grassmann 坐标 2:430;2:765; 4:184  
 Grätzer - Schmidt 定理 1:95; 5:25  
 Grauert 凝聚定理 2:484;4:668  
 Grauert 判别准则 2:412  
 Grauert 嵌入定理 1:164  
 Green - de Rham 算子 2:886  
 Green 等价关系 2:770  
 Green 等价关系(半群上的) 2:770  
 Green 定理 3:125  
 Green 定理(关于不取若干超平面的全纯映射的) 4:161  
 Green 定理(空间中的) 2:500  
 Green 公式 2:770  
 Green 公式(关于一对函数的) 1:157  
 Green 函数 2:772  
 Green 函数(常微分方程的) 2:772  
 Green 函数法 4:273  
 Green 函数(函数论中的) 2:775  
 Green 函数(抛物型偏微分方程的) 2:774  
 Green 函数(统计力学中的) 2:776  
 Green 函数(统计量子力学中的) 2:776  
 Green 函数(椭圆型偏微分方程的) 2:773  
 Green 积分 2:772;2:828  
 Green 矩阵 2:774  
 Green 空间 2:777  
 Green 棱 4:339  
 Green 容量 1:467  
 Green 散度定理 2:265  
 Green 双层位势 4:266  
 Green 体积位势 4:266  
 Green 位势 4:266;5:62  
 Green 位势(Borel 测度的) 2:415  
 Green 线 2:777  
 Green 预备公式 2:770  
 Green 张量 1:799  
 Gregory 公式 2:777  
 Gregory 公式(近似计算函数积分的) 2:777  
 Gregory 求积公式 2:402  
 Greibach 范式(上下文无关文法的)



- 2:747  
 Greibach 范式文法 2:515  
 Griffiths 猜想 4:124  
 Griffiths 簇 4:123  
 Griffiths 横截性 2:655;5:378  
 Griffiths 中间环面 3:129  
 Griss - Nelson 逻辑 1:788  
 Grobman - Hartman 定理 3:536;  
 4:860  
 Gromoll - Meyer 闭测地线定理  
 1:609  
 Gromoll - Meyer 定理 1:910  
 Gromov - Milnor 定理 4:235  
 Gronwall 不等式 2:162  
 Gronwall 求和法 2:778  
 Gronwall 引理 2:162  
 Gross 离差数 3:730  
 Grothendieck 定理 4:504;4:805  
 Grothendieck 定理(关于线性泛函  
 的) 2:296  
 Grothendieck 定理(关于向量丛的)  
 3:597  
 Grothendieck 对偶化层 2:291  
 Grothendieck 范畴 2:779  
 Grothendieck 刚性定理 1:675  
 Grothendieck 函子 2:779  
 Grothendieck 核定理 3:992  
 Grothendieck 环 4:670  
 Grothendieck 群 2:779  
 Grothendieck 群(环的) 2:780  
 Grothendieck 群(加性范畴的)  
 2:779  
 Grothendieck 上同调 1:644  
 Grothendieck 拓扑 2:780  
 Grothendieck 拓扑斯 4:869;5:225  
 Grothendieck 引理 2:145  
 Grötzsch 带形法 2:436  
 Grötzsch 定理 2:781  
 Grötzsch 问题 4:422  
 Grötzsch 原理 2:780  
 Grundy 函数 2:631  
 Grunsky 不等式 1:225;2:252;  
 5:343  
 Grunsky 定理 3:869  
 Grzegorzczuk 系统 3:781  
 gsm 映射(广义时序机映射)  
 2:516  
 Guichard 线汇 2:792  
 Guido Grandi 曲线 4:687  
 Gysin 序列 2:397  
 $G^k(\Gamma)$  结构(由伪群结构决定的)  
 4:370  
 H  
 $H$  闭空间 2:793  
 $H$  定理 1:386  
 $h$  多孔点 4:247  
 $h$  多孔集 4:247  
 $h$  过程(Doob 意义下的) 3:628  
 $H$  函数 4:851  
 $\mathcal{H}$  函数 4:268  
 $H$  函数(类  $H^*$  中的) 4:852  
 $H$  可定向的可乘上同调论 2:678  
 $H$  空间 2:795  
 $H^p$  空间 1:416  
 $H^\infty$  控制理论 2:794  
 $H$  类(Hölder 类) 3:16  
 $h$  配边 5:229  
 $h$  配边 2:793  
 $h$  配边的流形 2:793  
 $h$  配边定理 2:793  
 $H$  上群 1:619  
 $H$  凸性 1:853  
 $h$  下配边 1:402  
 $H$  锥 4:270  
 Haab 定理 5:175  
 Haag 定理 2:796  
 Haar - von Neumann - Weil 定理  
 3:160  
 Haar 测度 2:797  
 Haar 定理 4:37  
 Haar 函数 2:798  
 Haar 函数系 2:798  
 Haar 条件 2:796  
 Haboush 定理 3:870  
 Hadamard - Cartan 定理 1:910;  
 1:783;4:650  
 Hadamard 2 - 设计 2:799  
 Hadamard 变分 4:91  
 Hadamard 变分公式 2:801  
 Hadamard 不等式 2:799;3:49  
 Hadamard 不适定问题 3:11;3:6  
 Hadamard 乘法定理 2:801  
 Hadamard 定理 2:800  
 Hadamard 定理(关于奇点乘法的)  
 2:801  
 Hadamard 定理(关于行列式的)  
 2:800  
 Hadamard 定理(关于整函数的)  
 2:800  
 Hadamard 法(素数理论中的)  
 2:258  
 Hadamard 法(研究 Cauchy 问题的)  
 4:505  
 Hadamard 构形 1:376  
 Hadamard 合成 2:801  
 Hadamard 积 2:801;4:727  
 Hadamard 积表示(整函数的)  
 2:362  
 Hadamard 间隙 2:800  
 Hadamard 间隙定理(Hadamard 缺  
 项定理) 2:800;3:317;1:151  
 Hadamard 经典表示定理的推广(整  
 函数的) 5:63  
 Hadamard 矩阵 2:799  
 Hadamard 例(不适定问题的)  
 3:11;3:652  
 Hadamard 例(不适定 Cauchy 问题  
 的) 1:521  
 Hadamard 三圆定理 2:800  
 Hadamard 设计 5:127  
 Hadamard 适定问题 3:6  
 Hadamard 条件 2:800  
 Hadamard 条件(关于适定性的)  
 3:652  
 Hadamard 消没问题 4:417  
 Hadamard 有限部分 2:953  
 Hadamard 重正规化(发散积分的)  
 2:689  
 Hadwiger 假设 2:802  
 Haefliger 结构 2:802  
 Haefliger 纽结 3:201  
 Haefliger 上闭链 2:802  
 Haefliger 图册 2:802  
 Hagen - Poiseuille 流 3:877  
 Hahn - Banach - Канторович 定理  
 4:774  
 Hahn - Banach 定理 2:803  
 Hahn - Banach 型定理 4:662  
 Hahn - Jordan 分解 1:564;2:804

- Hahn - Mazurkiewicz 定理 1:817;  
 3:457;4:112  
 Hahn - Mazurkiewicz 定理(关于单  
 位区间的连续象的) 1:819  
 Hahn 多项式 5:512  
 Hahn 分解 2:803  
 Hall - Janko 群 4:957  
 Hall  $\pi$  子群 2:804;4:56  
 Hall 第二定理 5:91  
 Hall 第一定理 4:56  
 Hall 子群 2:804  
 Halphen 线束 2:805  
 Hamburger 方程 4:492  
 Hamburger 矩量问题 4:253  
 Hamel 定理 4:338  
 Hamel 基 1:316  
 Hamel 流 3:877  
 Hamilton  $(-1)^k$  构造 5:447  
 Hamilton - Cayley 定理 3:672  
 Hamilton - Jacobi - Bellman 方程  
 2:308;2:807  
 Hamilton - Jacobi 方程 1:695;  
 2:806;5:383  
 Hamilton - Jacobi 方程(几何光学问  
 题的) 2:806  
 Hamilton - Jacobi 理论 2:806  
 Hamilton Lie 代数 3:404  
 Hamilton - Остроградский 原理  
 2:808  
 Hamilton 二次形式(环上的)  
 5:447  
 Hamilton 方程 2:805  
 Hamilton 函数 2:805  
 Hamilton 回路(Hamilton 圈)  
 1:599  
 Hamilton 结构 5:112  
 Hamilton 力学 5:110  
 Hamilton 连通图 2:755  
 Hamilton 链 2:755  
 Hamilton 量 5:112  
 Hamilton 圈 2:755;2:764  
 Hamilton 群 2:806  
 Hamilton 算子 2:808  
 Hamilton 算子(Hamilton 函数;  
 Hamilton 量) 2:805;5:112  
 Hamilton 图 2:755  
 Hamilton 微分方程 2:811  
 Hamilton 伪群 4:368  
 Hamilton 系统 2:809  
 Hamilton 系统(线性的)\* 2:810  
 Hamilton 向量场 5:110;5:112  
 Hamilton 么拟群 3:565  
 Hamilton 原理(Hamilton -  
 Остроградский 原理) 2:808;  
 5:391  
 Hamilton 正则方程 4:406  
 Hamilton 作用 1:31  
 Hamilton 作用量 5:396  
 Hammerstein 方程 2:813  
 Hammerstein 算子 3:947  
 Hamming 度量 2:388  
 Hamming 公式 2:136  
 Hamming 距离 2:388  
 Hamming 码 2:388  
 Hanf 数 3:930  
 Hankel 变换 3:121  
 Hankel 函数 2:816  
 Hankel 积分表示 2:639  
 Hankel 积分表示( $\Gamma$  函数的)  
 2:639  
 Hankel 积分(Fourier - Bessel 积分)  
 2:527  
 Hankel 矩阵 4:60;5:118  
 Hardy - Littlewood - Ramanujan 圆  
 法 1:170  
 Hardy - Littlewood - Tauber 定理  
 5:139  
 Hardy - Littlewood - Виноградов 方  
 法 3:735  
 Hardy - Littlewood 定理 2:820  
 Hardy - Littlewood 定理(复变函数  
 论中的) 2:820  
 Hardy - Littlewood 定理(关于非负  
 可和函数的) 2:820  
 Hardy - Littlewood 定理(关于 War-  
 ing 问题的) 5:450  
 Hardy - Littlewood 法(Hardy - Lit-  
 tlewood 圆法) 1:591  
 Hardy - Littlewood 方程 2:248  
 Hardy - Littlewood 极大函数  
 2:820  
 Hardy - Littlewood 问题 2:819  
 Hardy - Littlewood 圆法 1:591  
 Hardy - Littlewood 准则 2:819  
 Hardy - Littlewood 准则(关于 Fou-  
 rier 级数收敛性的) 2:819  
 Hardy - Ramanujan 问题(关于数的  
 分拆个数的) 3:334  
 Hardy - Weinberg 法则 2:696  
 Hardy 变分 2:821  
 Hardy 变换 2:821  
 Hardy 不等式 2:818  
 Hardy 不等式(关于积分的)  
 2:819  
 Hardy 不等式(关于级数的)  
 2:818  
 Hardy 定理 2:820  
 Hardy 定理(复变函数论中的)  
 2:820  
 Hardy 定理(关于 Fourier 级数的乘  
 子的) 3:286  
 Hardy 函数类(Hardy 类) 2:816  
 Hardy 空间 1:416;2:817  
 Hardy 空间  $H^\infty$  2:794  
 Hardy 空间  $H^p$  2:816  
 Hardy 类 2:816  
 Hardy 准则 2:818  
 Hardy 准则(关于函数项级数一致  
 收敛性的) 2:818  
 Harish - Chandra 的 Plancherel 公式  
 1:818  
 Harnack 不等式 2:837  
 Harnack 第二定理 2:829;2:838  
 Harnack 第一定理 2:829;2:838  
 Harnack 定理 2:838  
 Harnack 定理(关于实代数曲线的)  
 4:509  
 Harnack 积分 2:838  
 Harris 意义下的常返性 2:457  
 Harsanyi 解 1:217  
 Hartman - Wintner 定理 3:365  
 Hartogs - Laurent 级数 2:839  
 Hartogs 半径 2:839  
 Hartogs 定理 2:839  
 Hartogs 函数 4:187  
 Hartogs 基本定理 1:156;2:839  
 Hartogs 级数 2:839  
 Hartogs 扩张定理 1:160;2:839;  
 4:857  
 Hartogs 连续性定理(连续性原理)  
 1:809



- Hartogs 拟凸性 3:393  
 Hartogs 区域 2:839  
 Hartogs 图形 2:839  
 Hartogs 引理 2:840  
 Hartogs 主定理(Hartogs 基本定理) 2:839  
 Hasse - Minkowski 不变量 2:840  
 Hasse - Weil  $L$  函数 3:314  
 Hasse - Weil 定理(关于超椭圆同余方程的解数的) 2:256  
 Hasse 不变量 2:840  
 Hasse 不变量(椭圆曲线的) 2:841  
 Hasse 不变量(中心单代数的) 2:840  
 Hasse 符号 2:840  
 Hasse 图 4:102  
 Hasse 原理 2:841  
 Hausdorff - Banach - Tarski 定理 5:135  
 Hausdorff - Besicovitch 维数 2:842  
 Hausdorff  $p$  测度 1:803  
 Hausdorff - Young 不等式 2:844  
 Hausdorff  $\alpha$  测度 2:842  
 Hausdorff 测度 2:842  
 Hausdorff 道路连通空间 4:108  
 Hausdorff 递归公式 1:65  
 Hausdorff 定理(关于度量扩张的) 3:728  
 Hausdorff 定理(关于全有界度量的) 1:686  
 Hausdorff 定理(关于无理数集的子集的开连续象的) 1:816  
 Hausdorff 度量 2:843  
 Hausdorff 分类( $B$  集的类的) 2:60  
 Hausdorff 分离公理 4:783  
 Hausdorff 公理 2:841  
 Hausdorff 弧 1:218  
 Hausdorff 解析超复变函数 2:952  
 Hausdorff 紧化 1:682  
 Hausdorff 紧统 5:201  
 Hausdorff 紧拓扑空间 4:421  
 Hausdorff 矩问题 3:806  
 Hausdorff 矩阵 2:843  
 Hausdorff 距离 2:843  
 Hausdorff 空间 2:843  
 Hausdorff 扩张(拓扑空间的) 2:425  
 Hausdorff 邻近性 4:354  
 Hausdorff 求和法 2:843  
 Hausdorff 拓扑空间 1:678;2:670  
 Hausdorff 拓扑向量空间(与一拓扑向量空间相伴的) 5:212  
 Hausdorff 完全化定理的构造变式 1:791  
 Hausdorff 维数 2:841  
 Hausdorff 性质 1:682  
 Hausdorff 运算 2:843  
 Hauser - Ernest 变换 1:429;2:769  
 Hawking - Penrose 奇异性定理 4:373  
 Hazewinkel 生成元 1:626  
 Heaviside 分布 2:40  
 Heaviside 函数 2:40;2:686;3:1022  
 Heawood 色数 5:175  
 Hecke  $L$  函数(关于量特征标的) 4:627  
 Hecke  $\zeta$  函数 4:627  
 Hecke 环 3:788  
 Hecke 算子 3:789  
 Hecke 特征标 4:627  
 Heegaard 分解 2:845  
 Heegaard 图 2:846  
 Hefer 引理 1:326  
 Heine - Borel - Lebesgue 覆盖定理 1:686  
 Heine - Borel 定理 2:847  
 Heine - Borel 定理(关于开覆盖的) 2:847  
 Heine - Borel 性质 5:201  
 Heine - Borel 引理(Borel - Lebesgue 覆盖定理) 1:404;2:671  
 Heine - Cantor 定理 1:465  
 Heine - Cantor 定理(关于一致连续性的) 1:686  
 Heinz 不等式 2:547  
 Heisenberg Lie 代数 1:670  
 Heisenberg - Weyl 群 1:642  
 Heisenberg 代数 5:483  
 Heisenberg 对易关系 1:671  
 Heisenberg 绘景 2:847  
 Heisenberg 群 3:911  
 Heisenberg 原理 5:315  
 Held - Higman - McKay 群 4:957  
 Hellinger 积分 2:849  
 Hellinger 距离 2:849  
 Hellinger 类型(测度的) 4:931  
 Helly 定理 2:850  
 Helly 定理(关于具有公共点的凸集之交的) 2:850  
 Helly 定理(函数论中的) 2:850  
 Helly 选择定理 2:850  
 Helmholtz - Kirchhoff 问题 2:122  
 Helmholtz 定理 1:907;5:408  
 Helmholtz 方程 2:850  
 Helmholtz 自由能 5:159  
 Helson 集 1:478;2:824;5:336  
 Hencky - von Mises 条件 4:175  
 Hencky 形变理论 4:177  
 Henkin 完全性定理 3:931  
 Hénon 吸引子 5:28  
 Hénon 映射 4:696  
 Hénon 族 1:546  
 Hensel  $A$  代数 2:851  
 Hensel 闭包(局部环的) 2:852  
 Hensel 化 1:672  
 Hensel 化(局部环的) 2:852  
 Hensel 环 2:851  
 Hensel 引理 2:851  
 Herbrand 定理 4:872  
 Herglotz 定理(关于正定序列一般形式的) 4:986  
 Herglotz 公式 2:852  
 Herman 环 3:233  
 Hermite Banach 代数 4:251  
 Hermite Banach 代数元素 1:301  
 Hermite  $G$  度规 4:904  
 Hermite - Lindemann 法 3:454  
 Hermite - Minkowski 凸棱锥 4:386  
 Hermite - Minkowski 约化方法 4:386  
 Hermite 半双线性型 1:860;3:293  
 Hermite 伴随矩阵 1:45  
 Hermite 变换 2:855  
 Hermite 标量积 2:856;2:858  
 Hermite 插值 3:136  
 Hermite 插值公式 2:853

- Hermite 常数 2:722;2:855  
 Hermite 的 Fredholm 核 2:562  
 Hermite 的 Riemann 度量 1:325  
**Hermite 度量 2:858**  
 Hermite 度量(复向量丛上的) 2:858  
 Hermite 度量(复向量空间上的) 2:858  
 Hermite 对称矩阵 2:857  
**Hermite 对称空间 2:859**  
 Hermite 对称空间的型 2:859  
 Hermite 对称空间(非紧型的) 2:859  
 Hermite 对称空间(紧型的) 2:859  
 Hermite 对称性条件 2:857  
**Hermite 多项式 2:854**  
 Hermite 多项式(首项系数为 1 的) 5:498  
 Hermite 二次型 1:325  
**Hermite 方程 2:852**  
 Hermite 非负强型( $G$  度规的) 4:905  
 Hermite 公式(用 Weierstrass  $\zeta$  函数表示椭圆函数的) 5:468  
 Hermite 共轭矩阵 2:857;3:671  
**Hermite 函数 2:853**  
 Hermite 函数(第二类) 2:853  
**Hermite 核 2:857**  
**Hermite 恒等式 2:853**  
 Hermite 环 4:339  
 Hermite 积分变换 2:855  
 Hermite 积分核 3:95  
**Hermite 结构 2:858**  
**Hermite 矩阵 2:857**  
 Hermite 空间 2:856  
 Hermite 空间(代数上的) 4:903  
**Hermite 联络 2:855**  
 Hermite 流形 2:859  
 Hermite 求积公式 3:708  
 Hermite 权 4:391  
 Hermite 双线性型 3:362  
**Hermite 算子 2:858**  
 Hermite 特征标(Banach 代数的) 1:553  
 Hermite 稳定性准则 4:963  
**Hermite 问题 2:855**  
 Hermite 线性变换 3:512;4:748  
 Hermite 线性泛函 3:178  
 Hermite 向量丛 2:858  
 Hermite 向量空间 2:858  
**Hermite 型 2:856**  
 Hermite 型(左  $R$  模上的) 2:856  
 Hermite 样条 1:200  
 Hermite 元 1:453  
 Hermite 元(对合代数中的) 3:178  
 Hermite 元( $C^*$  代数中的) 2:877  
 Hermite 正定型 4:249  
**Heron 公式 2:859**  
**Heron 三角形 2:859**  
 Hertz 问题 1:797  
**Hertz 原理 2:859**  
 Hertz 自由系统 5:396  
 Hesse 矩阵 3:755;4:707  
**Hesse 曲线(代数曲线的) 2:860**  
 Hesse 曲线(三次曲线的) 1:903  
**Hesse 式(函数的) 2:860**  
 Hesse 式(型的) 1:876  
 Hesse 行列式(平面实代数曲线的) 4:170  
 Hesse 型(二元三次型的) 1:668  
 Hesse 映射 4:1035  
 Hessenberg 定理 4:66  
 Hessenberg 法 3:459  
 Hessenberg 形式(矩阵的) 3:205  
 Hestenes 法 1:772  
 Heun 二阶方法 2:403  
 Hewitt 紧化 2:861  
 Hewitt 扩张 2:861  
**Hewitt 实紧化 2:861**  
 Hewitt 完全拓扑空间 1:699  
 Heyting 代数 1:446;2:862;3:540  
 Heyting 命题演算 2:861  
 Heyting 算术 2:861  
 Heyting 谓词演算 2:861  
**Heyting 形式系统 2:861**  
 Heyting 演算(Heyting 形式系统) 2:861  
 Higgins 问题 4:158  
 Higman - Janko - McKay 群 4:957  
 Higman - Sims 群 4:957  
 Higman 定理 3:910  
 Hilb 公式 1:930  
 Hilbert - Bernays 理论 2:518  
**Hilbert - Euler 问题 2:866**  
**Hilbert - Kamke 问题 2:868**  
 Hilbert - Poincaré 级数 4:234  
 Hilbert - Samuel 多项式 3:863  
 Hilbert - Samuel 多项式(局部环的) 3:535  
 Hilbert - Samuel 函数 3:863  
 Hilbert - Samuel 函数(局部环的) 3:535  
 Hilbert - Schmidt 定理 2:871  
**Hilbert - Schmidt 范数 2:870**  
**Hilbert - Schmidt 积分算子 2:869**  
**Hilbert - Schmidt 级数 2:870**  
 Hilbert - Schmidt 类的算子 2:870  
 Hilbert - Schmidt 理论 3:99  
**Hilbert - Schmidt 算子 2:870**  
 Hilbert - Waring 问题 5:450  
 Hilbert - Привалов 问题 4:625  
 Hilbert 边界值公式 4:730  
**Hilbert 变换 2:882**  
 Hilbert 不变积分 2:434  
**Hilbert 不变积分 2:867**  
 Hilbert 不变量定理 2:881  
**Hilbert 不等式 2:866**  
 Hilbert 不可约性定理 2:879  
 Hilbert 超限空间 3:926  
 Hilbert 尺度(空间的) 3:142  
**Hilbert 代数 2:865**  
 Hilbert 的空间 3:999  
 Hilbert 的形式主义 3:152  
 Hilbert 第二十二问题 5:327  
 Hilbert 第七问题 1:169;5:242  
 Hilbert 第三问题 2:372  
 Hilbert 第十六问题 4:126;4:509  
 Hilbert 第十四问题 3:168  
 Hilbert 第十问题 1:132;2:19; 2:202  
 Hilbert 第十问题 2:198;2:516; 5:317  
 Hilbert 第十五问题 4:725  
 Hilbert 第四问题 2:57;3:108; 4:338  
 Hilbert 第五问题 1:163;3:423  
**Hilbert 定理 2:879**  
 Hilbert 定理(关于自然数的幂的) 1:315  
 Hilbert 定理(关于 Waring 问题的) 5:450



- Hilbert 定理(关于 Лобачевский 平面的等距浸入的) 3:190  
Hilbert 定理(关于 Лобачевский 平面的实现的) 1:323  
Hilbert 定理 90(Hilbert 循环扩张定理) 2:509;2:880  
Hilbert 度量 2:866  
Hilbert 多项式 2:868  
Hilbert 多项式(分次模的) 2:868  
Hilbert 泛函绝对极值存在性定理 2:881  
Hilbert 非 Archimedes 空间(Hilbert 超限空间) 3:926  
Hilbert 符号 3:969  
Hilbert 负曲率曲面定理 2:880; 3:883  
Hilbert 概形 2:868  
Hilbert 根定理 2:879  
Hilbert 公理系统 2:878  
Hilbert 公理系统(Euclid 几何学的) 2:878  
Hilbert 函子 4:586  
Hilbert 合冲定理 2:880;3:167; 4:670  
Hilbert 合冲定理的整体变种 2:880  
Hilbert 核 2:868  
Hilbert 恒等式 1:300  
Hilbert 积分方程理论 2:881  
Hilbert 基定理 2:879;3:167; 4:669  
Hilbert 级数 4:234  
Hilbert 几何学 2:866  
Hilbert 计划(数学基础的) 4:349  
Hilbert 空间 2:871  
Hilbert 空间伴随算子(Cauchy - Riemann 算子的) 1:326  
Hilbert 空间(具有不定度规的)\* 2:876  
Hilbert 类域 1:99;1:595;5:237  
Hilbert 立方体 2:865  
Hilbert 立方体流形 5:219  
Hilbert 零点定理 1:51;2:879; 3:167;4:470;5:481  
Hilbert 流形 2:91;2:157;3:830  
Hilbert 模函数 2:231  
Hilbert 奇异积分 2:871  
Hilbert 算子 1:457  
Hilbert 维数 2:873  
Hilbert 问题 4:625  
Hilbert 循环扩张定理 2:880  
Hilbert 有限主义 3:645  
Hilbert 子空间 2:872  
Hill 方程 2:882  
Hill 算子 2:883  
Hill 微分方程 4:438  
Hill 问题 1:598  
Hille - 吉田条件 1:823;4:400; 4:762  
Hippias 割圆曲线 2:189;4:390  
Hirota 方程 4:894  
Hirsch 公式 2:900  
Hirzebruch  $L$  类 2:239  
Hirzebruch 定理 4:244  
Hirzebruch 符号差定理 1:558; 4:821  
Hirzebruch 公式 3:240  
Hirzebruch 指标定理 3:40  
Hitchcock 问题 5:259  
HJB 方程(Hamilton-Jacobi-Bellman 方程) 2:308  
HKX 变换(Hoenselears-Kinnersley-Xanthopoulos 变换) 2:769  
 $(h, m, n)^2$  流形 3:604  
Hoare 逻辑 5:156  
Hochschild 1 上闭链 2:50  
Hochschild 上同调 2:425  
Hochschild 上同调群 1:646;2:425  
Hochschild - Serre 谱序列 1:652  
Hodge - de Rham 定理 3:40  
Hodge 猜想 2:884  
Hodge 簇 2:886  
Hodge 定理 2:885  
Hodge 度量 2:886;3:247  
Hodge 分解 2:29;2:884;2:886  
Hodge 分量 1:906  
Hodge 结构 2:884  
Hodge 结构的变分 5:378  
Hodge 结构(权  $n$  的) 2:884  
Hodge 结构(权  $W$  的) 5:378  
Hodge 类 2:884  
Hodge 理论 2:159  
Hodge 流形(Hodge 簇) 2:886  
Hodge 滤过 2:884  
Hodge 星号算子 3:343  
Hodge 星号算子(Hodge \* 算子) 3:343  
Hodge 形式 3:245  
Hodge 指标定理 2:885  
Hodgkin - Huxley 方程组 4:507  
Hoenselaers - Kinnersley - Xanthopoulos 变换 2:769  
Hofstadter 蝶形 3:668  
Hölder  $\alpha$  半范数 2:887  
Hölder 不等式 2:887  
Hölder 不等式(关于和的) 2:887  
Hölder 不等式(关于积分的) 2:888  
Hölder 定理 1:219;2:641; 5:100  
Hölder 函数 1:427  
Hölder 函数类 4:851  
Hölder 空间 2:888  
Hölder 类 1:757;1:831  
Hölder 连续函数 2:887  
Hölder 求和法 2:888  
Hölder 条件 2:887  
Hölder 条件(具指标  $\alpha$  的) 2:887  
Hölder 条件( $\alpha$  阶的) 2:887  
Hölder 系数(函数的) 2:887  
Hölmgren 唯一性定理 1:518; 3:739  
HOMFLY 多项式 3:277  
Hooke 定律 2:927  
Hopf - Adams - Steenrod 不变量 2:930  
Hopf - Adams 不变量 2:929  
Hopf - Hilton 不变量 2:929  
Hopf - Rinow 定理 2:930  
Hopf - Steenrod 不变量 2:930  
Hopf - Whitehead 不变量 2:929  
Hopf - Новиков 不变量 2:930  
Hopf 不变量 2:929  
Hopf 不变量(模  $p$  的) 2:930  
Hopf 不变量问题 1:656  
Hopf 常数 3:742  
Hopf 代数 2:927  
Hopf 定理 3:271  
Hopf 方程 5:287

- Hopf 分歧 4:695  
 Hopf 公式 3:379  
 Hopf 构造 2:928;5:494  
 Hopf 回复定理 4:211  
 Hopf 迹公式 3:380  
 Hopf 曲面 1:177;2:355;3:245  
 Hopf 群 2:929  
 Hopf 问题 3:937  
 Hopf 纤维化 2:928  
 Hopf 映射 2:928  
 Hopf 原理(偏微分方程的) 2:126  
 Hörmander  $\bar{\partial}$  技巧 1:212  
 Hörmander 类(伪微分算子的)  
     4:363  
 Horn 公式 3:785  
 Horn 语句 1:111;4:432;4:443  
 Horner 方法 3:759  
 Horner 格式 2:931  
 Horrock 定理 4:338  
 Hotelling  $T^2$  分布 2:933  
 Hotelling 检验 2:933  
 Householder 法 3:217  
 Howart 流 3:877  
 Huber 估计量 4:679  
 Hugoniot 绝热曲线 4:812  
 Hugoniot 条件 4:813  
 Humer 的 Hardy 空间 4:186  
 Hunt - Stein 定理 2:934  
 Hunt 定理 4:269  
 Hunt 过程 1:299  
 Huppert 定理 5:80  
 Hurewicz 定理 2:920;4:839  
 Hurewicz 定理(关于相对群的)  
     2:920  
 Hurewicz 公式(降维映射的)  
     2:179  
 Hurewicz 公式(升维映射的)  
     2:179  
 Hurewicz 弱无穷维空间 5:460  
 Hurewicz 同构 2:919;4:109;5:90  
 Hurewicz 同态 2:920;4:839  
 Hurewicz 纤维化 1:881  
 Hurewicz 纤维空间 1:879  
 Hurwitz 定理 2:934  
 Hurwitz 定理(关于二次型合成的)  
     4:383  
 Hurwitz 多项式 4:696  
 Hurwitz 公式 2:934  
 Hurwitz 矩阵 4:696;4:961  
 Hurwitz 四元整数环 4:444  
 Hurwitz 条件 4:696  
 Hurwitz 准则 2:934  
 Huygens 原理 2:935  
 Hyland 可实现性拓扑斯 4:515  
 $(h, \Delta)$  度量 3:884  
 I  
 I 半群 5:197  
 I 进滤过 2:742  
 $i$  亏格(代数簇的) 2:147  
 I 深度(模的) 2:49  
 I 自同构 1:109  
 Iabell 问题 5:325  
 IC 自同构 1:109  
 ICCG 法 1:772  
 IFR 函数 4:576  
 IL 系统(带有相互作用的  $L$  系统)  
     3:315  
 Ionescu - Tulcea 定理 3:704  
 IP 么拟群 3:565  
 Isbell 条件 5:42  
 Ising 模型 2:233;5:427  
 Iversen 定理 3:207  
 J  
 J 半单环 1:146;4:440  
 J 伴随算子(Крейн 空间中的线性  
     算子的) 3:294  
 $j$  不变量(椭圆曲线的) 2:344  
 J 等价 1:402  
 J 等距算子 4:245  
 J 度规 2:876  
 J 非扩张算子 4:245  
 J 规范正交基(J 空间的) 2:876  
 J 函数 5:72  
 J 耗散算子 4:245  
 J 空间 2:876;3:293  
 J 同态 5:494  
 J 酉矩阵 2:811  
 J 酉算子 2:876;4:910  
 J 自伴算子 4:244  
 Jackson - Бернштейн 问题 5:551  
 Jackson 不等式 3:209  
 Jackson 定理 3:210  
 Jackson 核 3:210  
 Jackson 奇异积分 3:210  
 Jackson 算子 3:210  
 Jackson 型定理 1:202  
 Jacobi - Anger 公式 1:927  
 Jacobi  $\theta$  函数 3:212  
 Jacobi  $\theta$  函数的零值 3:212  
 Jacobi 变换 3:219  
 Jacobi 簇 3:220  
 Jacobi 簇(代数曲线的) 3:220  
 Jacobi 定理(关于基本周期的)  
     4:125  
 Jacobi 定理(力学中的) 2:807  
 Jacobi 多项式 3:217  
 Jacobi 多项式(根系的) 4:686  
 Jacobi 多项式(与根系有关的)  
     4:685  
 Jacobi 法 3:216  
 Jacobi 反演定理 3:220  
 Jacobi 反演问题 3:215  
 Jacobi 方程 3:214  
 Jacobi 符号 3:219  
 Jacobi 刚性 3:799  
 Jacobi 公式 3:519  
 Jacobi 公式(对双线性型的)  
     3:217  
 Jacobi 函数 2:958  
 Jacobi 恒等式 3:210;3:400;3:435  
 Jacobi 积分 5:169  
 Jacobi 结构( $n$  级的) 3:799  
 Jacobi 矩阵 3:216  
 Jacobi 括号 3:210  
 Jacobi 理想 4:857  
 Jacobi 权 4:391  
 Jacobi 三重积恒等式 1:550  
 Jacobi 条件 3:211  
 Jacobi 椭圆函数 3:212  
 Jacobi 纤维化 2:354  
 Jacobi 向量场 3:221  
 Jacobi 行列式 3:221  
 Jacobi 行列式(映射的) 1:278  
 Jacobi 原理 3:219  
 Jacobi 驻值作用量原理 5:398  
 Jacobi 准则(关于光滑概形上简单  
     点的) 4:883  
 Jacobi 组合恒等式 1:549



- Jacobi 作用量 1:31;3:219  
 Jacobson - Witt 代数 5:515  
 Jacobson 半单性 1:238  
 Jacobson 稠密性定理 1:238  
 Jacobson 概形 3:222  
**Jacobson 根(根基) 3:222**  
 Jacobson 根(环的) 3:222  
 Jacobson 根(有限维结合代数的) 2:476  
 Jacobson 根( $v$  型的) 3:879  
**Jacobson 环 3:222**  
 Jacobson 拓扑 4:932;5:532  
 James 定理 3:967;4:939  
 James 定理(关于拓扑向量空间中紧性的) 2:297  
 Janet - Cartan 定理 1:594  
**Janet 定理 3:222**  
 Janko 群 4:957  
 Jankov - von Neumann 定理 2:64  
**Jenkins 定理 3:223**  
 Jenkins 定理的条件 3:223  
 Jenkins 基本结构定理(对二次微分的) 2:732  
 Jenkins 特殊系数定理 2:437  
 Jenkins 一般系数定理 2:437  
**Jensen 不等式 3:225**  
 Jensen 不等式(离散形式的) 3:225  
 Jensen 测度 5:320  
 Jensen 定理(关于张(辰中)双基数猜想的) 4:872  
**Jensen 公式 3:224**  
 Jensen 函数方程 2:600  
 Jensen 积分不等式 3:225  
 Jensen 菱形(钻石)原理 5:88  
 Jensen 正方形原理 5:88  
 Jensen 组合原理 5:89  
 Jewett - Krieger 定理 5:35;5:95  
**Joachimsthal 曲面 3:226**  
 Johnson - Kist 表示定理 5:531  
 Johnson 法则(进度安排理论中的) 4:717  
 Johnson 问题 4:717  
 Jones 多项式 3:277  
 Jordan - Brouwer 定理 3:233  
 Jordan - Brouwer 分离定理 3:233  
 Jordan - Dedekind 链条件 4:552;  
 4:772  
 Jordan - Hahn 定理 1:19  
 Jordan - Hahn 分解 2:263  
**Jordan - Hölder 定理 3:230**  
 Jordan - Hölder 定理(关于主列的) 4:301  
 Jordan - Hölder 序列 3:863  
 Jordan-Hölder 重数 4:459  
 Jordan - Каврайский 准则(关于地图投影的) 1:495  
**Jordan 测度 3:232**  
 Jordan 测度(平行多面体的) 3:232  
 Jordan 乘法 3:227  
**Jordan 代数 3:227**  
 Jordan 的代数的代数(有界指数的) 3:547  
 Jordan 典范形式(矩阵的) 3:512  
**Jordan 定理 3:232**  
 Jordan 定理(关于概率分布的) 1:811  
 Jordan 定理(关于有界变差函数的 Fourier 级数的收敛性的) 2:535  
 Jordan 法(对线性代数方程组的) 3:458  
 Jordan 法(矩阵求逆的) 3:173  
**Jordan 分解 3:229**  
 Jordan 分解(代数的 Lie 代数中的) 3:230  
 Jordan 分解(代数群中的) 3:230  
 Jordan 分解定理 3:930  
 Jordan 分解(有限维向量空间的自同态的) 3:229  
 Jordan 分解(围变函数的) 3:229  
**Jordan 弧 3:228**  
 Jordan 结构定理(关于有限线性群的) 3:484  
**Jordan 矩阵 3:231**  
 Jordan 可测集 3:232;3:701  
 Jordan 块 3:492;4:925  
 Jordan 块(矩阵的) 2:334  
 Jordan 块( $k$  阶的) 3:512  
 Jordan 块( $m$  阶的) 3:231  
 Jordan 块( $s$  阶的) 3:978  
 Jordan 类  $BV([a, b])$  5:374  
 Jordan 内测度 3:232  
 Jordan 区域 2:165;2:276;3:712  
**Jordan 曲线 3:229**  
 Jordan 曲线定理 3:233  
 Jordan 容度 1:802;3:232;5:439  
 Jordan 收敛准则 2:12;3:229  
 Jordan 外测度 3:232  
 Jordan 形式(矩阵的) 2:334  
**Jordan 引理 3:231**  
**Jordan 正规形式 3:232**  
**Jordan 准则 3:229**  
 Jordan 准则(关于地图投影的) 1:495  
 Jordan 准则(关于 Fourier 级数收敛性的) 3:229  
 Jost - Karcher 坐标 2:827  
 Jost 解 3:962  
**Jourdain 原理 3:233**  
 Julia 点 3:234  
**Julia 定理 3:234**  
 Julia 方向 3:234  
**Julia 集 3:233**  
 Julia 射线 3:234  
 Julia 弦 3:234  
 Julia 线段 3:234  
**Jung 定理 3:236**  
 JWKB 方法 5:521
- ## K
- $k$  - Hamilton 图 2:755  
 K - P 方程 4:722  
 $k$  鞍面 2:720  
 $K$  凹度量 4:654  
 $k$  边连通图 2:756  
 $K$  变换 3:709  
 $k$  标架 2:551  
 $k$  表( $\lambda$  型的) 5:534  
 $k$  不变量 4:258  
 $k$  部图 2:755  
 $k$  传递群 5:251  
 $k$  传递群作用 5:250  
 $k$  次空隙空间 2:788  
 $k$  次邻域(初等合取的) 1:395  
 $k$  代数结构 5:145  
 $k$  等倾线 3:186  
 $k$  非迷向群 3:463  
 $k$  分裂环面 3:463  
 $k$  分裂群 3:463;4:955

- $k$  概形(有限型的) 4:719
- $k$  冠 1:466
- $k$  函数 1:318
- K 函子 3:237**
- $K$  函子(代数几何学中的) 3:237
- $k$  核( $k$ -ядро) 1:859
- $k$  横截(子集族的) 5:121
- $K_q$  集 2:824
- $K_q$  集( $D_q$  群中的) 2:824
- $k$  角形数 1:232;4:226
- $k$  阶节(射流)(坐标卡的) 1:565
- $k$  阶节( $k$  节) 3:226;4:864
- $k$  阶连续模 4:6
- $k$  节扩张 4:865
- $K$  解析集 1:468
- $k$  决定的芽 4:866;5:166
- $\mathfrak{K}$  可逼近代数系统 1:110
- $k$  可展曲面 2:720
- K 空间 3:238**
- $k$  空间 4:902;5:325
- $K^+$  空间 4:661
- K 理论 3:239**
- $K$  理论中的差异元素 2:77
- $k$  连通分支(图的) 2:756
- $k$  连通区域 3:866
- $k$  连通图 2:756
- $k$  连通拓扑空间 4:108
- $k$  连通性(图的) 2:500
- $K$  流 3:238
- $k$  迷向群 3:463
- $K$  拟等距 2:542
- $k$  拟分裂群 4:442
- $k$  拟共形映射 2:436;4:421
- $k$  抛物曲面 2:720
- $k$  平面变换 5:184
- $K$  瀑布 3:238
- $k$  奇点 4:865
- $k$  奇点类 4:865
- $K$  球面函数 5:341
- $k$  色图 2:755
- $k$  射流(坐标卡的) 1:565
- $\mathfrak{K}$  剩余代数系统 1:110
- $k$  同构(代数群的) 1:91
- $k$  同构(域的) 2:422
- $k$  同态(代数群的) 1:91
- $K$  凸 1:853
- $K$  凸度量 4:654
- $K$  凸曲面 1:853
- $k$  图 3:597
- $k$  网 4:430
- $k$  维骨架(相对 CW 复形的) 1:917
- $k$  维积分元 4:150
- $k$  维面积 1:222
- $k$  维容度(集合的) 5:376
- $k$  稳定同伦群 4:978
- $k$  稳定性 4:965
- K 系统 3:238**
- $K$  线系 4:660;5:415
- $k$  形式 2:508
- $k$  形式( $k$  上半单 Lie 代数的) 3:418
- $k$  一致基 1:312
- $k$  因子(图的) 2:447
- $k$  映射 3:612
- $k$  有理曲面 4:502
- $k$  有理曲线 4:496
- $K$  有限表示 3:52
- $K$  有限向量 3:52
- $k$  元序列 3:860
- $k$  正规曲线 3:916
- $k$  指标(半单代数群的) 4:563
- $k$  秩(群的) 3:463
- $k$  秩(线性代数群的) 3:684
- $k$  秩(约化群的) 4:491
- $k$  重本原置换群 4:292
- $k$  重根(多项式的) 1:82
- $k$  重 Minkowski 和 2:373
- $K$  自同构 3:238
- $\mathfrak{K}$  自由代数系统 2:565
- $\mathfrak{K}$  自由基(代数系统的) 2:565
- Kac - Moody 代数 3:242
- Kaczmarz 定理 3:286
- Kadomtsev - Petviashvili 方程 4:722
- Kähler 导子层 2:52
- Kähler 导子模 2:51
- Kähler 度量 3:247
- Kähler 度量 3:247
- Kähler 流形 3:245
- Kähler 形式 3:245
- Kähler 型流形 3:245
- Kalai - Smorodinsky 解 1:217
- Kallianpur - Striebel 公式 1:834
- Kalman - Bucy 法 5:19
- Kalman - Bucy 滤波 5:20
- Kalman - Bucy 滤波器 3:1044; 5:19
- Kalman - Якубович 引理(频率定理) 2:573
- Kalman 滤波器 5:19
- Kalman 增益 5:20
- KAM 定理 4:439
- KAM 理论 4:143;4:439;4:974
- Kan 复形 4:841
- Kan 纤维化 4:840
- Kantor 函子 3:228
- Kaplansky 定理 4:338
- Kaplansky 问题 2:784
- Kaplansky 指数定理 4:674
- Karhunen - Loève 展开式 4:915
- Karhunen 谱表示定理 4:913
- Karmarkar 射影法 3:504
- Kauffman 多项式 3:277
- Kazhdan - Lusztig 猜想 2:1
- Kazhdan - Lusztig 多项式 4:685
- Kazzidakis 公式 1:247
- KB 空间 4:774
- KB 谱系 1:302
- KdV 方程 3:289
- Keisler 超幂定理 3:787
- Kelley 条件 3:383;3:1039
- Kellogg - Evans 定理 3:251
- Kellogg 定理 3:251
- Kellogg 引理 3:251
- Kelly - Ulam 猜想 2:759
- Kelvin - Hemholtz 问题 5:289
- Kelvin 变换 3:252
- Kelvin 函数 3:251
- Kemmer - Duffin 矩阵 3:264
- Kendall 等级相关系数 3:253
- Kendall 记号(记法)(排队系统的) 4:448
- Kepler - Poincaré 立体 4:228; 4:549
- Kepler 方程 3:253
- Kerr - Newman 度规 3:256
- Kerr - Schild 度规 3:256
- Kerr 度规 3:256
- Kerr 时空 4:734
- Kervaire - Milnor 不变量 3:257



- Kervaire 不变量 3:256  
 Kervaire 流形 2:42;3:257  
 Kervaire 球面 2:42  
 Kerzman 定理 1:212  
 Kiefer - Wolfowitz 随机逼近方法 5:1  
 Killing - Coxeter 元 1:884  
 Killing 场(几何对象的) 3:260  
 Killing 方程 3:260  
 Killing 向量 3:260  
 Killing 向量场 3:260;3:917  
 Killing 型 3:259  
 Killing 张量场 3:260  
 Kinnersley - Chitre 变换 1:429; 2:769  
 Kirby - Siebenmann 定理 5:224  
 Kirchhoff - Love 假定 4:807  
 Kirchhoff - Соколов 公式 3:263  
 Kirchhoff 电流定律 3:893  
 Kirchhoff 电压定律 3:893  
 Kirchhoff 定律 3:893  
 Kirchhoff 法 3:263  
 Kirchhoff 公式 3:261  
 Kirchhoff 公式(对波动方程 Cauchy 问题的) 1:521  
 Kirchhoff 积分 3:261  
 Kirchhoff 近似 3:263  
 Kirkman 系 4:1029  
 KKM 定理 4:936  
 $k/k$  形式 2:509  
 Klee 问题 2:382  
 Klee 性质 2:382  
 Kleene - Mostowski 分类 3:263  
 Kleene - Mostowski 算术分层(集合的) 2:863  
 Kleene - Nelson 定理 4:323  
 Kleene - Rosser 悖论 1:667  
 Kleene 解释(递归可实现的) 1:792  
 Kleene 解析分层(集合的) 2:863  
 Kleene 可实现性 1:787  
 Kleene 枚举 2:367  
 Kleene 星形(语言的) 2:514  
 Kleene 正规形式定理 3:981  
 Klein - Gordon 方程 3:264  
 Klein - Poincaré 单值化定理 3:266;5:328  
 Klein 4 群 5:100  
 Klein 函数群 3:266  
 Klein 解释 3:265  
 Klein 空间 3:265  
 Klein 模群 2:226  
 Klein 模型 3:265  
 Klein 瓶(Klein 曲面) 3:265  
 Klein 奇点 4:501  
 Klein 曲面 3:265  
 Klein 群 3:266  
 Klein 群(亏格为 1 的) 3:266  
 Klein 群(亏格为 2 的) 3:266  
 Klein 坐标 3:264  
 Kleisli 范畴 1:504;5:280  
 Kleisli 范畴(三元组的) 2:378  
 Kleisli 构造 5:280  
 Kloosterman 和 5:277  
 KN 谱系 1:302  
 Knaster - Kuratowski 扇形 3:307; 5:234  
 Knaster 连续统 3:268  
 Kneser - Bruhat - Tits 定理 2:624  
 Kneser - Tits 猜想 3:269  
 Kneser - Tits 假设 3:269  
 Kneser 定理 3:268  
 Kneser 环 2:134  
 Knopp - Lorentz 定理 1:21  
 Knopp 求和法 3:269  
 Kock - Lawvere 公理 5:119  
 Koebe  $1/4$  定理 1:882;2:253  
 Koebe 常数 3:281  
 Koebe 单值化 3:267  
 Koebe 定理 3:281  
 Koebe 定理(关于分割的) 5:328  
 Koebe 定理(关于映射有限连通区域到典型域上的) 3:281  
 Koebe 覆盖定理 3:281  
 Koebe 函数 3:280  
 Koebe 畸变定理 3:281  
 Koksma 定理 3:733  
 Kolchin - Мальцев 定理 3:433  
 Kolchin 定理 3:429;5:334  
 Kondrachev 悖论 3:639  
 König - Egervay 定理 3:288  
 König - Zermelo 定理 1:475  
 König 定理 3:288  
 König 选择定理 4:102  
 Korn 不等式 3:289  
 Korovkin 比较定理 4:33  
 Korteweg - de Vries 方程 3:289  
 Korteweg - de Vries 型孤立子方程 4:846  
 Kosser 方程 2:32  
 Kostant 公式 3:864  
 Kostka 数 5:534  
 Koszul 复形 3:291  
 Köthe 根 4:470  
 Köthe 空间 3:998  
 Köthe 问题 1:922;3:910  
 Kozłowski - Walsh 定理 5:219  
 KP 法 5:257  
 Kripke - Joyal 语义 3:298  
 Kripke 尺度 3:782  
 Kripke 概形 3:154  
 Kripke 结构 3:782  
 Kripke 框架 3:782  
 Kripke 模型 3:297  
 Kripke 完全系统(模态逻辑的) 3:782  
 Kripke 语义学 3:782  
 Kripke 语义(Kripke 语义学) 3:131;3:782  
 Krohn - Rhodes 定理 5:524  
 Kronecker - Capelli 定理 3:298  
 Kronecker - Weber 定理 1:597; 1:924;2:628  
 Kronecker 定理 3:300  
 Kronecker 定理(关于一致分布的) 2:255  
 Kronecker 法 3:299  
 Kronecker 符号 3:300  
 Kronecker 公式 3:298  
 Kronecker 积 3:300  
 Kronecker 积(代数的) 3:300  
 Kronecker 积(环的) 3:300  
 Kronecker 积(矩阵的) 5:148  
 Kronecker 集 2:824  
 Kronecker 箭图 4:459  
 Kronecker 矩阵 4:382  
 Kronecker 曲率 4:947  
 Kronecker 示性数 3:299  
 Kronecker 示性数(函数组的) 3:299  
 Kronecker 维数 4:978

- Kronecker 指标(不动点的) 3:379  
 Kronecker 指数 3:979  
 Kronecker 指数(控制理论中的) 5:124  
 Kronig 关系(Kramers-Kronig 关系) 2:249  
 Kropina 度量 2:486  
 Krull-Remak-Schmidt-Gabriel 分解 3:301  
 Krull-Remak-Schmidt 定理 3:301  
 Krull-Schmidt 定理 3:301  
 Krull 定理 1:42;2:847;3:535  
 Krull 环 3:301  
 Krull 拓扑 2:629  
 Krull 维数 2:180  
 Krull 维数(环的) 3:535  
 Krull 维数(模的) 3:863  
 Kruskal 时空 4:734  
 Kuga 簇 3:788  
 Kuhn-Tucker 定理 3:655  
 Kuhn 定理 4:247  
 Kühnel-Banchoff 定理 5:175  
 Kühnel 拓扑嵌入(复射影平面的) 5:176  
 Kuiper-Meeks 定理 5:175  
 Kuiper 定理 5:175  
 Kuiper 基本定理 5:175  
 Kummer 变换 3:305  
 Kummer 定理 3:304  
 Kummer 定理(关于正则素数的) 4:550  
 Kummer 分解(理想的) 1:98  
 Kummer 公式(理想的) 1:98  
 Kummer 函数 1:746  
 Kummer 级数 1:746  
 Kummer 级数变换 3:305  
 Kummer 级数收敛准则 3:303  
 Kummer 假设 3:304  
 Kummer 检验法(素数的) 3:183  
 Kummer 扩张 3:303  
 Kummer 理论 3:304  
 Kummer 配对 3:303  
 Kummer 曲面 3:304  
 Kummer 群 3:303  
 Kummer 准则 3:303  
 Kümmerer 膨胀 4:416  
 Kunen-Martin 定理 2:64  
 Künneth 公式 3:305  
 Künneth 关系 3:305  
 Kuratowski-Dugundji 定理 3:551  
 Kuratowski-Knaster 扇形 3:307  
 Kuratowski-Ryll-Nardzewski 选择定理 4:746  
 Kuratowski-Понтрягин 定理 3:307  
 Kuratowski 闭包运算 1:614  
 Kuratowski 定理 2:764;3:307  
 Kuratowski 多面体 3:308  
 Kuratowski 公理 5:199  
 Kuratowski 归约定理 1:455  
 Kuratowski 集 3:308  
 Kuratowski 图 3:307  
 Kuratowski 图(第二型的) 3:307  
 Kuratowski 图(第一型的) 3:307  
 Kutta-Merson 法 3:308  
 Kutta-Жуковский 定理 5:514; 5:550  
 Kutta-Жуковский 翼剖面 5:550  
 Kutta 条件 5:514  
 $(k, 1)$  可计算的谓词 1:126  
 K3 曲面 3:241  
 K3 曲面(表示成椭圆曲线的束的) 3:241
- ### L
- L-Марков 场 4:481  
 L-Марков 随机场 4:481  
 $L_p$  逼近 1:199  
 $L_2$  遍历定理 4:986  
 $l$  调和函数空间 2:427  
 $L$  分拆 4:59  
 $l$  赋值( $\lambda$  演算中的) 3:311  
 $L$  函数 3:314  
 $L$  函数(椭圆曲线的) 2:345  
 $L_2$  核 2:562;3:112  
 $L$  级数 2:212;4:627;5:136  
 $l$  进层 3:314  
 $l$  进上同调 3:313  
 $L$  空间问题 5:220  
 $L$  亏格 3:314  
 $L$  亏格(流形的) 1:558;4:821  
 $L$  理论 5:447  
 $l$  理想 3:358;4:12  
 $l$  群 3:358;4:11  
 $L$  群 5:447  
 $L_2$  上同调 3:146  
 $L$  同态 4:445  
 $l$  同态 3:358  
 $L$  系统 3:314  
 $L$  系统(带有表格的) 3:315  
 $L$  系统(带有相互作用的) 3:315  
 $L_2$  线性回归 3:505  
 $L$  样条 4:953  
 $L$  值的位(域的) 4:166  
 $l$  子群 3:358  
 làglàd 函数 2:222  
 Lagrange-Dirichlet 定理 4:968  
 Lagrange-Gauss 约化条件 4:387  
 Lagrange-Hurwitz 问题 3:626  
 Lagrange 伴随算子 2:692;3:478  
 Lagrange 被积函数 3:330  
 Lagrange 插值 3:136  
 Lagrange 插值多项式 3:133; 3:136;3:326  
 Lagrange 插值公式 3:326  
 Lagrange 插值算子 1:208  
 Lagrange 常数 3:626  
 Lagrange 常微分方程(d'Alembert 方程) 2:4  
 Lagrange 乘子 3:327  
 Lagrange 等距结点插值公式 3:326  
 Lagrange 定理 3:329  
 Lagrange 定理(关于连分数的) 3:330  
 Lagrange 定理(关于连分数的渐近分数的) 3:627  
 Lagrange 定理(关于平衡点的) 1:582  
 Lagrange 定理(关于群阶的) 5:60  
 Lagrange 定理(关于四平方数之和的) 1:315;2:196;2:336;3:330  
 Lagrange 定理(关于同余式的) 1:761;3:329  
 Lagrange 定理(关于无旋运动随时间保持不变的) 1:907  
 Lagrange 定理(群论中的) 3:329  
 Lagrange 定理(微积分中的) 3:329



- Lagrange 多项式 5:302-303  
 Lagrange 法 3:326  
 Lagrange 法(气体动力学中的) 2:642  
 Lagrange 方程 3:320  
 Lagrange 方程(第二类) 3:321  
 Lagrange 方程(第一类) 3:321  
 Lagrange 方程(力学中的) 3:321  
 Lagrange 公式(算子理论中的) 2:426  
 Lagrange 函数 3:322  
 Lagrange 函数 3:330  
 Lagrange 函数松弛法 4:718  
 Lagrange 恒等式 1:42;4:444  
 Lagrange 级数 3:329  
 Lagrange 阶段(大粒子方法中的) 3:350  
 Lagrange 解(三体问题的) 5:169  
 Lagrange 括号 3:320  
 Lagrange 流形 3:331  
 Lagrange 平面 5:446  
 Lagrange 谱 3:329  
 Lagrange 四平方定理 4:444  
 Lagrange 算子(凸优化中的) 2:290  
 Lagrange 稳定性 3:329  
 Lagrange 问题 3:328  
 Lagrange 问题(变分学中的) 5:381  
 Lagrange 系数 3:326  
 Lagrange 形式(Taylor 公式中余项的) 5:140  
 Lagrange 幺拟群 3:564  
 Lagrange 有限增量公式 2:481  
 Lagrange 预解式(代数方程的) 4:609  
 Lagrange 原理 3:327  
 Lagrange 中值定理 1:526  
 Lagrange 驻值作用量原理 5:397  
 Lagrange 子簇 5:69  
 Lagrange 子空间 5:69  
 Lagrange 子流形 3:331  
 Lagrange 作用 1:31  
 Lagrange 坐标(气体动力学中的) 2:642  
 Lagrange 坐标(完整系统的) 2:892  
 Laguerre 变换 3:332  
 Laguerre 多项式 3:332  
 Laguerre 方程 3:331  
 Laguerre 公式 3:331  
 Laguerre 函数 3:331  
 Laguerre 积分变换 3:332  
 Laguerre 权 4:391  
 Lalesco-Picard 积分方程 3:936  
 Lambert 变换 3:334  
 Lambert 等面积投影 1:495  
 Lambert 积分变换 3:334  
 Lambert 级数 3:333  
 Lambert 求和法 3:334  
 Lambert 四角形 3:333  
 Lamé 常数 3:335  
 Lamé 方程 3:335  
 Lamé 方程的 Jacobi 形式 3:336  
 Lamé 函数 3:336  
 Lamé 函数(第二类) 3:336  
 Lamé 函数(二型第一类  $n$  次的) 3:336  
 Lamé 函数(三型第一类  $n$  次的) 3:336  
 Lamé 函数(四型第一类  $n$  次的) 3:336  
 Lamé 函数(一型第一类  $n$  次的) 3:336  
 Lamé 曲线 3:335  
 Lamé 微分参数 2:169  
 Lamé 系数 3:334  
 Lanczos 法 1:772  
 Lanczos 算法 1:698  
 Landau-Caratheodory 定理 3:337  
 Landau 常数 3:338  
 Landau 大  $O$  符号 4:7  
 Landau 定理 3:337  
 Landau 定理(关于单叶性半径的) 3:869  
 Landau 小  $o$  符号 4:7  
 Landweber-Новиков 代数 1:578  
 Lang 定理 4:298  
 Langevin 方程 3:338  
 Langevin 力 3:338  
 Langlands-Weil 理论 3:788  
 Langlands 猜想 3:314  
 Langlands 分解 1:818  
 Langmuir 方程 1:48  
 Laplace-Beltrami 方程 3:339  
 Laplace-Beltrami 算子 3:343  
 Laplace-Fourier 核 3:117  
 Laplace-Gauss 分布(Gauss-Laplace 分布) 2:654  
 Laplace 变换 3:346  
 Laplace 变换法 5:453  
 Laplace 变换(广义函数的) 2:687  
 Laplace 变换(几何学中的) 3:348  
 Laplace 变换(可和半群的) 4:762  
 Laplace 变换(Laplace 线汇序列中的) 3:345  
 Laplace 定理 3:345  
 Laplace 定理(关于行列式的) 1:638;3:345  
 Laplace 定理(关于用正态分布逼近二项分布的) 3:345  
 Laplace 法 3:343  
 Laplace 方程 3:340  
 Laplace 方程的数值方法 3:341  
 Laplace 分布 3:339  
 Laplace 公式(对 Bernoulli 随机游动的) 1:332  
 Laplace 函数 2:654  
 Laplace 积分 3:342  
 Laplace 积分变换 3:346  
 Laplace 积分(概率论中的) 2:654  
 Laplace 极限公式 2:654  
 Laplace 算子 3:343  
 Laplace 算子(de Rham 复形的) 3:896  
 Laplace 向量 3:349  
 Laplace 序列 3:345  
 Laplace 展开(行列式的) 1:638  
 Ларро-Данилевский 条件 2:615  
 Larmor 半径 3:352  
 Larmor 频率 2:287;3:352  
 Lasker-Noether 定理 3:301  
 Lasker 环 3:352  
 Lasker 模 3:352  
 Laurent 定理 3:360  
 Laurent 多项式(域上的) 3:360  
 Laurent 级数 3:359  
 Lawson 半格 1:815  
 Lawson 拓扑 1:815  
 Lax-Milgram 定理 2:217  
 Lax-Philips 散射理论 1:281

- Lax 表示 3:290;4:844  
 Lax 对 2:810  
 Lax 理论(差分格式的) 2:86  
 Lazard 定理 4:236  
 Lazard 定理(关于交换万有形式群律的) 2:511  
 Lazard 定理(关于一维形式群律的) 2:512  
 Lebesgue - Brouwer 定理 2:178  
 Lebesgue - Brouwer 镶嵌定理 2:180  
 Lebesgue - Stieltjes 测度 3:700  
 Lebesgue - Stieltjes 积分 3:377  
 Lebesgue 不等式 3:374  
 Lebesgue 不定积分 3:34  
 Lebesgue 测度 3:375  
 Lebesgue 常数 3:371  
 Lebesgue 常数(插值法中的) 3:372  
 Lebesgue 点 3:376  
 Lebesgue 定积分 3:87  
 Lebesgue 定理 3:378  
 Lebesgue 定理(关于测度的分解的) 1:19  
 Lebesgue 定理(关于单调函数的导数的) 5:432  
 Lebesgue 定理(关于积分号下求极限的) 3:378  
 Lebesgue 定理(关于 Baire 类的) 1:404  
 Lebesgue 定理(关于 Borel 函数的) 1:404  
 Lebesgue 定理(关于 Fourier 级数的) 2:456  
 Lebesgue 定理(维数论中的) 3:378  
 Lebesgue 分解 3:373  
 Lebesgue 分解定理 5:416  
 Lebesgue 分解(可测空间上的  $\sigma$  有限广义测度的) 3:373  
 Lebesgue 分解(有界变差函数的) 3:373  
 Lebesgue 分类(Borel 集的) 2:60  
 Lebesgue 覆盖定理 3:378;2:184  
 Lebesgue 函数 3:373  
 Lebesgue 函数空间 2:588  
 Lebesgue 和 3:120  
 Lebesgue 积分 3:374  
 Lebesgue 积分和 3:87;3:120  
 Lebesgue 集(局部可和函数的) 3:376  
 Lebesgue 脊 3:183;4:136;4:266  
 Lebesgue 可测函数 1:305  
 Lebesgue 可测集 3:701  
 Lebesgue 可积函数 3:87;3:91;5:73  
 Lebesgue 空间 3:376  
 Lebesgue 控制收敛定理 1:841  
 Lebesgue 例子(薄集的) 5:165  
 Lebesgue 链 2:496  
 Lebesgue 面积 1:222;5:187  
 Lebesgue 判别准则(闸函数的) 4:544  
 Lebesgue 谱 3:377  
 Lebesgue 奇异函数 4:848  
 Lebesgue 求和法 3:377  
 Lebesgue 收敛准则(对 Fourier 级数的) 3:372  
 Lebesgue 数 3:376  
 Lebesgue 数(闭子集系的) 3:376  
 Lebesgue 数(开覆盖的) 3:376  
 Lebesgue 外测度 3:375  
 Lebesgue 维数 3:373  
 Lebesgue 镶嵌定理 2:178  
 Lebesgue 闸函数 1:310  
 Lebesgue 准则 3:372  
 Lebesgue 集 3:376  
 Leech 格 3:378  
 Lefschetz - Hopf 定理 3:381  
 Lefschetz - Poincaré 对偶性 3:379  
 Lefschetz 不动点定理 2:396;3:381  
 Lefschetz 超平面截面定理 3:381  
 Lefschetz 定理 3:381  
 Lefschetz 定理(关于基本群的) 3:381  
 Lefschetz 定理(关于(1,1)型上同调的) 3:381  
 Lefschetz 对偶性 3:379  
 Lefschetz 分解 3:381  
 Lefschetz 公式 3:379  
 Lefschetz 箍 5:371  
 Lefschetz 束 3:814  
 Lefschetz 数 3:380  
 Lefschetz 消没闭链 5:371  
 Legendre - Clebsch 条件 3:211  
 Legendre 变换 3:385  
 Legendre 定理 3:385  
 Legendre 多项式 3:383  
 Legendre 方程 3:383  
 Legendre 符号 3:384  
 Legendre 关系(关于 Weierstrass  $\zeta$  函数的周期的) 5:468  
 Legendre 函数 3:383  
 Legendre 函数(第二类) 5:227  
 Legendre 积分变换 3:386  
 Legendre 加倍公式 2:639  
 Legendre 连带函数 3:383  
 Legendre 流形 3:383  
 Legendre 模数 3:802  
 Legendre 模(Legendre 模数)(椭圆积分的) 2:349;3:802  
 Legendre 条件 3:382  
 Legendre 条件(变分学中的) 3:211  
 Legendre 正规形式(第二类正规椭圆积分的) 2:349  
 Legendre 正规形式(第三类正规椭圆积分的) 2:349  
 Legendre 正规形式(椭圆积分的) 2:349  
 Lehmann - Scheffé 定理 4:993  
 Lehmann 定义(无偏估计量的) 5:313  
 Leibnitz 定理(关于交错级数的) 1:144  
 Leibniz 公式 3:387  
 Leibniz 公式(关于函数的积的导数的) 3:387  
 Leibniz 级数 3:387  
 Leibniz 收敛准则(关于交错级数的) 3:386  
 Leibniz 性质 5:112  
 Leibniz 性质(关于(上)边缘的) 1:628  
 Leibniz 准则 3:386  
 Lelong 数 2:430  
 Lelong 正则化径向指标 2:792  
 Lemke - Howson 算法 2:637  
 Lenz - Barlotti 分类(射影平面的)



- 4:341  
 Leray - Schandar 不动点原理 2:493  
 Leray - Serre 谱序列 4:921  
 Leray 残数理论 4:605  
 Leray 定理 4:606;4:805  
 Leray 定理(关于层上同调的) 1:644  
 Leray 公式 3:389  
 Leray 积分 3:390  
 Leray 积分公式 1:157  
 Leray 谱序列 3:391  
 Levenberg - Marquarat 法 3:687  
 Levi - Civita 共变导数 4:647  
 Levi - Civita 联络 3:392  
 Levi - Civita 平行移动 4:647  
 Levi - Мальцев - Harish - Chandra 定理(Lie 代数的) 3:598  
 Levi - Мальцев 定理 3:404; 3:424  
 Levi - Мальцев 分解 3:393  
 Levi 定理 3:378  
 Levi 分解 4:74;5:463  
 Levi 函数 4:93;4:261  
 Levi 条件 3:393  
 Levi 伪凸区域 2:277;3:393  
 Levi 伪凸性 3:393  
 Levi 伪凸性(在一点的) 3:393  
 Levi 问题 3:394  
 Levi 形式 1:158;4:361  
 Levi 因子 3:394;5:463  
 Levi 子代数 3:394;3:404;5:463  
 Levi 子群 3:394;4:74  
 Levine 同态 1:626  
 Lévy - Cramér 定理 3:396  
 Lévy - Прохоров 度量 3:398  
 Lévy - Хинчин 典范表示 3:397  
 Lévy 不等式 3:397  
 Lévy 典范表示 3:395  
 Lévy 定理(关于分裂的 Lie 代数扩张的) 2:423  
 Lévy 定理(关于弱收敛性) 1:560  
 Lévy 定理(关于条件数学期望连续性的) 3:630  
 Lévy 度量 3:397  
 Lewis 调查系统 5:33  
 Lewy 函数(一般椭圆型偏微分算子的) 2:280  
 l'Hospital 法则 3:400  
 Lichnérowicz 猜想 4:423  
 Lichtenbaum 定理 1:643  
 Lie - Killing 方程 3:260  
 Lie - Kolchin 定理 3:432  
 Lie  $p$  代数 3:433  
 Lie 变换群 3:436  
 Lie 变换伪群 4:368  
 Lie 变换伪群(无限型的) 4:368  
 Lie 变换伪群(有限型的) 4:368  
 Lie 超代数 5:78  
 Lie 超代数(经典型的) 5:78  
 Lie 超代数(Cartan 型的) 5:78  
 Lie 超群 5:76  
 Lie 代数 3:403  
 Lie 代数(半单的)\* 3:416  
 Lie 代数表示的权 5:475  
 Lie 代数(超可解的)\* 3:420  
 Lie 代数簇 3:420  
 Lie 代数簇(环上的) 3:420  
 Lie 代数(代数的)\* 3:407  
 Lie 代数(代数群的)\* 3:413  
 Lie 代数的表示 4:588  
 Lie 代数的复化 1:718  
 Lie 代数的扩张 2:423  
 Lie 代数的上同调 1:651  
 Lie 代数的收缩 1:822  
 Lie 代数的秩 4:490  
 Lie 代数的  $p$  包络 3:433  
 Lie 代数的  $p$  同态 3:433  
 Lie 代数的  $p$  子代数 3:433  
 Lie 代数(分次的)\* 3:408  
 Lie 代数(解析群的)\* 3:414  
 Lie 代数(局部的)\* 3:411  
 Lie 代数(局部 Lie 群的) 3:429  
 Lie 代数(可解的)\* 3:419  
 Lie 代数(例外的)\* 3:407  
 Lie 代数(幂零的)\* 3:412  
 Lie 代数(全可解的)\* 3:408  
 Lie 代数(群的) 3:404  
 Lie 代数(线性的)\* 3:411  
 Lie 代数(斜对称矩阵的) 4:872  
 Lie 代数(诣零的)\* 3:412  
 Lie 代数(与结合代数相伴的) 3:403  
 Lie 代数(约化的)\* 3:415  
 Lie 代数(指数的)\* 3:407  
 Lie 代数(自由的)\* 3:408  
 Lie 代数(Lie 群的) 3:404;3:414  
 Lie 代数(Pfaff 结构的无穷小自同构的) 4:152  
 Lie 导数 3:421  
 Lie 第二定理 3:435  
 Lie 第三定理 1:458;3:436  
 Lie 第一定理 3:435  
 Lie 定理 3:435  
 Lie 定理(关于广义位移算子的) 2:681  
 Lie 定理(关于可解 Lie 代数的) 3:436  
 Lie 定理(关于迁移网的) 5:258  
 Lie 二次曲面 3:434  
 Lie 环 3:435  
 Lie 积 1:676  
 Lie 经典定理 3:598  
 Lie 括号 3:421  
 Lie 理论(半群的) 5:198  
 Lie 幂零代数 4:157  
 Lie 群 3:422  
 Lie 群(半单的)\* 3:430  
 Lie 群(超可解的)\* 3:432  
 Lie 群(导出的)\* 3:427  
 Lie 群的分类 3:424  
 Lie 群的复化 1:718  
 Lie 群的应用 3:425  
 Lie 群的秩 4:490  
 Lie 群(紧的)\* 3:426  
 Lie 群(局部的)\* 3:428  
 Lie 群(可解的)\* 3:431  
 Lie 群(零秩的) 3:430  
 Lie 群(幂零的)\* 3:429  
 Lie 群(全可解的)\* 3:428  
 Lie 群(无小子群的) 5:193  
 Lie 群(指数的)\* 3:427  
 Lie 群中的格 3:358  
 Lie 群(Banach 的)\* 3:426  
 Lie 群((E)型的) 3:427  
 Lie 群( $p$  进的)\* 3:430  
 Lie 容许代数 3:400  
 Lie 容许的 Lie 代数 3:400  
 Lie 三元系统 3:435  
 Lie 双代数 4:411

- Lie 算子 3:260  
 Lie 微分 3:421  
 Lie 微分法 3:421  
 Lie 微分(张量场沿向量场方向的) 3:421  
 Lie 无穷小算子 3:52  
 Lie 楔 5:198  
 Lie 元素 5:536  
 Lie 圆变换 1:592  
 Lie 中心(Мальцев 代数的) 3:598  
 Lie 子群 3:423  
 Lie 子群(有限余体积的) 2:232  
 Liénard - Chipart 准则 3:437  
 Liénard - Emden 方程 2:356  
 Liénard 方程 3:438  
 Lindeberg - Feller 定理 3:451  
 Lindeberg 条件 3:451  
 Lindelöf 猜想(关于 Riemann  $\zeta$  函数性态的) 3:451  
 Lindelöf 定理 3:453  
 Lindelöf 定理(关于解析函数渐近值的) 3:453  
 Lindelöf 定理(关于实直线的覆盖的) 1:465  
 Lindelöf 度(拓扑空间的) 1:473  
 Lindelöf 假设 3:451  
 Lindelöf 假设(关于 Riemann  $\zeta$  函数性态的) 3:451  
 Lindelöf 紧拓扑空间 1:682  
 Lindelöf 矩阵 3:453  
 Lindelöf 空间 3:452  
 Lindelöf 求和法 3:453  
 Lindelöf 数(拓扑空间的) 1:472  
 Lindelöf 拓扑空间 1:682  
 Lindelöf 性质 5:201  
 Lindelöf 原理 3:452  
 Lindelöf 作图法 3:451  
 Lindemann - Weierstrass 定理 1:92  
 Lindemann 定理 3:454  
 Lindenbaum 定理 4:526  
 Lindström 量词 4:403  
 Liouville - Green 近似 5:521  
 Liouville - Neumann 级数 2:556  
 Liouville - Остроградский 公式 3:519  
 Liouville - Стеклов 方法 4:32  
 Liouville 变换 3:518  
 Liouville 代换 5:47  
 Liouville 定理 3:520  
 Liouville 定理(关于代数数逼近的) 3:520  
 Liouville 定理(关于共形映射的) 3:520  
 Liouville 定理(关于拟共形映射的) 4:422  
 Liouville 定理(关于球面变换的) 1:754  
 Liouville 定理(关于相体积守恒的) 3:519; 3:521  
 Liouville 定理(关于相位流的) 1:282  
 Liouville 定理(关于有界整解析函数的) 3:520  
 Liouville 定理(关于整椭圆函数的) 2:346  
 Liouville 定理(关于  $\mathbb{R}^n$  中球面变换的) 1:751  
 Liouville 范式 3:518  
 Liouville 方程 3:517  
 Liouville 公式 1:519; 3:519  
 Liouville 公式(对 Wronski 行列式的) 3:497; 5:525  
 Liouville 函数 3:517  
 Liouville 曲面 3:520  
 Liouville 数 3:518  
 Liouville 网 3:518  
 Liouville 形式 5:112  
 Lippman - Schwinger 方程 4:724  
 Lipschitz - Killing 曲率 1:693; 4:296  
 Lipschitz - Killing 形式 5:174  
 Lipschitz 边界(区域的) 4:887  
 Lipschitz 常数 3:522  
 Lipschitz 常数(定义于区间上的函数的) 3:522  
 Lipschitz 常数(上链的) 4:802  
 Lipschitz 积分条件 3:522  
 Lipschitz 条件 3:521  
 Lipschitz 条件(具有 Lipschitz 常数  $A$  的  $\alpha$  阶的) 2:887  
 Lipschitz 条件( $\alpha$  阶的) 3:521  
 Lipschitz 准则 2:534  
 Lisp 语言 3:522  
 Littlewood Tauber 定理 5:139  
 Littlewood 定理(关于零点数目的) 1:712  
 Littlewood 定理(关于 Riemann  $\zeta$  函数的相邻零点的) 5:544  
 Littlewood 问题 3:523  
 Littlewood 问题(关于积分的) 3:523  
 Littlewood 问题(关于相容 Diophantus 逼近的) 3:523  
 $L/k$  形式 2:508  
 Löb 定理 3:783  
 Löb 模态逻辑 3:783  
 Lobatto 多项式 1:659  
 Lobatto 求积公式 3:529  
 Lodato 邻近性 4:355  
 Lommel 多项式 3:563  
 Lommel 函数 3:563  
 Longman 法 3:564  
 Loomis - Whitney 不等式 3:194  
 Loos 对称空间 5:102  
 Lorentz - Poincaré 群 3:264  
 Lorentz 变换 3:567  
 Lorentz 不变性 4:566; 4:568  
 Lorentz 代数 1:822  
 Lorentz 空间 3:613  
 Lorentz 力 3:566  
 Lorentz 流形 4:373  
 Lorentz 群 3:567; 4:26; 4:568; 1:822  
 Lorentz 时空 4:903  
 Lorentz 序列空间 3:614  
 Lorentz 坐标系 4:903  
 Lorenz 吸引子 3:568  
 Lorenz 族 1:546  
 Los 定理 3:785  
 Löwenheim - Skolem - Мальцев 定理 3:787  
 Löwenheim - Skolem 定理 3:569  
 Löwner - Kyfarev 方程 4:91; 5:344  
 Löwner 边界畸变定理 2:253  
 Löwner 参数表示法(单叶函数的) 3:570  
 Löwner 参数法 3:570  
 Löwner 法 3:570



Löwner 法(单叶函数论中的)  
5:346

Löwner 方程 3:570

Lozi 吸引子 5:29

l. s. c. 函数 4:753

l. s. c. 映射 4:754

LU 分解(线性方程组的) 2:656

Lubin - Tate 定理 1:597

Lubin - Tate 形式群 1:597

Lubin - Tate 形式群律 2:512

Lucas 检验 3:715

Lucas 数 2:465

Lucas 序列 2:465

Lüroth 定理 2:420;3:572

Lüroth 问题 3:572

Luxemburg 范数 3:572

Lyndon 谱序列 1:650

Lyons 群 4:957

## M

$M/G/1$  排队 4:448

$(m+1)$  分块因子 3:588

$(m \times n)$  维矩阵(集合上的)  
3:670

$M$  不变子空间 3:166

$m$  步递归可枚举集 2:367

$m$  步集 2:367

$m$  点基 1:312

$m$  分界线鞍 4:705

$m$  耗散算子 4:760

$M$  集 5:275;5:336

$M_0$  集 5:336

$m$  进拓扑 1:41;3:535;5:196

$m$  局部基 1:312

$m$  可测集 3:700

$\mathfrak{M}$  可微非线性算子 3:947

$M$  空间 2:454

$M$  模型(随机规划中的) 5:23

$m$  平坦集 2:864

$M$  曲线 4:509

$M$  群 3:818

$M$  容许不变子空间 3:166

$\mathfrak{M}$  容许的点格 2:722

$M$  条件 4:423

$m$  同构的分解 2:924

$M$  脱殊滤子 2:507

$m$  维超立方体 3:355

$m$  维积分流形 3:110

$m$  维平坦集 2:864

$m$  维奇异积分 3:112

$m$  维奇异积分算子 3:112

$m$  维置换立方体 3:354

$M$  稳定的联盟合理的构形 4:965

$M$  稳定集(构形的) 4:966

$M$  稳定性 4:965

$m$  系统 4:289

$m$  相关随机变量 3:36

$m$  相依的随机过程 3:588

$m$  相依过程 3:588

$\mathfrak{M}$  小映射 3:947

$m$  性质(求体积公式的) 1:901

$M$  序列(环中的) 3:292

$m$  有心集族 1:540

$M$  正则序列(环中元素的) 3:292

$M$  正则序列(理想中的) 3:292

$M$  正则序列(Noether 环中的)  
3:292

$M$  正则元(环的) 3:292

$m$  值逻辑 3:605

$m$  值逻辑代数 3:606

$m$  值逻辑(Post 的) 3:606

MAC 方法 4:104

Macaulay 环(Cohen - Macaulay 环)  
1:639

Macdonald 猜想 4:685

Macdonald 函数 3:588

Macdonald 恒等式 1:550

Mach 数 3:589

Mach 原理 3:589

Machin 公式 1:839;4:159

Mackey - Arens 定理 2:297;  
3:546

Mackey - Borel 结构 3:592

Mackey 交结数定理 3:592

Mackey 空间 3:593

Mackey 拓扑 3:593

MacLane 理论(渐近值的) 1:616

MacLaurin 公式 3:593

MacLaurin 级数 3:593

MacLaurin 级数(复变函数的)  
3:593

MacLaurin 展开式 1:470

MacNeille 完全化 1:705

Mahalanobis 距离 3:594

Maharan - Колмогоров 定理  
3:703

Mahler 不等式 3:762

Mahler 猜想 2:190

Mahler 问题 3:595

Mainardi - Codazzi 方程 1:389;  
2:156;4:145

Malgrange - Mather 预备定理  
5:473

Malgrange 定理(关于  $b$  函数的)  
2:3

Malgrange 预备定理 5:99;5:473

Malliavin 演算 5:20;5:503

Malo 模式 1:475

Mandelbrot 集 3:234

Mandelbrot 维数 2:542

Mangoldt 函数 3:599

Mann - Dyson 不等式(对  
Шнирельман 密度的) 2:47

Mann - Whitney 检验 3:605

Mann 定理 3:604

MAP 群 2:477

Marchaut 公式 2:544

Marcinkiewicz 插值定理 3:142;  
4:657

Marcinkiewicz 空间 3:613

Mardešić 定理 4:329

Margulis 超刚性定理 2:233

Martin - Löf 定理 1:127

Martin 边界 3:627;1:411

Martin 边界(位势论中的)\* 3:627

Martin 边界(Марков 过程论中的)  
3:628

Martin 表示 3:627

Martin 定理 2:63

Martin 公理 1:473;3:574;5:88

Martin 核 3:628

Martin 基本定理 3:627

Martin 紧化 3:627

Martin 紧统 3:628

Martin 空间 3:627

Martin 拓扑 3:627

Martineau 定义(超函数的) 2:954

Martineau 型定理 2:954

Martinelli - Bochner 积分公式  
1:157

- Martini 问题 3:668  
 Maschke 定理 2:784  
 Maskit 定理 5:328  
 Massey 积 1:656  
 Mather 除法定理 5:473  
 Mather 定理 2:482;5:166  
 Mathieu 方程 3:668  
 Mathieu 函数 3:669  
 Mathieu 群 3:669  
 Mathieu 算子 3:668  
 Mathieu 微分方程 4:438  
 Maupertuis 原理 3:679  
 Maurer - Cartan 方程 3:680  
 Maurer - Cartan 形式 3:680  
 Maxwell - Boltzmann 分布 1:385  
 Maxwell 方程组 3:693  
 Maxwell 分布 3:693  
 Maxwell 分布律 1:564  
 Mayer - Vietoris 公理 4:1019  
 Mayer - Vietoris 序列 2:915  
 Mayer 方法 4:1010  
 Mayer 函数 4:1010  
 Mayer 括号 3:210  
 Mayer 问题 3:695  
 Mazur - Orlicz - Brudno 定理 3:30  
 Mazur - Ulam 定理 3:730  
 Mazurkiewicz - Janicewski 定理 1:780  
 Mazurkiewicz - Moore - Menger 定理 3:544  
 Mazurkiewicz 定理 1:455;3:455;4:112  
 McLaughlin 群 4:957  
 McMillan 定理 3:75  
 McMillan 度 5:118  
 Mealy 映射 2:482  
 Mealy 自动机 1:275;5:157  
 Mehler - Фок 变换 3:707  
 Mehler 公式 4:22  
 Mehler 求积公式 3:708  
 Meier 点 1:615;3:708  
 Meier 定理 3:708  
 Meier 性质 3:708  
 Meijer - Bessel 变换 3:709  
 Meijer  $K$  变换 3:709  
 Meijer 变换 3:708  
 Meixner - Pollaczek 多项式 5:512  
 Meixner 多项式 5:512  
 Mellin 变换 3:709  
 Mellin 公式 2:273  
 Mellin 核 3:117  
 Menelaus 定理 3:710  
 Menger - Урысон - Čech 可数闭和定理 2:178  
 Menger - Урысон 公式(关于并的维数的) 2:183  
 Menger 代数 4:672  
 Menger 定理的边形式 2:757  
 Menger 定理的顶点形式 2:757  
 Menger 定理(关于归纳维数的) 1:463  
 Menger 嵌入定理 3:455  
 Menger 曲线 3:710  
 Menger 凸性 2:702  
 Menger 凸性(度量的) 1:853  
 Menger 万有曲线 3:455  
 Mercator 地图投影 1:489  
 Mercator 投影 1:754  
 Mercer 定理 3:711  
 Mersenne 数 3:715  
 Mersenne 素数 4:290  
 Mertens 定理 4:793  
 Meusnier 定理 3:738  
 Michael 连续选择定理 4:747  
 Mills - Seligman 公理 3:406  
 Milne 法 3:741  
 Milne 方程 3:742  
 Milne 问题 3:742  
 Milnor - Hirzebruch 问题 1:579  
 Milnor - Hirzebruch 问题(关于拟复流形的) 4:244  
 Milnor - Wolf 定理 4:222;4:235  
 Milnor 定理 1:559  
 Milnor 构造 1:604;4:297  
 Milnor 基本群增长定理 4:235  
 Milnor 加法公理 4:1019  
 Milnor 界限 5:175  
 Milnor 流形 2:42  
 Milnor 球面 3:743  
 Milnor 球面的分类 3:743  
 Milnor 群 1:93;2:815  
 Milnor 数 3:813;4:857;4:866  
 Milnor 问题 1:452  
 Milnor 纤维化 4:859  
 Milnor 形式 3:275  
 Minkowski - Farkas 定理 3:489  
 Minkowski - Hasse 定理 2:196;4:383  
 Minkowski - Hlawka 定理 2:725;4:981  
 Minkowski 不等式 3:761  
 Minkowski 不等式(关于和的) 3:762  
 Minkowski 不等式(关于积分的) 3:762  
 Minkowski 单位(二次型的) 3:279  
 Minkowski 单位(链环的) 3:278  
 Minkowski 第二凸体定理 2:723  
 Minkowski 定理 3:764  
 Minkowski 定理(关于分歧素理想的) 4:476  
 Minkowski 定理(关于凸多面体的) 1:847  
 Minkowski 定理(关于线性齐次型的) 2:722  
 Minkowski 度量 3:761  
 Minkowski 泛函 1:297;3:998;4:437  
 Minkowski 公式 4:384  
 Minkowski 和 1:34  
 Minkowski 混合容积 5:376  
 Minkowski 几何学 3:761  
 Minkowski 假设 3:761  
 Minkowski 假设(关于非齐次线性型之积的) 3:761  
 Minkowski 空间 3:763  
 Minkowski 面积 3:197;1:223  
 Minkowski 时空 4:903  
 Minkowski 凸体定理 2:721;3:764;4:981  
 Minkowski 问题 3:762  
 Minkowski 问题的 Погорелов 解 3:762  
 Minkowski 线性型定理 3:764  
 Minkowski 型 1:822  
 Minkowski 型不等式(关于乘积的) 3:762  
 Minkowski 型不等式(关于行列式的) 3:762  
 Minkowski 约化方法 4:386



- Minkowski 约化域 4:386  
 Minsky 机器 3:590  
 Mitchell 定理 1:9  
 Mittag-Leffler 定理 3:766  
 Mittag-Leffler 定理(关于星形中  
解析函数的单值分支的展开的)  
3:767  
 Mittag-Leffler 定理(关于亚纯  
函数展开式的) 3:766  
 Mittag-Leffler 函数 3:765  
 Mittag-Leffler 矩阵 3:766  
 Mittag-Leffler 求和法 3:765  
 Mittag-Leffler 星形 3:765  
 Mittag-Leffler 型函数 3:765  
 Mittag-Leffler 展开 3:766  
 Mittag-Leffler 展开(星形内的)  
4:983  
 Miura 变换 3:291  
 Möbius 变换 1:592;2:494;  
2:546;4:422;4:733  
 Möbius 带 3:780  
 Möbius 反演定理 2:368  
 Möbius 构形 1:743  
 Möbius 函数 3:779  
 Möbius 函数(偏序集的) 4:103  
 Möbius 级数 3:780  
 Möbius 几何学 1:753;1:758  
 Möbius 平面 3:779  
 Möbius 映射 1:754  
 Mohr-Mascheroni 作图 2:708  
 Molin-Cartan-Wedderburn 理论  
4:674  
 Mollweide 等面积投影 1:492  
 Monge-Ampère 方程 3:808  
 Monge-Ampère 方程的非唯一性  
定理 3:810  
 Monge-Ampère 算子 5:245  
 Monge 方程 3:811  
 Monge 公式 3:750  
 Monge 曲线 2:128;3:811  
 Monge 轴 2:128;3:811  
 Monge 锥 3:811  
 Montel 定理 3:825  
 Montel 定理(关于全纯函数族紧性  
条件的) 3:825  
 Montel 定理(关于全纯函数族正规  
性条件的) 3:825  
 Montel 定理(关于用多项式逼近解  
析函数的) 3:825  
 Montel 空间 3:825  
 Montel 原理 3:452  
 Montgomery-Samelson-Borel 定理  
2:901  
 Moore-Penrose 广义逆算子  
2:559;2:561  
 Moore-Smith 收敛 2:691;  
3:443;3:891;3:892  
 Moore-Smith 性质 2:206  
 Moore-Постников 系统 4:840  
 Moore-Постников 系统(映射的)  
4:259  
 Moore 定理(关于自动机的)  
1:258;1:263  
 Moore 空间 3:825  
 Moore 自动机 1:260;1:275  
 Mordell-Weil 定理 1:905;2:199  
 Mordell 猜想 3:826  
 Moreau-Rockafellar 定理 5:58  
 Morera 定理 3:827  
 Morlet 小波 5:455  
 Morley 猜想 4:975  
 Morley 定理 3:786;4:172;5:281  
 Morse-Smale 不等式 3:831  
 Morse-Smale 动力系统 3:831  
 Morse-Smale 微分同胚 3:831  
 Morse-Smale 系统 3:831  
 Morse-Thue 序列 5:94  
 Morse 不等式 3:829  
 Morse 电码 1:630  
 Morse 多项式 3:830  
 Morse 割补术 3:832  
 Morse 函数 3:828  
 Morse 函数(在分层空间上的)  
3:835  
 Morse 理论 3:833  
 Morse 理论的基本定理 3:833;  
3:834  
 Morse 奇点 3:813  
 Morse 式 2:860  
 Morse 引理 3:830  
 Morse 指数 3:828  
 Morse 指数定理 3:829  
 Mostow-Карпелевич 定理 2:900  
 Mostow 定理 3:394  
 Mostow 刚性定理 2:233;4:651  
 Mostowski 定理 4:526  
 Moufang-Lie 代数 3:597  
 Moufang 定理 3:565;3:838  
 Moufang 恒等式 1:147  
 Moufang 平面 1:146  
 Moufang 么拟群 3:838  
 M. Riesz 定理 2:816  
 Muirhead 不等式 3:596;3:613  
 Mumford 假设 3:869  
 Müntz 定理 3:870  
 Münzner 定理 5:176  
 Murnaghan-中山法则 4:599  
 Murray-von Neumann 分类 4:43  
 Murthy-Horrocks 定理 4:338  
 Muskat 问题 2:123  
 Myhill 关于通用对象的理论  
2:367
- ## N
- $n$ -FI 环 4:490  
 $(n-m)$ 点基 1:312  
 $N-M$ 解(von Neumann-Morgen-  
stern 解) 1:855  
 $(n-m)$ 局部基 1:312  
 $(n-1)$ 维无穷远超平面 3:59  
 $(n-1)$ 重复合(函数的) 1:721  
 $n$ 半群运算 4:759  
 $n$ 胞腔 1:744  
 $n$ 边形 4:225;4:548  
 $n$ 边形(密度  $d$  的) 4:225  
 $n$ 常数定理 5:293  
 $n$ 次变分(单叶函数的) 5:377  
 $n$ 次迭代核 3:202  
 $n$ 次根(数的) 4:682  
 $n$ 次幂非剩余(模  $m$  的) 1:761  
 $n$ 次幂剩余(模  $m$  的) 1:761  
 $n$ 次锥面 1:769  
 $N$ 殆周期函数 1:140  
 $n$ 到 1 的映射 2:481  
 $n$ 端对 3:893  
 $n$ 对偶多面体 4:703  
 $n$ 分量(单纯对象的) 4:836  
 $n$ 孤立子解 4:894  
 $n$ 骨架(单纯复形的) 4:834  
 $n$ 骨架(单纯集的) 4:838

- $N$  函数 4:19  
 $n$  核子 1:859  
 $N$  极值解(矩问题的) 1:612  
 $n$  集 1:661  
 $n$  简单空间 3:1013  
 $n$  阶变分(单叶函数的) 5:377  
 $n$  阶变分(集合的) 5:376  
 $n$  阶部分和(数项级数的) 4:792  
 $n$  阶差分 2:472  
 $n$  阶导数(函数的) 2:100  
 $n$  阶对称导出数 5:97  
 $n$  阶偏微分(多元函数的) 2:102  
 $n$  阶上同调运算 1:655  
 $n$  阶双曲直径(紧集的) 5:244  
 $n$  阶椭圆直径(紧集的) 5:244  
 $n$  阶微分(函数的) 2:101  
 $n$  阶微分(函数的) 2:101  
 $n$  阶余项(数项级数的) 4:792  
 $n$  阶直径(紧集的) 5:243  
 $n$  阶 Bessel 型方程 1:341  
 $n$  结合运算 4:759  
 $n$  进螺线管 4:893  
 $n$  可解群 2:483  
 $N_1$  空间 5:205  
 $n$  空间(亏格  $d$  的) 4:756  
 $n$  粒子  $\Phi_{OK}$  子空间 2:501  
 $n$  连通单纯集 4:839  
 $n$  连通空间 3:866  
 $n$  连通域 1:778  
 $n$  连通 Riemann 曲面 4:635  
 $n$  罗(曲线的) 3:507  
 $n$  目关系 4:561  
 $n$  目谓词 4:561  
 $n$  拟群 4:430  
 $n$  排列 1:234  
 $n$  群 3:872  
 $n$  群(由一个群确定的) 3:872  
 $N$  人微分对策 2:151  
 $n$  体问题 5:292  
 $N$  体问题 1:597  
 $n$  体问题(广义相对论中的) 2:768  
 $n$  同伦映射 2:922  
 $n$  维胞腔 1:531  
 $n$  维变差(函数的) 1:931  
 $n$  维单位立方体 2:753  
 $n$  维单形(单纯对象的) 4:836  
 $n$  维单形(单纯集的) 4:837  
 $n$  维仿射空间 5:408  
 $n$  维仿射空间(域上的) 1:58  
 $n_1$  维分布(旗的) 2:495  
 $n$  维复形 1:707  
 $n$  维格(向量空间中的) 3:358  
 $n$  维骨架(单纯复形的) 4:834  
 $n$  维骨架(单纯集的) 4:838  
 $n$  维广义上同调群 2:677  
 $n$  维局部域 3:532  
 $n$  维空间 5:418  
 $n$  维拟立方体连续统 1:903  
 $n$  维纽结(余维数  $q$  的) 3:844  
 $n$  维平行六面体 1:233  
 $n$  维上同调群 2:677  
 $n$  维体积 5:439  
 $n$  维同伦群(带基点空间对的) 2:918  
 $n$  维同伦群(单纯集的) 4:839  
 $n$  维椭球 1:592  
 $n$  维拓扑胞腔 1:531  
 $n$  维拓扑空间 2:178  
 $n$  维伪流形 4:370  
 $n$  维形式 Lie 群 2:510  
 $n$  维圆环 5:293  
 $n$  维 Grothendieck 上同调群 1:644  
 $n$  维 Poincaré 空间 4:200  
 $n$  位函子 3:850  
 $n$  纤维(单纯对象的) 4:836  
 $n$  纤维(单纯集的) 4:837  
 $n$  余骨架(单纯集的) 4:840  
 $n$  余纤维(单纯对象的) 4:836  
 $n$  元关系 4:561  
 $n$  元函子 2:610  
 $n$  元谓词 4:561  
 $n$  元运算 1:100  
 $n$  圆形域 2:276  
 $n$  正规算子 3:991  
 $n$  值表示 3:854  
 $n$  秩格(向量空间中的) 3:358  
 $n$  重策略 2:632  
 $n$  重共轭系 3:891  
 $n$  重扩张(一个模通过另一模的) 2:424  
 $n$  重线性函数 3:855  
 $n$  重线性恒等式 4:157  
 $n$  重线性型 3:855  
 $n$  重线性映射 3:855  
 $n$  重映射 1:817  
 $n$  重 Riemann 积分 3:858  
 $n$  柱集 1:931  
 $n$  子空间箭图 4:459  
 $n$  自由理想环 2:568  
 $(n, A)$  码 1:629  
Nagel 点 3:872  
Napier 类比 4:948  
Napier 数 3:873  
Nash - Kuiper 定理 3:874  
Nash 逼近定理 3:874  
Nash 等距嵌入定理 1:594  
Nash 定理 3:873  
Nash 定理(对策论中的) 3:931  
Nash 定理(关于正则嵌入的) 3:873  
Nash 定理(关于  $C^1$  浸入的) 3:873  
Nash 定理(关于  $C^1$  嵌入的) 3:873  
Nash 定理(微分几何学中的) 3:873  
Nash 定理(微分拓扑学中的) 3:874  
Nash 解 1:217; 3:932; 4:895  
Nash 解(交易问题的) 3:842  
Nash 可解对策 3:932  
Nash 平衡解 3:931  
Nash 隐函数定理 3:873  
Navier - Stokes 方程 3:876  
Navier - Stokes 方程的 Helmholtz 形式 3:877  
NC 复杂性类 1:124  
Nehari - Покорный 单叶性条件 5:344  
Neil 抛物线 3:888  
Néron - Severi 定理 3:889  
Néron - Severi 群 3:889  
Néron 模型 3:888  
Néron 模型(Abel 簇的) 3:888  
Neumann DBAR 问题(Neumann  $\bar{\partial}$  问题) 3:895  
Neumann  $\bar{\partial}$  问题 3:895  
Neumann 多项式 3:897  
Neumann 函数 3:896



- Neumann 级数 3:896  
 Neumann 算子 1:326  
 Neumann 条件 2:431  
 Neumann 问题 3:896  
 Neumann 问题(Cauchy - Riemann 复形的) 3:895  
 Neuwirth 链环 3:272  
 Neuwirth 纽结 3:898  
 Nevanlinna - Pick 插值问题 3:134  
 Nevanlinna - Pick 问题 3:899  
 Nevanlinna 第二定理 3:900  
 Nevanlinna 第一定理 3:900;4:5  
 Nevanlinna 第一基本定理 2:413; 5:366  
 Nevanlinna 定理 3:900  
 Nevanlinna 亏量 5:367  
 Nevanlinna 亏值 5:367  
 Nevanlinna 理论 5:366  
 Nevanlinna 例外值(亚纯函数的) 2:413  
 Nevanlinna 特征 3:900;5:366  
 Nevanlinna 特征函数 2:23  
 Nevanlinna 族 1:416  
 Newlander - Nirenberg 定理(关于殆复结构可积性的) 1:138  
 Newton - Cotes 公式 1:870  
 Newton - Cotes 求积公式 3:901  
 Newton - Leibniz 定理 3:634  
 Newton - Leibniz 公式 3:904  
 Newton - Raphson 法 3:248; 3:905  
 Newton - Канторович 法 3:904; 3:942  
 Newton 插值多项式 2:473  
 Newton 插值公式 3:903  
 Newton 插值公式(不等距差分的) 3:903  
 Newton 插值级数 3:143  
 Newton 单层位势 4:263  
 Newton 第二定律 2:312  
 Newton 迭代法 1:572  
 Newton 定理 2:766  
 Newton 定理(关于对称函数的) 5:99  
 Newton 定理(关于三次曲线类型的) 4:171  
 Newton 动力学 2:312  
 Newton 多边形(多项式的) 4:560  
 Newton 多边形(序列的) 4:559  
 Newton 多边形(Newton 折线) 3:902;4:559  
 Newton 多面体 3:778  
 Newton 二项式 3:901  
 Newton 二项式公式 1:661  
 Newton 法 3:904  
 Newton 分类(三次曲线的) 4:170  
 Newton 分数步法 5:386  
 Newton 公式(用初等对称多项式表达乘方和的) 5:101  
 Newton 核 3:905  
 Newton 级数 2:473  
 Newton 类箕舌线 5:515  
 Newton 力学定律 3:903  
 Newton 流体 5:430  
 Newton 容量 1:466  
 Newton 数 3:905  
 Newton 双层位势 4:263  
 Newton 体积位势 4:263  
 Newton 图形 3:902  
 Newton 图解法 3:902  
 Newton 位势 3:905  
 Newton 位势(广义的) 3:905  
 Newton 位势(狭义的) 3:905  
 Newton 向后插值公式 3:903  
 Newton 向前插值公式 3:903  
 Newton 引力常数 2:767  
 Newton 粘性定律 5:430  
 Newton 正则化 4:559  
 Newton 重力场 4:429  
 Neyman - Pearson 引理 3:907  
 Neyman 结构 3:907  
 Neyman 置信区间法 3:906  
 NF 1:287  
 NF<sup>-</sup> (除去外延性公理的 NF) 1:287  
 NFDE 2:601  
 NGCR 代数 1:454  
 Nicomedes 蚌线 3:908  
 Nielsen - Schreier 定理 2:567; 4:723  
 Nielsen 变换 2:567  
 Nielsen 定理 2:567  
 Nijenhuis 张量(殆复结构的) 1:137  
 Nikodym 有界性定理 5:416  
 Nim 对策 2:631  
 Nitsche 定理 4:178  
 $(n, k)$  码 5:127  
 Nöbeling - Понтрягин - Hurewicz - Kuratowski 定理 2:178  
 Nöbeling - Понтрягин 定理 2:185  
 Noether - Enriques - Petri 定理 3:916  
 Noether - Enriques 定理 3:915  
 Noether - Enriques 定理(关于典范曲线的) 3:915, 916  
 Noether 不等式(关于亏格和非正则性的) 2:672  
 Noether 第二定理 3:918  
 Noether 第一定理 3:916  
 Noether 定理 3:916  
 Noether 定理(关于二次微分的) 5:226  
 Noether 定理(关于积分方程的) 3:920;3:921;4:851  
 Noether 定理(关于运动方程的积分的) 3:330  
 Noether 定理(力学中的) 2:809  
 Noether 泛流 3:917  
 Noether 方程 3:919  
 Noether 仿射概形 1:57  
 Noether 概形 3:922  
 Noether 格 3:862  
 Noether 公式 1:103;3:917  
 Noether 公式(关于除子层的 Euler 示性数的) 4:631  
 Noether 归纳法 3:919  
 Noether 环 3:921  
 Noether 积分方程 3:919  
 Noether 空间 3:922  
 Noether 模 3:920  
 Noether 偏序集 4:102  
 Noether 群 3:919  
 Noether 算子 3:920  
 Noether 拓扑空间 2:182  
 Noether 问题 3:916  
 Noether 问题(积分方程的) 2:127  
 Noether 型边值问题 1:425  
 Noether 型积分方程组 1:637  
 Noether 正规化定理 3:918;4:339

Noether 正规化引理 3:918;5:241  
 Nordsieck 法 1:524  
 Nörlund 法 5:444  
 Nörlund 求和法(Вороной 求和法)  
 1:689  
 $\mathcal{NP}$  艰难的语言 1:721  
 NP 完全的密码体制 1:896  
 NP 完全问题 1:124  
 $\mathcal{NP}$  完全语言 1:720  
 $\mathcal{NP}$  硬性 4:716  
 Numerov 法 5:28  
 Nusselt 数 3:1009  
 Nyquist 图形 3:1010  
 Nyquist 准则 3:1009  
 Nyström 法 2:561;3:102;  
 5:436

## O

$o$  单半群 4:14  
 $o$  合同 4:14  
 $(o)$  极限 4:773  
 $O$  曲线 2:577  
 $O^*$  群 4:284  
 $o$  收敛 4:660  
 $(o)$  收敛 4:773  
 $O$  同态 4:14  
 $(o)$  完全有序向量空间 4:773  
 $O$  下配边理论 1:622  
 $(o)$  线性算子 4:661  
 $o$  线性算子 4:661  
 $O$  直并 3:1011  
 Oates - Powell 定理 5:400  
 Obreshkov 法 1:523  
 OL 系统 3:315  
 O'Nan - Sims 群 4:957  
 Onsager 方程组 2:314  
 Oort 系数 4:1032  
 Ore 定理 1:238;3:793;5:57  
 Ore 条件 2:568;3:15;2:548  
 Orlicz - Pettis 定理 5:415  
 Orlicz 定理 5:315  
 Orlicz 范数 4:19  
 Orlicz 函数空间 4:19  
 Orlicz 函数类 4:18  
 Orlicz 空间 4:19  
 Orlicz 类 4:18

Ornstein - Chacon 遍历定理 4:20  
 Ornstein - Uhlenbeck 过程 4:20  
 Orr - Sommerfeld 方程 4:22  
 Oseledec 乘性遍历定理 3:861  
 Oseledets 乘性遍历定理 3:861  
 Osgood - Brown 定理 1:158;  
 2:839;4:580  
 Osgood - Hobson 定理 5:330  
 Osgood 一致性条件 1:522  
 Osterwalder - Schrader 的正性条件  
 1:793  
 Osterwalder - Schrader 公理 1:793  
 Ostrom - Wagner 定理 4:341  
 Ostrowski 条件 4:418  
 Otto - Eilenberg - Hemmingsen 定理  
 (关于划分的) 2:178  
 Ozanam 割圆曲线 4:390

## P

$p$ -Abel 群 4:158  
 $(p', q')$  型流动形 4:188  
 $P = NP$  1:124  
 $P$  包(范畴的) 5:208  
 $p$  闭包(Lie 代数的) 3:433  
 $p$  表示(线性 Lie 代数的) 3:433  
 $p$  补(群中的) 3:985  
 $p$  初等群 2:479  
 $p$  除环 3:543  
 $p$  次外微分形式 1:482  
 $p$  次张量幂(模的) 5:147  
 $p$  典型化 1:626  
 $p$  典型化(形式群律的) 2:512  
 $p$  调和空间 2:834  
 $\mathfrak{P}$  调和空间 4:269  
 $p$  泛包络结合代数 3:433  
 $P_N$  方程 5:257  
 $P$  分解(拓扑空间的) 5:29  
 $P$  分解(一般型的) 4:258  
 $P$  函数 4:65  
 $P$  和(级数的) 5:75  
 $p$  阶平均收敛 1:837  
 $P$  紧序列 1:836  
 $p$  进单位 4:57  
 $p$  进度量 4:499  
 $p$  进范数 3:968;4:57  
 $p$  进赋值 5:520

$p$  进赋值( $\mathbb{Q}$  上的) 2:519  
 $p$  进解析空间 1:174  
 $p$  进解析流形 1:164  
 $p$  进绝对值 3:968  
 $p$  进数 4:57  
 $p$  进数域 4:57  
 $p$  进整数 3:85;4:57  
 $p$  进 Lie 群 3:430  
 $p$  进 Weierstrass 除法定理 5:474  
 $p$  进 Weierstrass 预备定理 5:473  
 $p$  可除群 4:57  
 $p$  可除群(高度  $h$  的) 4:58  
 $p$  可归约性(多项式可归约性)  
 1:133  
 $P$  可和级数 5:75  
 $p$  空间(羽状空间) 2:454;2:455  
 $p$  理想(Lie 代数的) 3:433  
 $P$  链(流形上的) 2:146  
 $P$  模型(随机规划中的) 5:23  
 $p$  齐次  $F$  范数 5:355  
 $p$  齐次  $F$  伪范数 5:355  
 $p$  群 4:58  
 $\mathcal{P}$  是否等于  $\mathcal{NP}$ ? 1:720  
 $P$  收敛序列 1:836  
 $P_2$  数 4:819  
 $p$  凸函数 4:360  
 $p$  完全凸空间 4:360  
 $p$  维胞腔 1:531  
 $p$  维超平行体 4:84  
 $p$  维分布 3:180  
 $p$  维上同调模(Lie 代数的值在模内  
 的) 1:651  
 $p$  维直径 2:904  
 $p$  伪凸函数 4:360  
 $P$  系统(一般形式的) 4:259  
 $P$  限制 3:721  
 $p$  向量 4:220  
 $p$  形式 1:482;2:143  
 $p^\infty$  型群 2:788  
 $p$  么拟群 3:565  
 $p$  叶函数 3:866  
 $p$  叶近于凸函数 3:868  
 $p$  叶凸函数 3:868  
 $p$  叶星形函数 3:868  
 $P$  叶星形区域 4:981  
 $p$  叶性半径 3:869  
 $p$  域 3:543



- $p$  元素 4:58  
 $p$  正全纯向量丛 4:360  
 $p$  正则群元 2:480  
 $p$  子群 4:58  
 $\mathcal{P}$  最小充分位计量 3:749  
 Padé - Hermite 逼近 4:60  
 Padé 逼近 4:59  
 Padé 表 4:60  
 Padé 表的行 4:60  
 Padé 表的主对角线 4:60  
 Page 定理 4:62  
 Page 定理(关于算术数列中素数的) 4:62  
 Page 定理(关于 Dirichlet L 函数零点的) 4:62  
 Painlevé 超越函数 4:62  
 Painlevé 定理 4:63  
 Painlevé 定理(关于解析微分方程的解的) 4:63  
 Painlevé 定理(关于解析延拓的) 4:63  
 Painlevé 方程 4:62  
 Painlevé 集 4:63  
 Painlevé 理论 1:614  
 Painlevé 问题 4:63  
 Painlevé 性质 4:63  
 Palais - Smale 条件 C 3:828  
 Paley - Marcinkiewicz 定理 4:37  
 Paley - Wiener 定理 4:64  
 Palis - Smale 猜想 4:693  
 Palis - Smale 条件 5:385  
 Pall 定理 4:382  
 Palm 分布 5:11  
 Palm 概率 5:11  
 Palm 函数 4:448  
 Papperitz 方程 4:64  
 Pappus - Pascal 定理 4:105  
 Pappus - Pascal 命题 4:105  
 Pappus 定理 3:959;4:106  
 Pappus 公理 4:66  
 Pappus 几何学 3:960;4:106  
 Pappus 平面 4:106  
 Pareto 分布 4:94  
 Pareto 解 4:895  
 Pareto 最优解 3:842  
 Parseval - Plancherel 公式 4:96  
 Parseval - Стеклов 闭合条件 1:611  
 Parseval - Стеклов 等式 4:24  
 Parseval 等式 4:95  
 Parseval 恒等式 1:611;3:707;4:36  
 Parseval 恒等式(Конторович - Лебедев 积分变换的) 3:289  
 Pascal 定理 4:106  
 Pascal 分布 4:104  
 Pascal 蛸线 4:106  
 Pascal 几何学 4:105  
 Pascal 平面 4:105  
 Pascal 三角形 4:107  
 Pascal 线 4:106  
 Pascal 语言 1:118  
 Pasch 公理 4:107  
 P. A. Smith 猜想 1:283  
 Pauli 方程 4:724  
 Pauli 矩阵 4:110  
 Pauli 原理 2:461  
 PBIB( $m$ ) 设计(具有  $m$  类型关系的部分平衡不完全区组设计) 1:376  
 Peano 代数 5:311  
 Peano 导数 4:113  
 Peano 定理 4:113  
 Peano 定理(关于微分方程解的) 2:492  
 Peano 公理 4:111  
 Peano 连续统 3:457  
 Peano 曲线 4:112  
 Peano 算术 1:499;4:111  
 Peano 形式(Taylor 公式中余项的) 5:140  
 Peano 型余项 4:578  
 Pearson 分布 4:115  
 Pearson 概率分布 4:113  
 Pearson 曲线 4:113  
 Pearson 曲线(I 型—XII 型) 4:114  
 Pearson 统计量 1:584  
 Pearson 微分方程 1:602;4:31;4:680  
 Péclet 数 4:115  
 Peetre  $K$  方法 3:141  
 Peierls 积分方程 5:256  
 Peirce 分解 4:115  
 Peirce 分解(幂结合交换代数的) 1:77  
 Peirce 箭头 4:115  
 Pell 单位群 1:97  
 Pell 方程 4:116  
 Penrose 菱形 4:83  
 Penrose 镶嵌 4:83  
 Perron - Frobenius 定理 4:135  
 Perron - Stieltjes 积分 4:137  
 Perron - Wiener - Brelot 法 4:137;5:359  
 Perron - Wiener 解 4:266  
 Perron 变换 4:137  
 Perron 定理(关于特征指数稳定性的) 4:969  
 Perron 定理(关于线性常微分方程组的) 4:138  
 Perron 法 4:136  
 Perron 非正则性指标 3:185  
 Perron 积分 4:135  
 Perron 可积函数 4:135  
 Perron 例子(不稳定性的) 3:584  
 Persei 曲线 4:138  
 Peter - Weyl 定理 4:144  
 Peter - Weyl 理论 4:145;1:141  
 Petersen 2 因子定理 2:448  
 Peterson - Stein 公式 1:656  
 Peterson 图 2:757  
 Petersson 猜想 4:384;4:475  
 Petri 网 4:146  
 Pettis 积分 4:147  
 Pettis 可积函数 4:147  
 Pfaff 导数(几何对象场的) 2:712  
 Pfaff 方程 4:148  
 Pfaff 方程的类 4:149  
 Pfaff 方程组 4:153  
 Pfaff 结构 4:152  
 Pfaff 结构的类 4:153  
 Pfaff 式 4:148  
 Pfaff 式(矩阵的) 1:663  
 Pfaff 式(斜对称矩阵的) 4:148  
 Pfaff 微分形式 2:143  
 Pfaff 问题 4:150  
 Pfaff 问题和偏微分方程 4:151  
 Pfaff 形式 4:149  
 Pfister 定理 5:518  
 P. Hall 定理 1:665;4:746;5:121  
 P. Hall 婚配定理 1:665;4:746

- P. Hall 集 1:314  
 P. Hall 匹配定理 1:665  
 Phragmén – Lindelöf 定理 4:155  
 Phragmén – Lindelöf 原理 4:155  
 PI 代数 4:156  
 PIC 方法 4:103  
 Picard – Fuchs 方程 2:654  
 Picard – Lefschetz 公式 3:813  
 Picard – Lefschetz 理论 3:813  
 Picard – Severi 定理 1:103  
 Picard – Vessiot 扩张(微分域的) 2:421  
 Picard – Vessiot 域扩张 2:97  
 Picard 簇 4:161  
 Picard 大定理 4:160  
 Picard 定理 4:160  
 Picard 定理(关于代数曲线单值化的) 4:161  
 Picard 定理(关于调和函数的) 2:831  
 Picard 定理(关于积分方程可解性的) 3:100  
 Picard 概形 4:159  
 Picard 函子 4:586  
 Picard 例外值 4:160  
 Picard 例外值(亚纯函数的) 5:367  
 Picard 群 4:159  
 Picard 群(交换环的) 3:176  
 Picard 数 1:103;3:889;4:159  
 Picard 小定理 4:160  
 Picard 性质 4:160  
 Pick 定理 4:162  
 Pierpont 变差 4:165  
 Pincherle – Goursat 核 3:102  
 Pinkall 定理 5:175  
 Pinski 定理 2:316  
 Pitman 估计量 4:165  
 Pitman 效率 2:320  
 Pixley – Roy 超空间 2:960  
 Pixley – Roy 拓扑 2:960  
 PL/I 语言 4:183  
 $pl$  结构 4:163;4:231  
 $Pl$  流形 4:164;4:231  
 $Pl$  同胚 4:163;4:230  
 $PL$  系统(增殖  $L$  系统) 3:315  
 $PL$  形式 2:145  
 $Pl$  映射(分片线性映射) 4:163;4:230  
 Plancherel 测度 4:167;5:342  
 Plancherel 定理 4:167  
 Plancherel 公式 4:166  
 Plancherel 恒等式 2:47  
 Planck 常数 4:168  
 Plateau 问题 4:177  
 Plateau 问题(多维的)\* 4:178  
 Plato 立体 4:182  
 Plemelj 公式 1:379;1:516;4:892  
 Plessner 点 1:615;3:708;4:182  
 Plessner 定理 4:182  
 Plessner 性质 4:182  
 Plücker 二次曲面 4:185  
 Plücker 公式 4:184  
 Plücker 关系 2:765  
 Plücker 解释 4:185  
 Plücker 模型 2:579;4:185  
 Plücker 嵌入 2:765  
 Plücker 坐标 4:183  
 Pochhammer 方程 4:188  
 Pochhammer 符号 5:511  
 Pohlhausen 法 1:50  
 Pohlke – Schwarz 定理 1:294  
 Pohlke – Schwarz 定理 4:189  
 Poincaré – Bendixson 定理 1:324;3:448  
 Poincaré – Bendixson 理论 4:189  
 Poincaré – Bertrand 公式 4:190  
 Poincaré – Betti 级数 4:234  
 Poincaré – Birkhoff – Witt 定理 1:370;3:409;5:352  
 Poincaré – Birkhoff 不动点定理 4:196  
 Poincaré – Birkhoff 几何原理 4:397  
 Poincaré – Brouwer 定理 4:200  
 Poincaré – Cartan 积分不变量 2:810  
 Poincaré – Dulac 定理 4:193  
 Poincaré – Dulac 定理(关于幂零 Lie 代数的) 4:194  
 Poincaré – Koebe 单值化定理 2:226  
 Poincaré – Lefschetz 对偶性 3:533;4:192  
 Poincaré – Lindstedt 法 3:948;4:143  
 Poincaré – Volterra 定理 1:692  
 Poincaré – Ляпунов 定理 4:139  
 Poincaré  $\theta$  级数 1:279;3:267  
 Poincaré 鞍点 4:706  
 Poincaré 边值问题 1:425  
 Poincaré 变换 3:567;4:200  
 Poincaré 不变量(Hamilton 系统的) 2:811  
 Poincaré 不变性 4:566  
 Poincaré 猜想 4:191  
 Poincaré 猜想(关于代数簇的有理点群的有限生成性的) 2:199  
 Poincaré 除子 4:191  
 Poincaré 代数 1:822  
 Poincaré 定理 4:200  
 Poincaré 定理(关于常微分方程解的渐近展开式的) 4:876  
 Poincaré 定理(关于形式微分方程的典范形式的) 4:193  
 Poincaré 定理(关于有限指数的子群的) 5:60  
 Poincaré 定理(关于 Hurewicz 同态的) 2:614  
 Poincaré 定理(稳定性理论中的) 4:201  
 Poincaré 度量 1:279  
 Poincaré 对 4:200  
 Poincaré 对偶定理 2:291  
 Poincaré 对偶同构 4:199  
 Poincaré 对偶性 4:192  
 Poincaré 多面体 5:224  
 Poincaré 多项式 3:306  
 Poincaré 返回定理 4:198  
 Poincaré 返回定理(回归定理) 2:53;4:198;4:211  
 Poincaré 返回函数 3:445  
 Poincaré 方程 4:194  
 Poincaré 复形 4:191  
 Poincaré 复形(形式  $n$  维的) 4:18  
 Poincaré 公理 2:183  
 Poincaré 公式(关于运动学测度的) 3:106  
 Poincaré 回复定理 4:211



- Poincaré 回归映射 4:197  
 Poincaré 积分不变量 2:809  
 Poincaré 级数 4:234;5:164  
 Poincaré 解释 4:196  
 Poincaré 经典定理 2:920  
 Poincaré 空间 4:199  
 Poincaré 空间(域上的) 4:199  
 Poincaré 链对 4:191  
 Poincaré 流形 4:938  
 Poincaré 模型 4:196  
 Poincaré 模型(Лобачевский 平面的) 2:227  
 Poincaré 球面 4:200  
 Poincaré 区域 4:193  
 Poincaré 群 4:195  
 Poincaré 上半平面 3:792  
 Poincaré 条件 4:194  
 Poincaré 问题 4:197  
 Poincaré 问题(关于调和函数的) 1:427  
 Poincaré 问题(关于三条闭测地线的) 1:506  
 Poincaré 型对偶性 4:192  
 Poincaré 意义下的例外值(亚纯函数的) 2:413  
 Poincaré 引理 2:144  
 Poincaré 运动学测度 3:105  
 Poincaré 指标(结点的) 3:915  
 Poincaré 指标(指数) 1:537; 4:861;3:165  
 Poincaré 最后定理 4:195  
 Poiseuille 流 4:203  
 Poisson - Abel 核 4:849  
 Poisson - Herglotz 公式 3:628  
 Poisson - Hopf 代数 4:411  
 Poisson - Jensen 公式 3:224  
 Poisson - Lebesgue 积分 4:209; 2:830  
 Poisson - Stieltjes 积分 2:452; 2:830;4:209  
 Poisson 比 4:826  
 Poisson 变换 4:212  
 Poisson 大数定理 4:211  
 Poisson 代数 5:112  
 Poisson 定理 4:211  
 Poisson 方案 4:211  
 Poisson 方程 4:205  
 Poisson 方程,数值解法 4:206  
 Poisson 分布 4:204  
 Poisson 公式 4:208  
 Poisson 公式(波动方程的 Cauchy 问题的) 1:521  
 Poisson 过程 4:210  
 Poisson 核 3:255  
 Poisson 核(半空间的) 4:209  
 Poisson 核(多圆盘的) 4:209  
 Poisson 核(管状区域的) 4:212  
 Poisson 核(球的) 4:208  
 Poisson 核(球的外部的) 4:210  
 Poisson 呼唤输入流 4:448  
 Poisson 积分 4:208  
 Poisson 积分表示(柱函数的) 1:928  
 Poisson 积分(对半空间的) 4:209  
 Poisson 积分(对管形域的) 4:209  
 Poisson 积分(对有界对称域的) 4:209  
 Poisson 级数 4:874  
 Poisson 级数和小除数 4:874  
 Poisson 括号 4:204  
 Poisson 流 4:208  
 Poisson 流形 5:112  
 Poisson 求和法 4:211  
 Poisson 求和公式 4:211  
 Poisson 上括号 4:411  
 Poisson 收敛性定理 4:212  
 Poisson 稳定点 3:447;5:449  
 Poisson 稳定性 4:210  
 Poisson 稳定运动 4:198  
 Polish 空间 2:62;3:704;4:473; 5:364  
 Pollaczek - Spitzer 恒等式 4:487  
 Pollard - von Neumann - Rudin 定理 4:37  
 Pólya 定理 4:221  
 Pólya 定理(关于对称随机游动) 4:487  
 Pólya 定理(关于缺项幂级数的) 3:317  
 Pólya 定理(关于整函数的) 2:295  
 Pólya 对称化 5:105  
 Pólya 分布 4:221  
 Pólya 过程 4:221  
 Pólya 基本定理 1:663  
 Pólya 计数定理 1:663  
 Pólya 瓮方案 4:221  
 Pólya 瓮模型 5:361  
 Pompeiu 公式 1:515  
 Poncelet - Steiner 作图 2:708  
 Popov 准则 4:961  
 Post 代数 4:254  
 Post 典范系统 4:254  
 Post 定理 2:365  
 Post 定理(关于  $n$  群的) 3:872  
 Post 对应问题 4:255  
 Post 对应问题的特例 4:256  
 Post 格 4:257  
 Post 机 4:257  
 Post 可归约性问题 1:133  
 Post 类 4:255  
 Post 枚举 2:367  
 Post 生成系统 4:257  
 Post 完全公理模式 1:705  
 Post 问题 2:39;4:528  
 Post 演算 4:254;3:643  
 Post 正规系统 4:257  
 Post 正规演算 4:257  
 Postel 等间距地图投影 1:495  
 Potts 模型 3:277;5:427  
 $(p, p)$  型形式 4:188  
 $(p, q)$  范数 3:142  
 PQ 收敛(离散收敛)(算子序列的) 1:836  
 $(p, q)$  凸 - 凹复流形 4:360  
 $(p, q)$  凸 - 凹复空间 4:360  
 $pq$  象征(算子的) 5:92  
 PRA 系统(原始递归算术系统) 3:561  
 Prandtl - Reuss 塑性理论 4:175  
 Prandtl 方程 4:282  
 Prandtl 数 4:282  
 Priestley 对偶性 5:539  
 Priestley 空间 2:264  
 Pringsheim 定理 5:375  
 Proca 方程 4:724;3:264  
 Prüfer 环 3:83  
 Prüfer 曲面 4:356  
 Prüfer 群 2:788;4:425;4:811  
 prüfer 秩 2:564;4:489  
 Prüfer 秩(Abel 群的) 1:13

Prym 簇理论 4:722  
 PSH 代数 4:600  
 Ptolemeus 定理 4:375  
 Ptolemeus 模型 3:648  
 Ptolemy 定理 4:172  
 Ptolemy 定理(Ptolemeus 定理)  
 4:375  
 Puiseux 级数 4:375  
 Puiseux 图形 3:902  
 Puiseux 展开 4:858  
 Puppe 序列 1:739  
 Pythagoras 闭包(域的) 5:518  
 Pythagoras 定理 4:377  
 Pythagoras 定理(Hilbert 空间中的)  
 2:873  
 Pythagoras 方程 4:377  
 Pythagoras 球面定理 4:948  
 Pythagoras 三角形 4:377  
 Pythagoras 三数组 2:195  
 Pythagoras 数 4:377  
 Pythagoras 学派的奇偶数原则  
 2:335  
 Pythagoras 域 4:26;5:517

## Q

Q 度量 4:380  
 $q$  度量 3:884  
 $q$  二项式公式 5:310  
 $q$  二项式系数 5:310  
 $q$  仿似  $\Gamma$  函数 2:641  
 $q$  负全纯向量丛 4:360  
 $q$  进分数 4:201  
 $q$  进数系(以  $q$  为基的数系)  
 3:1009  
 $q$  进算术误差 1:629  
 $q$  进小数点 4:201  
 $Q$  空间 2:861  
 $Q$  拟共形映射 2:676  
 $q$  特殊函数 4:908  
 $q$  维单形 4:834  
 $Q$  型差集 2:89  
 $q$  型换位子(一点的) 4:361  
 $q$  哑演算 5:310  
 $q$  元分组码 2:388  
 $Q$  秩(椭圆曲线的) 2:346  
 $Q$  最优判别规则 2:240

$(q_i, A_i)$  子集 4:746  
 $QF-1$  环 1:297  
 $QF$  环 4:427  
 $QL$  分解(矩阵的) 5:268  
 $qp$  象征(算子的) 5:92  
 $QR$  法 4:689  
 $QR$  分解 5:268  
 $QR$  算法 3:204;3:460  
 Quetelet 定理(关于焦散线的)  
 1:527  
 Quetelet 定理(关于 Descartes 卵形  
 线的) 2:58  
 Quillen - Суслин 定理 4:338  
 Quillen 插入定理 4:338  
 Quillen 定理(关于复配边形式群律  
 的) 2:511  
 Quine 算法 1:395  
 Quine 系统 1:287  
 Quinn 薄  $h$  配边定理 5:293

## R

$r$  半单代数 4:471  
 $r$  半单环 4:779  
 $r$  标架 5:130  
 $r$  次外形式 2:432  
 $r$  次  $i$  元微分形式(代数簇上的)  
 2:146  
 $r$  代换性质 2:565  
 $r$  代数 4:471  
 $r$  等价(芽的) 4:866  
 $r$  度(等价关系的) 4:528  
 $R$  多边形 4:226  
 $r$  反变张量( $r$  阶反变张量,  $r$  价反  
 变张量) 1:825  
 $R$  格 2:238  
 $r$  根(代数的) 4:471  
 $r$  骨架(复形的) 1:707  
 $r$  级区间(对应于合取的) 1:395  
 $r$  极大可枚举集 4:528  
 $r$  阶迷向表示 3:202  
 $R$  阶(整函数的) 2:218  
 $r$  节(截面的) 4:97  
 $R$  解 1:267  
 $R$  可定向广义上同调理论  
 2:678  
 $R$  可积函数 3:858  
 $R$  空间 5:176  
 $R_0$  空间 5:203  
 $r$  理想 4:471  
 $R$  群 2:790  
 $r$  收敛 4:661  
 $R$  凸紧统 1:852  
 $r$  完全递归可枚举集 4:528  
 $r$  维闭链 2:911  
 $r$  维骨架(复形的) 1:707  
 $r$  维链 1:708;2:911;3:282  
 $r$  维链复形 1:708  
 $r$  维链群 1:708  
 $r$  维上同调群(复形的) 1:708  
 $r$  维同调群 2:911  
 $r$  维相对上同调群(复形的)  
 1:709  
 $r$  维相对同调群(复形的) 1:709  
 $r$  维 Betti 数(复形的) 1:350  
 $r$  维 Euclid 单形 1:707  
 $r$  向量 2:430;2:496  
 $R$  型(整函数的) 2:218  
 $R$  运算 4:582  
 $r$  重特征指数(单型的) 3:510  
 Raabe 收敛准则(关于数项级数的)  
 4:464  
 Raabe 准则 4:464  
 Racah 多项式 5:511  
 Racah 系数 5:512  
 Radau 求积公式 4:464  
 Rademacher 定理 4:465  
 Rademacher 函数 5:449  
 Rademacher 函数系 4:464  
 Rademacher 级数 4:465  
 Rademacher 型 4:465  
 Rademacher 余型 4:464  
 Radó 定理 4:356  
 Radó 选择原理 4:746  
 Radon - Nikodým 导数 2:363  
 Radon - Nikodým 定理 4:473  
 Radon - Nikodým 性质 5:416  
 Radon 变换 4:474  
 Radon 测度 4:473  
 Radon 定理 1:666  
 Radon 分解 3:739  
 Radon 概率测度 4:316  
 Radon 积分 4:473  
 Radon 空间 4:473



- Radon 算子 5:184  
 Rajchman 测度 5:336  
 Raleigh - Ritz 法 2:324  
 Ramanujan - Peterson 问题 5:547  
 Ramanujan 猜想 4:475  
 Ramanujan 公式 5:544  
 Ramanujan 函数 4:474  
 Ramanujan 和 4:475  
 Ramanujan 假设 4:475  
 Ramsey 定理 4:476  
 Ramsey 定理的有限模拟 4:476  
 Ramsey 理论 4:477  
 Randers 度量 2:486  
 Rankine - Hugoniot 条件 4:812  
 Rao - Blackwell - Колмогоров 定理 4:494  
 Rao - Blackwell 定理 4:495  
 Rao - Cramér 不等式 4:495  
 Rarita - Schwinger 方程 2:202  
 Rauch 比较定理(Riemann 流形的) 4:651  
 Ray - Knight 紧化 4:504  
 Ray 预解式 4:504  
 Rayleigh - Ritz 法 4:677  
 Rayleigh - Schwartz 比 5:302  
 Rayleigh - Taylor 不稳定性 4:812  
 Rayleigh 波 2:305  
 Rayleigh 泛函 3:205  
 Rayleigh 方程 4:506  
 Rayleigh 分布 4:505  
 Rayleigh 公式 2:789  
 Rayleigh 近似 4:880  
 Rayleigh 商 4:99  
 Rayleigh 型系统 4:506  
 RC 振荡器(正弦振动的) 1:254  
 Redei 定理 4:767  
 Reeb 向量场 1:802  
 Reed - Muller 码(RM 码) 2:388  
 Reed - Solomon 码(RS 码) 2:388  
 Rees 定理 1:704  
 Rees 矩阵 4:534  
 Rees 矩阵半群 1:704  
 Rees 矩阵型半群 4:533  
 Rees 商半群 4:758  
 Rees 同余(半群的) 4:758  
 Refal 语言 4:534  
 Regiomontanus 公式 5:132  
 Rehbinder 数 2:314  
 Reidemeister 闭包条件 1:613  
 Reidemeister 定理 5:253  
 Reidemeister 挠率 4:560  
 Reinhardt 区域 4:561  
 Remmert - Stein - Shiffman 定理 2:429  
 Remmert 定理(关于解析集的) 2:484  
 Rényi 分布函数 4:582  
 Rényi 检验 4:582  
 Rényi 统计量 4:582  
 Reuleaux 三角形 1:784  
 Reye 构形 1:743  
 Reynolds 方程 5:288  
 Reynolds 数 4:615  
 Reynolds 应力 5:288  
 Rhombic 网 4:615  
 Ribaucour 曲线 4:616  
 Ribaucour 线汇 4:616  
 Riccati 法 4:25  
 Riccati 方程 4:616  
 Riccati 矩阵方程 1:269;4:617  
 Riccati 矩阵微分方程 3:674  
 Ricci 定理 4:619  
 Ricci 方程 2:718  
 Ricci 恒等式 4:618  
 Ricci 曲率 4:618  
 Ricci 演算 5:144  
 Ricci 张量 4:619  
 Rice - Shapiro 定理 2:367  
 Richard 悖论 4:619  
 Richardson 法(二次的) 1:571  
 Richardson 法(一次的) 1:571  
 Richardson 外插 4:619  
 Rickart 环 4:620  
 Riemann - Brill - Noether 定理 1:79  
 Riemann - Christoffel 张量 4:621  
 Riemann - Frobenius 关系式 5:163  
 Riemann - Frobenius 条件 1:12  
 Riemann - Hilbert - Poincaré 问题 1:427  
 Riemann - Hilbert 变换 1:429  
 Riemann - Hilbert 对应 2:3  
 Riemann - Hilbert 问题 4:625  
 Riemann - Hilbert 问题的偏指标 4:626  
 Riemann - Hilbert 问题(对于分量均解析的向量的) 4:626  
 Riemann - Hilbert 问题(解析函数) 4:626  
 Riemann - Hurwitz - Masse 公式 4:626  
 Riemann - Hurwitz 公式 4:626  
 Riemann - Lebesgue 定理 2:534  
 Riemann - Lebesgue 引理 2:537  
 Riemann - Liouville 积分 1:456; 2:406;2:544  
 Riemann - Liouville 分式积分 1:6  
 Riemann - Liouville 分数阶微分算子 5:270  
 Riemann  $P$  方程 4:65  
 Riemann  $P$  函数 4:621  
 Riemann - Roch - Hirzebruch - Grothendieck 定理 4:631  
 Riemann - Roch - Zirzebruch 定理 3:40  
 Riemann - Roch - Zirzebruch 指标定理 3:40  
 Riemann - Roch 定理 4:630  
 Riemann - Roch 定理(关于代数曲面的) 1:103  
 Riemann - Roch 公式(关于  $K3$  曲面上的一维可逆层的) 3:241  
 Riemann - Roch 问题 4:630  
 Riemann - Schwarz 对称原理 4:631  
 Riemann - Schwarz 函数 4:729  
 Riemann - Schwarz 曲面 4:632  
 Riemann - Schwarz 原理 4:631  
 Riemann - Schwarz 原理(关于共形映射的) 4:631  
 Riemann - Schwarz 原理(关于全纯函数的) 4:632  
 Riemann - Stieltjes 积分 4:633  
 Riemann - Volterra 法 4:629  
 Riemann - von Mangoldt 公式 5:71  
 Riemann - Привалов 问题 4:625  
 Riemann  $\zeta$  函数 5:541  
 Riemann  $\zeta$  函数 4:644  
 Riemann  $\zeta$  函数的均值问题 5:543

- Riemann  $\theta$  函数 4:643  
 Riemann 不变量 3:884  
 Riemann 不等式 1:12  
 Riemann 不等式(Abel 微分的周期矩阵的) 5:163  
 Riemann 次射影空间 5:68  
 Riemann 存在定理 1:689  
 Riemann 存在域 1:692  
 Riemann 单值问题 1:179;1:429  
 Riemann 导数 4:621  
 Riemann 等式(Abel 微分的周期矩阵的) 5:163  
 Riemann 第二定理 2:429  
 Riemann 第二定理(关于可去奇点的) 3:971  
 Riemann 第二定理(关于三角级数的) 4:621  
 Riemann 第一定理 2:429  
 Riemann 第一定理(关于可去奇点的) 3:971  
 Riemann 第一定理(关于三角级数的) 4:621  
 Riemann 定积分 4:628  
 Riemann 定理 4:642  
 Riemann 定理(关于共形映射的) 4:642  
 Riemann 定理(关于级数的项的重排的) 4:643  
 Riemann 度量 4:653  
 Riemann 度量(从属于共形结构的) 1:758  
 Riemann 度量张量 3:731  
 Riemann 法 4:629  
 Riemann 法坐标 4:648  
 Riemann 方程 1:12;4:65  
 Riemann 方程(Papperitz 形式的) 4:65  
 Riemann 公式(关于 Goursat 问题的) 2:741  
 Riemann 关系 4:630  
 Riemann 函数 4:621  
 Riemann 函数方程(关于  $\zeta$  函数的) 5:542  
 Riemann 函数(三角级数论中的) 4:621  
 Riemann 函数(椭圆型偏微分方程中的) 2:114  
 Riemann 函数(微分方程论中的) 4:622  
 Riemann 和 3:120  
 Riemann 恒等式 4:722  
 Riemann 积分 4:628  
 Riemann 积分的性质 4:628  
 Riemann 积分和(函数的) 3:858  
 Riemann 几何学 4:645  
 Riemann 几何学(初等的) 4:622  
 Riemann 几何学(大范围的)\* 4:650  
 Riemann 假设 4:627  
 Riemann 假设(关于有限域的) 1:763  
 Riemann 假设(关于  $\zeta$  函数零点的) 5:542  
 Riemann 假设(广义的)\* 4:627  
 Riemann 假设(解析数论中的) 4:627  
 Riemann 局部化原理 5:275  
 Riemann 矩阵 1:12  
 Riemann 可积函数 3:91;4:628  
 Riemann 可去奇点 3:971  
 Riemann 可去奇点定理 3:971  
 Riemann 空间 4:653  
 Riemann 空间的类 1:954  
 Riemann 空间的类型 4:649  
 Riemann 空间的推广 4:649  
 Riemann 空间(广义的)\* 4:653  
 Riemann 空间(齐性的)\* 4:656  
 Riemann 空间(有界曲率的) 4:654  
 Riemann 空间(在一点上测地完全的) 1:698  
 Riemann 空间(作为度量空间的) 4:646  
 Riemann 空间(作为具有联络的流形的) 4:647  
 Riemann 联络 4:644  
 Riemann 流形 4:653  
 Riemann 挠率 5:228  
 Riemann 求和法 4:633  
 Riemann 球面 4:632  
 Riemann(区)域 4:645  
 Riemann 曲率 4:644  
 Riemann 曲率张量 4:641  
 Riemann 曲面 4:633  
 Riemann 曲面(带边界的) 4:633  
 Riemann 曲面的(参)模 3:797  
 Riemann 曲面的第一定义(定义 A) 4:633  
 Riemann 曲面的分类 4:638  
 Riemann 曲面的共形类 4:639  
 Riemann 曲面的抛物情形 4:635  
 Riemann 曲面的抛物型典型域 4:636  
 Riemann 曲面的双曲情形 4:636  
 Riemann 曲面的双曲型典型域 4:636  
 Riemann 曲面的椭圆情形 4:635  
 Riemann 曲面的椭圆型典型域 4:636  
 Riemann 曲面(复变量解析函数的) 4:633  
 Riemann 曲面(环面型的) 3:797  
 Riemann 曲面(抛物型的) 4:636  
 Riemann 曲面上的微分 2:163  
 Riemann 曲面(双曲型的) 4:636  
 Riemann 曲面(椭圆型的) 4:636  
 Riemann 曲面(有限型的) 2:481  
 Riemann 三角级数理论 5:275  
 Riemann 双线性关系 1:10;1:12  
 Riemann 微分方程 4:621  
 Riemann 问题 4:625  
 Riemann 映射定理 1:155;4:635;4:642  
 Riemann 原理(素数理论中的) 2:257  
 Riemann 张量 4:641  
 Riemann 主要公式 5:71  
 Riemann 坐标 4:644  
 Riesz - Dunford 函数演算 2:596  
 Riesz - Fischer 定理 4:658  
 Riesz - Herglotz 定理 1:468  
 Riesz - Schauder 定理 2:558  
 Riesz - Thorin 插值定理 4:657  
 Riesz - Конторович 定理 4:774  
 Riesz - Марков 定理 4:473  
 Riesz 半范数 4:661  
 Riesz 表示 4:664  
 Riesz 表示定理 4:664  
 Riesz 表示定理(群上的) 3:160  
 Riesz 表示定理(下调和函数的) 4:663



- Riesz 不等式 4:658**  
 Riesz 不等式(关于共轭函数的)  
     4:658  
 Riesz 不等式(关于 Fourier 系数的)  
     4:658  
 Riesz 不等式(关于  $L_p$  函数的)  
     4:658  
 Riesz 测度 4:664;5:62  
 Riesz 插值定理 3:141  
**Riesz 插值公式 4:659**  
 Riesz 插值性质 4:664  
 Riesz 导数 2:544  
**Riesz 定理 4:664**  
 Riesz 定理(关于泛函的形式的)  
     2:593  
 Riesz 定理(关于恒等算子的紧性  
     的) 3:493  
 Riesz 定理(关于下调和函数平均值  
     的) 4:664  
 Riesz 定理(关于 Cauchy 积分的)  
     4:665  
 Riesz 定理(关于 Hardy 类的解析函  
     数的) 4:664  
 Riesz 定理(关于 Stieltjes 积分参数  
     表示的) 4:89  
**Riesz 定理(位势论中的) 4:663**  
 Riesz 范数 1:303;4:661  
 Riesz 分解性质 5:64  
**Riesz 函数系 4:663**  
**Riesz 积 4:660**  
**Riesz 基 4:657**  
 Riesz 局部表示定理 5:62  
**Riesz 空间 4:660**  
 Riesz 空间(紧 Hausdorff 空间上的  
     连续函数的) 5:531  
 Riesz 理想 4:661  
 Riesz 平均 2:536  
**Riesz 求和法 4:662**  
 Riesz 容量 4:659  
 Riesz 投影算子 4:923  
**Riesz 凸性定理 4:657**  
 Riesz 唯一性定理(关于有界解析函  
     数的) 4:664  
**Riesz 位势 4:659**  
 Riesz 子空间 4:661  
 Ritt - Raudenbush 基定理 2:95  
 Ritt 阶(整函数的) 2:218  
 Ritz - Галеркин 法 4:676  
 Ritz 逼近 4:676  
**Ritz 法 4:676**  
 RM 码 2:388  
 Robbins - Monro 随机逼近方法  
     5:1  
 Robertson - Walker 度规 1:869  
**Robin 常数 4:677**  
 Robin 常数(紧集的) 4:677  
 Robin 常数(区域的) 4:677  
 Robin 函数 2:776  
 Robin 位势 4:265  
**Robin 问题 4:678**  
 Robinson 凸集 2:850  
 Robinson 凸性 2:850  
 Rodrigues 定理(关于主方向的)  
     1:908  
**Rodrigues 公式 4:680**  
 Rodrigues 公式(关于主方向的)  
     4:296  
 Rogers - Ramanujan 恒等式 1:549  
 Rogers 引理 5:246  
 Rolfsen 定理 3:274  
**Rolle 定理 4:680**  
**Romberg 法 4:681**  
 Romberg 法则 4:620;4:681  
 Rose 公式 1:792  
 Rosenlicht - Grothendieck 定理  
     4:503  
 Rossby 波 3:717  
 Roth 定理 3:181  
**Rouché 定理 4:692**  
 Rouché 定理的推广 4:692  
 Routh - Hurwitz 定理 4:697  
 Routh - Hurwitz 条件 4:696  
**Routh - Hurwitz 准则 4:696**  
**Routh 定理 4:697**  
 Routh 格式 4:697  
 Routh 准则 4:697  
 $(r, R)$  系统 5:443  
 RS 码 2:388  
 $(r, s)$  转化(结合代数的) 3:401  
 RSA 密码体制 1:896  
 RSA 体制 1:892  
 Rudin - Frolik 序 5:308  
 Rudin - Keisler 序 5:308  
 Rudolph 定理 4:907  
 Rudvalis 群 4:957  
 Ruelle - Takens - Newhoues 通向浑  
     沌的道路 4:695  
 Rugh - Schönhofer 定理 3:596  
 Runge - Kutta - Merson 法 3:309  
**Runge - Kutta 法 4:700**  
 Runge - Lenz 向量 3:349  
**Runge 定理 4:701**  
 Runge 法 2:403  
**Runge 法则 4:701**  
 Runge 偶 4:700  
**Runge 区域 4:699**  
 Runge 区域(第二类的) 4:699  
 Runge 区域(第一类的) 4:699  
**Russell 悖论 4:702**  
 Ryll - Nardzewski 不动点定理  
     4:715  
 Ryser 公式 4:129  
 $r_1$  等价(芽的) 4:866

## S

- S 单位方程 2:200  
 S 导子 4:300  
 S 等价方阵 4:744  
 $\mathfrak{S}$  调和空间 2:834  
**S 对偶性 4:703**  
 S 法 3:857  
 S 反射 4:355  
 S 范畴 4:703  
 $S_n$  方法 5:256  
 S 概形 4:719  
 S 概形群 2:789  
 $s$  广义 Марков 链 3:618  
 S 函数 4:102  
 $S_p$  函数系 3:319  
 S 盒(DES 算法中的) 1:895  
 S 矩阵 4:713  
 S 空间 4:590  
 S 空间问题 5:220  
 $s$  配边 1:793  
 $s$  配边定理 1:793  
 S 弱无穷维空间 4:460  
 S 弱无穷维正规空间 3:56  
 S 上同伦群 4:704  
 $s$  数(紧算子的) 4:925  
 $s$  数(线性算子的) 2:870

- S 同伦群 4:704  
 S 同伦映射 4:703  
 S 拓扑 1:562  
 s 形式 1:483  
 S 型差集 2:89  
 (s)型区域 3:570  
 S 型区域 4:881  
 S 映射 4:703  
 s 重丛( $k$  节的) 4:865  
 s 重级数 3:860  
**Saccheri 四角形 4:704**  
 Saint - Venant - Levy - von Mises  
   物理关系 4:175  
 Samnel - Смирнов 邻近性定理  
   4:355  
 Samuel 紧化 4:324  
 Samuel 扩张 4:324  
**Sard 定理 4:712**  
 Savitch 定理 1:124  
 Scarf 法 3:639  
 Scarf 算法 1:804  
 Schander 估计 4:714  
 Schander 基 1:317;1:367  
 Schanuel 猜想 1:92  
 Schapira 定义(超函数的) 2:954  
 Schauder - Тихонов 定理 3:545  
 Schauder 不动点原理 2:492  
**Schauder 定理 4:715**  
**Schauder 法 4:714**  
 Schauder 型估计 4:715  
 Scheffe 检验 1:311  
 Scheffers 解析超双曲函数 2:952  
**Scherk 曲面 4:720**  
 Schiffer 定理 1:430  
 Schläfli 符号 4:225;4:232;  
   4:549  
 Schläfli 符号(四面体的) 5:154  
 Schläfli 构形 1:743  
 Schläfli 双六构形 1:744  
 Schlessinger 方程 2:582  
**Schlofli 积分 4:721**  
 Schlömilch - Roch 形式(余项的)  
   5:140  
 Schmid 幂零轨道定理 4:123  
 Schmidt 定理 2:190  
 Schmidt 定理(关于带算子的群的)  
   3:301  
 Schmidt 公式(关于对称积分方程解  
   的) 3:100  
 Schmidt 联立逼近定理 2:200  
 Schmidt 问题 1:234  
 Schmidt 正交化过程 4:41;4:43  
 Schoenflies 猜想 4:721  
 Schoenflies 定理 3:233  
**Schottky 定理 4:723**  
 Schottky 轨迹 4:722  
 Schottky 群 3:267,5:328  
**Schottky 问题 4:721**  
 Schreier - Ulam - Baer 定理 5:100  
 Schreier 加细定理 1:724  
 Schreier 扩张(半群的) 2:424  
 Schreier 扩张(群的) 2:424  
**Schreier 系统 4:723**  
 Schröder 函数方程 2:600  
**Schrödinger 方程 4:724**  
**Schrödinger 绘景 4:724**  
 Schrödinger 偶 1:670  
 Schrödinger 算子 2:449  
 Schroeder - Bernstein 定理 1:466  
**Schubert 簇 4:725**  
 Schubert 几何演算 3:148  
 Schubert 条件 4:725  
 Schur 闭群 4:727  
**Schur 乘子 4:726**  
 Schur 第二定理 4:727  
 Schur 第一定理 4:727  
**Schur 定理 4:727**  
 Schur 定理(关于变曲率的) 4:648  
 Schur 定理(关于常曲率的) 4:373  
 Schur 定理(关于常曲率空间的)  
   1:909  
 Schur 定理(关于解析群的) 3:425  
 Schur 定理(关于矩阵代数的)  
   3:674  
 Schur 多项式 5:102  
 Schur 公理系统(关于几何学的)  
   2:523  
**Schur 环 4:727**  
 Schur 基 3:205  
 Schur 矩阵函数 4:129  
 Schur 条件 3:596  
 Schur 凸函数 3:596  
 Schur 形式 3:205  
**Schur 引理 4:726**  
 Schur 引理的连续类似 4:726  
**Schur 指数 4:725**  
 Schur 指数(不可约模的) 4:725  
 Schur 指数(特征标的) 4:725  
 Schur 指数(中心单代数的) 4:725  
 Schur 子群 4:726  
 Schwartz 常数 5:302  
 Schwartz 核定理 3:992  
 Schwartz 空间 2:553  
 Schwarz - Christoffel 公式 1:588  
 Schwarz - Jensen 公式 3:224  
 Schwarz - Pick 引理 4:732  
 Schwarz 不等式 1:512  
**Schwarz 导数 4:733**  
 Schwarz 定理 1:6;3:748  
**Schwarz 对称导数 4:732**  
**Schwarz 对称定理 4:733**  
 Schwarz 对称化 5:104  
 Schwarz 对称原理 5:108  
 Schwarz 反射原理 2:831  
**Schwarz 方程 4:729**  
**Schwarz 公式 4:729**  
**Schwarz 函数 4:729**  
**Schwarz 核 4:731**  
 Schwarz 核(区域中的) 4:731  
 Schwarz 核(圆盘中的) 4:731  
**Schwarz 积分 4:730**  
 Schwarz 积分公式 4:730  
**Schwarz 交替法 4:728**  
**Schwarz 曲面 4:732**  
 Schwarz 三角函数 4:730  
 Schwarz 算子 4:730  
**Schwarz 微分 4:729**  
 Schwarz 微分参数 4:733  
 Schwarz 问题 4:730  
**Schwarz 引理 4:731**  
 Schwarz 引理(不变量形式的)  
   4:731  
 Schwarz 引理的不变形式 2:944;  
   4:731  
 Schwarz 引理的经典形式 4:731  
 Schwarz 引理的微分形式 4:731  
 Schwarz 原理(解析延拓的) 5:108  
 Schwarzschild 半径(宇宙的相对论  
   模型的) 4:734  
**Schwarzschild 场 4:733**  
**Schwarzschild 度规 4:733**



- Schwarzschild 方程 4:1032  
 Schwarzschild 黑洞 4:734  
 Schwarzschild 引力场 1:909  
 Schwinger 代数 4:414  
 Schwinger 函数 1:794  
 Scott 拓扑 1:815  
 Scott 准则 4:350  
 SCP 积分 1:450  
 Sdl 语言 4:889  
 Segal 猜想 2:381  
 Segre 簇 4:742  
 Segre 极小性准则 1:905  
 Segre 嵌入 4:742  
 Seidel 迭代法 4:742  
 Seidel 定理(关于连分数的) 1:806  
 Seidel 法 4:742  
 Seifert - van Kampen 定理 2:614  
 Seifert 不变量 4:743  
 Seifert 猜想 3:748  
 Seifert 矩阵 4:744  
 Seifert 流形 4:744  
 Seifert 配对 4:744  
 Seifert 曲面 1:144;3:270  
 Seifert 纤维化 4:743  
 Seifert 圆 3:270  
 Selberg - Pyatetskii - Shapiro 猜想 1:231  
 Selberg 法 4:745  
 Selberg 公式 2:258  
 Selberg 积分 4:685  
 Selberg 筛法 4:745  
 Selling - Charve 约化法 4:387  
 Selling 约化(二次型的) 4:387  
 Selling 约化法 4:387  
 Serre Tor 公式 3:148  
 Serre 猜想 4:338  
 Serre 猜想的二次类比 4:339  
 Serre 定理 1:58  
 Serre 定理(关于上同调维数的) 1:643  
 Serre 对偶定理 2:291  
 Serre 对偶性 4:805  
 Serre 对偶( $p$  可除群的) 4:58  
 Serre 关系 3:418  
 Serre 类 3:542  
 Serre 扭可逆层 3:177  
 Serre 谱序列 3:391  
 Serre 问题 4:339  
 Serre 问题(有限生成投射模的) 4:670  
 Serre 纤维化 4:797  
 Serre 一般性猜想(关于群上同调的) 2:624  
 Serre 有限性定理 4:940  
 Serre 准则 2:49  
 Serre 子范畴 4:797  
 Severi 除子 1:103;3:889  
 Severi 数 3:889  
 Shannon 定理 4:800  
 Shannon 法 1:632  
 Shannon 方法 5:116  
 Shannon 函数 4:574  
 Shannon 熵 1:633  
 Shapley 对策 5:5  
 Shapley 解 1:217  
 Shapley 向量 4:801  
 Shapley 值 4:801  
 Shatz 定理 3:597  
 Sheffer 函数 3:607  
 Sheffer 竖 4:807  
 Sheffer 序列 5:310  
 Shepherdson - Sturgis 机器 3:590  
 Sheppard 校正 4:808  
 Sherman - Morrison - Woodbury 公式 1:401  
 Sherman - Morrison 公式 1:401  
 Shohat 定理 2:453  
 Shvarts 定理 4:235  
 si - ci 螺线 4:816  
 Sidon 集 2:824  
 Siegel 定理 4:818  
 Siegel 定理(关于二元二次型的) 1:364  
 Siegel 定理(关于亚纯函数的) 3:714  
 Siegel 定理(关于整点的) 4:818  
 Siegel 定理(关于 Dirichlet  $L$  函数的) 4:818  
 Siegel 法 4:817  
 Siegel 公式 4:384  
 Siegel 积分(第二类) 2:896  
 Siegel 积分(第一类) 2:896  
 Siegel 零点(对于 Dirichlet  $L$  函数的) 4:627  
 Siegel 模函数 2:231  
 Siegel 平均值(关于二次型亏格的) 4:384  
 Siegel 区域 4:816  
 Siegel 区域(第二类) 4:817  
 Siegel 区域(第一类) 4:816  
 Siegel 上半空间 4:722  
 Siegel 上半平面 4:817  
 Siegel 中值定理 2:723  
 Sierpinski 地毯 3:455  
 Sierpinski 定理 1:780  
 Sierpinski 定理(关于连续统分解的) 1:819  
 Sierpinski 空间 1:661  
 Sierpinski 曲线 4:819  
 Sierpinski 万有曲线 3:457  
 Sikorski 定理 5:26  
 Sikorski 定理(刻画 Boole 代数的) 3:83  
 Simons 锥 4:181  
 Simpson 法则 4:842  
 Simpson 公式 4:842  
 Simson 线 4:842  
 Simula - 1 语言 4:843  
 Simula - 67 语言 4:843  
 Simula 语言 4:843  
 Sine - Soardi 定理 3:730  
 Singer 差集 2:89  
 Singer 循环 4:341  
 Skoda 定理 2:430  
 Skolem 悖论 4:873  
 Skolem 范式 4:872  
 Skolem 函数 4:872  
 Slater 条件 3:636  
 Slater 正则性条件 3:655  
 SLEP 方法 4:508  
 Sluze 蚌线 1:904  
 SMAC 方法 4:104  
 Smale - Birkhoff 定理 4:810  
 Smale  $h$  配边定理 2:76  
 Smale 定理 3:830  
 Smale 公理 A 4:692  
 Smith 典范形式 3:979  
 Smith 典范形式(矩阵的) 3:979  
 Smith 定理 1:32  
 Smith 法则(进度安排理论中的) 4:717

- Smith 问题 4:717  
 Smith 正规形式(矩阵的) 3:976  
 Snapper - Liebley - Vitale - Lam - Young 定理 3:596  
 Snapper 序 3:596  
 Snedecor 分布 4:885  
 Snobol 语言 4:885  
 Solovay 定理(关于可测性的) 3:955  
 Solovay 完全性定理 3:783  
 Sommerfeld 辐射条件 4:897  
 Sommerfeld 积分 4:897  
 Spanier 对偶性 4:703  
 Spearman 等级相关系数 4:906  
 Specht - Wever 定理 3:408  
 Specht 簇 3:420  
 Specht 模 5:533;5:534  
 Specht 问题 3:928;4:157;5:126  
 Specker 定理 1:786  
 Specker 序列 4:910  
 Sperner 标号 4:936  
 Sperner 引理 4:936  
 Spitzer - Foata 基 1:314  
 Spivak 纤维化 4:199  
 SSOR 矩阵 1:571  
 $S'/S$  形式 2:509  
 Stackelberg 对策 2:634  
 Stackelberg 解 4:895  
 Stallings - Brown 定理 3:200  
 Stallings 定理 1:647;2:906  
 Stanton 数 4:981  
 Steenrod - Eilenberg 公理 4:1019  
 Steenrod - Ситников 同调群 4:1019  
 Steenrod 代数 4:1018  
 Steenrod 对偶定理 2:293  
 Steenrod 对偶性 4:1018  
 Steenrod 平方 4:1021  
 Steenrod 问题 4:1020  
 Steenrod 约化幂 4:1020  
 Steenrod 运算 4:1020  
 Stefan - Boltzmann 常数 4:1023  
 Stefan - Boltzmann 定律 4:1023  
 Stefan 反问题 4:1025  
 Stefan 条件 4:1023  
 Stefan 问题 4:1023  
 Steffensen 插值公式 4:1025  
 Steihagen 定理 3:326  
 Stein 代数 4:1027  
 Stein 空间 4:1026  
 Stein 流形 4:1026  
 Steinberg 公式 1:549  
 Steinberg 群 1:93  
 Steiner 点 4:1028  
 Steiner 对称化 5:104  
 Steiner 公式 3:777  
 Steiner 拟群 4:429  
 Steiner 曲线 4:1027  
 Steiner 三元系 1:376  
 Steiner 系 4:1029  
 Steiner 系的表征 4:1029  
 Steiner 系的分类 4:1029  
 Steiner 系的推广 4:1029  
 Steiner 子系 4:1029  
 Steinitz - Fox - Smythe 理想类 3:275  
 Steinitz 定理 4:1030  
 Stewart 法 3:205  
 Stiefel - Whitney 类 4:1037  
 Stiefel - Whitney 数 4:1037  
 Stiefel 丛 4:1036  
 Stiefel 法 1:772  
 Stiefel 类 2:678  
 Stiefel 流形 4:1036  
 Stiefel 流形( $n$  空间内  $k$  标架的) 2:551  
 Stiefel 数 4:1037  
 Stieltjes 变换 4:1039  
 Stieltjes 积分 4:1038  
 Stieltjes 积分表示 1:468  
 Stieltjes 积分和 4:1038  
 Stieltjes 积积分 4:320  
 Stieltjes 可积函数 4:1038  
 Stirling 插值公式 4:1044  
 Stirling 插值级数 3:144  
 Stirling 公式 4:1044  
 Stirling 级数 4:1044  
 Stirling 级数(关于  $\Gamma$  函数的) 2:639  
 Stirling 数(第二类) 1:234;1:663  
 Stirling 数(第一类) 1:663  
 Stoilow 定理 3:129  
 Stokes 定理 5:25  
 Stokes 公式 5:24  
 Stokes 流 3:877  
 Stokes 现象 5:24  
 Stokes 线 1:63  
 Stoll 型定理 4:180  
 Stolz 角 4:182  
 Stone - Čech 紧化 5:25  
 Stone - Čech 邻近关系 5:325  
 Stone - Čech 邻近空间 4:354  
 Stone - von Neumann 定理 1:670  
 Stone - von Neumann 唯一性定理 1:670  
 Stone - Weierstrass 逼近定理 1:675  
 Stone - Weierstrass 代数 2:824  
 Stone - Weierstrass 定理 5:26  
 Stone - Архангельский 度量化准则 3:730  
 Stone - Архангельский 可度量化性准则 3:730  
 Stone - Архангельский 准则 3:737  
 Stone 代数 5:25  
 Stone 叠合定理 1:882  
 Stone 定理 1:391  
 Stone 定理(关于单参数酉算子群的谱表示的) 4:986  
 Stone 定理(关于度量空间仿紧性的) 3:728  
 Stone 定理(关于开覆盖加细的) 3:548  
 Stone 定理(关于强连续单参数算子群的) 4:913  
 Stone 对偶性 3:1020  
 Stone 格 5:25  
 Stone 紧统 1:391  
 Stone 空间 5:26  
 Stone 拓扑对偶性 3:1020  
 Stoneley 波 2:305  
 Stong - 服部定理 1:580  
 Stong 定理 1:623  
 Störmer 法 5:27  
 Strouhal 数 5:40  
 Struve 函数 5:43  
 Student 分布 5:44  
 Student 化极差 5:46  
 Student 化统计量 5:46  
 Student 检验 5:45



Student 统计量 4:998  
 Sturm - Liouville 反问题 5:53  
 Sturm - Liouville 方程 5:47  
 Sturm - Liouville 算子 5:48  
 Sturm - Liouville 问题 5:50  
 Sturm 定理 5:56  
 Sturm 定理(关于零点分隔的)  
   3:499  
 Sturm 级数 5:56  
 Sturm 曲线 5:46  
 Sturm 序列 5:56  
 Sundman 级数 5:169  
 Sylow  $p$  子群 5:91  
 Sylow  $\pi$  子群 5:91  
 Sylow 第二定理 5:92  
 Sylow 第三定理 5:92  
 Sylow 第一定理 5:92  
 Sylow 定理 5:92  
 Sylow 基 5:91  
 Sylow 子群 5:91  
 Sylow  $\pi$  基 5:91  
 Sylvester 定理 3:362  
 Szegő 公式 4:34  
 Szegő 类 2:538  
 Szemerédi 定理 5:370  
 Szökefalvi - Nagy - Foias 函数演算  
   2:597  
 Szökefalvi - Nagy 定理 1:821;  
   3:1028

## T

$t - (v, k, \lambda)$  设计 5:127  
 $T$  代数 1:503  
 $T$  代数范畴 5:280  
 $T$  度 1:133; 2:39  
 $t$  多面体 4:163  
 $T$  法 3:857  
 $T^2$  分布 5:126  
 $t$  分布 5:126  
 $T_0$  公理 4:783  
 $T_1$  公理 4:783  
 $T_2$  公理 4:783  
 $T_3$  公理 4:783  
 $T_4$  公理 4:783  
 $T$  基 1:308  
 $t$  检验 5:45  
 $T^2$  检验 2:934  
 $t$  阶焦点(圆锥曲线的) 3:604  
 $T_2$  紧统 1:680  
 $T$  矩阵 4:556  
 $T$  可归约性 4:528  
 $T_0$  空间 2:695; 3:282; 5:200  
 $T_1$  空间 5:200  
 $T_2$  空间 4:783; 5:200  
 $T_3$  空间 4:783; 5:200  
 $T_4$  空间 4:783; 5:200  
 $T_i$  空间 4:783  
 $T_1$  空间 5:127  
 $T$  理想 5:126  
 $T$  幂零理想 5:126  
 $t$  设计 5:127  
 $T$  素理想 5:126  
 $T$  同态 3:14  
 $t$  位数 4:693  
 $T$  系 5:261  
 $t$  纤错码 1:633  
 $T$  序列 1:570  
 $t$  移位 1:921  
 Tarski - Los 定理 1:108  
 Tarski - Seidenberg 定理 4:751  
 Tarski 递归公式 1:65  
 Tarski 定理 1:475; 3:562  
 Tarski 定理(关于算术标准模型的)  
   4:526  
 Tarski 魔怪 1:452  
 Tarski 问题 5:135  
 Tarski 系统 3:562  
 Tate - 本田理论 1:16  
 Tate - Шафаревич 群 2:624  
 Tate 猜想 5:136  
 Tate 猜想(关于代数闭链的)  
   5:136  
 Tate 猜想(关于 Abel 簇的自同态  
   的) 3:827  
 Tate 层 3:314  
 Tate 代数 5:135  
 Tate 高 2:346  
 Tate 模 5:137  
 Tate 曲线 5:137  
 Tate 上同调群 1:650  
 Tate 主题 3:838  
 Tauber 定理 5:138  
 Tauber 定理(带余项的) 5:139  
 Tauber 条件 5:138  
 Tauber 型定理 5:138  
 Taylor - Fourier 级数 4:610  
 Taylor 多项式 5:140  
 Taylor 公式 5:139  
 Taylor 公式(关于模上的微分算子  
   的) 2:168  
 Taylor 公式(关于向量函数的)  
   5:414  
 Taylor 级数 5:140  
 TD 曲线 2:577  
 Teichmüller - Tukey 原理 4:102  
 Teichmüller 代表 5:519  
 Teichmüller 定理 5:297  
 Teichmüller 空间 5:141  
 Teichmüller 映射 5:141  
 Teichmüller 原理 3:223  
 Teirlinck 定理 4:1030  
 Teissier 半群 4:831  
 Temple 定理 5:302  
 Tennenbaum 定理  
 TG 双代数 5:281  
 Thom - Dold 同构 5:167  
 Thom 定理 4:1036  
 Thom 横截定理 4:865  
 Thom 空间 5:167  
 Thom 空间(群的) 5:167  
 Thom 空间(向量丛的) 5:167  
 Thom 类 5:166  
 Thom 谱 5:168  
 Thom 同构 5:167  
 Thom 突变 5:165  
 Thomas - Fermi 方程 2:356  
 Thomas 旋进 3:567  
 Thompson 闭包条件 1:612  
 Thompson 群 4:957  
 Thompson 子群 5:168  
 Thomson 函数 3:251  
 Thorbergsson 定理 4:175  
 Thue - Siegel - Roth 定理 5:172  
 Thue - Siegel 定理 1:96  
 Thue 定理 5:171  
 Thue 法 5:171  
 Thue 问题 4:257  
 Thue 系统 5:172  
 Tietze - Урысон 定理 1:817

- Tietze - Урысон 扩张定理 3:988;  
 5:361  
 Tietze 变换 2:25  
 Tietze 扩张定理 2:429  
 Tissot 方程 4:189  
 Tissot 指标线 1:493  
 Titchmarsh 定理 3:1021  
 Titchmarsh 问题 5:180  
 Tits 二择一性 3:862  
 Tits 丛 5:181  
 Tits 定理(关于群增长的) 4:235  
 Tits 系统 5:181  
 Tits 厦 5:180  
 TL 系统 3:315  
 Todd 亏格 1:576  
 Todd 类 5:182  
 Toeplitz 法 3:320  
 Toeplitz 矩阵 5:182  
 Toeplitz 型(不定的) 5:182  
 Tonelli 定理 5:187  
 Tonelli 平面变差 5:186  
 Tonelli 有界变差函数 5:187  
 Torelli 定理 5:226  
 Tougeron 定理 2:481  
 Trefftz 法 5:266  
 Tresca - Saint - Venant 条件  
 4:175  
 Tricomi 方程 5:269  
 Tricomi 问题 5:270  
 Trotter - 加藤定理 5:283  
 Trotter 积公式 5:283  
 TS 拟群 4:429  
 Tschirnhaus 割圆曲线 4:390  
 Tschirnhauser 变换 1:722  
 Tsemplen 定理 4:813  
 $tt$  度 4:285  
 $tt$  可归约性 4:528;5:284  
 Tukey 定理 4:103  
 Turing - Post 机 1:724  
 Turing 度 1:133  
 Turing 机 5:290  
 Turing 机(字母表上的) 5:290  
 Turing 假设 1:121  
 Turing 可归约性 4:528  
 Turing 论题 1:130;1:589;5:290  
 Turing 算法(字母表中的) 5:290  
 Tutte  $f$  因子定理 2:448  
 Tutte 1 因子定理 2:448  
 TVD 格式
- ## U
- $u_0$  凹算子 1:730  
 $U$  殆周期 2:673  
 $U$  殆周期函数 1:383  
 $U$  对偶 3:797;3:828  
 $U$  泛函 5:491  
 $U$  范畴 4:873  
 $U$  集 5:275;5:336  
 $U_0$  集 5:336  
 $U$  检验 3:605  
 $U$  卷积(线性方程组的) 2:656  
 $U$  统计法 2:320  
 $u_0$  凸算子 1:730  
 $U$  系统 5:527  
 $u$  正则环 4:551  
 Ulam 定理 1:475;3:955  
 Ulam 胎紧性定理 5:177  
 $U(\epsilon)$  集 5:336
- ## V
- $V$  - Hermite 形式 4:816  
 $V = L$ (可构造性公理) 4:343  
 $V$  函数法 3:948  
 $V$  模型(随机规划中的) 5:23  
 $V$  群 3:278  
 $V$  因子分解 4:455  
 Valiron 亏量 5:367  
 Valiron 亏值 5:367  
 Valiron 例外值(亚纯函数的)  
 2:413  
 van der Pol 方程 5:369  
 van der Pol 渐近方法 4:143  
 van der Pol 振子 5:369  
 van der Waerden 不可微函数  
 3:933  
 van der Waerden 猜想 1:663  
 van der Waerden 猜想(关于积和式  
 的) 4:130  
 van der Waerden 定理 5:370  
 van der Waerden 检验 5:370  
 van der Waerden 问题(关于积和式  
 的) 3:778  
 van der Waerden 旋量 2:203  
 Vandermonde 结点组 5:243  
 Vandermonde 矩阵 5:371  
 Vandermonde 行列式 5:370  
 Vandermonde 行列式的基本性质  
 5:371  
 Vandiver 检验法(关于素数正则性  
 的) 3:184  
 Varignon 定理 5:403  
 Varma 变换 3:709  
 Vaserstein 定理 4:979  
 Vaught 定理 1:108  
 Veblen - Young 公理 4:108  
 Veech 结构定理 2:252  
 Venn 图 5:420  
 Verdier 对偶性 2:55  
 Verigin 问题 2:123  
 Verma 模 4:589  
 Veronese 簇 5:421  
 Veronese 曲面 5:421  
 Veronese 映射 5:421  
 Verschiebung 态射 5:520  
 Viète 公式 2:627;5:422  
 Viète 定理 5:422  
 Vietoris 闭链 1:531  
 Vietoris 定理 4:805  
 Vietoris 复形 2:908  
 Vietoris 同调 5:422  
 Vietoris 同调群 5:222  
 Vietoris 拓扑 2:420  
 Violescu 自由独立性 4:415  
 Virasoro 代数 5:427  
 Vitali - Carathéodory 定理 4:753  
 Vitali - Hahn - Saks 定理 3:704;  
 5:432  
 Vitali 变差 5:432  
 Vitali 定理 5:431  
 Vitali 定理(关于全纯函数序列一致  
 收敛的) 5:432  
 Vitali 覆盖 5:431  
 Vitali 覆盖定理 5:431  
 Vitali 集 3:955  
 Vitali 例(Lebesgue 不可测集的)  
 3:701  
 Vitali 收敛定理 5:432  
 Vitali 系统 5:461  
 Viviani 窗 5:433  
 Viviani 曲线 5:433



- Viviani 体 5:433  
 $(v, k, \lambda)$  差集 2:89  
 $(v, k, \lambda)$  构形 1:376; 1:662  
 VMO 函数(消没平均振动函数) 2:818  
 VMO(消没平均振动)函数集 2:818  
 VMO(消没平均振动函数类) 2:818  
 Vojta 猜想 5:368  
 Volterra 导数 2:598  
 Volterra 方程 5:435  
 Volterra 公式(Cauchy 问题解的) 2:305  
 Volterra 核 5:437  
 Volterra 积分方程(第二类) 5:345  
 Volterra 积分方程(第一类) 1:5; 5:435  
 Volterra 级数 5:437  
 Volterra 算子 5:437  
 Volterra 算子方程 5:436  
 Volterra 项 5:437  
 Volterra 形式 5:437  
 von Kármán - Trefftz 剖面 5:550  
 von Koch 不可微曲线 3:542  
 von Mangoldt 公式 5:71  
 von Mangoldt 公式(对于  $\varphi(x)$  的) 2:257  
 von Mangoldt 函数 2:261  
 von Mises 剖面 5:550  
 von Neumann - Heinz 不等式 2:597  
 von Neumann - Morgenstern 解 2:636  
 von Neumann 遍历定理 5:442  
 von Neumann 代数 5:440  
 von Neumann 代数(包络  $C^*$  代数的) 1:454  
 von Neumann 代数(由集合生成的) 5:440  
 von Neumann 定理 1:670  
 von Neumann 定理(关于不变子空间的) 3:961  
 von Neumann 定理(关于解析群的) 1:163  
 von Neumann 定理(关于自伴代数的) 5:440  
 von Neumann 极小化极大定理 3:675  
 von Neumann 经济动力学模型 3:637  
 von Neumann 可测选择定理 3:853  
 von Neumann 谱定理 4:911  
 von Neumann 唯一性定理 1:670  
 von Neumann 正则环 2:904  
 Voss 曲面 5:445  
 Voss 网 5:444  
 $(V_0, V_1)$  退化测地线 3:829  
 $vw$  不连通集(图中的) 2:757  
 $vw$  分离集(图中的) 2:757
- ## W
- W 标量 4:374  
 $W^*$  代数 5:440  
 W 分布 5:446  
 W 熵 2:363  
 W 张量 4:374  
 Wagner - Preston 定理  
 Wagner 良拟序猜想 3:764  
 Wald - Bellman 方程 4:788  
 Wald 公式  
 Wald 恒等式 5:446  
 Wald 检验 3:439  
 Wald 约化 3:367  
 Waldhausen 代数  $K$  理论 3:241  
 Wall 不变量 5:447  
 Wall 割补术阻碍不变量 5:447  
 Wall 群 5:446  
 Wallace 定理 3:1017  
 Wallis 公式 5:448  
 Wallman - Shanin 紧化 5:448  
 Wallman 紧化 5:448  
 Wallman 型紧化 1:683  
 Walsh - Paley 正交系 4:39  
 Walsh 定理 3:712  
 Walsh 函数系 5:448  
 Ward 定理 5:450  
 Waring 问题 5:450  
 Warning 定理 1:763  
 Watson 变换 5:452  
 Watson 引理 5:452  
 Weber - Hermite 函数 2:853  
 Weber - Schafheitlin 积分 4:273  
 Weber 变换 3:121  
 Weber 方程 5:461  
 Weber 函数 5:461  
 Wedderburn - Artin 定理 5:463  
 Wedderburn - Мальцев 定理 5:463  
 Wedderburn 定理 1:238; 2:476; 3:673  
 Wedderburn 定理(关于半单环结构的) 3:674  
 Wedderburn 定理(关于除环的) 1:238  
 Weibull 分布 5:464  
 Weibull 概率纸 5:464  
 Weierstrass  $\varepsilon$  函数 5:466  
 Weierstrass - Erdmann 隅角条件 5:469  
 Weierstrass  $\mu$  函数 5:470  
 Weierstrass - Poincaré 定理 5:163  
 Weierstrass - Сохоцкий - Casorati 定理 4:892  
 Weierstrass  $\zeta$  函数 5:464  
 Weierstrass  $\sigma$  函数 5:464  
 Weierstrass 必要条件 1:1047  
 Weierstrass 必要条件(关于变分极值的) 5:464  
 Weierstrass 变换 2:661; 3:121  
 Weierstrass 不变量 3:214  
 Weierstrass 不可微函数 3:933  
 Weierstrass 充分条件(关于变分极值的) 5:465  
 Weierstrass 初等因子 1:462; 5:471  
 Weierstrass 除法定理 5:473  
 Weierstrass 除子定理 3:713  
 Weierstrass 存在域 1:692  
 Weierstrass 第一定理(关于连续性的) 1:812  
 Weierstrass 典型积 1:461  
 Weierstrass 点 5:470  
 Weierstrass 定理 5:470  
 Weierstrass 定理(关于闭区间上连续函数的) 1:686  
 Weierstrass 定理(关于构造具有给定零点和极点的亚纯函数的)

- 1:873  
Weierstrass 定理(关于函数逼近的) 5:471  
Weierstrass 定理(关于函数方程的) 1:600  
Weierstrass 定理(关于解析函数的一致收敛级数的) 5:471  
Weierstrass 定理(关于连续性的) 1:812  
Weierstrass 定理(关于区域边界上一致收敛的) 5:472  
Weierstrass 定理(关于椭圆函数的) 1:686  
Weierstrass 定理(关于整函数的) 1:154  
Weierstrass 多项式 5:473  
Weierstrass 方法(研究解析函数的) 4:282  
Weierstrass 公理 1:808  
Weierstrass 公式 5:470  
Weierstrass 函数 5:382  
Weierstrass 环 5:470  
Weierstrass 积表示(整函数的) 2:362  
Weierstrass 基本定理(关于泛函增量的) 5:470  
Weierstrass 解析开拓方法 1:155  
Weierstrass 经典表示定理的推广(整函数的) 5:63  
Weierstrass 素乘子 5:471  
Weierstrass 条件(对变分极值的) 5:464  
Weierstrass 椭圆函数 5:467  
Weierstrass 椭圆函数的调和情形 3:387  
Weierstrass 无穷积定理 5:470  
Weierstrass 无穷积( $\Gamma$  函数的) 2:640  
Weierstrass 相对不变量 3:790  
Weierstrass 形式(三次曲线的) 1:905  
Weierstrass 形式(Lamé 方程的) 3:336  
Weierstrass 一致收敛条件(关于级数的) 5:466  
Weierstrass 预备定理 2:519; 5:472  
Weierstrass 预备定理(关于多复变函数的) 5:472  
Weierstrass 元 1:691  
Weierstrass 元(微分域上的) 2:421  
Weierstrass 正规形式(典范椭圆积分的) 2:349  
Weierstrass 正规形式(方程的) 2:344  
Weierstrass 准则 5:465  
Weierstrass 准则(关于一致收敛的) 5:466  
Weierstrass 坐标 5:465  
Weil - Châtelet 群 5:477  
Weil 猜想(关于椭圆曲线的) 2:346  
Weil 猜想(关于玉河数的) 5:129  
Weil 猜想(关于 Kloosterman 和的) 5:277  
Weil 除子 2:270  
Weil 除子群 2:270  
Weil 第二猜想 5:547  
Weil 第三猜想 5:547  
Weil 第四猜想 5:547  
Weil 第一猜想 5:547  
Weil 分解(全纯函数的) 1:327  
Weil 刚性定理 2:232  
Weil 公式 1:326  
Weil 区域 5:479  
Weil 上同调 5:478  
Weil 问题 3:778  
Weil 直线 5:28  
Weil 中间 Jacobi 簇 3:129  
Weinberg - Salam 理论 5:319  
Weingarten 导数公式 5:479  
Weingarten 公式 2:719  
Weingarten 曲面 5:480  
Weingarten 映射 4:296  
Wenn 函数 3:607  
Weyl - Littlewood 法(素数分布论中的) 2:258  
Weyl - von Neumann 定理 4:911  
Weyl 逼近定理 4:145  
Weyl 乘子 4:37  
Weyl 代数 5:481  
Weyl 殆周期函数 5:484  
Weyl 定理(关于泛覆盖群的) 3:426  
Weyl 定理(关于完全可约性的) 1:703  
Weyl 对易关系 1:670  
Weyl 法 5:487  
Weyl 方程 2:203  
Weyl 房 1:543; 5:487  
Weyl 分母公式 1:550  
Weyl 分式积分 1:6  
Weyl 公理体系(关于向量空间的) 2:524  
Weyl 公式 1:549  
Weyl 和 5:488  
Weyl 积分 2:407, 544  
Weyl 极限点 5:49  
Weyl 极限圆 5:49  
Weyl 经典定理 3:869  
Weyl 距离 2:673  
Weyl 空间 1:750  
Weyl 联络 5:485  
Weyl 谱定理 4:911  
Weyl 谱(算子的) 4:934  
Weyl 曲率张量 1:751  
Weyl 群 5:485  
Weyl 群(代数群的) 5:486  
Weyl 群(对称的) 5:485  
Weyl 群(连通紧 Lie 群的) 5:486  
Weyl 群(有限维约化 Lie 代数的) 5:486  
Weyl 群(域上的连通约化代数群的) 4:563  
Weyl 群(Titz 系统的) 5:181  
Weyl 特征标公式 1:550; 4:597  
Weyl 完全拓扑群 1:699  
Weyl 问题 5:488  
Weyl 象征(算子的) 5:93  
Weyl“酉技巧” 4:597  
Weyl 域 2:181  
Weyl 准则 5:485  
Weyl 准则(高维模 1 分布的) 2:255  
Weyl 准则(模 1 一致分布的) 2:255  
Whitehead 乘法 5:494  
Whitehead 定理 2:920  
Whitehead 积 5:495  
Whitehead 挠率 5:495



- Whitehead 群 5:493  
 Whitehead 群(群的) 1:93  
 Whitehead 塔 2:925  
 Whitehead 同态 5:494  
 Whitehead 引理 1:652  
 Whitney  $C^\infty$  拓扑 4:865  
 Whitney 定理 4:801;4:864  
 Whitney 定理(关于流形的)  
   1:164  
 Whitney 分层 5:30  
 Whitney 和 5:409  
 Whitney 可微性 5:496  
 Whitney 扩张定理 5:496  
 Whitney 类 5:496  
 Whitney 嵌入定理 5:65  
 Whitney 条件 A 和 B 5:30  
 Whitney 拓扑 4:865  
 Whittaker 变换 5:497  
 Whittaker 插值问题 1:4  
 Whittaker 常数 1:4  
 Whittaker 方程 5:497  
 Whittaker 函数 5:497  
 Wick 单项式 5:498  
 Wick 定理 5:499  
 Wick 公式 5:499  
 Wick 积 5:498  
 Wick 幂 5:498  
 Wick 象征(算子的) 5:93  
 Wick 序 5:500  
 Wick 指数 5:498  
 Wiener-Hopf 法 5:505  
 Wiener-Hopf 方程 5:504  
 Wiener-Hopf 方程组 3:98  
 Wiener-Hopf 因式分解(象征的)  
   3:98  
 Wiener-Hopf 因子分解 5:118  
 Wiener-Perron 解 4:136  
 Wiener Tauber 定理 5:509  
 Wiener-Колмогоров 滤波 5:19  
 Wiener-Хинчин 定理(关于相关函  
   数的) 4:914  
 Wiener 逼近定理 4:924  
 Wiener 测度 5:507  
 Wiener 代数 4:639  
 Wiener 定理 4:136  
 Wiener 定理(关于 Fourier 级数表示  
   的) 2:665  
 Wiener 法 2:216  
 Wiener 广义 Tauber 定理 5:139  
 Wiener 过程 5:507  
 Wiener 浑沌分解 5:503  
 Wiener 积分 5:506  
 Wiener 集 4:925  
 Wiener 紧化(开 Riemann 曲面的)  
   4:639  
 Wiener 类  $BV_\phi$  5:374  
 Wiener 理想边界(开 Riemann 曲面  
   的) 4:639  
 Wiener 滤波器 5:15  
 Wiener 容量 1:467  
 Wiener 调和边界(开 Riemann 曲面  
   的) 4:639  
 Wiener 准则(关于正则边界点的)  
   4:545  
 Wightman 公理 1:793  
 Wightman 函数 1:793  
 Wilcoxon 检验 5:510  
 Wilczynski 二次曲面 3:434  
 Wilczynski 准线 4:338  
 Wilder 定理 4:937  
 Will 环 5:517  
 Wilson-Hilferty 变换(随机变量的)  
   4:485  
 Wilson 定理 5:512  
 Wilson 多项式 5:511  
 Wintner 定理 4:347  
 WIP 么拟群 3:565  
 Wirsing 猜想 3:734  
 Wirsing 猜想(关于超越数的)  
   2:193  
 Wirtinger 表现 3:270,274;5:294  
 Wishart 分布 5:515  
 Witt-Grothendieck 环 5:519  
 Witt-Grothendieck 群 5:519  
 Witt 代数 5:515  
 Witt 定理 5:518  
 Witt 分解 5:516  
 Witt 概形 5:519  
 Witt 群 5:516;5:517  
 Witt 设计 4:1029  
 Witt 相似二次型 4:383  
 Witt 向量 5:519  
 Witt 向量环 5:519  
 Witt 消去定理 4:382;5:517  
 Witt 指数 5:518  
 WKB 方法 5:521  
 WKB 解 4:876  
 WKB 近似 5:521  
 Wold 分解 3:516  
 Wolfowitz 不等式 5:522  
 Wong-Zakai 相关项 5:31  
 Wronski 行列式 5:525
- ## X
- X 射线变换 5:185  
 X 值点(仿射概形的) 1:58  
 X 值缺 5:416
- ## Y
- y 不稳定性 4:964  
 Y 度量 4:405  
 y 符号定函数 4:964  
 Y 微分同胚 5:527  
 y 稳定性 4:964  
 Y 系统 5:527  
 Yamabe 定理 5:194  
 Yates 校正 5:531  
 Young 表 5:533  
 Young 不等式 1:770  
 Young 定理 1:465  
 Young 定理(关于三角级数的)  
   5:275  
 Young 定理(关于唯一性集的)  
   5:275  
 Young 对称化子 5:533  
 Young 法则 5:534  
 Young 共轭函数 2:290  
 Young 函数 2:290  
 Young 互余函数 2:290  
 Young 模量 2:332  
 Young 图 5:533  
 Young 准则 5:532  
 Young 子群 5:533  
 Yule-Walker 方程 1:255  
 Yule 过程 1:371
- ## Z
- z 分布 5:535  
 z 坐标(解析函数奇点的) 4:855

ZA 群 3:990  
 Zakai 方程 1:834  
 Zakharov - Shabat 方程组 1:428  
 Zakharov - Shabat 整形法 1:429;  
 4:895  
 Zalgaller 定理 1:590  
 Zaremba - Giraud 原理(关于偏微分  
 方程的) 2:126;3:502  
 Zariski 定理 5:535  
 Zariski 定理(关于基本集的)  
 1:314  
 Zariski 定理(关于连通性的)  
 5:535  
 Zariski 定理(关于双有理映射的)  
 4:498  
 Zariski 环 2:447  
 Zariski 基本定理 5:535  
 Zariski 连通性定理 5:535  
 Zariski 切空间 5:535  
 Zariski 切空间(代数簇的) 5:535  
 Zariski 切空间(概形的) 5:535  
 Zariski 双有理对应定理 5:535  
 Zariski 拓扑 5:536  
 Zassenhaus 簇 4:589  
 Zassenhaus 公式 5:536  
 Zassenhaus 滤过 4:236  
 Zassenhaus 群 5:537  
 Zeeman - Stallings 定理 3:200  
 Zeeman 容许稳定性猜想 5:183  
 Zeno 悖论 5:537  
 Zermelo - Fraenkel 公理系统  
 1:287  
 Zermelo - von Neumann 定理  
 4:247  
 Zermelo 定理 5:537  
 Zermelo 公理 5:537  
 Zermelo 良序定理 5:537  
 Zermelo 条件(关于度量函数的)  
 3:248  
 Zeuten - Segre 不变量 1:103  
 Znieg 与 Co 任意投影 1:492  
 Zorn 引理 5:551  
 Zukhovitskii 法 1:772  
 Zygmund 不等式 1:203  
 Zygmund 定理 5:552  
 Zygmund 定理(关于缺项三角级数  
 的) 3:320

Zygmund 函数类 5:551

Zygmund 模 5:552

## 以俄文字母起首的复合词

## A

Алгамс 语言 1:68

Александров - Čech 上闭链  
 1:628

Александров - Čech 上同调  
 1:531

Александров - Čech 上同调群  
 1:64

Александров - Čech 同调 4:918

Александров - Čech 同调模  
 1:64

Александров - Čech 同调群  
 1:64

Александров - Čech 同调与上同调  
 1:64

Александров - Fenchel 不等式  
 3:777

Александров - Hausdorff 定理  
 2:61

Александров - Hausdorff 定理(关于  
 完全度量空间的) 1:699

Александров  $N$  宽度 5:501

Александров - Урысон 定理(关于  
 分拆 Euclid 空间的) 1:463

Александров - Урысон 定理(关于  
 无理数空间拓扑性质的) 2:61

Александров 定理(关于本质映射  
 的) 2:178

Александров 定理(关于测度序列  
 的) 3:702

Александров 定理(关于度量粘合  
 的) 2:734

Александров 定理(关于非本质映射  
 的) 3:51

Александров 定理(关于分拆 Euclid  
 空间的) 1:463

Александров 定理(关于覆盖维数公  
 理化的) 2:183

Александров 定理(关于胎紧解析曲  
 面的) 5:176

Александров 定理(关于凸度量实现  
 的) 2:846

Александров 定理(关于凸多面体  
 的) 1:847

Александров 定理(关于维数分支的  
 交的) 1:463

Александров 定理(关于有界加性正  
 则集函数的) 4:554

Александров 定理(关于 Borel 集的  
 球面象的) 4:947

Александров 定理(关于 Cantor 集  
 的连续象的) 1:464

Александров 定理(关于 Cantor 流  
 形的) 1:463

Александров 定理(关于 Euclid 空间  
 中 Cantor 子流形的) 1:463

Александров 定理(关于  $\epsilon$  移位的)  
 2:178;2:185

Александров 定理(关于  $\epsilon$  映射的)  
 2:178

Александров 定理(关于  $\omega$  映射的)  
 2:178

Александров 法(关于开集的有心系  
 统的) 1:683

Александров 公式(关于 Hausdorff  
 紧统的维数的) 2:185

Александров 紧化 1:64

Александров 紧扩张 1:64

Александров 紧统 2:303

Александров 离散空间 3:282

Александров 立方体 1:661

Александров 弱无穷维空间 5:460

Александров 阻碍定理 2:907;  
 3:534

Альфа 语言 1:68

Андронов - Витт 定理 1:181

Аносов 流 5:528

Аносов 微分同胚 5:528

Аносов 系统 5:527

Аракелов 相交定理 2:847

Аракелян 猜想 5:368

Арнольд 定理 4:438

Арнольд 扩散 4:439

Архангельский 定理(关于第一可数  
 紧统的) 1:472

Архангельский 定理(关于度量空间  
 的完满象的) 2:454



## Б

Барбашин – Красовский 定理  
1:267  
Бари 定理 5:276  
Бернштейн – Björk 定理(关于  $b$  函数的) 2:3  
Бернштейн – Rogosinski 求和法  
1:337  
Бернштейн – Колмогоров 不等式  
1:569  
Бернштейн – Колмогоров 估计(概率论中的) 1:334  
Бернштейн 不等式 1:334  
Бернштейн 插值法 1:335  
Бернштейн 定理 1:338  
Бернштейн 定理(关于逼近的)  
1:346  
Бернштейн 多项式 1:337  
Бернштейн 法 1:335  
Бернштейн 极小子流形问题( $\mathbb{R}^n$  中的) 4:180  
Бернштейн 滤过 5:482  
Бернштейн 拟解析类 4:418  
Бернштейн – 佐藤多项式 2:2  
Бесов 函数空间 3:909  
Бесов 空间 3:141  
Бицадзе 方程 1:372  
Бицадзе 方程组 2:488  
Бицадзе 极值原理 3:775  
Бицадзе 问题 3:769  
Боголюбов – Крылов 不变测度  
4:809  
Боголюбов – Крылов 定理 4:809  
Боголюбов – Парасюк  $R$  运算  
4:581  
Боголюбов – Парасюк 定理 4:581  
Боголюбов 不等式 1:380  
Боголюбов 不等式(自由能泛函的)  
1:380  
Боголюбов 不等式(Green 函数与关联函数的) 1:381  
Боголюбов 定理 1:381  
Боголюбов 定理( $1/q^2$  型奇异性的)  
1:382  
Боголюбов 方程系列 1:379

Боголюбов 楔棱(楔边)定理 1:381  
Боголюбов 型定理 2:954  
Бруновский – Luenberger 典范形式  
3:979  
Брушлинский – Eilenberg 定理  
1:674  
БСАМ 地图投影 1:493  
Бубнов – Галеркин 法 1:448  
Буняковский 不等式 1:449  
Былов 定理 1:533

## В

Варшамов – Gilbert 界 2:390  
Векуа 法 5:420  
Венков 约化(二次型的) 4:387  
Венков 约化法 4:386  
Виноград 定理 1:533  
Виноградов – Bombieri 定理 2:46  
Виноградов – Goldbach 定理  
5:424  
Виноградов 定理(关于三素数和的)  
1:36  
Виноградов 法 5:424  
Виноградов 法(关于估计素数三角和的) 5:425  
Виноградов 法(关于估计 Weyl 和的) 5:425  
Виноградов 法(素数理论中的)  
2:258  
Виноградов 估计 5:423  
Виноградов 估计(关于素数三角和的) 5:423  
Виноградов 估计(关于特征标和的)  
2:209  
Виноградов 估计(关于 Weyl 和的)  
5:423  
Виноградов 积分 5:424  
Виноградов 假设 5:424  
Виноградов 假设(关于平面及空间区域中整点个数的) 5:424  
Виноградов 假设(关于三角和估计的) 5:424  
Виноградов 假设(关于剩余幂及非剩余幂分布的) 5:424  
Виноградов 假设(关于特征标和的)  
2:209

Виноградов 假设(关于 Diophantus 方程解数的) 5:424

Виноградов 均值定理 5:426  
Виноградов 引理 5:426  
Витушкин 定理 1:212  
Владимиров  $C$  凸包定理 1:151  
Владимиров 变分原理 5:434  
Владимиров 法 5:433  
Владимиров 泛函 5:256  
Власов – Ландау 方程 3:336  
Власов 动理学方程 5:434  
Вороной 半不变量 4:387  
Вороной 胞腔 4:84  
Вороной 格型 5:443  
Вороной 铺砌 5:444  
Вороной 求和法 5:444  
Вороной 区域 5:444  
Вороной 图 2:709  
Вороной 问题 5:444  
Вороной 型(点格的) 5:443

## Г

Галеркин 法 2:621  
Гельфанд – Gårding 定理 2:92  
Гельфанд – Mazar 定理 1:300;  
4:933  
Гельфанд  $N$  宽度 5:501  
Гельфанд – Кириллов 超越次数  
2:181  
Гельфанд – Кириллов 维数 2:181  
Гельфанд – Колмогоров 拓扑  
5:532  
Гельфанд – Левитан – Марчинк 方程  
3:291  
Гельфанд – Левитан 方程 3:291  
Гельфанд – Наймарк 定理 1:301;  
3:494  
Гельфанд – Райков 定理 5:340  
Гельфанд 变换 1:674; 2:665  
Гельфанд 表示 2:664  
Гельфанд 对(Гельфанд 偶)  
2:683; 4:942  
Гельфанд 公式(谱半径的) 1:300  
Гельфанд 三元组 2:327; 4:666  
Гельфанд 拓扑 1:453; 5:532  
Гельфонд – Schneider 定理 1:169

Гинзбург 地图投影 1:492  
 Гирсанов 定理 1:834  
 Гливенко – Cantelli 定理 2:357;  
 5:37  
 Гнеденко 定理 3:534  
 Голубев – Привалов 定理 2:738  
 Голубев – Привалов 条件 2:739  
 Голубев 定理 1:614  
 Голузин 变分 3:132  
 Голузин 变分方法 3:132  
 Голузин 定理 2:252  
 Голушков 离散变换等价问题  
 5:157  
 Гольберг 定理 4:56  
 Гончаров 常数 1:4  
 Гончаров 多项式 1:4  
 Гончаров 问题 1:4  
 Гохберг – Semencul 公式 5:182

## Д

Данилевский 法 3:459  
 Дворецкий – Rogers 定理 1:307  
 Делоне 符号 4:173  
 Делоне 三角剖分 4:59  
 Демидович 定理 4:4  
 Дринфельд – Соколов 方程 3:291  
 Дринфельд 对称空间 5:136  
 Дынин – Федосов 公式 3:39  
 Дынкин 图 2:314

## Е

Егоров 定理 2:322  
 Егоров 曲面系 2:321  
 Егоров 曲面序列 2:321  
 Егоров 网 4:260  
 Егоров 系列(曲面的) 2:321  
 Ермаков 收敛准则 2:386  
 Еругин 准则(可约线性系统的)  
 4:531  
 Ершов 法 1:706  
 Ершов 分层 2:366  
 Ефимов 映射 4:947

## Ж

Жегалкин 代数 5:549

Жегалкин 多项式 5:549  
 Жуков 定理 3:928  
 Жуковский – Kutta – Чаплыгин 条  
 件 5:513  
 Жуковский 定理 5:550  
 Жуковский 函数 5:549  
 Жуковский 基本定理 5:513  
 Жуковский 剖面 5:549  
 Жуковский 条件 5:550  
 Жуковский 翼 5:549  
 Жуковский 翼剖面 5:550

## З

Зайцев 定理 1:703  
 Зельманов 定理 2:361

## К

Каврайский 等面积地图投影  
 1:492  
 Канторович – Banach 空间 4:774  
 Канторович 方法 3:247  
 Канторович 空间 3:238;4:773  
 Канторович 扩张定理 4:662  
 Каспаров  $K$  理论 1:454  
 Катетов – 森田等式(关于维数的)  
 2:180  
 Катетов 等式(关于维数的) 2:179  
 Катетов 定理 5:538  
 Катетов 定理( $C_b(X)$ 上的) 2:182  
 Катетов 公式(关于维数的) 2:185  
 Келдыш – Лаврентьев 定理  
 3:250  
 Келдыш – Лаврентьев 例 3:249  
 Келдыш 定理 3:250  
 Келдыш 定理(关于本征向量系的  
 完全性的) 4:930  
 Келдыш 定理(关于算子完全性的)  
 4:926  
 Келдыш 定理(关于用多项式逼近  
 连续函数的) 3:250  
 Келдыш 定理(位势论中的)  
 3:250  
 Келдыш 算子 3:250  
 Клейнер 定理 4:590  
 Колмогоров – Alexander 积 1:644  
 Колмогоров – Alexander 同调群

3:283  
 Колмогоров – Chapman 方程  
 3:282  
 Колмогоров – Chapman 微分方程组  
 5:249  
 Колмогоров – Feller 方程 3:126  
 Колмогоров  $N$  宽度 5:500  
 Колмогоров – Spanier 上同调群  
 3:283  
 Колмогоров – Арнольд – Moser 定  
 理 3:111;4:439;4:974  
 Колмогоров – Арнольд – Moser 理  
 论 4:143  
 Колмогоров – Селиверстов 定理  
 3:286  
 Колмогоров – Смирнов 检验  
 3:286  
 Колмогоров – Успенский 机器  
 3:591  
 Колмогоров 补集定理 2:60  
 Колмогоров 不等式 3:284  
 Колмогоров 不等式(逼近论中的)  
 3:284  
 Колмогоров 不等式(概率论中的)  
 3:285  
 Колмогоров 定理(关于可赋范拓扑  
 向量空间的) 5:212  
 Колмогоров 定理(关于类的非空性  
 的) 2:60  
 Колмогоров 定理(关于连续函数的  
 复合的) 1:722  
 Колмогоров 定理(关于平均值的几  
 乎必然收敛性的) 3:365  
 Колмогоров 定理(关于强大数律  
 的) 5:37  
 Колмогоров 定理(关于缺项 Fourier  
 级数的) 3:320  
 Колмогоров 定理(关于无穷维空间  
 的概率的) 3:36  
 Колмогоров 定理(关于相容的联合  
 分布的) 5:500  
 Колмогоров 定理(关于向量空间的  
 可赋范性的) 3:966  
 Колмогоров 对偶性 3:282  
 Колмогоров 方程 3:284  
 Колмогоров 分布 4:999  
 Колмогоров 分布函数 3:287



- Колмогоров 分离公理 4:783  
 Колмогоров 复杂性 1:127  
 Колмогоров 公理 3:282  
 Колмогоров 关系(关于动能衰减的) 5:289  
 Колмогоров 积分 3:286  
 Колмогоров 基本定理(关于相容分布的) 4:483  
 Колмогоров 检验 3:287  
 Колмогоров 可赋范性定理 3:545  
 Колмогоров 可积函数 3:91  
 Колмогоров 空间 3:287  
 Колмогоров 宽度 5:500  
 Колмогоров 流 3:238  
 Колмогоров 内尺度 5:289  
 Колмогоров 三级数定理 5:171  
 Колмогоров 三级数准则 3:37  
 Колмогоров 条件(关于随机过程存在性的) 5:13  
 Колмогоров 微分方程 3:615  
 Колмогоров 系统 3:238  
 Колмогоров 相容性定理 4:312; 4:483  
 Колмогоров 向前微分方程 2:329  
 Колосов – Мусхелишвили 公式 5:299  
 Конторович – Лебедев 变换 3:288  
 Кострикин – Шафаревич 猜想 3:406  
 Кострикин 定理 3:412;3:928  
 Кострикин 根 2:360  
 Котельников 解释 3:292  
 Котельников 模型 3:292  
 Кочин – Лойцянский 法 1:50  
 Кравчук 多项式 3:292  
 Крейн – 角谷静夫定理 5:532  
 Крейн – Мильман 定理 1:845; 3:545  
 Крейн – Мильман 性质 5:416  
 Крейн – Рутман 定理 4:252  
 Крейн – Шмультян 定理 1:739; 2:296;5:214  
 Крейн – Шмультян 空间 5:214  
 Крейн 定理 5:214  
 Крейн 定理(关于切线标线的) 3:44  
 Крейн 定理(关于锥的) 1:739  
 Крейн 空间 3:293  
 Крейн 准则 2:250  
 Крылов – Боголюбов 平均方法 3:302  
 Крылов 法 3:459  
 Крылов 子空间 4:99  
 Кузминов 定理(关于紧群的) 1:474  
 Куликов 准则 1:13  
 Курош – Черников 群类 5:61  
 Курош 定理 1:149;2:570;3:928  
 Курош 问题 3:910;3:928  
 Куфарев – Löwner 方程 3:570
- ## Л
- Лаврентьев – Бицадзе 方程 2:131;3:775  
 Лаврентьев 变分原理 5:393  
 Лаврентьев 定理 3:361  
 Лаврентьев 定理(逼近论中的) 3:361  
 Лаврентьев 定理(力学中的) 3:361  
 Лаврентьев 定理(描述集合论中的) 3:361  
 Лаврентьев 定理(拟共形映射理论中的) 3:361  
 Лаврентьев 现象 3:361  
 Лаврентьев 粘合定理 2:734  
 Ландау 动理学方程 3:336  
 Ландау 湍流图 5:288  
 Лебедев 变换 3:371  
 Лебедев 积分变换 3:371  
 Левитан  $N$  殆周期函数 2:674  
 Левитан 殆周期函数 1:140  
 Левицкий 根 3:550;4:470  
 Лежнов – Савелцев 系统 2:345  
 Лежнов – Савелцев 组(系统) 3:291;4:846  
 Лившиц 准则 2:250  
 Линник 常数 2:260  
 Линник 离差法 2:248  
 Линник 离散遍历法 3:517  
 Лобачевский 法 3:527  
 Лобачевский 函数 3:524  
 Лобачевский 几何学 3:524  
 Лобачевский 几何学的应用 3:526  
 Лобачевский 空间 3:528  
 Лобачевский 平面 3:792  
 Лобачевский 准则(关于收敛性的) 3:524  
 Лузин  $C$  性质 3:572  
 Лузин  $C$  性质(可测函数的) 3:697  
 Лузин – de la Vallée Poussin 分类 (Borel 集的) 2:60  
 Лузин – Denjoy 定理 3:573  
 Лузин  $N$  性质 3:574  
 Лузин – Sierpinski 定理 3:578  
 Лузин – Sierpinski 指标 2:63  
 Лузин – Привалов 边界唯一性定理 (关于角边界值的) 5:335  
 Лузин – Привалов 边界唯一性定理 (径向边界值的) 5:335  
 Лузин – Привалов 定理 3:575  
 Лузин 猜想 1:478  
 Лузин 猜想(关于解析函数的) 3:578  
 Лузин 猜想(关于 Fourier 级数的) 3:575  
 Лузин 猜想(关于  $L_2$  函数的 Fourier 级数的) 2:535  
 Лузин 点 3:578  
 Лузин 定理 3:577  
 Лузин 定理(关于可测映射的) 3:698  
 Лузин 定理(关于  $C\mathcal{A}$  集的) 1:455  
 Лузин 定理(描述集合论中的) 3:578  
 Лузин 分离原理 3:576  
 Лузин 覆盖定理 3:578  
 Лузин 集 3:576  
 Лузин 假设 3:574  
 Лузин 可测性定理 3:573  
 Лузин 空间 3:577  
 Лузин 例 3:573  
 Лузин 筛 3:577  
 Лузин 问题 3:575  
 Лузин 问题(关于集合论的) 3:575  
 Лузин 问题(关于解析函数的)

3:578  
 Лузин 预解式法 3:575  
 Лузин 准则 3:573  
 Лузин 族 3:578  
 Лунц - Локуцкий例子 (Hausdorff 紧统的) 2:185  
 Лурье 方程 2:572  
 Люстерник - Фет 定理 1:609  
 Люстерник - Шнирельман 定理 (关于闭测地线的) 1:506  
 Люстерник - Шнирельман 范畴 1:505  
 Люстерник 法 5:257  
 Ляпунов - Perron 的基本结果 4:397  
 Ляпунов - Poincaré 定理 2:811  
 Ляпунов - Schmidt 方程 3:581  
 Ляпунов - Schmidt 方法 1:437  
 Ляпунов - Красовский 泛涵 3:1043  
 Ляпунов - Стеклов 闭包条件 4:36  
 Ляпунов 比较原理 (向量函数的) 1:688  
 Ляпунов 变换 3:587  
 Ляпунов 第二方法 3:581;  
 3:583  
 Ляпунов 第一不稳定性定理 1:582  
 Ляпунов 定理 3:586  
 Ляпунов 定理 (概率论中的) 3:586  
 Ляпунов 定理 (关于可约线性系统的) 4:531  
 Ляпунов 定理 (关于首次逼近稳定性的) 3:583  
 Ляпунов 定理 (关于线性微分方程组的可约性的) 3:509  
 Ляпунов 定理 (关于向量测度的) 5:416  
 Ляпунов 定理 (关于正则线性系统的) 4:548  
 Ляпунов 定理 (关于中心极限定理的) 3:448  
 Ляпунов 定理 (关于 Cauchy 算子的) 1:519  
 Ляпунов 定理 (关于 Ляпунов 特征

指数的) 3:579  
 Ляпунов 定理 (关于 Ляпунов 稳定性的) 3:579  
 Ляпунов 定理 (位势论中的) 3:586  
 Ляпунов 非正则性指标 3:185  
 Ляпунов 分式 3:586  
 Ляпунов 函数 3:580  
 Ляпунов 函数方法 2:140  
 Ляпунов 谱 3:862  
 Ляпунов 球面 3:585  
 Ляпунов 曲面 3:585  
 Ляпунов 曲面和曲线 3:585  
 Ляпунов 曲线 3:585  
 Ляпунов 数 3:580  
 Ляпунов 随机函数 3:584  
 Ляпунов 随机算子 3:585  
 Ляпунов 特征指数 3:578  
 Ляпунов 条件 (关于独立随机变量的) 3:586  
 Ляпунов 条件 (关于密度的) 3:587  
 Ляпунов 条件 (具有三阶矩的) 1:534  
 Ляпунов 条件 (曲面上的) 3:585  
 Ляпунов 条件 (曲线上的) 3:585  
 Ляпунов 条件稳定性定理 1:736  
 Ляпунов 维数 3:580  
 Ляпунов 稳定的解 (常微分方程的) 2:109  
 Ляпунов 稳定集 3:568  
 Ляпунов 稳定性 3:581  
 Ляпунов 稳定性 (不动点关于映射族的) 3:583  
 Ляпунов 稳定性 (常微分方程解的) 3:582  
 Ляпунов 稳定性 (抽象微分方程解的) 3:582  
 Ляпунов 稳定性 (点关于映射的) 3:582  
 Ляпунов 稳定性 (点关于映射族的) 3:583  
 Ляпунов 稳定性理论 3:584  
 Ляпунов 稳定性 (Riemann 流形上微分方程解的) 3:582  
 Ляпунов 系统 3:949  
 Ляпунов 系统 (有阻尼的) 3:949

Ляпунов 引理 (关于 Ляпунов 稳定性的) 3:581  
 Ляпунов 指数 2:134; 3:579;  
 3:861  
 Ляпунов 指数 (微分方程组簇的) 3:861  
 Ляпунов 准则 (对正则线性系统的) 4:548  
 Ляпунов 最优函数 1:268

## M

Макаров 定理 2:832  
 Мальцев - Neumann 定理 2:566;  
 3:14  
 Мальцев - Tarski 初等扩张定理 1:499  
 Мальцев - von Neumann 定理 2:784  
 Мальцев 代数 3:597  
 Мальцев 定理 1:108; 1:110;  
 2:231  
 Мальцев 定理 (关于可解流形的) 4:895  
 Мальцев 分解 3:419  
 Мальцев 恒等式 3:401  
 Мальцев 积 3:599  
 Мальцев 基本局部定理 3:599  
 Мальцев 结构定理 (关于可解线性群的) 3:484  
 Мальцев 紧性定理 4:350  
 Мальцев 局部定理 3:599  
 Мальцев 容许代数 3:401  
 Мальцев 完全化 (群的) 3:550  
 Мальцев 问题 3:14; 3:599  
 Мальцев 运算 5:403  
 Марков 半群 4:416  
 Марков 遍历定理 3:364  
 Марков 不等式 3:620  
 Марков 不等式 (概率论中的) 1:568  
 Марков 不等式 (关于代数多项式的导数的) 3:620  
 Марков 不动点定理 4:715  
 Марков 参数 5:118  
 Марков 策略 1:830  
 Марков 常数 3:626



Марков 的 Diophantus 方程 3:626  
 Марков 地图投影 1:495  
 Марков 定理(关于抽象复形的组合等价问题的不可解性的) 4:164  
 Марков 分划 5:95  
 Марков 更新过程 4:581  
 Марков 规则(关于双重否定的) 2:862  
 Марков 过程 3:621  
 Марков 过程的泛函 2:604  
 Марков 过程的“过去” 3:614  
 Марков 过程的“将来” 3:614  
 Марков 过程(平稳的)\* 3:625  
 Марков 函数系 3:620  
 Марков 核 5:12  
 Марков-角谷静夫不动点定理 4:715  
 Марков-角谷静夫定理 3:545; 5:215  
 Марков 决策漂移过程 1:834  
 Марков 控制 1:830  
 Марков 链 3:614  
 Марков 链(遍历的)\* 3:617  
 Марков 链(不可分解的)\* 3:618  
 Марков 链(常返的)\* 3:619  
 Марков 链的零状态类 3:616  
 Марков 链的正状态类 3:616  
 Марков 链(广义的)\* 3:618  
 Марков 链(可分解的)\* 3:617  
 Марков 链(周期的)\* 3:619  
 Марков 链(Марков 型的) 2:724  
 Марков 例子 4:520; 4:809  
 Марков 论题 1:725  
 Марков 谱 3:626  
 Марков 谱(射线函数的) 2:723  
 Марков 谱问题 3:626  
 Марков 谱(狭义的) 2:724  
 Марков 求积公式 3:626  
 Марков 三元组 3:626  
 Марков 时 3:620  
 Марков 数 3:626  
 Марков 随机场 4:480  
 Марков 跳过程 3:235  
 Марков 信息源 3:76  
 Марков 性质 3:625  
 Марков 性质(随机过程的) 5:248  
 Марков 形式 3:620

Марков 型(Марков 形式) 3:620  
 Марков 映射 4:416  
 Марков 原理 1:792; 1:795  
 Марков 正规算法 1:725  
 Марков 转移函数 5:247  
 Марков 准则 3:619  
 Марков 准则(最佳积分逼近的) 3:619  
 Маслов 典则(典范)算子 2:529; 4:752  
 Маслов 指标 2:530  
 Медведев 逻辑 2:472  
 Мельников 法 4:118  
 Меньшов - Rademacher 定理 3:711  
 Меньшов - Конягин 定理 5:276  
 Меньшов 定理 5:276  
 Меньшов 例子(零测度 M 集的) 5:275  
 Мергелян 定理 3:711  
 Михайлов 速端曲线 3:740  
 Михайлов 准则 3:740  
 Михлин - Calderón - Zygmund 算子 1:457  
 Мищенко 公式 2:511  
 Мищенко 级数 1:578; 1:577  
 Мойшезон 空间 1:176  
 Мучник - Friedberg 定理 4:529

## Н

Наймарк 等价 3:52  
 Наймарк 定理(关于广义谱分解的) 4:920  
 Некрасов 积分方程 3:888  
 Немыцкий 定理 1:694  
 Немыцкий 算子 3:947  
 Никольский 空间 3:908  
 Никольский 嵌入定理 3:16  
 Новиков - Kondo 定理 4:872  
 Новиков 猜想 4:722  
 Новиков 定理(关于构造算术中的可推导性的) 1:795  
 Новиков 可分性定理 4:780  
 Норден 法式化方法 4:335

## О

Оловянишников 定理(关于凸曲面的) 1:852  
 Оловянишников 曲面 3:885  
 Островский 定理 3:968  
 Остроградский - Gauss 公式 4:52  
 Остроградский - Liouville 公式 4:52  
 Остроградский 法 4:52  
 Остроградский 方程 3:848  
 Остроградский 公式 4:51

## П

Пасынков 定理 2:185  
 Пасынков 定理(关于羽状拓扑空间的) 2:454  
 Персидский 定理 3:185  
 Петерсон - Codazzi 方程 4:145  
 Петерсон 变换 4:146  
 Петерсон 对应 4:146  
 Петерсон 曲面 4:146  
 Петров - Галеркин 法 2:621  
 Петровский 定理(关于实代数曲线的) 4:509  
 Петровский 抛物型偏微分方程和方程组 3:501  
 Петровский 双曲型多项式 2:945  
 Петровский 椭圆性 2:350  
 Погорелов 变换 3:66  
 Погорелов 定理(关于具有正则度量的凸曲面的正则性的) 5:488  
 Понтрягин - Kuratowski 定理 2:761  
 Понтрягин - Kuratowski 准则 2:764  
 Понтрягин - Nöbeling 嵌入定理 1:686  
 Понтрягин - Thom 定理 1:625  
 Понтрягин - Шниредьман 定理 3:724  
 Понтрягин 不变量 4:242  
 Понтрягин 代数 2:927  
 Понтрягин 定理(关于标架割补的) 4:242

Понтрягин 定理(关于同调的) 1:66  
 Понтрягин 定理(关于下配边流形的) 4:244  
 Понтрягин 定理(关于 Stiefel 数) 1:623  
 Понтрягин 对偶定理 2:823; 2:293; 2:378  
 Понтрягин 对偶定理(对拓扑半群的) 5:197  
 Понтрягин 对偶理论 1:678  
 Понтрягин 对偶性 4:240  
 Понтрягин 对偶性(拓扑学中的) 4:241  
 Понтрягин 极值 3:1035  
 Понтрягин 极值曲线 4:243  
 Понтрягин 空间 4:244  
 Понтрягин 空间(指数为  $\kappa$  的) 3:293  
 Понтрягин 类 4:239  
 Понтрягин 平方 4:245  
 Понтрягин 曲面 4:246  
 Понтрягин 数 4:243  
 Понтрягин 特征标 4:238  
 Понтрягин 型问题 4:243  
 Понтрягин 最大值原理 4:242  
 Поснов 公式 1:48  
 Постников 逼近 2:925  
 Постников 分解 2:925  
 Постников 平方 4:257  
 Постников 塔 2:925  
 Постников 系统 4:258  
 Постников 系统(空间的) 4:258  
 Постников 系统(映射的) 4:258  
 Постников 因子 4:258  
 Привалов 参数 4:304  
 Привалов 定理 4:305  
 Привалов 定理(关于共轭函数的) 4:305  
 Привалов 定理(关于 Cauchy-Lebesgue 型积分的边值的) 4:306  
 Привалов 定理(关于 Cauchy-Stieltjes 积分的) 4:305-306  
 Привалов 定理(关于 Cauchy 奇异积分的) 4:305  
 Привалов 基本引理 1:514; 4:305

Привалов 算子 4:304  
 Привалов 唯一性定理(关于解析函数的) 4:305  
 Привалов 引理 1:514  
 Прохоров 定理(关于胎紧测度的) 3:702; 3:704  
 Прохоров 定理(关于胎紧性的) 2:263  
 Прохоров 逆定理(关于胎紧测度的) 3:704

## Р

Райков 定理 3:396; 4:205; 5:215  
 Райков 完全拓扑群 1:699  
 Рашевский 超张量 5:43  
 Романов 定理 4:811  
 Рохдин 定理 2:527  
 Рохдин 流形 2:42  
 Рохлин-Halmos 定理 3:697  
 Рохлин-Halmos 引理 1:188

## С

Сазонов 拓扑 3:704  
 Ситников 对偶性 2:910  
 Слуцкий 定理 4:986  
 Смирнов 定理 2:536  
 Смирнов 检验 4:881  
 Смирнов 扩张 5:325  
 Смирнов 类 4:880  
 Смирнов 区域 4:881  
 Смирнов 弱无穷维空间 5:460  
 Смирнов 双样本检验 4:881  
 Смирнов 统计量 4:824  
 Соболев 广义导数 4:886  
 Соболев 广义偏导数 4:886  
 Соболев 函数类 4:886  
 Соболев 基本定理 3:16  
 Соболев 基本定理的 Кондрашов-Ильин 补充 3:16  
 Соболев 空间 4:886  
 Соловьев 斜向透视圆柱投影 1:491  
 Сонин 第一有限积分 4:898  
 Сонин 公式( $\Gamma$  函数的) 3:639  
 Сонин 积分 4:897  
 Сохоцкий-Plemelj 公式 4:891

Сохоцкий 定理 4:892  
 Сохоцкий 公式 4:891  
 Стеклов 第三问题 4:1031  
 Стеклов 函数 4:1031  
 Стеклов 问题 4:1031  
 Степанов-Denjoy 定理 1:192  
 Степанов 殆周期函数 4:1033  
 Степанов 定理 1:193  
 Степанов 函数空间 4:1033  
 Степанов 距离 2:673  
 Стратонович 积分 5:30  
 Стратонович 微分 5:3  
 Суслин-Kleene 定理 5:90  
 Суслин 定理 5:89  
 Суслин 概形 1:3; 2:62  
 Суслин 集 2:59  
 Суслин 假设 5:88  
 Суслин 空间 2:62  
 Суслин 连续统 5:89  
 Суслин 首一多项式定理 4:338  
 Суслин 数 5:88  
 Суслин 数(拓扑空间的) 1:471  
 Суслин 条件 5:88  
 Суслин 问题 5:89  
 Суслин 线 5:89  
 Суслин 性质 1:680  
 Суслин 运算 1:1; 1:3; 2:62  
 Суслин 准则 5:88  
 Суслин  $\mathcal{A}$  运算 1:1

## Т

Тихонов-Phillips 正则化 5:185  
 Тихонов 不动点定理 4:715  
 Тихонов 不动点定理 4:715  
 Тихонов 不动点原理 2:493  
 Тихонов 定理 5:178  
 Тихонов 定理(关于拓扑空间之积的) 1:680  
 Тихонов 定理(关于微分方程解的收敛性的) 4:877  
 Тихонов 定理(关于 Тихонов 空间的) 4:564  
 Тихонов 积 5:178  
 Тихонов 空间 5:178  
 Тихонов 立方体 5:177  
 Тихонов 适定问题 3:7



Топоногов 定理(关于 Riemann 空间中角的比较的) 4:651

## У

Урысон - Brouwer - Tietze 引理 5:361  
 Урысон - Brouwer 引理 5:361  
 Урысон  $N$  宽度 5:501  
 Урысон - Тихонов 定理 1:472  
 Урысон 等式(关于维数的) 2:179  
 Урысон 定理 1:683  
 Урысон 定理(关于分歧指数的) 3:456  
 Урысон 定理(关于满足第二可数公理的正则空间的) 4:736  
 Урысон 定理(关于 Euclid 空间分拆的) 1:463  
 Урысон 度量化定理 5:362  
 Урысон 方程 5:361  
 Урысон 分离公理 5:362  
 Урысон 恒等式 3:373  
 Урысон 恒等式(关于维数的) 2:185  
 Урысон 积分算子 1:730  
 Урысон 空间 5:362  
 Урысон 算子 3:946;5:361  
 Урысон 引理 5:362  
 Урысон 引理(关于函数分离的) 4:783  
 Успенский - Rice 定理 1:134

## Ф

Фаддеев 方程 2:449  
 Федоров 群 2:455  
 Федорчук 邻近性 4:355  
 Филиппов 定理(关于仿紧空间的象的) 2:454  
 Филиппов 例子(Hausdorff 紧统的) 2:185  
 Фиников 定理(关于正螺旋面的) 2:41  
 Фок 表示 1:671;5:499  
 Фок 表示的唯一性 5:499  
 Фок 公式 4:69  
 Фок 空间 2:501  
 Фоменко 定理 4:178

## Х

Харитонов 定理 4:963  
 Харитонов 型定理 4:963  
 Хинчин - Pollaczek 公式 4:454  
 Хинчин - Колмогоров 定理 4:465  
 Хинчин 不等式 3:258  
 Хинчин 单峰性准则 5:331  
 Хинчин 定理 3:258  
 Хинчин 定理(关于对几乎所有实数用有理数逼近的) 2:189  
 Хинчин 定理(关于分布的因子分解的) 3:258  
 Хинчин 定理(关于连分数展开的) 3:733  
 Хинчин 定理(关于相关函数的) 4:914  
 Хинчин 定理(关于 Diophantus 逼近的) 3:259  
 Хинчин 积分 3:258  
 Хинчин 可积函数 3:258  
 Хинчин 条件 5:37  
 Хинчин 转换原理 2:192

## Ц

Цейтин 定理 1:791  
 Цирелсон 空间 5:285

## Ч

Чаплыгин 变换 2:886  
 Чаплыгин 变量 2:648  
 Чаплыгин 不等式 2:161  
 Чаплыгин 定理 1:548  
 Чаплыгин 法 1:547  
 Чаплыгин 方程 3:774  
 Чаплыгин 型方程 2:665  
 Чеботарев 密度定理 1:596  
 Чебышев - Hermite 多项式 2:854  
 Чебышев - Laguerre 多项式 3:332  
 Чебышев - Граев 定理 1:495  
 Чебышев 半迭代法 1:28  
 Чебышев 半迭代法(二次的) 1:571  
 Чебышев 半迭代法(一次的) 1:571

Чебышев 半径 1:574  
 Чебышев 逼近 1:566  
 Чебышев 不等式 1:568  
 Чебышев 不等式(概率论中的) 1:568  
 Чебышев 不等式(关于单调函数的) 1:568  
 Чебышев 不等式(关于素数的) 4:290  
 Чебышев 不等式(关于有限单调序列的) 1:568  
 Чебышев 参数迭代法 3:203  
 Чебышев 常数 1:567  
 Чебышев 地图投影 1:496  
 Чебышев 点 1:572  
 Чебышев 点(Banach 空间中超平面系的) 1:572  
 Чебышев 定理(关于素数的) 1:576  
 Чебышев 定理(关于微分二项式的积分的) 1:576  
 Чебышев 定理(关于最佳逼近的) 1:575  
 Чебышев 多项式 1:572  
 Чебышев 多项式(第二类) 1:573  
 Чебышев 多项式(第一类) 1:572  
 Чебышев 法 1:571  
 Чебышев 方程 1:567  
 Чебышев 函数 1:568  
 Чебышев(函数)系 1:575  
 Чебышев 函数系(Чебышев 系)\* 1:575  
 Чебышев 集 1:574  
 Чебышев 交错 1:566  
 Чебышев 交错点 1:145;1:566  
 Чебышев 结点 1:572  
 Чебышев 求根法 1:572  
 Чебышев 求积公式 1:573  
 Чебышев 网 1:572  
 Чебышев 网(第二类) 1:572  
 Чебышев 网(第一类) 1:572  
 Чебышев 向量(曲率网的) 3:199  
 Чебышев 迭代法 1:569  
 Чебышев 中心 1:566  
 Чебышев 准则(关于地图投影的) 1:495  
 Чебышев 子空间 1:574

Четаев 不稳定性定理 1:581  
 Четаев 定理 1:581  
 Чатаев 方程 1:580  
 Четаев 函数 1:581  
 Четаев 稳定性定理 1:581  
 Четаев 原理 1:581  
 Четаев 最大功原理 5:396  
 Чудаков 定理(关于三素数和的)  
 1:36  
 Чунихин 定理 4:56

## Ш

Шанин 构造性问题 4:1034  
 Шапиро - Лопатинский 互补条件  
 3:478  
 Шапиро - Лопатинский 条件  
 2:350  
 Шарковский 定理 5:350  
 Шафаревич - Tate 群 5:128  
 Шафаревич 猜想 2:847;3:826  
 Шафаревич 定理(关于平面的双有理变换的) 4:171  
 Шафаревич 定理(关于 Cremona 变换的) 4:171  
 Шафаревич 函数 1:99  
 Шидловский 定理 4:817  
 Шилов - Bishop 定理 5:320  
 Шилов 边界 1:410;1:675  
 Шилов 定理 1:673  
 Шилов 定理(关于幂等元的)  
 2:597  
 Ширшов - Witt 定理 3:928  
 Ширшов 定理 3:408;3:910  
 Ширшов 基 1:314  
 Ширшов 问题 3:928  
 Шмидт 群 4:810  
 Шмидт 问题 4:810  
 Шмультян 定理 5:214  
 Шнирельман - Колмогоров 维数  
 2:542  
 Шнирельман 不等式(关于  
 Шнирельман 密度的) 2:47  
 Шнирельман 常数 4:811  
 Шнирельман 定理 2:47;4:811  
 Шнирельман 法 4:811  
 Шнирельман 绝对常数 4:811

Шнирельман 密度(自然数序列的)  
 2:47  
 Шубников - Laves 铺砖 4:172

## Щ

Щепин 定理(关于维数的) 2:183

## Я

Янов 模式 1:135;5:156

以希腊字母起首的复合词

## A

$\alpha$  饱和逻辑系统 3:786  
 $\alpha$  次导出集 2:56  
 $\bar{\alpha}$  丛 1:395  
 $\alpha$  单模格 2:181  
 $\alpha$  点(亚纯函数的) 4:5  
 $\alpha$  极限点 3:447  
 $\alpha$  极限集 3:447  
 $\alpha$  齐次逻辑系统 3:786  
 $\alpha$  容量 4:659  
 $\alpha$  万有逻辑系统 3:786  
 $\alpha$  位势 4:659  
 $\alpha$  序列 4:15  
 $(\alpha, \beta)$  紧形式语言 3:930  
 $[\alpha, \beta]$  振动解 4:46

## B

B 分布 1:349  
 $\beta$  分布(B 分布) 1:349  
 $\beta$  规则 3:310  
 B 函数 1:349  
 $\beta$  连续性 4:441

## Г

$\Gamma$  分布 2:638  
 $\Gamma$  函数 2:639  
 $\Gamma$  结构 3:600;4:369  
 $\Gamma$  结构(流形上的) 3:600  
 $\gamma$  容忍区间 5:183  
 $\Gamma$  同变同态 2:71  
 $\Gamma$  同胚 3:601  
 $\Gamma$  图册 3:600

$\Gamma$  相关 2:637  
 $\Gamma$  映射 3:600  
 $\Gamma$  运算 2:60  
 $\Gamma$  准可序群 4:284

 $\Delta$ 

$\delta - \sigma$  运算 2:1  
 $\delta$  逼近(泛函的) 3:9  
 $\delta$  度量 3:730  
 $\delta$  辐角 2:40  
 $\delta^2$  过程 1:28  
 $\delta$  函数 2:40  
 $\delta$  函数方法 2:40  
 $\delta$  函数(在一点上的) 3:1027  
 $\delta$  函数(Dirac  $\delta$  函数) 2:40  
 $\delta$  函子(正合函子) 2:53  
 $\Delta_n^1$  集 4:344  
 $\delta$  挤压 4:650  
 $\delta$  挤压 Riemann 流形 4:650  
 $\delta$  连续映射 4:354  
 $\delta$  邻域 5:325  
 $\Delta$  算子 3:343  
 $\Delta_2$  条件 4:19  
 $\delta$  同构 4:354  
 $\Delta$  文法 2:752

## E

$\epsilon$  - Hermite 型 2:856;5:517  
 $\epsilon$  闭链 5:422  
 $\epsilon$  殆周期 1:138;2:836  
 $\epsilon$  单形 5:422  
 $\epsilon$  覆盖 1:880;3:373  
 $\epsilon$  轨道(动力系统的) 1:542  
 $\epsilon$  集(集合关于零的邻域的)  
 3:999  
 $\epsilon$  近性(零阶) 5:38  
 $\epsilon$  近性(一阶) 5:38  
 $\epsilon$  矩阵 1:626  
 $\epsilon$  可辨别集合(度量空间中的)  
 1:880  
 $\epsilon$  链 4:885;5:422  
 $\epsilon$  邻域( $\mathbb{C}$  中  $\infty$  的) 3:440  
 $\epsilon$  邻域( $\mathbb{R}$  中  $\pm\infty$  的) 3:440  
 $\epsilon$  平坦的 Riemann 流形 4:651  
 $\epsilon$  容度(集合关于一吸收集的)  
 3:1000



$\epsilon$  容量 1:880;2:315  
 $\epsilon$  熵 2:315  
 $\epsilon$  网 3:728;5:233  
 $\epsilon$  网(度量空间中的) 1:880;  
 3:728  
 $\epsilon$  序数 4:15  
 $\epsilon$  移位 2:180;2:904  
 $\epsilon$  影子(动力系统中的) 1:543  
 $\epsilon$  映射 2:178;2:183  
 $\epsilon$  最优保证策略 3:1033  
 $\epsilon$  最优策略 1:829  
 $\epsilon$  最优策略(在一点上) 1:829  
 $\epsilon$  最优控制 1:829  
 $\epsilon$  最优控制(在一点上) 1:831  
 $\epsilon$  最优停时 4:787

## Z

$\zeta$  函数 5:541  
 $\zeta$  函数(代数几何学中的) 5:546  
 $\zeta$  函数(数论中的) 5:541  
 $\zeta$  函数(算子的) 4:557  
 $\zeta$  函数正则化 4:557  
 $\zeta$  函数正则化行列式 4:557

 $\Theta$ 

$\theta$  常数 4:722  
 $\theta$  除子 4:192  
 $\theta$  覆盖 5:325  
 $\theta$  函数 5:161  
 $\theta$  函数(多复变量的) 5:162  
 $\theta$  函数(特征  $\Gamma$  的 1 阶的) 5:162  
 $\theta$  函数(特征  $\Gamma$  的  $k$  阶的) 5:163  
 $\theta$  函数(1 阶的) 5:162  
 $\theta$  级数 5:163  
 $\theta$  级数(格的) 5:164  
 $\theta$  级数(与二次型相伴的) 3:789  
 $\theta$  绝对形( $\theta$  邻近空间的) 1:18  
 $\theta$  特征 4:643;5:162  
 $\theta$  一致结构 5:325

## K

$\kappa$  表 5:534  
 $\kappa$  点 2:303  
 $\kappa$  度量 3:730  
 $\kappa$  反链条件 1:542

$\kappa$  范畴性 1:499  
 $\kappa$  链条件 1:542  
 $\kappa$  曲线 3:248  
 $\kappa$  正规拓扑空间 3:988  
 $\kappa\alpha$  集(典范集) 1:462

 $\Lambda$ 

$\lambda$  覆盖 1:880  
 $\lambda$  环 3:312  
 $\lambda$  可定义的函数 3:311  
 $\lambda$  可和性 5:74  
 $\Lambda$  连续函数 3:628  
 $\lambda$  填装 1:880  
 $\lambda$  微分算子 2:530  
 $\lambda$  伪微分算子 2:530  
 $\lambda$  项 3:310  
 $\Lambda$  型度量 3:190  
 $\lambda$  演算 3:310  
 $\lambda$  准素分支(向量空间的) 1:627

## M

$\mu$  表 5:534  
 $\mu$  几乎处处  $\epsilon$  最优策略 1:829  
 $\mu$  几乎处处  $\epsilon$  最优控制 1:829  
 $\mu$  算子 1:725;3:367  
 $\mu$  维数( $\mu \dim$ ) 3:724  
 $\mu$  相等的可测集 3:703  
 $\mu$  正则 Haar 测度 2:797

## N

$\nu$  约化齐性空间 4:533

 $\Pi$ 

$\pi$  基 1:312;1:472;4:357  
 $\pi$  集 1:462;3:988;4:437  
 $\Pi_n^1$  集 3:577  
 $\Pi_n^1$  集 4:344  
 $\pi$  紧基 1:682  
 $\pi$  可分群 4:56  
 $\pi$  可解群 4:56  
 $\pi_\kappa$  空间 3:293  
 $\pi$  权 1:472  
 $\Pi$  群 4:58  
 $\pi$  群 4:58  
 $\Pi$  网络 1:800

$\pi$  元素 4:58  
 $\pi$  正规拓扑空间 3:988  
 $\pi$  正则环 4:551  
 $\pi$  子群 4:56;4:58;5:91  
 $\pi$  最优解 4:787

## P

$\rho$  半单半群 4:469  
 $\rho$  根半群 4:469  
 $\rho$  横截(子集族的) 5:121  
 $(\rho, \sigma)$  可约求积公式 2:778

 $\Sigma$ 

$\sigma_1$  饱和模型 4:525  
 $\sigma$  不相交覆盖 4:76  
 $\sigma$  不相交基 1:312  
 $\sigma$  代数 3:698;3:749  
 $\sigma$  代数的域流 5:2  
 $\sigma$  代数(集合的) 1:76  
 $\sigma$  代数(事件的) 1:403  
 $\sigma$  代数(Baire 集的) 3:702  
 $\Sigma$  单列模 4:751  
 $\sigma$  点有限基 1:312  
 $\sigma$  多孔集 1:616;4:246  
 $\sigma$  光滑泛函 3:702  
 $\sigma$  过程 3:817  
 $\sigma$  环 3:699  
 $\Sigma$  积 5:196  
 $\Sigma_n^1$  集 3:577  
 $\Sigma_n^1$  集 4:344  
 $\sigma$  加性集函数 4:799  
 $\sigma$  紧拓扑空间 1:682  
 $\sigma$  局部有限基 1:312  
 $\sigma$  局部有限开覆盖 4:76  
 $\sigma$  离散基 1:312  
 $\sigma$  列紧拓扑空间 1:682  
 $\sigma$  群 4:58  
 $\Sigma$  容许理想 4:671  
 $\Sigma$  容许子环 4:671  
 $\Sigma$  算子环 4:671  
 $\Sigma$  算子同构 4:671  
 $\Sigma$  算子同态 4:671  
 $\sigma$  拓扑 5:213  
 $\sigma$  亚紧拓扑空间 2:317;  
 4:76  
 $\sigma$  有限测度 3:699

$\sigma$  域 3:704  
 $\sigma$  域流 5:2  
 $\sigma$  域(事件的) 1:403  
 $\sigma$  允许运算(字上的) 1:236  
 $\Sigma$  自由算子群 3:1029  
 $\sigma(X, Y)$  拓扑 5:58  
 $(\sigma, \epsilon)$ -Hermite 型 4:798

## T

$\tau$  层 4:869  
 $\tau$  等价代数闭链 1:81  
 $\tau$  仿紧拓扑空间 4:76  
 $\tau$  光滑泛函 3:702  
 $\tau$  光滑 Borel 测度 1:404  
 $\tau$  紧拓扑空间 1:682  
 $\tau$  群 4:58  
 $\tau$  序连续算子 4:661  
 $\tau$  抑制拓扑空间 2:8  
 $\tau$  周期中继触点模式 4:573

 $\Phi$ 

$\Phi$  变差 5:374  
 $\Phi$  代数 4:675  
 $\varphi$  可约二次型 4:387  
 $\Phi$  零调层 4:804  
 $\Phi$  算子 2:563;3:920  
 $\varphi$  稳定性 4:965

## X

$\chi^2$  分布 1:583  
 $\chi^2$  检验 1:584

 $\Psi$ 

$\psi$  函数 4:375  
 $\Psi$  环 3:313  
 $\psi$  稳定性 4:965

 $\Omega$ 

$\omega$  不完全性 3:1016

$\omega$  不相容算术理论 1:705  
 $\omega$  不相容性 3:1016  
 $\Omega$  代数 4:821  
 $\omega^2$  分布 3:1016  
 $\omega$  规则( $\omega$  法则) 1:230;1:479;  
 3:57  
 $\omega$  极限点 3:447  
 $\omega$  极限集[合] 3:447;5:29  
 $\omega$  内射模 4:375  
 $\Omega$  谱 4:936  
 $\Omega$  群(多算子群) 3:851  
 $\omega$  完全算术理论 1:705  
 $\omega$  完全性 3:1016  
 $\omega$  稳定的逻辑理论 4:974  
 $\Omega$  稳定的微分同胚 4:693  
 $\Omega$  系统 1:106;4:821  
 $\Omega$  系统簇 1:107  
 $\omega$  相容性 3:1016  
 $\omega$  相容性(逻辑理论中的) 4:898  
 $\omega$  映射 2:180  
 $\omega$  证明 1:230  
 $(\Omega, \Delta)$  广环 4:672

## 以数字和符号起首的复合词

0 单半群 1:704;4:831  
 0 极小理想 3:745  
 0 极小双边理想 3:745  
 0 极小右理想 3:745  
 0 极小左理想 3:745  
 0 阶 Lie 代数 3:412  
 0 模临界点(函数的) 4:866  
 0 双单半群 4:831  
 0 楔 2:953  
 $(0, 1)$  矩阵 4:129  
 $\{0, 1\}$  可测基数 1:475  
 1 范畴 1:501  
 $(-1)^*$  构造 5:447

1 可归约性 4:528  
 1 上闭链 1:280  
 1 上闭链(群的) 1:890  
 1 态射(恒等态射) 1:500  
 1 相依过程 3:588  
 1 形式 1:482  
 1 形式 Finsler 度量 2:486  
 1 形式 Finsler 空间 2:486  
 2 步 Adams-Bashforth 法 1:523  
 2 传递性 4:937  
 2 范畴 1:501  
 2 上闭链 2:424  
 $2n$  交错链环 3:273  
 3 带 5:294  
 3 单形 5:154  
 3 值逻辑(Lucasiewicz 的) 3:608  
 “ $3\sigma$ ”法则 5:171  
 4 亏格(链环的) 3:278  
 4 折纽结 3:523  
 8 字纽结 3:523  
 8 字图(8 字纽结) 3:523  
 13 球问题 1:665  
 15 名女生问题 1:599  
 36 名军官问题 1:598  
 $\bar{\partial}$ -Neumann 边界条件 3:896  
 $\bar{\partial}$ -Neumann 问题 3:895  
 $\bar{\partial}$  闭微分形式 1:379  
 $\bar{\partial}$  方程 1:379  
 $\partial$  问题 1:486  
 $\bar{\partial}$  延拓(函数的) 2:597  
 $\forall$  有限理论 4:525  
 $\nabla$  算子 2:808  
 $\square$  算子 3:344  
 \* 正则环 4:464  
 $\wedge$  半格 4:770  
 $\wedge$  主格元素 3:862  
 $\vee$  半格 4:770  
 $\vee$  主格元素 3:862  
 $\cup$  积 1:644;1:651;2:912  
 $\infty$  同伦型 2:923



# 英文索引

## A

- A-integral 1:1  
 $\mathcal{A}$ -operation 1:1  
a posteriori distribution 1:1  
a posteriori probability 1:2  
a priori distribution 1:2  
a priori probability 1:2  
 $\mathcal{A}$ -set 1:2  
A-system 1:2  
abacus 1:3  
Abel criterion 1:3  
Abel differential equation 1:3  
Abel-Goncharov problem 1:4  
Abel inequality 1:5  
Abel integral equation 1:5  
Abel-Poisson summation method 1:6  
Abel problem 1:6  
Abel summation method 1:7  
Abel theorem 1:7  
Abel transformation 1:8  
Abelian category 1:8  
Abelian differential 1:10  
Abelian function 1:11  
Abelian group 1:12  
Abelian integral 1:14  
Abelian scheme 1:15  
Abelian variety 1:16  
abnormal subgroup 1:17  
abscissa 1:17  
absolute 1:17  
absolute continuity 1:18  
absolute error 1:19  
absolute geometry 1:19  
absolute moment 1:20  
absolute retract for normal spaces 1:20  
absolute summability 1:20  
absolute topological property 1:21  
absolute value 1:21  
absolutely convergent improper integral 1:21  
absolutely convergent series 1:22  
absolutely-flat ring 1:23  
absolutely integrable function 1:23  
absolutely-unbiased sequence 1:24  
absorbing state 1:24  
absorption laws 1:24  
abstract algebraic geometry 1:24  
abstract analytic function 1:25  
abstraction, mathematical 1:26  
abstraction by identification 1:27  
abstraction of actual infinity 1:27  
abstraction of potential realizability 1:27  
acceleration of convergence 1:28  
accumulation of errors 1:29  
accumulation point 1:31  
action 1:31  
action of a group on a manifold 1:32  
acyclic continuum 1:32  
acyclic element 1:32  
Adams method 1:32  
addition 1:33  
addition of sets 1:33  
addition theorem 1:34  
additive arithmetic function 1:34  
additive category 1:34  
additive divisor problem 1:35  
additive function 1:35  
additive group 1:35  
additive noise 1:35  
additive number theory 1:36  
additive problems 1:37  
additive relation 1:38  
additive theory of ideals 1:38  
additive uniform structure 1:39  
additivity 1:39  
adèle 1:39  
adiabatic flow 1:40  
adiabatic invariant 1:40  
adic topology 1:41  
adjoint connections 1:42

- adjoint differential equation 1:42
- adjoint functor 1:44
- adjoint group 1:45
- adjoint linear transformation 1:45
- adjoint matrix 1:45
- adjoint module 1:45
- adjoint operator 1:46
- adjoint representation 1:46
- adjoint space 1:47
- adjoint surface 1:47
- adjustment method 1:47
- adsorption 1:48
- aerodynamics, mathematical problems of 1:48
- affine algebraic set 1:51
- affine connection 1:52
- affine coordinate frame 1:54
- affine coordinate system 1:54
- affine curvature 1:54
- affine differential geometry 1:54
- affine distance 1:56
- affine geometry 1:56
- affine group 1:56
- affine hull 1:56
- affine minimal surface 1:56
- affine morphism 1:56
- affine normal 1:57
- affine parameter 1:57
- affine pseudo-distance 1:57
- affine scheme 1:57
- affine space 1:58
- affine sphere 1:59
- affine tensor 1:59
- affine torsion 1:59
- affine transformation 1:59
- affine unimodular group 1:60
- affine variety 1:60
- affinity 1:61
- affinor 1:61
- affix of a complex number 1:61
- Airy equation 1:61
- Airy functions 1:61
- Aitken scheme 1:63
- Albanese variety 1:63
- albedo method 1:64
- Aleksandrov-Čech homology and cohomology 1:64
- Aleksandrov compactification 1:64
- aleph 1:65
- aleph-zero 1:65
- Alexander duality 1:65
- Alexander invariants 1:66
- Al'fa 1:68
- Algams 1:68
- algebra 1:68
- algebra 1:68
- algebra, fundamental theorem of 1:71
- algebra of functions 1:71
- algebra of logic 1:72
- algebra of measures 1:75
- algebra of sets 1:76
- algebra with associative powers 1:77
- algebraic algebra 1:77
- algebraic branch point 1:77
- algebraic closure 1:78
- algebraic curve 1:78
- algebraic cycle 1:80
- algebraic dimension 1:82
- algebraic equation 1:82
- algebraic function 1:84
- algebraic geometry 1:87
- algebraic group 1:91
- algebraic group of transformations 1:91
- algebraic independence 1:92
- algebraic independence, measure of 1:92
- algebraic irrationality 1:92
- algebraic  $K$ -theory 1:92
- algebraic lattice 1:95
- algebraic logarithmic singular point 1:95
- algebraic number 1:95
- algebraic number theory 1:97
- algebraic operation 1:100
- algebraic polynomial of best approximation 1:101
- algebraic space 1:101
- algebraic surface 1:102
- algebraic system 1:105
- algebraic system, automorphism of an 1:109
- algebraic systems, class of 1:110
- algebraic systems, quasi-variety of 1:111
- algebraic systems, variety of 1:111
- algebraic topology 1:113
- algebraic torus 1:115
- algebraic varieties, arithmetic of 1:115
- algebraic variety 1:116
- algebraic variety, automorphism of an 1:116



- algebraically closed field 1:117  
 Algol 1:117  
 Algol-68 1:118  
 algorithm 1:119  
 algorithm, complexity of description of an 1:121  
 algorithm, computational complexity of an 1:122  
 algorithm in an alphabet 1:124  
 algorithm, local 1:124  
 algorithm, representation of an 1:126  
 algorithmic information theory 1:126  
 algorithmic language 1:128  
 algorithmic problem 1:130  
 algorithmic reducibility 1:133  
 algorithmic theory of sets 1:133  
 algorithms, combinations of 1:133  
 algorithms, equivalence of 1:134  
 algorithms, theory of 1:135  
 aliquot ratio 1:137  
 almost-complex structure 1:137  
 almost-everywhere 1:138  
 almost-period 1:138  
 almost-periodic analytic function 1:138  
 almost-periodic function 1:139  
 almost-periodic function on a group 1:141  
 almost-prime number 1:142  
 almost-reducible linear system 1:142  
 almost-symplectic structure 1:143  
 alphabet 1:144  
 alternating group 1:144  
 alternating knots and links 1:144  
 alternating series 1:144  
 alternation 1:145  
 alternation, points of 1:145  
 alternative 1:145  
 alternative rings and algebras 1:145  
 alternion 1:147  
 amalgam 1:148  
 amalgam of groups 1:148  
 amicable numbers 1:149  
 ample sheaf 1:149  
 ample vector bundle 1:149  
 amplitude of an elliptic integral 1:149  
 anallagmatic geometry 1:150  
 analytic capacity 1:150  
 analytic complement 1:150  
 analytic continuation 1:150  
 analytic curve 1:151  
 analytic differential 1:152  
 analytic expression 1:152  
 analytic function 1:152  
 analytic function, element of an 1:160  
 analytic functional 1:161  
 analytic geometry 1:161;1:162  
 analytic group 1:162  
 analytic image 1:163  
 analytic "landschaft" 1:163  
 analytic manifold 1:164  
 analytic mapping 1:165  
 analytic model of a language 1:165  
 analytic number theory 1:166  
 analytic operator 1:171  
 analytic plane 1:171  
 analytic polyhedron 1:171  
 analytic representation 1:172  
 analytic ring 1:172  
 analytic set 1:172  
 analytic sheaf 1:174  
 analytic space 1:174  
 analytic surface 1:177  
 analytic surface (in algebraic geometry) 1:177  
 analytic theory of differential equations 1:178  
 analytic vector 1:180  
 Andronov-Witt theorem 1:181  
 Anger function 1:181  
 angle 1:181  
 angular boundary value 1:183  
 anisotropic group 1:183  
 anisotropic kernel 1:183  
 annihilation operators 1:183  
 annihilator 1:184  
 annular domain 1:185  
 anti-commutative algebra 1:185  
 anti-conformal mapping 1:185  
 anti-discrete space 1:185  
 anti-discrete topology 1:185  
 anti-holomorphic function 1:185  
 anti-isomorphism of partially ordered sets 1:185  
 anti-isomorphism of rings 1:185  
 anti-motion 1:185  
 anti-parallel straight lines 1:185  
 anti-parallelogram 1:185  
 anti-prism 1:186  
 anti-symmetric tensor 1:186  
 antilogarithm 1:186

- antinomy 1:186
- antipodes 1:188
- antitone mapping 1:188
- aperiodic automorphism 1:188
- apolar nets 1:188
- Apollonius problem 1:188
- Apollonius theorem 1:188
- apothem 1:189
- Appell equations 1:189
- Appell polynomials 1:189
- Appell transformation 1:191
- applicate 1:191
- approximate compactness 1:191
- approximate continuity 1:192
- approximate derivative 1:192
- approximate differentiability 1:192
- approximate limit 1:193
- approximately-compact set 1:193
- approximation 1:194
- approximation by periodic transformations 1:194
- approximation in the mean 1:195
- approximation of a differential boundary value problem by difference boundary value problems 1:195
- approximation of a differential equation by difference equations 1:196
- approximation of a differential operator by difference operators 1:197
- approximation of functions 1:199
- approximation of functions, direct and inverse theorems 1:202
- approximation of functions, extremal problems in function classes 1:204
- approximation of functions, linear methods 1:207
- approximation of functions, measure of 1:210
- approximation of functions of a complex variable 1:210
- approximation of functions of several real variables 1:213
- approximation order 1:215
- approximation theory 1:215
- Arabic numerals 1:217
- arbitration scheme 1:217
- arc 1:218
- arc, contactless (free) 1:218
- arc function 1:218
- Archimedean axiom 1:218
- Archimedean bodies 1:218
- Archimedean class 1:218
- Archimedean group 1:219
- Archimedean ring 1:219
- Archimedean semi-group 1:219
- Archimedean spiral 1:219
- arcsine distribution 1:220
- arcsine law 1:220
- area 1:221
- area function 1:223
- area-function 1:224
- area method 1:224
- area principle 1:224
- Arf-invariant 1:225
- argument 1:225
- argument, principle of the 1:225
- arithmetic 1:226
- arithmetic continuum 1:228
- arithmetic distribution 1:228
- arithmetic, formal 1:229
- arithmetic function 1:230
- arithmetic genus 1:231
- arithmetic group 1:231
- arithmetic mean 1:232
- arithmetic progression 1:232
- arithmetic proportion 1:232
- arithmetic root 1:232
- arithmetic series 1:232
- arithmetic space 1:233
- arithmetic triangle 1:233
- arithmetical averages, summation method of 1:233
- arithmetization 1:233
- arrangement 1:234
- Artinian group 1:234
- Artinian module 1:235
- Artinian ring 1:235
- Arzelà-Ascoli theorem 1:235
- Arzelà variation 1:235
- assertion 1:236
- associated function 1:236
- associative calculus 1:236
- associative rings and algebras 1:237
- associativity 1:239
- associator 1:239
- astroid 1:239
- astronomy, mathematical problems of 1:240
- astronomy, mathematical problems of 1:240
- astrophysics, mathematical problems of 1:241



- asymmetric variety 1:244
- asymmetry coefficient 1:244
- asymmetry of a distribution 1:245
- asymptote 1:245
- asymptotic basis 1:245
- asymptotic density 1:245
- asymptotic derivative 1:245
- asymptotic direction 1:245
- asymptotic equality 1:246
- asymptotic expansion 1:246
- asymptotic expression 1:247
- asymptotic formula 1:247
- asymptotic limit 1:247
- asymptotic line 1:247
- asymptotic negligibility 1:248
- asymptotic net 1:248
- asymptotic point 1:248
- asymptotic power series 1:248
- asymptotic representation 1:249
- asymptotic sequence 1:249
- asymptotic series 1:249
- asymptotic value 1:249
- asymptotically-efficient estimator 1:250
- asymptotically-stable solution 1:250
- asymptotically-unbiased estimator 1:250
- asymptotically-unbiased test 1:251
- asymptotics of arithmetic functions 1:251
- atom 1:251
- atomic distribution 1:251
- atomic lattice 1:251
- atomic ring 1:251
- attain-able boundary arc 1:252
- attainable boundary point 1:252
- attainable subgroup 1:252
- attraction domain of a stable distribution 1:252
- attraction, partial domain of 1:253
- auto-correlation 1:253
- auto-correlogram 1:253
- auto-oscillation 1:253
- auto-regression 1:255
- auto-regressive process 1:255
- autocovariance 1:255
- automata, algebraic theory of 1:255
- automata, complete systems of 1:256
- automata, composition of 1:257
- automata, equivalence of 1:258
- automata, experiments with 1:258
- automata, homomorphism of 1:259
- automata, methods of specification of 1:259
- automata, minimization of 1:263
- automata, theory of 1:263
- automatic control theory 1:264
- automatic programming 1:270
- automatic translation 1:271
- automaton 1:272
- automaton, behaviour of an 1:274
- automaton, finite 1:275
- automaton, probabilistic 1:278
- automorphic form 1:278
- automorphic function 1:279
- automorphism 1:281
- autonomous system 1:281
- autonymy 1:283
- average 1:283
- average rotation 1:284
- average value, theorem on variations of the 1:284
- averaging 1:285
- axial vector 1:286
- axiom 1:286
- axiom of choice 1:286
- axiom of extensionality 1:286
- axiom scheme 1:287
- axiomatic method 1:287
- axiomatic set theory 1:289
- axiomatized class 1:293
- axonometry 1:293

## B

- $(B, \varphi)$ -structure 1:295
- Baer multiplication 1:295
- Baire classes 1:296
- Baire property 1:296
- Baire set 1:296
- Baire space 1:296
- Baire theorem 1:297
- balanced module 1:297

- balanced ring 1:297
- balanced set 1:297
- balayage method 1:298
- ball 1:299
- Banach algebra 1:299
- Banach analytic space 1:301
- Banach indicatrix 1:302
- Banach lattice 1:302
- Banach-Mazur functional 1:303
- Banach module 1:304
- Banach space 1:304
- Banach-Steinhaus theorem 1:308
- band of semi-groups 1:309
- bar induction 1:309
- barber paradox 1:310
- Barbier theorem 1:310
- barrelled space 1:310
- barrier 1:310
- Bartlett test 1:311
- barycentric coordinates 1:311
- barycentric subdivision 1:312
- base 1:312
- base change 1:313
- base of a deformation 1:313
- basic commutator 1:314
- basic set 1:314
- basis 1:314
- Bateman function 1:318
- Bateman method 1:318
- Bayes formula 1:319
- Bayesian approach 1:319
- Bayesian approach, empirical 1:320
- Bayesian decision function 1:321
- Bayesian estimator 1:321
- Behnke-Stein theorem 1:321
- Behrens-Fisher problem 1:322
- bell-shaped game 1:322
- Bellman equation 1:322
- Bellman-Harris process 1:323
- Beltrami coordinates 1:323
- Beltrami-Enneper theorem 1:323
- Beltrami equation 1:323
- Beltrami interpretation 1:323
- Beltrami method 1:324
- Bendixson criterion 1:324
- Bendixson sphere 1:324
- Bendixson transformation 1:324
- Bergman kernel function 1:325
- Bergman-Weil representation 1:326
- Bernoulli automorphism 1:327
- Bernoulli distribution 1:327
- Bernoulli equation 1:328
- Bernoulli integral 1:328
- Bernoulli lemniscate 1:328
- Bernoulli method 1:328
- Bernoulli numbers 1:329
- Bernoulli polynomials 1:330
- Bernoulli random walk 1:331
- Bernoulli scheme 1:332
- Bernoulli theorem 1:332
- Bernoulli trials 1:333
- Bernshtein inequality 1:334
- Bernshtein interpolation method 1:335
- Bernshtein method 1:335
- Bernshtein polynomials 1:337
- Bernshtein-Rogosinski summation method 1:337
- Bernshtein theorem 1:338
- Berry-Esseen inequality 1:338
- Bertini theorems 1:339
- Bertrand criterion 1:339
- Bertrand curves 1:339
- Bertrand paradox 1:339
- Bertrand postulate 1:340
- Besicovitch almost-periodic functions 1:340
- Bessel equation 1:340
- Bessel functions 1:342
- Bessel inequality 1:343
- Bessel interpolation formula 1:343
- Bessel potential 1:344
- Bessel system 1:344
- best approximation 1:345
- best approximation in the mean 1:346
- best approximations, sequence of 1:346
- best complete approximation 1:347
- best linear method 1:347
- best quadrature formula 1:348
- beta-distribution 1:349
- beta-function 1:349
- Betti group 1:350
- Betti number 1:350
- Bezout ring 1:350
- Bezout theorem 1:350
- Bianchi congruence 1:350
- Bianchi identity 1:351



- Bianchi surface 1:351  
 Bianchi transformation 1:351  
 biased estimator 1:351  
 bicategory 1:352  
 bicharacteristic 1:352  
 bicomplex 1:353  
 biconnected spaces 1:353  
 bicyclic semi-group 1:353  
 bicylindrical coordinates 1:353  
 bicylindrical domain 1:353  
 bicylindrics 1:354  
 Bieberbach conjecture 1:354  
 Bieberbach-Eilenberg functions 1:355  
 Bieberbach polynomials 1:356  
 bifactorial mapping 1:356  
 bifunctor 1:356  
 bifurcation 1:357  
 biharmonic function 1:358  
 biholomorphic mapping 1:359  
 bijection 1:359  
 bilinear differential 1:359  
 bilinear form 1:360  
 bilinear functional 1:361  
 bilinear integral form 1:361  
 bilinear mapping 1:361  
 bimatrix game 1:362  
 bimodal distribution 1:362  
 bimodule 1:362  
 bimorphism 1:362  
 binary computing system 1:362  
 binary form 1:363  
 binary Lie algebra 1:363  
 binary  $p$ -adic group 1:363  
 binary quadratic form 1:364  
 binary relation 1:364  
 binary unit 1:365  
 binomial 1:365  
 binomial coefficients 1:365  
 binomial distribution 1:366  
 binomial series 1:366  
 binormal 1:367  
 biorthogonal system 1:367  
 biplanar space 1:367  
 bipolar coordinates 1:367  
 biquadratic equation 1:368  
 birational geometry 1:368  
 birational mapping 1:369  
 birational morphism 1:369  
 birational transformation 1:369  
 Birkhoff ergodic theorem 1:370  
 Birkhoff-Witt theorem 1:370  
 birth-and-death process 1:371  
 bisector plane 1:371  
 bisectrix 1:371  
 bit 1:371  
 Bitsadze equation 1:372  
 bivector 1:372  
 bivector space 1:373  
 Björling problem 1:373  
 Blaschke product 1:374  
 Blaschke selection theorem 1:375  
 Blaschke-Weyl formula 1:375  
 Bloch constant 1:375  
 block design 1:375  
 block-diagonal operator 1:377  
 Blotto games 1:377  
 Bochner almost-periodic functions 1:377  
 Bochner integral 1:377  
 Bochner-Martinelli representation 1:378  
 Bogolyubov chain of equations 1:379  
 Bogolyubov inequality 1:380  
 Bogolyubov theorem 1:381  
 Bohl almost-periodic functions 1:382  
 Bohr almost-periodic functions 1:383  
 Bohr compactification 1:383  
 Bohr-Favard inequality 1:384  
 Boks integral 1:384  
 Boltzmann distribution 1:384  
 Boltzmann equation 1:385  
 Boltzmann equation, linearized 1:386  
 Boltzmann  $H$ -theorem 1:386  
 Boltzmann statistics 1:387  
 Bolza problem 1:387  
 Bolzano-Weierstrass selection principle 1:388  
 Bolzano-Weierstrass theorem 1:388  
 Bonnesen inequality 1:389  
 Bonnet net 1:389  
 Bonnet theorem 1:389  
 Boolean algebra 1:390  
 Boolean equation 1:392  
 Boolean function 1:392  
 Boolean functions, metric theory of 1:392  
 Boolean functions, minimization of 1:394  
 Boolean functions, normal forms of 1:397

- Boolean ring 1:398
- Boolean-valued model 1:398
- Booth lemniscate 1:399
- bordering method 1:400
- bordering of a space 1:401
- bordism 1:401
- Borel-Cantelli lemma 1:403
- Borel field of events 1:403
- Borel field of sets 1:403
- Borel fixed-point theorem 1:403
- Borel function 1:403
- Borel isomorphism 1:404
- Borel-Lebesgue covering theorem 1:404
- Borel measure 1:404
- Borel set 1:405
- Borel set, criterion for a 1:405
- Borel set of ambiguous class  $\alpha$  1:405
- Borel strong law of large numbers 1:405
- Borel subgroup 1:406
- Borel summation method 1:406
- Borel system of sets 1:407
- Borel transform 1:407
- Borsuk problem 1:407
- Bose-Einstein statistics 1:407
- Bott periodicity theorem 1:408
- bound variable 1:409
- bound vector 1:409
- boundary 1:409
- boundary conditions 1:409
- boundary correspondence, principle of 1:409
- boundary correspondence (under conformal mapping) 1:410
- boundary (in the theory of uniform algebras) 1:410
- boundary layer 1:411
- boundary-layer theory 1:412
- boundary (of a manifold) 1:414
- boundary properties of analytic functions 1:415
- boundary value problem, complex-variable methods 1:418
- boundary value problem, elliptic equations 1:419
- boundary value problem, numerical methods for partial differential equations 1:421
- boundary value problem, ordinary differential equations 1:423
- boundary value problem, partial differential equations 1:424
- boundary value problems in potential theory 1:426
- boundary value problems of analytic function theory 1:427
- boundary variation, method of 1:429
- bounded operator 1:430
- bounded set 1:430
- boundedly-compact set 1:430
- Bourget function 1:431
- brachistochrone 1:431
- braid theory 1:431
- branch index 1:434
- branch of an analytic function 1:435
- branch point 1:435
- branching of solutions 1:436
- branching point (in a minimal surface) 1:437
- branching process 1:438
- branching process, age-dependent 1:439
- branching process with a finite number of particle types 1:440
- branching process with a random medium 1:441
- branching process with diffusion 1:441
- branching process with immigration 1:442
- branching process, regularity of 1:443
- Brandt semi-group 1:443
- Brauer group 1:443
- Brauer-Severi variety 1:444
- breaking point 1:445
- Brianchon theorem 1:445
- Briot-Bouquet equation 1:445
- Brouwer lattice 1:446
- Brouwer theorem 1:446
- Brownian motion 1:447
- Bruhat decomposition 1:447
- Brun sieve 1:447
- Brun theorem 1:448
- Brunn-Minkowski theorem 1:448
- Bubnov-Galerkin method 1:448
- Budan-Fourier theorem 1:448
- Buffon problem 1:448
- bundle 1:449
- Bunyakovskii inequality 1:449
- Burkill integral 1:449
- Bürmann-Lagrange series 1:450
- Burnside problem 1:451



## C

- $C^*$ -algebra 1:453  
 $C\mathcal{A}$ -set 1:455  
 cactoid 1:455  
 calculus 1:455  
 calculus of classes 1:456  
 Calderón-Zygmund operator 1:457  
 calibre 1:457  
 Campbell-Hausdorff formula 1:458  
 canal surface 1:459  
 cancellation of singularities 1:459  
 canonical class 1:460  
 canonical correlation 1:460  
 canonical correlation coefficients 1:460  
 canonical curve 1:460  
 canonical imbedding 1:461  
 canonical product 1:461  
 canonical sections 1:462  
 canonical set 1:462  
 Cantor axiom 1:462  
 Cantor curve 1:463  
 Cantor discontinuum 1:463  
 Cantor manifold 1:463  
 Cantor paradox 1:464  
 Cantor set 1:464  
 Cantor theorem 1:465  
 cap 1:466  
 capacity 1:466  
 capacity potential 1:468  
 Carathéodory class 1:468  
 Carathéodory domain 1:469  
 Carathéodory-Fejér problem 1:469  
 Carathéodory measure 1:470  
 Carathéodory theorem 1:470  
 Cardano formula 1:471  
 cardinal characteristic 1:471  
 cardinal number 1:474  
 cardinality 1:475  
 cardioid 1:475  
 Carleman boundary value problem 1:476  
 Carleman inequality 1:476  
 Carleman kernel 1:476  
 Carleman theorem 1:477  
 Carleson set 1:478  
 Carleson theorem 1:478  
 Carlson inequality 1:478  
 Carlson method 1:479  
 Carnap rule 1:479  
 Carnot theorem 1:479  
 Carson transform 1:480  
 Cartan decomposition 1:480  
 Cartan lemma 1:480  
 Cartan matrix 1:480  
 Cartan method of exterior forms 1:481  
 Cartan subalgebra 1:484  
 Cartan subgroup 1:485  
 Cartan theorem 1:486  
 Cartan-Weyl basis 1:487  
 Carter subgroup 1:487  
 Cartesian coordinates 1:488  
 Cartesian factorization 1:488  
 Cartesian orthogonal coordinate system 1:488  
 Cartesian product 1:488  
 Cartesian square 1:488  
 cartographic projection 1:489  
 cartography, mathematical problems in 1:493  
 cascade 1:497  
 cascade method 1:497  
 Casimir element 1:498  
 Cassini oval 1:498  
 Catalan surface 1:499  
 categoric system of axioms 1:499  
 categoricity in cardinality  $\kappa$  1:499  
 category 1:500  
 category (in the sense of Lyusternik-Shnirel'man) 1:505  
 category of a set 1:506  
 category of groups 1:506  
 category with involution 1:506  
 catenary 1:507  
 catenoid 1:507  
 cathetus 1:507  
 Cauchy characteristic problem 1:507  
 Cauchy criteria 1:508  
 Cauchy criterion 1:510  
 Cauchy distribution 1:510  
 Cauchy filter 1:511  
 Cauchy-Hadamard theorem 1:511  
 Cauchy inequality 1:512

- Cauchy integral 1:512
- Cauchy integral theorem 1:516
- Cauchy kernel 1:517
- Cauchy-Kovalevskaya theorem 1:517
- Cauchy matrix 1:518
- Cauchy operator 1:518
- Cauchy problem 1:519
- Cauchy problem, numerical methods for ordinary differential equations 1:522
- Cauchy-Riemann conditions 1:524
- Cauchy sequence 1:525
- Cauchy theorem 1:525
- caustic 1:526
- Cavalieri principle 1:527
- Cayley algebra 1:527
- Cayley-Darboux equation 1:527
- Cayley-Dickson algebra 1:527
- Cayley form 1:528
- Cayley-Klein parameters 1:529
- Cayley numbers 1:530
- Cayley surface 1:530
- Cayley table 1:530
- Cayley transform 1:530
- Čech cohomology 1:531
- cell 1:531
- cell complex 1:531
- cellular mapping 1:532
- cellular space 1:532
- central algebra 1:532
- central exponents 1:532
- central limit theorem 1:534
- central product of groups 1:537
- central series of a group 1:537
- central simple algebra 1:537
- centralizer 1:537
- centre 1:537;1:538
- centre and focus problem 1:539
- centre of a group 1:539
- centre of a partially ordered set 1:539
- centre of ring 1:539
- centred family of sets 1:539
- centro-affine geometry 1:540
- centro-affine space 1:540
- centro-focus 1:540
- certain event 1:540
- certainty 1:540
- Cesàro curve 1:540
- Cesàro summation methods 1:541
- Ceva theorem 1:541
- chain 1:542
- chain condition 1:542
- chain module 1:542
- chain recurrence 1:542
- chain ring 1:543
- chamber 1:543
- channel with a finite memory 1:543
- channel with a finite number of states 1:544
- channel with feedback 1:544
- channel with multiple directions 1:545
- chaos 1:546
- Chaplygin method 1:547
- Chaplygin theorem 1:548
- Chapman-Enskog method 1:548
- character formula 1:549
- character group 1:550
- character of a  $C^*$ -algebra 1:551
- character of a finite-dimensional representation of a semi-simple Lie algebra 1:551
- character of a group 1:551
- character of a representation of a group 1:552
- character of a representation of an associative algebra 1:552
- character of a semi-group 1:553
- character of an associative algebra 1:553
- characteristic 1:554
- characteristic class 1:556
- characteristic equation 1:559
- characteristic exponent 1:560
- characteristic function 1:560
- characteristic function (of a set) 1:561
- characteristic functional 1:561
- characteristic manifold 1:562
- characteristic mapping 1:562
- characteristic number 1:562
- characteristic of a field 1:562
- characteristic polynomial 1:563
- characteristic strip 1:563
- characteristic subgroup 1:563
- characteristic surface 1:564
- characterization theorems 1:564
- charge 1:564
- Charlier distribution 1:564
- Charlier polynomials 1:564



- chart 1:565
- Chasles theorem 1:566
- Chebyshev alternation 1:566
- Chebyshev approximation 1:566
- Chebyshev centre 1:566
- Chebyshev constant 1:567
- Chebyshev equation 1:567
- Chebyshev function 1:568
- Chebyshev inequality 1:568
- Chebyshev inequality (in probability theory) 1:568
- Chebyshev iteration method 1:569
- Chebyshev method 1:571
- Chebyshev net 1:572
- Chebyshev point 1:572
- Chebyshev polynomials 1:572
- Chebyshev quadrature formula 1:573
- Chebyshev radius 1:574
- Chebyshev set 1:574
- Chebyshev system 1:575
- Chebyshev theorem 1:575
- Chebyshev theorem (on the integration of binomial differentials) 1:576
- Chebyshev theorems (on prime numbers) 1:576
- Chern character 1:577
- Chern class 1:577
- Chern number 1:579
- Chetaev equations 1:580
- Chetaev function 1:581
- Chetaev principle 1:581
- Chetaev theorems 1:581
- Chevalley group 1:582
- 'chi-squared' distribution 1:583
- 'chi-squared' test 1:584
- Chinese remainder theorem 1:584
- Choquet simplex 1:585
- chord 1:585
- chord method 1:585
- Chow ring 1:585
- Chow theorem 1:586
- Chow variety 1:586
- Christoffel-Darboux formula 1:586
- Christoffel numbers 1:587
- Christoffel-Schwarz formula 1:587
- Christoffel symbol* 1:588
- Church  $\lambda$ -abstraction 1:589
- Church thesis 1:589
- ciphers 1:589
- circle 1:590
- circle method 1:590
- circle of curvature 1:591
- circle problem 1:591
- circle transformation 1:592
- circular points 1:592
- circular symmetrization 1:593
- circulation 1:593
- cissoid 1:593
- Clairaut equation 1:593
- class 1:594
- class field theory 1:595
- class of differentiability 1:597
- classical celestial mechanics, mathematical problems in 1:597
- classical combinatorial problems 1:598
- classical group 1:600
- classical orthogonal polynomials 1:602
- classical semi-simple ring 1:603
- classifying space 1:603
- Clebsch condition 1:604
- Clifford algebra 1:605
- Clifford parallel 1:606
- Clifford semi-group 1:606
- Clifford theorem 1:607
- clone 1:607
- closed category 1:607
- closed formula 1:608
- closed geodesic 1:608
- closed-graph theorem 1:609
- closed manifold 1:610
- closed mapping 1:610
- closed operator 1:610
- closed set 1:611
- closed subscheme 1:611
- closed system of elements (functions) 1:611
- closure condition 1:612
- closure of a computational algorithm 1:613
- closure of a set 1:613
- closure relation 1:613
- clothoid 1:614
- cluster set 1:614
- co-algebra 1:617
- co-basis 1:618
- co-Euclidean space 1:618
- co- $H$ -space 1:619
- co-planar vectors 1:619

- co-pseudo-Euclidean space 1:619
- co-pseudo-Galilean space 1:620
- coadjoint representation 1:620
- coalition 1:621
- coalitional game 1:621
- Cobol 1:621
- cobordism 1:622
- cobordism of knots 1:626
- cochain 1:627
- cochleoid 1:628
- cocycle 1:628
- code 1:628
- code with correction of arithmetical errors 1:628
- code with correction of deletions and insertions  
1:629
- codimension 1:630
- coding, alphabetical 1:630
- coding and decoding 1:631
- coefficient 1:634
- coefficient of variation 1:635
- coefficient problem 1:635
- coercive boundary value problem 1:636
- coerciveness inequality 1:637
- (algebraic) cofactor 1:638
- cofibration 1:638
- Cohen-Macaulay ring 1:639
- coherent algebraic sheaf 1:640
- coherent analytic sheaf 1:640
- coherent numbers 1:641
- coherent ring 1:641
- coherent sheaf 1:641
- coherent states 1:642
- Cohn-Vossen transformation 1:642
- cohomological dimension 1:642
- cohomology 1:643
- cohomology functor 1:645
- cohomology group 1:645
- cohomology manifold 1:646
- cohomology of a complex 1:646
- cohomology of algebras 1:646
- cohomology of Banach algebras 1:649
- cohomology of groups 1:649
- cohomology of Lie algebras 1:651
- cohomology operation 1:653
- cohomology ring 1:657
- cohomology sequence 1:657
- cohomotopy group 1:657
- cokernel 1:658
- collinear vectors 1:658
- collineation 1:658
- collocation method 1:659
- colon 1:660
- combination 1:661
- combinatorial analysis 1:661
- combinatorial geometry 1:665
- combinatorial geometry 1:666
- combinatorial mathematics 1:666
- combinatorial topology 1:666
- combinatorics 1:667
- combinatory logic 1:667
- combustion theory 1:667
- comitant 1:668
- commensurable and incommensurable magnitudes  
(quantities) 1:668
- communication channel 1:669
- commutation and anti-commutation relationships,  
representation of 1:670
- commutative algebra 1:671
- commutative Banach algebra 1:673
- commutative group 1:675
- commutative group scheme 1:675
- commutative ring 1:676
- commutativity 1:676
- commutator 1:676
- commutator subgroup 1:676
- commuting operators 1:676
- compact group 1:677
- compact lattice element 1:678
- compact mapping 1:678
- compact-open topology 1:678
- compact operator 1:679
- compact set, countably 1:679
- compact space 1:679
- compact space, countably 1:682
- compactification 1:682
- compactness 1:685
- compactness, countable 1:685
- compactness principle 1:686
- compactum 1:686
- compactum,  $T_2$  1:687
- comparison criterion of convergence 1:687
- comparison function 1:687
- comparison of topologies 1:687
- comparison theorem 1:688



- comparison theorem (algebraic geometry) 1:689
- compatibility of summation methods 1:689
- compatible distributions 1:689
- complementary series 1:690
- complementation 1:690
- complete accumulation point 1:691
- complete algebraic variety 1:691
- complete analytic function 1:691
- complete curvature 1:693
- complete Dedekind lattice 1:693
- complete differential 1:694
- complete group 1:694
- complete instability 1:694
- complete integral 1:694
- complete lattice 1:695
- complete measure 1:695
- complete metric space 1:695
- complete operator 1:695
- complete probability formula 1:696
- complete problem of eigen values 1:696
- complete Riemannian space 1:698
- complete set 1:698
- complete set of functionals 1:699
- complete space 1:699
- complete system 1:699
- complete system of functions 1:700
- complete system of residues 1:700
- complete topological space 1:701
- complete uniform space 1:701
- complete variation of a function 1:701
- completely-continuous operator 1:701
- completely distributive lattice 1:701
- completely-integrable differential equation 1:701
- completely-reducible matrix group 1:702
- completely-reducible module 1:703
- completely-reducible set 1:703
- completely-regular semi-group 1:703
- completely-regular space 1:703
- completely-simple semi-group 1:704
- completeness (in logic) 1:704
- completeness (in topology) 1:705
- completion 1:705
- completion, MacNeille 1:705
- completion method 1:706
- completion (of a uniform space  $X$ ) 1:706
- complex 1:706
- complex in homological algebra 1:710
- complex integration, method of 1:711
- complex manifold 1:713
- complex number 1:713
- complex of lines 1:715
- complex space 1:715
- complex structure 1:716
- complex system 1:716
- complex torus 1:717
- complexification of a Lie algebra 1:718
- complexification of a Lie group 1:718
- complexification of a vector space 1:718
- complexity theory 1:719
- component of a space 1:721
- component of a vector 1:721
- composite function 1:721
- composite hypothesis 1:723
- composite ideal 1:723
- composition 1:723
- composition sequence 1:723
- compositum 1:724
- computable function 1:724
- computable invariant 1:725
- computable real number 1:726
- computational algorithm 1:726
- computational mathematics 1:727
- computer, abstract 1:729
- concave and convex operators 1:730
- concave function 1:730
- concentration function 1:730
- conchoid 1:731
- condensation point 1:731
- condensation point of a set 1:731
- condensing operator 1:731
- conditional convergence 1:732
- conditional density 1:732
- conditional distribution 1:732
- conditional extremum 1:733
- conditional mathematical expectation 1:734
- conditional probability 1:734
- conditional stability 1:735
- conditionally-complete lattice 1:737
- conditionally-periodic function 1:737
- conditionally-periodic motion 1:737
- conductor of a character 1:737
- conductor of an Abelian extension 1:738
- conductor of an integral closure 1:738
- cone 1:738

- cone condition 1:740
- confidence bounds 1:740
- confidence estimation 1:740
- confidence interval 1:741
- confidence level 1:741
- confidence probability 1:741
- confidence set 1:741
- configuration 1:741
- confluent analysis 1:745
- confluent hypergeometric equation 1:746
- confluent hypergeometric function 1:746
- confocal conics 1:748
- confocal curves 1:748
- conformal connection 1:748
- conformal-differential geometry 1:750
- conformal Euclidean space 1:750
- conformal-geodesic net 1:751
- conformal geometry 1:751
- conformal mapping 1:753
- conformal mapping, boundary properties of a 1:757
- conformal radius 1:757
- conformal space 1:758
- conformal structure 1:758
- conformal transformation 1:759
- conformally-invariant metric 1:759
- congruence 1:760
- congruence equation 1:762
- congruence (in algebra) 1:763
- congruence (in geometry) 1:764
- congruence modulo a double modulus 1:764
- congruence modulo a prime number 1:764
- congruence of lines 1:765
- congruence problem 1:766
- congruence subgroup 1:766
- congruence with several variables 1:767
- conic 1:767
- conic sections 1:768
- conical net 1:769
- conical surface 1:769
- conjugate class of functions 1:769
- conjugate directions 1:770
- conjugate elements 1:770
- conjugate function 1:770
- conjugate gradients, method of 1:771
- conjugate harmonic functions, harmonically-coni-  
gate functions 1:772
- conjugate isothermal coordinates 1:773
- conjugate net 1:773
- conjugate trigonometric series 1:773
- conjunction 1:774
- conjunctive normal form 1:774
- connected component of the identity 1:774
- connected set 1:775
- connected space 1:775
- connected sum 1:775
- connection 1:775
- connection form 1:777
- connection number 1:778
- connection object 1:778
- connections on a manifold 1:778
- connectivity 1:780
- connex 1:780
- conoid 1:781
- conormal 1:781
- consistency 1:781
- consistent estimator 1:782
- consistent test 1:782
- constant 1:783
- constant curvature, space of 1:783
- constant width, body of 1:784
- constant width, curve of 1:784
- constructible subset 1:784
- constructive analysis 1:785
- constructive function of a real variable 1:787
- constructive logic 1:787
- constructive mathematics 1:788
- constructive metric space 1:790
- constructive model theory 1:792
- constructive object 1:792
- constructive propositional calculus 1:792
- constructive quantum field theory 1:792
- constructive real number 1:794
- constructive selection principle 1:795
- constructive semantics 1:795
- constructive theory of functions 1:797
- contact problems of the theory of elasticity 1:797
- contact problems of the theory of heat conduction  
1:799
- contact scheme 1:800
- contact structure 1:801
- contact transformation 1:802
- content 1:802
- contingency equation 1:803
- contingent 1:803



- continuation method 1:803
- continuation method (for nonlinear operators) 1:804
- continued fraction 1:805
- continuity 1:807
- continuity axiom 1:807
- continuity equation 1:808
- continuity, modulus of 1:808
- continuity theorem 1:808
- continuous analogues of iteration methods 1:809
- continuous decomposition 1:810
- continuous distribution 1:811
- continuous flow 1:811
- continuous function 1:812
- continuous functional 1:813
- continuous functions, space of 1:814
- continuous functor 1:814
- continuous group 1:814
- continuous lattice 1:815
- continuous mapping 1:816
- continuous operator 1:817
- continuous representation 1:818
- continuous section 1:818
- continuous series of representations 1:818
- continuous set 1:819
- continuum 1:819
- continuum, cardinality of the 1:819
- continuum hypothesis 1:819
- contour integration, method of 1:820
- contracting-mapping principle 1:820
- contraction 1:821
- contraction 1:821
- contraction of a Lie algebra 1:822
- contraction of a representation 1:822
- contraction of a tensor 1:823
- contraction operator 1:823
- contraction semi-group 1:823
- contradiction 1:824
- contradiction, law of 1:824
- contragredient automorphism 1:824
- contragredient representation 1:824
- contraposition, law of 1:825
- contrary theorem 1:825
- contrast 1:825
- contravariant tensor 1:825
- contravariant vector 1:826
- control function 1:826
- control system 1:827
- controlled stochastic process 1:828
- convergence, almost-certain 1:835
- convergence, almost-everywhere 1:835
- convergence, discrete 1:835
- convergence in distribution 1:836
- convergence in measure 1:836
- convergence in norm 1:836
- convergence in probability 1:836
- convergence in the mean of order  $p$  1:837
- convergence in variation 1:837
- convergence interval 1:837
- convergence multipliers 1:837
- convergence of measures 1:837
- convergence, types of 1:837
- convergence with probability one 1:841
- convergent of a continued fraction 1:841
- converse theorem 1:841
- convex analysis 1:841
- convex body 1:841
- convex cone 1:842
- convex domain 1:842
- convex function 1:842
- convex function (of a real variable) 1:843
- convex functional 1:844
- convex game 1:845
- convex hull 1:845
- convex metric 1:846
- convex operator 1:846
- convex polygon 1:846
- convex polyhedron 1:846
- convex programming 1:847
- convex sequence 1:847
- convex set 1:847
- convex sets, linear space of 1:849
- convex sets, metric space of 1:849
- convex subgroup 1:849
- convex subset 1:849
- convex surface 1:849
- convexity 1:852
- convexity, logarithmic 1:853
- convexity radius 1:853
- convolution 1:854
- convolution transform 1:855
- cooperative game 1:855
- coordinate-wise descent method 1:856
- coordinates 1:857

- coproduct 1:858
- core in the theory of games 1:858
- Cornish-Fisher expansion 1:859
- Cornu spiral 1:859
- correlation 1:860
- correlation coefficient 1:861
- correlation function 1:861
- correlation function in statistical mechanics 1:862
- correlation (in statistics) 1:863
- correlation matrix 1:864
- correlation ratio 1:864
- correlogram 1:865
- correspondence 1:865
- cosecant 1:866
- coset 1:867
- cosine 1:867
- cosine amplitude 1:867
- cosine, hyperbolic 1:867
- cosine theorem 1:867
- cosmological constant 1:868
- cosmological models 1:868
- cotangent 1:870
- Cotes formulas 1:870
- countable set 1:870
- countably-additive set function 1:871
- countably-compact space 1:871
- countably-normed space 1:871
- countably zero-dimensional space 1:871
- Courant-Friedrichs-Lewy condition 1:871
- Courant number 1:871
- Courant theorem 1:872
- Cousin problems 1:872
- covariance 1:874
- covariance analysis 1:874
- covariance matrix 1:874
- covariance of the number of solutions 1:875
- covariant 1:875
- covariant derivative 1:876
- covariant differential 1:876
- covariant differentiation 1:876
- covariant tensor 1:878
- covariant vector 1:878
- covering 1:879
- covering and packing 1:879
- covering domain 1:880
- covering element 1:881
- covering homotopy 1:881
- covering (of a set) 1:881
- covering surface 1:882
- covering theorems 1:882
- Coxeter group 1:883
- Cramer rule 1:885
- Cramér theorem 1:885
- Cramér-von Mises test 1:885
- creation operators 1:886
- creative set 1:886
- Cremona group 1:886
- Cremona transformation 1:887
- critical function 1:888
- critical ideal 1:888
- critical level 1:888
- critical point 1:888
- critical region 1:889
- critical value 1:889
- cross product 1:889
- cross ratio 1:890
- crossed homomorphism 1:890
- crossed modules 1:891
- cryptography 1:891
- cryptology 1:893
- crystallographic group 1:898
- crystallography, mathematical 1:900
- cubature formula 1:901
- cube 1:903
- cube-like continuum 1:903
- cubic 1:903
- cubic equation 1:904
- cubic form 1:904
- cubic hypersurface 1:905
- cubic parabola 1:906
- cubic residue 1:906
- curl 1:906
- curvature 1:907
- curvature form 1:911
- curvature line 1:911
- curvature lines, net of 1:912
- curvature tensor 1:912
- curvature transformation 1:912
- curve 1:912
- curve of constant slope 1:912
- curve of pursuit 1:912
- curvilinear integral 1:913
- cusp 1:914
- cusp 1:915



cut 1:915  
 cut locus 1:915  
 cutting problem 1:915  
 CW-complex 1:916  
 cybernetics 1:917  
 cycle 1:922  
 cyclic coordinates 1:922  
 cyclic group 1:922  
 cyclic module 1:922  
 cyclic semi-group 1:923  
 cycloid 1:923  
 cycloidal curve 1:923

cyclotomic extension 1:923  
 cyclotomic field 1:924  
 cyclotomic polynomials 1:925  
 cylinder 1:926  
 cylinder coordinates 1:926  
 cylinder functions 1:926  
 cylinder set 1:931  
 cylindrical construction 1:931  
 cylindrical measure 1:931  
 cylindrical surface (cylinder) 1:931  
 cylindroid 1:932

## D

$\delta$ - $\sigma$ -operation 2:1  
 D-module 2:1  
 d'Alembert criterion (convergence of series) 2:4  
 d'Alembert equation 2:4  
 d'Alembert-Euler conditions 2:4  
 d'Alembert formula 2:4  
 d'Alembert-Lagrange principle 2:5  
 d'Alembert operator 2:5  
 d'Alembert principle 2:6  
 Dandelin spheres 2:6  
 Daniell integral 2:7  
 Dante space 2:7  
 Darboux equation 2:8  
 Darboux net invariants 2:8  
 Darboux quadric 2:8  
 Darboux sum 2:9  
 Darboux surfaces 2:10  
 Darboux tensor 2:10  
 Darboux theorem 2:11  
 Darboux trihedron 2:11  
 Darboux vector 2:11  
 Darwin-Fowler method 2:11  
 de la Vallée-Poussin criterion 2:11  
 de la Vallée-Poussin derivative 2:12  
 de la Vallée-Poussin multiple-point problem 2:12  
 de la Vallée-Poussin singular integral 2:13  
 de la Vallée-Poussin sum 2:13  
 de la Vallée-Poussin summation method 2:14  
 de la Vallée-Poussin theorem 2:14  
 de Moivre formula 2:15  
 de Moivre-Laplace theorem 2:15

de Rham cohomology 2:15  
 de Rham theorem 2:16  
 de Rham torsion 2:16  
 dead-end disjunctive normal form 2:16  
 Debye length 2:16  
 decidable formula 2:17  
 decidable predicate 2:17  
 decidable set 2:17  
 decile 2:17  
 decimal approximation of a real number 2:17  
 decimal computation system 2:18  
 decimal fraction 2:18  
 decision function 2:19  
 decision problem 2:19  
 decoding 2:19  
 decomposition 2:19  
 decomposition-discontinuity method 2:20  
 decreasing function 2:20  
 decreasing sequence 2:21  
 Dedekind criterion (convergence of series) 2:21  
 Dedekind cut 2:21  
 Dedekind lattice 2:21  
 Dedekind ring 2:21  
 Dedekind theorem 2:22  
 Dedekind zeta-function 2:22  
 deducible rule 2:22  
 deduction theorem 2:22  
 defect 2:23  
 defective value 2:23  
 deficiency subspace 2:23  
 defining equation 2:24

- defining operator 2:24
- defining relationships 2:24
- defining system of neighbourhoods 2:25
- definite integral 2:25
- definite kernel 2:25
- deformation 2:25
- deformation, isometric 2:30
- deformation over a principal base 2:31
- deformation retract 2:32
- deformation tensor 2:32
- degenerate distribution 2:33
- degenerate elliptic equation 2:33
- degenerate equilibrium position 2:33
- degenerate game 2:34
- degenerate hyperbolic equation 2:34
- degenerate hypergeometric function 2:34
- degenerate integral equation 2:34
- degenerate kernel 2:35
- degenerate kernels, method of 2:35
- degenerate matrix 2:36
- degenerate parabolic equation 2:36
- degenerate partial differential equation 2:36
- degenerate series of representations 2:37
- degeneration, probability of 2:37
- degree 2:38
- degree of a mapping 2:38
- degree of a point 2:38
- degree of undecidability 2:38
- Dehn lemma 2:39
- delta amplitude 2:40
- delta-function 2:40
- delta-function method 2:40
- Demoulin quadrilateral 2:41
- Demoulin surface 2:41
- Demoulin theorem 2:41
- dendrite 2:41
- dendritic manifold 2:41
- Denjoy integral 2:43
- Denjoy-Luzin theorem 2:43
- Denjoy theorem on derivatives 2:44
- denominator 2:44
- denotant 2:44
- dense set 2:44
- density hypothesis 2:44
- density matrix 2:45
- density method 2:46
- density of a probability distribution 2:46
- density of a sequence 2:47
- density of a set 2:48
- density of a topological space 2:48
- density point 2:48
- density theorems 2:48
- denumerant 2:49
- depth of a module 2:49
- derivability 2:49
- derivable rule 2:49
- derivation in a ring 2:49
- derivation, logical 2:50
- derivation rule 2:51
- derivation tree 2:51
- derivations, module of 2:51
- derivative 2:52
- derived automorphism 2:53
- derived category 2:53
- derived functor 2:55
- derived rule 2:56
- derived set 2:56
- Desargues assumption 2:56
- Desargues geometry 2:56
- Descartes oval 2:57
- Descartes theorem 2:58
- descent, method of 2:58
- descriptive geometry 2:58
- descriptive set theory 2:59
- design of experiments 2:64
- desorienting path 2:64
- determinant 2:65
- determinant variety 2:66
- developable surface 2:67
- deviation of an approximating function 2:67
- deviator 2:68
- diagonal 2:68
- diagonal continued fraction 2:68
- diagonal group 2:68
- diagonal matrix 2:68
- diagonal operator 2:68
- diagonal process 2:69
- diagonal product 2:70
- diagonal ring 2:70
- diagonal subgroup 2:70
- diagonalizable algebraic group 2:70
- diagram 2:71
- diagram of functional elements 2:71
- diagram reducibility 2:73



- diameter 2:73
- dichotomy 2:73
- dichotomy method 2:74
- Dickson group 2:74
- Dickson invariant 2:74
- Dieudonné module 2:75
- diffeomorphism 2:75
- difference cochain 2:76
- difference element in  $K$ -theory 2:77
- difference equation 2:77
- difference methods 2:79
- difference of two sets 2:79
- difference operator 2:79
- difference scheme 2:80
- difference scheme, variational 2:81
- difference scheme, viscosity of a 2:84
- difference schemes, theory of 2:85
- difference set 2:89
- differentiability of solutions(of differential equations) 2:89
- differentiable function 2:90
- differentiable manifold 2:90
- differentiable vector 2:92
- differential 2:92
- differential algebra 2:95
- differential algebra 2:95
- differential binomial 2:98
- differential calculus 2:99
- differential calculus (on analytic spaces) 2:104
- differential comitant 2:105
- differential-difference equation 2:105
- differential entropy 2:105
- differential equation, abstract 2:105
- differential equation, ordinary 2:106
- differential equation, partial 2:111
- differential equation, partial, complex-variable methods 2:114
- differential equation, partial, data on characteristics 2:118
- differential equation, partial, discontinuous coefficients 2:119
- differential equation, partial, discontinuous initial (boundary conditions) 2:120
- differential equation, partial, Fischer-Riesz(Picone) method 2:121
- differential equation, partial, free boundaries 2:122
- differential equation, partial, functional methods 2:123
- differential equation, partial, oblique derivatives 2:126
- differential equation, partial, of the first order 2:127
- differential equation, partial, of the second order 2:129
- differential equation, partial, variational methods 2:130
- differential equation, partial, with singular coefficients 2:131
- differential equation with total differential 2:132
- differential equations, infinite-order system of 2:133
- differential equations on a torus 2:134
- differential equations ordinary, approximate methods of solution of 2:135
- differential equations, ordinary, retarded 2:138
- differential equations, ordinary, with distributed arguments 2:139
- differential equations with small parameter 2:141
- differential field 2:143
- differential form 2:143
- differential-functional equation 2:147
- differential games 2:147
- differential-geometric structure 2:151
- differential geometry 2:152
- differential geometry of manifolds 2:157
- differential group 2:160
- differential inclusion 2:160
- differential inequality 2:161
- differential invariant 2:162
- differential neighbourhood 2:163
- differential on a Riemann surface 2:163
- differential operator 2:165
- differential operator on a module 2:167
- differential parameter 2:168
- differential ring 2:169
- differential topology 2:169
- differentiation 2:170
- differentiation along the flow of a dynamical system 2:170
- differentiation, numerical 2:170
- differentiation of a mapping 2:171
- diffraction, mathematical theory of 2:172
- diffusion approximation 2:174
- diffusion equation 2:174

- diffusion methods 2:175
- diffusion process 2:175
- digon 2:177
- dihedral angle 2:177
- dihedron group 2:177
- dilatation 2:177
- dilatation mapping 2:177
- dilution of a series 2:177
- dimension 2:178
- dimension, additive properties of 2:182
- dimension function 2:183
- dimension invariant 2:183
- dimension polynomial 2:184
- dimension theory 2:184
- dimensional analysis 2:186
- Dini criterion 2:188
- Dini derivative 2:188
- Dini-Lipschitz criterion 2:188
- Dini theorem 2:189
- Dinostratus quadratrix 2:189
- Diophantine analysis 2:189
- Diophantine approximation, metric theory of 2:189
- Diophantine approximation, problems of effective 2:190
- Diophantine approximations 2:191
- Diophantine equations 2:195
- Diophantine equations, solvability problem of 2:197
- Diophantine geometry 2:198
- Diophantine predicate 2:201
- Diophantine problems of additive type 2:201
- Diophantine set 2:201
- Dirac delta-function 2:202
- Dirac equation 2:202
- Dirac matrices 2:204
- Dirac spinor 2:204
- direct counting 2:204
- direct method 2:204
- direct product 2:205
- direct sum 2:206
- directed order 2:206
- directed set 2:206
- directing functionals, method of 2:206
- direction field 2:207
- directrix 2:208
- Dirichlet box principle 2:208
- Dirichlet character 2:208
- Dirichlet criterion (convergence of series) 2:210
- Dirichlet discontinuous multiplier 2:210
- Dirichlet distribution 2:210
- Dirichlet formula 2:210
- Dirichlet function 2:210
- Dirichlet integral 2:211
- Dirichlet kernel 2:211
- Dirichlet  $L$ -function 2:212
- Dirichlet principle 2:214
- Dirichlet problem 2:215
- Dirichlet series 2:217
- Dirichlet series for an analytic almost-periodic function 2:219
- Dirichlet theorem 2:219
- Dirichlet variational problem 2:220
- disc 2:220
- disc of convergence 2:221
- disc, topological 2:221
- discontinuity point 2:221
- discontinuous function 2:222
- discontinuous multiplier 2:222
- discontinuous variational problem 2:222
- discrepancy 2:223
- discrepancy of an approximation 2:224
- discrete analysis 2:223
- discrete distribution 2:225
- discrete family of sets 2:226
- discrete group of transformations 2:226
- discrete measure 2:228
- discrete norm 2:228
- discrete programming 2:228
- discrete series of representations 2:229
- discrete space 2:230
- discrete space-time 2:230
- discrete subgroup 2:230
- discrete systems (in statistical mechanics) 2:233
- discrete topology 2:233
- discretely-normed ring 2:234
- discretization method 2:234
- discriminant 2:236
- discriminant analysis 2:238
- discriminant curve 2:240
- discriminant function 2:241
- discriminant informant 2:241
- discriminant tensor 2:242
- disjunction 2:242
- disjunctive complement 2:242
- disjunctive elements 2:242



- disjunctive family of sets 2:242
- disjunctive normal form 2:242
- disjunctive representations 2:243
- disjunctive sum 2:243
- dispersion 2:243
- dispersion analysis 2:244
- dispersion ellipsoid 2:247
- dispersion equation 2:247
- dispersion method 2:248
- dispersion point 2:248
- dispersion proportion 2:249
- dispersion relation 2:249
- dispersive space 2:249
- dissipative function 2:249
- dissipative operator 2:250
- dissipative system 2:251
- distal dynamical system 2:251
- distortion theorems 2:252
- distribution 2:253
- distribution function 2:253
- distribution law 2:254
- distribution modulo one 2:255
- distribution modulo one, higher-dimensional 2:255
- distribution of power residues and non-residues 2:256
- distribution of prime numbers 2:256
- distribution, type of 2:262
- distributions, complete family of 2:262
- distributions, convergence of 2:262
- distributive lattice 2:263
- distributive quasi-group 2:264
- distributivity 2:264
- divergence 2:265
- divergent integral 2:266
- divergent sequence 2:266
- divergent series 2:266
- divisibility criterion 2:267
- divisibility in rings 2:267
- divisible group 2:268
- division 2:268
- division algebra 2:269
- divisor 2:269
- divisor 2:269
- divisor class group 2:272
- divisor problems 2:273
- divisorial ideal 2:275
- dodecahedral space 2:275
- dodecahedron 2:275
- domain 2:275
- domain, double-circled 2:276
- domain of definition 2:276
- domain of holomorphy 2:276
- domain of individuals 2:277
- domain of influence 2:277
- dominant 2:277
- domination 2:277
- door space 2:279
- Doppler effect 2:279
- double and dual numbers 2:279
- double integral 2:280
- double-layer potential 2:280
- double limit 2:281
- double module 2:282
- double negation, law of 2:282
- double of a Riemann surface 2:282
- double-periodic function 2:283
- double plane 2:283
- double point 2:284
- double ratio 2:284
- double sequence 2:284
- double series 2:285
- double-sweep method 2:286
- doublet 2:287
- Douglas problem 2:287
- drawing room game 2:287
- drift equations 2:287
- du Bois-Reymond criterion 2:288
- du Bois-Reymond lemma 2:288
- du Bois-Reymond theorem 2:288
- dual algebra 2:289
- dual basis 2:289
- dual category 2:289
- dual functions 2:290
- dual pair 2:290
- duality 2:291
- duality principle 2:299
- duel 2:300
- Duffing equation 2:300
- Duhamel integral 2:301
- Dupin cyclide 2:301
- Dupin indicatrix 2:302
- Dupin theorem 2:302
- duplication of the cube 2:302
- dyad 2:303

dyadic compactum 2:303  
 dyadic discontinuum 2:303  
 dyadic space 2:304  
 dynamic game 2:304  
 dynamic problems of elasticity theory 2:304  
 dynamic programming 2:307

dynamical system 2:309  
 dynamical systems, metric theory of 2:312  
 dynamics 2:312  
 dynamics of sorption 2:314  
 Dynkin diagram 2:314

## E

$\epsilon$ -entropy 2:315  
 $e$  (number) 2:316  
 Eberlein compactum 2:316  
 eccentricity 2:317  
 econometrics 2:317  
 edge of regression 2:319  
 Edgeworth series 2:319  
 efficiency, asymptotic 2:320  
 efficiency of a statistical procedure 2:320  
 efficient estimator 2:321  
 efficient test 2:321  
 Egorov system of surfaces 2:321  
 Egorov theorem 2:322  
 eigen function 2:322  
 eigen oscillation 2:322  
 eigen value 2:322  
 eigen values of differential operators, numerical  
   methods 2:323  
 eigen values of integral operators, numerical  
   methods 2:325  
 eigen vector 2:327  
 eikonal equation 2:327  
 Eilenberg-MacLane space 2:328  
 Einstein equations 2:328  
 Einstein rule 2:328  
 Einstein-Smoluchowski equation 2:328  
 elasticity, mathematical theory of 2:329  
 elasticity theory, planar problem of 2:331  
 element of best approximation 2:334  
 elementary Abelian group 2:334  
 elementary arithmetic 2:334  
 elementary axiom system 2:334  
 elementary divisors 2:334  
 elementary events 2:334  
 elementary flow 2:335  
 elementary functions 2:335  
 elementary interval 2:335

elementary number theory 2:335  
 elementary theory 2:337  
 Elements of Euclid 2:338  
 elimination theory 2:339  
 ellipse 2:341  
 ellipse of normal curvature 2:341  
 ellipsoid 2:342  
 ellipsoidal coordinates 2:342  
 ellipsoidal harmonic 2:343  
 elliptic coordinates 2:343  
 elliptic curve 2:344  
 elliptic cylinder 2:346  
 elliptic function 2:346  
 elliptic geometry 2:348  
 elliptic integral 2:348  
 elliptic operator 2:350  
 elliptic paraboloid 2:351  
 elliptic partial differential equation 2:352  
 elliptic partial differential equation, numerical  
   methods 2:352  
 elliptic point 2:354  
 elliptic surface 2:354  
 Emden equation 2:356  
 empirical distribution 2:356  
 empty-boxes test 2:357  
 empty set 2:357  
 endomorphism 2:357  
 endomorphism ring 2:358  
 endomorphism semi-group 2:358  
 energy inequality 2:359  
 energy integral 2:359  
 energy method 2:359  
 energy of measures 2:359  
 Engel algebra 2:360  
 Engel element 2:360  
 Engel group 2:360  
 Engel theorem 2:361



- Enneper surface 2:361  
 entire function 2:361  
 entire rational function 2:363  
 entropy 2:363  
 entropy of a measurable decomposition 2:364  
 entropy theory of a dynamical system 2:364  
 enumerability predicate 2:365  
 enumerable set 2:365  
 enumerated model 2:366  
 enumeration 2:366  
 enumeration operator 2:368  
 enumeration problem 2:368  
 enumeration theory 2:368  
 envelope 2:369  
 enveloping series 2:370  
 epicycloid 2:371  
 epidemic process 2:371  
 Epimenides paradox 2:372  
 epimorphism 2:372  
 equal content and equal shape, figures of 2:372  
 equality axioms 2:373  
 equation 2:374  
 equation of infinite order 2:374  
 equi-affine connection 2:375  
 equi-affine geometry 2:375  
 equi-affine plane 2:376  
 equi-dimensional ideal 2:376  
 equi-distant 2:376  
 equicontinuity 2:376  
 equiconvergent series 2:376  
 equilibrium position 2:376  
 equilibrium relation 2:377  
 equivalence 2:377  
 equivalence (logical) 2:378  
 equivalence of categories 2:378  
 equivalent representations 2:378  
 equivalent summation methods 2:378  
 equivalent transformations 2:379  
 equivariant cohomology 2:380  
 equivariant estimator 2:381  
 Eratosthenes, sieve of 2:381  
 Erdős problem 2:382  
 ergodic set 2:382  
 ergodic theorem 2:382  
 ergodic theory 2:382  
 ergodic theory, non-commutative 2:384  
 ergodicity 2:385  
 Erlang distribution 2:385  
 Erlangen program 2:385  
 Ermakov criterion 2:386  
 erroneous decoding, probability of 2:386  
 error 2:387  
 error-correcting code 2:387  
 errors, theory of 2:390  
 essential mapping 2:391  
 essential singular point 2:392  
 essentially-undecidable theory 2:392  
 étale cohomology 2:393  
 étale morphism 2:393  
 étale topology 2:393  
 Eubulides paradox 2:394  
 Euclidean algorithm 2:394  
 Euclidean connection 2:394  
 Euclidean field 2:395  
 Euclidean geometry 2:395  
 Euclidean prime number theorem 2:395  
 Euclidean ring 2:395  
 Euclidean space 2:395  
 Euler angles 2:396  
 Euler characteristic 2:396  
 Euler class 2:397  
 Euler constant 2:397  
 Euler criterion 2:397  
 Euler equation 2:397  
 Euler formula 2:399  
 Euler formulas 2:399  
 Euler-Fourier formulas 2:400  
 Euler function 2:400  
 Euler identity 2:400  
 Euler integrals 2:401  
 Euler-Lagrange equation 2:401  
 Euler-MacLaurin formula 2:401  
 Euler method 2:402  
 Euler numbers 2:403  
 Euler polynomials 2:404  
 Euler product 2:404  
 Euler series 2:404  
 Euler straight line 2:405  
 Euler substitutions 2:405  
 Euler summation method 2:405  
 Euler theorem 2:406  
 Euler transformation 2:406  
 even function 2:407  
 even number 2:407

- Everett interpolation formula 2:407  
 everywhere-dense set 2:408  
 evolute (of a plane curve) 2:408  
 evolute (surface) 2:408  
 evolution equation 2:409  
 evolution operator 2:409  
 evolvent 2:409  
 evolvent (of a plane curve) 2:410  
 exact endomorphism 2:410  
 exact functor 2:410  
 exact sequence 2:411  
 excellent ring 2:411  
 exceptional analytic set 2:411  
 exceptional subvariety 2:412  
 exceptional value 2:413  
 excess coefficient 2:414  
 excess of a triangle 2:414  
 excessive function 2:414  
 exclusive disjunction 2:415  
 exhaustion, method of 2:416  
 exhaustion of a domain 2:416  
 existential quantifier 2:417  
 expanding mapping 2:417  
 exponent of a group 2:417  
 exponential distribution 2:417  
 exponential function 2:418  
 exponential function, real 2:419  
 exponential mapping 2:419  
 exponential topology 2:419  
 extended complex plane 2:420  
 extension of a differential field 2:420  
 extension of a field 2:422  
 extension of a group 2:422  
 extension of a Lie algebra 2:423  
 extension of a module 2:424  
 extension of a semi-group 2:424  
 extension of a topological space 2:425  
 extension of an associative algebra 2:425  
 extension of an operator 2:425  
 extension of domain, principle of 2:428  
 extension theorems 2:428  
 extension theorems (in analytic geometry) 2:429  
 exterior algebra 2:430  
 exterior and interior boundary value problems 2:431  
 exterior form 2:432  
 exterior forms, method of 2:432  
 exterior normal 2:432  
 exterior product 2:432  
 extrapolation 2:432  
 extremal 2:433  
 extremal field 2:434  
 extremal length 2:435  
 extremal metric, method of the 2:436  
 extremal problem 2:437  
 extremal problems, numerical methods 2:437  
 extremal properties of functions 2:441  
 extremal properties of polynomials 2:441  
 extremal set 2:442  
 extremally-disconnected space 2:443  
 extremum 2:443

## F

- F*-distribution 2:444  
 Faber polynomials 2:444  
 Faber-Schauder system 2:445  
 Fabry theorem 2:445  
 face 2:445  
 factor 2:445  
 factor analysis 2:446  
 factor representation 2:447  
 factorial 2:447  
 factorial ring 2:447  
 factorization 2:447  
 factorization identities 2:448  
 factorization theorem 2:448  
 Faddeev equation 2:449  
 Fagnano problem 2:449  
 faithful endomorphism 2:449  
 faithful functor 2:449  
 faithful representation 2:450  
 fan 2:450  
 Fano postulate 2:450  
 Fano scheme 2:450  
 Fano surface 2:450  
 Fano variety 2:451  
 Farey series 2:451  
 Fatou arc 2:451  
 Fatou theorem 2:452



- Fatou theorem (on Lebesgue integrals) 2:452
- Favard inequality 2:453
- Favard measure 2:453
- Favard problem 2:453
- Favard theorem 2:453
- feathered space 2:454
- feathering 2:454
- Fedorov group 2:455
- Fejér polynomial 2:455
- Fejér singular integral 2:455
- Fejér sum 2:455
- Fejér summation method 2:456
- Feller process 2:456
- Fermat great theorem 2:457
- Fermat little theorem 2:460
- Fermat principle 2:460
- Fermat spiral 2:460
- Fermat theorem 2:461
- Fermi coordinates 2:461
- Fermi-Dirac statistics 2:461
- Ferrari method 2:462
- Feynman integral 2:462
- Feynman measure 2:463
- Fibonacci method 2:464
- Fibonacci numbers 2:464
- fibration 2:465
- fibre product 2:465
- fibre product of objects in a category 2:465
- fibre space 2:466
- fiducial distribution 2:466
- field 2:467
- field operator 2:468
- fifth postulate 2:468
- figure 2:469
- filter 2:469
- filtered algebra 2:469
- filtered module 2:470
- final object 2:470
- fine set 2:470
- fine sheaf 2:470
- fine topology 2:471
- finitary problem 2:471
- finitary verifiability 2:471
- finite difference 2:472
- finite-difference calculus 2:472
- finite-dimensional associative algebra 2:476
- finite-dimensional representation 2:477
- finite field 2:477
- finite group 2:478
- finite group, representation of a 2:479
- finite group scheme 2:480
- finite-increments formula 2:481
- finite mathematics 2:481
- finite Riemann surface 2:481
- finite-to-one mapping 2:481
- finitely-determined function 2:482
- finitely-generated group 2:482
- finitely-presented group 2:483
- finiteness theorems 2:483
- finitism 2:484
- Finsler geometry 2:485
- Finsler metric 2:486
- Finsler space 2:487
- Finsler space, generalized 2:487
- first axiom of countability 2:488
- first boundary value problem 2:488
- first fundamental form 2:489
- first integral 2:490
- first variation 2:490
- Fisher amount of information 2:490
- Fisher  $F$ -distribution 2:491
- Fisher  $z$ -distribution 2:491
- Fitting subgroup 2:492
- fixed point 2:492
- fixed singular point 2:494
- flabby sheaf 2:494
- flag 2:494
- flag space 2:495
- flag structure 2:495
- flat form 2:496
- flat module 2:497
- flat morphism 2:497
- flat norm 2:497
- flat point 2:498
- Floquet-Lyapunov theorem 2:498
- Floquet theory 2:498
- flow (continuous-time dynamical system) 2:499
- flow in a network 2:499
- flux of a vector field 2:500
- focal net of a congruence 2:501
- Fock space 2:501
- focus 2:502
- focus of a curve 2:503
- Fokker-Planck equation 2:503

- fold 2:503
- foliation 2:503
- folium of Descartes 2:505
- forced oscillations 2:505
- forcing method 2:506
- form 2:508
- form of an algebraic group 2:508
- form of an (algebraic) structure 2:509
- formal derivative 2:510
- formal group 2:510
- formal language 2:512
- formal language, machine-representable 2:513
- formal languages and automata 2:513
- formal mathematical analysis 2:517
- formal power series 2:518
- formal product of trigonometric series 2:519
- formal system 2:520
- formal systems, equivalence of 2:520
- formalism 2:520
- formalization method 2:521
- formalized language 2:521
- formula 2:522
- Fortran 2:522
- foundations of geometry 2:523
- four-colour problem 2:526
- four-dimensional manifold 2:526
- Fourier-Bessel integral 2:527
- Fourier-Bessel series 2:527
- Fourier coefficients 2:528
- Fourier coefficients of an almost periodic function 2:528
- Fourier cosine transform 2:528
- Fourier indices of an almost-periodic function 2:528
- Fourier integral 2:528
- Fourier integral operator 2:529
- Fourier method 2:532
- Fourier number 2:533
- Fourier series 2:533
- Fourier series (in orthogonal polynomials) 2:537
- Fourier series of an almost-preiodic function 2:538
- Fourier sine transform 2:538
- Fourier-Stieltjes series 2:539
- Fourier-Stieltjes transform 2:539
- Fourier transform 2:539
- Fourier transform, discrete 2:541
- Fourier transform of a generalized function 2:541
- fractal dimension 2:542
- fractals 2:542
- fraction 2:543
- fractional congruence 2:544
- fractional ideal 2:544
- fractional integration and differentiation 2:544
- fractional-linear function 2:545
- fractional-linear mapping 2:545
- fractional part 2:547
- fractional power 2:547
- fractional-rational function 2:548
- fractional steps, method of 2:548
- fractions, ring of 2:548
- fracture, mathematical problems of 2:549
- frame 2:550
- Franklin system 2:551
- Fraser diagram 2:552
- Fratini subgroup 2:552
- Fréchet derivative 2:553
- Fréchet differential 2:553
- Fréchet space 2:553
- Fréchet surface 2:554
- Fréchet variation 2:554
- Fredholm alternative 2:554
- Fredholm equation 2:555
- Fredholm equation, numerical methods 2:559
- Fredholm kernel 2:562
- Fredholm operator 2:562
- Fredholm theorems 2:563
- free Abelian group 2:564
- free algebra 2:564
- free algebra over a ring 2:564
- free algebraic system 2:564
- free associative algebra 2:566
- free Boolean algebra 2:566
- free composition 2:566
- free group 2:567
- free groupoid 2:567
- free harmonic oscillation 2:567
- free ideal ring 2:568
- free lattice 2:569
- free module 2:569
- free product 2:569
- free product of groups 2:569
- free resolution 2:570
- free semi-group 2:570



- free set 2:571
- free variable 2:571
- free vector 2:571
- freely-formed sequence 2:571
- Frénet formulas 2:571
- Frénet trihedron 2:572
- frequency theorem 2:572
- Fresnel integrals 2:573
- Freudenthal compactification 2:574
- Friedrichs inequality 2:574
- Frobenius algebra 2:575
- Frobenius automorphism 2:575
- Frobenius endomorphism 2:575
- Frobenius formula 2:576
- Frobenius theorem 2:576
- Frobenius theorem (on Pfaffian systems) 2:577
- Frommer method 2:577
- Froude number 2:578
- frozen-in integral 2:578
- Fubini form 2:579
- Fubini model 2:579
- Fubini-Study metric 2:580
- Fubini theorem 2:580
- Fuchsian equation 2:580
- Fuchsian group 2:582
- full subcategory 2:584
- fully-characteristic congruence 2:584
- fully-characteristic subgroup 2:584
- fully-closed mapping 2:585
- function 2:585
- function of bounded characteristic 2:589
- function of bounded variation 2:590
- function of compact support 2:591
- function of exponential type 2:591
- function theory 2:592
- functional 2:592
- functional analysis 2:592
- functional calculus 2:596
- functional derivative 2:598
- functional determinant 2:598
- functional equation 2:598
- functional equation, methods of solution of a 2:601
- functional of a Markov process 2:604
- functional relation 2:605
- functional separability 2:605
- functional system 2:606
- functions of a complex variable, theory of 2:606
- functions of a real variable, theory of 2:608
- functor 2:610
- functorial morphism 2:611
- fundamental class 2:611
- fundamental cocycle 2:612
- fundamental cycle 2:612
- fundamental domain 2:612
- fundamental forms of a surface 2:612
- fundamental group 2:613
- fundamental groupoid 2:614
- fundamental matrix 2:614
- fundamental sequence 2:615
- fundamental solution 2:615
- fundamental system of solutions 2:616

## G

- G-fibration 2:618
- G-structure 2:619
- gain function 2:620
- Galerkin method 2:621
- Galilean coordinate system 2:622
- Galilean relativity principle 2:622
- Galilean space 2:622
- Galilean spiral 2:622
- Galilean transformation 2:622
- Galois cohomology 2:623
- Galois correspondence 2:625
- Galois differential group 2:625
- Galois extension 2:625
- Galois field 2:625
- Galois group 2:626
- Galois theory 2:626
- Galois theory, inverse problem of 2:628
- Galois theory of rings 2:629
- Galois topological group 2:629
- Galton-Watson process 2:630
- game involving the choice of the moment of time 2:630

- game of chance 2:630
- game of survival 2:630
- game on a graph 2:631
- game on the unit square 2:631
- game situation 2:632
- game with a hierarchy structure 2:632
- games, theory of 2:634
- gamma-correlation 2:637
- gamma-distribution 2:638
- gamma-function 2:639
- Gårding inequality 2:641
- gas dynamics, equations of 2:641
- gas dynamics, numerical methods of 2:644
- gas flow theory 2:648
- Gâteaux derivative 2:649
- Gâteaux differential 2:649
- Gâteaux gradient 2:650
- Gâteaux variation 2:650
- gauge transformation 2:650
- Gauss-Bonnet theorem 2:651
- Gauss criterion 2:652
- Gauss decomposition 2:652
- Gauss interpolation formula 2:653
- Gauss-Laplace distribution 2:654
- Gauss law 2:654
- Gauss-Manin connection 2:654
- Gauss method 2:656
- Gauss number 2:657
- Gauss principle 2:657
- Gauss quadrature formula 2:658
- Gauss reciprocity law 2:658
- Gauss semi-group 2:659
- Gauss sum 2:659
- Gauss theorem 2:660
- Gauss transform 2:661
- Gauss variational problem 2:661
- Gaussian channel 2:661
- Gaussian curvature 2:662
- Gaussian process 2:663
- Gegenbauer polynomials 2:664
- Gegenbauer transform 2:664
- Gel'fand representation 2:664
- Gellerstedt problem 2:665
- general aggregate 2:665
- general algebra 2:666
- general integral 2:666
- general linear group 2:667
- general position 2:667
- general recursive function 2:669
- general recursive operator 2:669
- general solution 2:669
- general topology 2:670
- general-type algebraic surface 2:672
- general validity 2:672
- generalized almost-periodic functions 2:673
- generalized analytic function 2:674
- generalized cohomology theories 2:676
- generalized derivative 2:679
- generalized displacement operators 2:680
- generalized function 2:683
- generalized function, derivative of a 2:688
- generalized functions, product of 2:688
- generalized functions, space of 2:689
- generalized group 2:691
- generalized nilpotent group 2:691
- generalized sequence 2:691
- generalized solution 2:691
- generalized solvable group 2:692
- generating function 2:693
- generating object of a category 2:693
- generating operator of a semi-group 2:693
- generator of a category 2:694
- generic point 2:694
- generic set 2:695
- genetic algebra 2:695
- Gentzen formal system 2:696
- genus of a curve 2:698
- genus of a surface 2:698
- genus of an algebraic function 2:699
- genus of an element of an arithmetic group 2:699
- genus of an entire function 2:699
- geocryology, mathematical problems in 2:699
- geodesic circle 2:700
- geodesic coordinates 2:700
- geodesic curvature 2:701
- geodesic distance 2:701
- geodesic flow 2:701
- geodesic geometry 2:702
- geodesic hypothesis 2:702
- geodesic line 2:702
- geodesic manifold 2:704
- geodesic mapping 2:704
- geodesic net 2:705
- geodesic region 2:705



- geodesic torsion 2:705
- geodesic triangle 2:705
- geodesy, mathematical problems in 2:706
- geometric approximation 2:707
- geometric complex 2:708
- geometric constructions 2:708
- geometric distribution 2:709
- geometric genus 2:710
- geometric locus 2:710
- geometric mean 2:710
- geometric objects, theory of 2:710
- geometric probabilities 2:713
- geometric progression 2:713
- geometric ring 2:714
- geometro-dynamics 2:714
- geometry 2:715
- geometry in the large 2:717
- geometry of immersed manifolds 2:718
- geometry of numbers 2:721
- geophysics, mathematical problems in 2:725
- geothermics, mathematical problems in 2:727
- Gergonne point 2:727
- germ 2:727
- Gibbs distribution 2:728
- Gibbs phenomenon 2:729
- Gibbs statistical aggregate 2:730
- Gini average difference 2:730
- Giraud conditions 2:730
- global field 2:731
- global structure of trajectories 2:731
- globally symmetric Riemannian space 2:732
- glueing 2:733
- glueing method 2:734
- glueing theorems 2:734
- Gödel completeness theorem 2:734
- Gödel constructive set 2:735
- Gödel incompleteness theorem 2:736
- Gödel interpretation 2:736
- Goldbach problem 2:737
- Goldbach-Waring problem 2:738
- golden ratio 2:738
- Golubev-Privalov theorem 2:738
- goniometry 2:739
- goodness-of-fit test 2:739
- Goppa code 2:740
- Gorenstein ring 2:740
- Gorge ellipse 2:741
- Goursat congruence 2:741
- Goursat problem 2:741
- graded algebra 2:742
- graded module 2:742
- gradient 2:742
- gradient dynamical system 2:743
- gradient field 2:744
- gradient method 2:744
- gradient transform 2:744
- Gram-Charlier series 2:744
- Gram determinant 2:745
- Gram matrix 2:745
- grammar, automatic 2:746
- grammar, categorial 2:746
- grammar, context-free 2:746
- grammar, context-sensitive 2:748
- grammar, dominating 2:749
- grammar, formal 2:750
- grammar, generative 2:750
- grammar, linear 2:751
- grammar, regular 2:751
- grammar, transformational 2:752
- graph 2:752
- graph automorphism 2:754
- graph, bipartite 2:754
- graph circuit 2:755
- graph colouring 2:755
- graph, connectivity of a 2:756
- graph, extremal 2:757
- graph homeomorphism 2:758
- graph imbedding 2:758
- graph isomorphism 2:758
- graph, numerical characteristics of a 2:759
- graph of a mapping 2:760
- graph, oriented 2:760
- graph, planar 2:761
- graph, random 2:762
- graph theory 2:763
- graphic equality 2:764
- Grassmann manifold 2:764
- gravitation 2:765
- gravitation, theory of 2:767
- greatest common divisor 2:769
- Green equivalence relations 2:770
- Green formulas 2:770
- Green function 2:772
- Green line 2:777

Green space 2:777  
 Gregory formula 2:777  
 grid method 2:778  
 Gronwall summation method 2:778  
 Grothendieck category 2:779  
 Grothendieck functor 2:779  
 Grothendieck group 2:779  
 Grothendieck topology 2:780  
 Grötzsch principle 2:780  
 Grötzsch theorems 2:781  
 group 2:781  
 group algebra 2:784  
 group algebra (of a locally compact group) 2:785  
 group calculus 2:785

group object 2:787  
 group of covering transformations 2:787  
 group of motions 2:788  
 group of type  $p^\infty$  2:788  
 group scheme 2:788  
 group velocity 2:789  
 group with a finiteness condition 2:790  
 group with the maximum condition 2:790  
 group with the minimum condition 2:790  
 group with unique extraction of root 2:790  
 group without torsion 2:791  
 groupoid 2:791  
 growth indicatrix 2:791  
 Guichard congruence 2:792

## H

$H$ -closed space 2:793  
 $h$ -cobordism 2:793  
 $H^\infty$  control theory 2:794  
 $H$ -space 2:795  
 Haag theorem 2:796  
 Haar condition 2:796  
 Haar measure 2:797  
 Haar system 2:798  
 Hadamard matrix 2:799  
 Hadamard theorem 2:800  
 Hadamard variational formula 2:801  
 Hadwiger hypothesis 2:802  
 Haefliger structure 2:802  
 Hahn-Banach theorem 2:803  
 Hahn decomposition 2:803  
 half-line (ray) 2:804  
 half-martingale 2:804  
 half-plane 2:804  
 Hall subgroup 2:804  
 Halphen pencil 2:805  
 Hamilton equations 2:805  
 Hamilton function 2:805  
 Hamilton group 2:806  
 Hamilton-Jacobi theory 2:806  
 Hamilton operator 2:808  
 Hamilton-Ostrogradski principle 2:808  
 Hamiltonian system 2:809  
 Hamiltonian system, linear 2:810  
 Hammerstein equation 2:813

handle theory 2:814  
 Hankel functions 2:816  
 Hardy classes 2:816  
 Hardy criterion 2:818  
 Hardy inequality 2:818  
 Hardy-Littlewood criterion 2:819  
 Hardy-Littlewood problem 2:819  
 Hardy-Littlewood theorem 2:820  
 Hardy theorem 2:820  
 Hardy transform 2:821  
 Hardy variation 2:821  
 harmonic analysis 2:822  
 harmonic analysis, abstract 2:822  
 harmonic balance method 2:826  
 harmonic capacity 2:826  
 harmonic coordinates 2:826  
 harmonic form 2:827  
 harmonic function 2:828  
 harmonic majorant 2:831  
 harmonic mean 2:831  
 harmonic measure 2:831  
 harmonic measure, principle of 2:832  
 harmonic polynomial 2:833  
 harmonic quadruple 2:833  
 harmonic series 2:833  
 harmonic space 2:834  
 harmonic vibration 2:835  
 harmonics 2:835  
 harmonizable dynamical system 2:836



- harmonizable random process 2:836
- Harnack inequality 2:837
- Harnack integral 2:838
- Harnack theorem 2:838
- Hartogs domain 2:839
- Hartogs-Laurent series 2:839
- Hartogs theorem 2:839
- Hasse invariant 2:840
- Hasse principle 2:841
- Hausdorff axiom 2:841
- Hausdorff dimension 2:841
- Hausdorff measure 2:842
- Hausdorff metric 2:843
- Hausdorff operation 2:843
- Hausdorff space 2:843
- Hausdorff summation method 2:843
- Hausdorff-Young inequalities 2:844
- heaps and semi-heaps 2:844
- heavy sphere, method of the 2:845
- Heegaard decomposition 2:845
- Heegaard diagram 2:846
- height, in Diophantine geometry 2:846
- height (in elementary geometry) 2:847
- height of an ideal 2:847
- Heine-Borel theorem 2:847
- Heisenberg representation 2:847
- helical calculus 2:848
- helical line 2:848
- helicoid 2:849
- Hellinger distance 2:849
- Hellinger integral 2:849
- Helly theorem 2:850
- Helmholtz equation 2:850
- Hensel lemma 2:851
- Hensel ring 2:851
- hereditarily indecomposable continuum 2:852
- Herglotz formula 2:852
- Hermite equation 2:852
- Hermite function 2:853
- Hermite identity 2:853
- Hermite interpolation formula 2:853
- Hermite polynomials 2:854
- Hermite problem 2:855
- Hermite transform 2:855
- Hermitian connection 2:855
- Hermitian form 2:856
- Hermitian kernel 2:857
- Hermitian matrix 2:857
- Hermitian metric 2:858
- Hermitian operator 2:858
- Hermitian structure 2:858
- Hermitian symmetric space 2:859
- Heron formula 2:859
- Heron triangle 2:859
- Hertz principle 2:859
- Hessian (algebraic curve) 2:860
- Hessian (of a function) 2:860
- heteroclinic point 2:860
- Hewitt realcompactification 2:861
- hexahedron 2:861
- Heyting formal system 2:861
- hierarchy 2:862
- higher-dimensional geometry 2:863
- Hilbert algebra 2:865
- Hilbert cube 2:865
- Hilbert-Euler problem 2:866
- Hilbert geometry 2:866
- Hilbert inequality 2:866
- Hilbert invariant integral 2:867
- Hilbert-Kamke problem 2:868
- Hilbert kernel 2:868
- Hilbert polynomial 2:868
- Hilbert scheme 2:868
- Hilbert-Schmidt integral operator 2:869
- Hilbert-Schmidt norm 2:870
- Hilbert-Schmidt operator 2:870
- Hilbert-Schmidt series 2:870
- Hilbert singular integral 2:871
- Hilbert space 2:871
- Hilbert space with an indefinite metric 2:876
- Hilbert system of axioms 2:878
- Hilbert theorem 2:879
- Hilbert theory of integral equations 2:881
- Hilbert transform 2:882
- Hill equation 2:882
- histogram 2:883
- Hodge conjecture 2:884
- Hodge structure 2:884
- Hodge theorem 2:885
- Hodge variety 2:886
- hodograph 2:886
- hodograph transform 2:886
- Hölder condition 2:887
- Hölder inequality 2:887

- Hölder space 2:888  
 Hölder summation methods 2:888  
 holomorph of a group 2:889  
 holomorphic envelope 2:889  
 holomorphic form 2:889  
 holomorphic function 2:890  
 holomorphic mapping 2:890  
 holomorphically-convex complex space 2:891  
 holonomic system 2:891  
 holonomy group 2:892  
 homeomorphism 2:892  
 homeomorphism group 2:894  
 homoclinic point 2:895  
 homogeneous bounded domain 2:895  
 homogeneous complex manifold 2:896  
 homogeneous convex cone 2:897  
 homogeneous coordinates 2:898  
 homogeneous function 2:898  
 homogeneous operator 2:898  
 homogeneous space 2:899  
 homogeneous space of an algebraic group 2:901  
 homological algebra 2:902  
 homological classification of rings 2:904  
 homological containment 2:904  
 homological dimension 2:904  
 homological dimension of a space 2:906  
 homology 2:907  
 homology base 2:907  
 homology functor 2:907  
 homology group 2:908  
 homology manifold 2:909  
 homology of a complex 2:910  
 homology of a dynamical system 2:910  
 homology of a polyhedron 2:911  
 homology product 2:912  
 homology sequence 2:912  
 homology theory 2:912  
 homology with compact support 2:916  
 homomorphism 2:916  
 homoscedasticity 2:917  
 homothety 2:917  
 homotopically-trivial mapping 2:917  
 homotopy 2:917  
 homotopy group 2:918  
 homotopy type 2:922  
 homotopy type of a topological category 2:926  
 Hooke law 2:927  
 Hopf algebra 2:927  
 Hopf fibration 2:928  
 Hopf group 2:929  
 Hopf invariant 2:929  
 Hopf-Rinow theorem 2:930  
 horizontal distribution 2:931  
 Horner scheme 2:931  
 horocycle 2:932  
 horocycle flow 2:932  
 horosphere 2:933  
 Hotelling  $T^2$ -distribution 2:933  
 Hotelling test 2:933  
 Hunt-Stein theorem 2:934  
 Hurwitz criterion 2:934  
 Hurwitz formula 2:934  
 Hurwitz theorem 2:934  
 Huygens principle 2:935  
 hydrodynamic approximation 2:935  
 hydrodynamics, mathematical problems in 2:936  
 hydrogen-like atom 2:939  
 hyper-elliptic curve 2:940  
 hyper-elliptic integral 2:940  
 hyperbola 2:941  
 hyperbolic cylinder 2:941  
 hyperbolic functions 2:941  
 hyperbolic geometry 2:942  
 hyperbolic metric 2:942  
 hyperbolic metric, principle of the 2:943  
 hyperbolic paraboloid 2:944  
 hyperbolic partial differential equation 2:944  
 hyperbolic partial differential equation, numerical methods 2:945  
 hyperbolic point 2:949  
 hyperbolic set 2:949  
 hyperbolic spiral 2:950  
 hyperbolic trigonometry 2:950  
 hyperboloid 2:951  
 hypercentre 2:951  
 hypercomplex functions 2:951  
 hypercomplex number 2:952  
 hypercycle 2:953  
 hyperfunction 2:953  
 hypergeometric distribution 2:955  
 hypergeometric equation 2:955  
 hypergeometric function 2:956  
 hypergeometric series 2:958  
 hypergraph 2:959



hyperhomology functor 2:960  
 hyperplane 2:960  
 hyperrelaxation method 2:960  
 hyperspace 2:960

hypersurface 2:961  
 hypocycloid 2:961  
 hypotenuse 2:962

# I

icosahedral space 3:1  
 icosahedron 3:1  
 ideal 3:1  
 ideal number 3:3  
 ideal point 3:4  
 ideal series 3:4  
 idele 3:4  
 idempotent 3:5  
 idempotents, semi-group of 3:5  
 identical truth 3:6  
 identity problem 3:6  
 ill-posed problems 3:6  
 ill-posed problems in complex function theory 3:11  
 illumination problem 3:12  
 image of a morphism 3:12  
 imaginary number 3:13  
 imaginary unit 3:13  
 imbedded word 3:13  
 imbedding of categories 3:14  
 imbedding of function spaces 3:14  
 imbedding of rings 3:14  
 imbedding of semi-groups 3:15  
 imbedding theorems 3:15  
 immersion 3:20  
 immersion of a manifold 3:20  
 immersion operation 3:21  
 immune set 3:21  
 implication 3:22  
 implicative normal form 3:22  
 implicative propositional calculus 3:22  
 implicit function 3:22  
 implicit function (in algebraic geometry) 3:24  
 implicit operator 3:25  
 impossible event 3:25  
 imprimitive group 3:25  
 improper distribution 3:26  
 improper integral 3:26  
 incidence 3:28  
 incidence coefficient 3:28

incidence system 3:29  
 inclined line 3:29  
 inclusion-and-exclusion principle 3:29  
 inclusion of summation methods 3:30  
 incommensurable quantities 3:30  
 incomplete beta-function 3:30  
 incomplete gamma-function 3:31  
 inconsistency 3:32  
 inconsistent class 3:32  
 increasing function 3:32  
 increasing sequence 3:32  
 indecomposable continuum 3:33  
 indecomposable distribution 3:33  
 indecomposable representation 3:33  
 indefinite integral 3:34  
 indefinite limits and expressions, evaluations of 3:34  
 indefinite metric 3:35  
 independence 3:35  
 independence of an axiom system 3:37  
 independent functions, system of 3:37  
 independent measurable decompositions 3:38  
 independent measures 3:38  
 indeterminate equation 3:38  
 index 3:38  
 index formulas 3:39  
 index of an operator 3:43  
 indicatrix of tangents 3:44  
 individual constant 3:44  
 individual ergodic theorem 3:44  
 individual variable 3:44  
 indivisibles, method of 3:44  
 induced fibre bundle 3:44  
 induced representation 3:45  
 induction axiom 3:46  
 inductive definition 3:47  
 inductive dimension 3:47  
 inductive limit 3:47  
 inefficient statistic 3:48

- inequality 3:49
- inertial prime number 3:50
- inertial system 3:50
- inessential mapping 3:50
- infinite decimal expansion 3:51
- infinite-dimensional representation 3:51
- infinite-dimensional space 3:55
- infinite game 3:56
- infinite induction 3:57
- infinite product 3:57
- infinitely-connected domain 3:58
- infinitely-distant elements 3:58
- infinitely-divisible distribution 3:59
- infinitely-divisible distributions, factorization of 3:61
- infinitely-large function 3:61
- infinitely-small function 3:62
- infinitesimal calculus 3:62
- infinitesimal connection 3:65
- infinitesimal deformation 3:65
- infinitesimal operator 3:66
- infinitesimal structure 3:66
- infinity 3:67
- infinity, axiom of 3:68
- informal axiomatic method 3:68
- informant 3:69
- information 3:70
- information, amount of 3:72
- information correlation coefficient 3:72
- information distance 3:72
- information, exactness of reproducibility of 3:73
- information matrix 3:74
- information, quantization of 3:75
- information, rate of generation of 3:75
- information set 3:75
- information, source of 3:76
- information theory 3:77
- information, transmission of 3:78
- information, transmission rate of 3:81
- infra-barrelled space 3:81
- initial conditions 3:81
- initial set (of a continuum) 3:82
- injection 3:82
- injective module 3:82
- injective object 3:83
- inner automorphism 3:83
- inner product 3:84
- inscribed and circumscribed figures 3:84
- inscribed angle 3:85
- inscribed broken line 3:85
- instantaneous state 3:85
- integer 3:85
- integer programming 3:85
- integrable function 3:86
- integrable representation 3:86
- integrable system 3:86
- integral 3:87
- integral automorphism 3:89
- integral calculus 3:89
- integral cosine 3:93
- integral curve 3:93
- integral domain 3:94
- integral equation 3:94
- integral equation of convolution type 3:96
- integral equation with symmetric kernel 3:99
- integral equations, numerical methods 3:101
- integral exponential function 3:103
- integral extension of a ring 3:104
- integral funnel 3:104
- integral geometry 3:104
- integral hyperbolic cosine 3:108
- integral hyperbolic sine 3:109
- integral ideal 3:109
- integral invariant 3:109
- integral logarithm 3:110
- integral manifold 3:110
- integral object of a category 3:111
- integral of a differential equation 3:111
- integral operator 3:112
- integral over trajectories 3:113
- integral part 3:114
- integral point 3:114
- integral points, distribution of 3:114
- integral-relation method 3:115
- integral representation of an analytic function 3:116
- integral separation condition 3:119
- integral sine 3:119
- integral sum 3:120
- integral surface 3:120
- integral transform 3:120
- integral-transform method 3:122
- integrals in involution 3:122
- integrating factor 3:123
- integration 3:123



- integration by parts 3:123
- integration by substitution 3:124
- integration, numerical 3:124
- integration of differential equations in closed form 3:124
- integration on manifolds 3:125
- integro-differential equation 3:126
- inter-quantile width 3:127
- interaction, representation of 3:127
- interior 3:127
- interior differential operator 3:128
- interior geometry 3:128
- interior mapping 3:128
- interior of a set 3:129
- interior point of a set 3:129
- intermediate Jacobian 3:129
- intermediate logic 3:130
- internal boundary 3:131
- internal metric 3:131
- internal variations, method of 3:132
- internal waves 3:132
- interpolation 3:133
- interpolation formula 3:135
- interpolation in numerical mathematics 3:137
- interpolation of operators 3:140
- interpolation process 3:143
- interpolation spline 3:144
- interpretation 3:145
- intersection homology 3:146
- intersection index (in algebraic geometry) 3:146
- intersection index (in homology) 3:147
- intersection of sets 3:147
- intersection theory 3:147
- intertwining number 3:149
- intertwining operator 3:149
- interval 3:149
- interval analysis 3:150
- interval and segment 3:150
- interval, closed 3:151
- interval estimator 3:151
- interval, open 3:151
- intuitionism 3:151
- intuitionistic arithmetic 3:155
- intuitionistic logic 3:155
- intuitionistic predicate calculus 3:155
- intuitionistic propositional calculus 3:155
- invariance of a statistical procedure 3:156
- invariance, principle of 3:156
- invariant 3:157
- invariant average 3:158
- invariant differential operator 3:159
- invariant imbedding 3:159
- invariant integration 3:160
- invariant measure 3:160
- invariant metric 3:162
- invariant object 3:163
- invariant set 3:164
- invariant statistic 3:165
- invariant subgroup 3:165
- invariant subset 3:165
- invariant subspace 3:166
- invariant subspace of a representation 3:166
- invariant test 3:166
- invariants, theory of 3:166
- inverse function 3:169
- inverse hyperbolic functions 3:169
- inverse mapping 3:170
- inverse matrix 3:171
- inverse parabolic partial differential equation 3:171
- inverse trigonometric functions 3:171
- inversion 3:172
- inversion (in combinatorics) 3:172
- inversion of a matrix 3:173
- inversion of a series 3:174
- inversion of an elliptic integral 3:175
- inversion semi-group 3:175
- invertible element 3:176
- invertible module 3:176
- invertible sheaf 3:177
- involution 3:177
- involution algebra 3:178
- involution representation 3:179
- involutional system 3:179
- involutive distribution 3:180
- irrational number 3:180
- irreducible analytic space 3:181
- irreducible continuum 3:181
- irreducible mapping 3:181
- irreducible matrix group 3:181
- irreducible module 3:182
- irreducible polynomial 3:182
- irreducible representation 3:182
- irreducible topological space 3:183
- irreducible variety 3:183

irregular boundary point 3:183  
 irregular prime number 3:183  
 irregular singular point 3:184  
 irregularity 3:185  
 irregularity indices 3:185  
 iso-optic curve 3:185  
 isocline 3:185  
 isogeny 3:186  
 isogonal trajectory 3:187  
 isogons and isohedra 3:187  
 isol 3:187  
 isolated point 3:187  
 isolated singular point 3:187  
 isolated subgroup 3:188  
 isometric immersion 3:188  
 isometric mapping 3:192  
 isometric operator 3:192  
 isometric surfaces 3:193  
 isomorphism 3:193  
 isomorphism problem 3:193  
 isoperimetric inequality 3:194

isoperimetric inequality, classical 3:197  
 isoperimetric problem 3:198  
 isothermal coordinates 3:198  
 isothermal net 3:199  
 isothermal surface 3:199  
 isotone mapping 3:199  
 isotopy 3:199  
 isotopy (in topology) 3:200  
 isotropic vector 3:201  
 isotropy congruence 3:201  
 isotropy group 3:201  
 isotropy representation 3:201  
 iterate 3:202  
 iterated kernel 3:202  
 iteration algorithm 3:203  
 iteration methods 3:204  
 Itô formula 3:206  
 Itô process 3:207  
 Iversen theorem 3:207  
 Iwasawa decomposition 3:208

## J

Jackson inequality 3:209  
 Jackson singular integral 3:210  
 Jackson theorem 3:210  
 Jacobi brackets 3:210  
 Jacobi condition 3:211  
 Jacobi elliptic functions 3:212  
 Jacobi equation 3:214  
 Jacobi inversion problem 3:215  
 Jacobi matrix 3:216  
 Jacobi method 3:216  
 Jacobi polynomials 3:217  
 Jacobi principle 3:219  
 Jacobi symbol 3:219  
 Jacobi transform 3:219  
 Jacobi variety 3:220  
 Jacobi vector field 3:221  
 Jacobian 3:221  
 Jacobson radical 3:222  
 Jacobson ring 3:222  
 Janet theorem 3:222  
 Jenkins theorem 3:223  
 Jensen formula 3:224

Jensen inequality 3:225  
 jet 3:226  
 Joachimsthal surface 3:226  
 join 3:226  
 joint distribution 3:227  
 Jordan algebra 3:227  
 Jordan arc 3:228  
 Jordan criterion 3:229  
 Jordan curve 3:229  
 Jordan decomposition 3:229  
 Jordan-Hölder theorem 3:230  
 Jordan lemma 3:231  
 Jordan matrix 3:231  
 Jordan measure 3:232  
 Jordan normal form 3:232  
 Jordan theorem 3:232  
 Jourdain principle 3:233  
 Julia set 3:233  
 Julia theorem 3:234  
 jump function 3:234  
 jump process 3:235  
 Jung theorem 3:236



## K

- K-functor 3:237
- K-space 3:238
- K-system 3:238
- K-theory 3:239
- K3-surface 3:241
- Kac-Moody algebra 3:242
- Kähler form 3:245
- Kähler manifold 3:245
- Kähler metric 3:247
- Kakutani theorem 3:247
- Kantorovich process 3:247
- kappa 3:248
- Kawaguchi space 3:248
- Keldysh-Lavrent'ev example 3:249
- Keldysh-Lavrent'ev theorem 3:250
- Keldysh theorem 3:250
- Kellogg-Evans theorem 3:251
- Kellogg theorem 3:251
- Kelvin functions 3:251
- Kelvin transformation 3:252
- Kendall coefficient of rank correlation 3:253
- Kepler equation 3:253
- kernel congruence 3:253
- kernel function 3:253
- kernel of a complex sequence 3:254
- kernel of a game 3:254
- kernel of a linear operator 3:254
- kernel of a loop 3:254
- kernel of a morphism in a category 3:254
- kernel of a semi-group 3:255
- kernel of a set 3:255
- kernel of a summation method 3:255
- kernel of an integral operator 3:255
- kernel pair 3:256
- Kerr metric 3:256
- Kervaire invariant 3:256
- Kervaire-Milnor invariant 3:257
- Khinchin inequality 3:258
- Khinchin integral 3:258
- Khinchin theorem 3:258
- Killing form 3:259
- killing space 3:260
- Killing vector 3:260
- kinetic equation 3:260
- Kirchhoff formula 3:261
- Kirchhoff method 3:263
- Kleene-Mostowski classification 3:263
- Klein coordinates 3:264
- Klein-Gordon equation 3:264
- Klein interpretation 3:265
- Klein space 3:265
- Klein surface 3:265
- Kleinian group 3:266
- Knaster continuum 3:268
- Kneser theorem 3:268
- Kneser-Tits hypothesis 3:269
- Knopp summation method 3:269
- knot and link diagrams 3:269
- knot and link groups 3:271
- knot table 3:272
- knot theory 3:273
- knots and links, quadratic forms of 3:278
- knotted sphere 3:279
- Kodaira dimension 3:279
- Kodaira theorem 3:280
- Koebe function 3:280
- Koebe theorem 3:281
- Kolmogorov axiom 3:282
- Kolmogorov-Chapman equation 3:282
- Kolmogorov duality 3:282
- Kolmogorov equation 3:284
- Kolmogorov inequality 3:284
- Kolmogorov integral 3:286
- Kolmogorov-Seliverstov theorem 3:286
- Kolmogorov-Smirnov test 3:286
- Kolmogorov space 3:287
- Kolmogorov test 3:287
- König theorem 3:288
- Kontorovich-Lebedev transform 3:288
- Korn inequality 3:289
- Korteweg-de Vries equation 3:289
- Koszul complex 3:291
- Kotel'nikov interpretation 3:292
- Krawtchouk polynomials 3:292
- Krein space 3:293
- Kripke models 3:297

Kronecker-Capelli theorem 3:298  
 Kronecker formula 3:298  
 Kronecker method 3:299  
 Kronecker product 3:300  
 Kronecker symbol 3:300  
 Kronecker theorem 3:300  
 Krull-Remak-Schmidt theorem 3:301  
 Krull ring 3:301  
 Krylov-Bogolyubov method of averaging 3:302  
 Kummer criterion 3:303  
 Kummer extension 3:303

Kummer hypothesis 3:304  
 Kummer surface 3:304  
 Kummer theorem 3:304  
 Kummer transformation 3:305  
 Künneth formula 3:305  
 Kuratowski graph 3:307  
 Kuratowski-Knaster fan 3:307  
 Kuratowski polyhedron 3:308  
 Kuratowski set 3:308  
 Kutta-Merson method 3:308

## L

$\lambda$ -calculus 3:310  
 $\lambda$ -ring 3:312  
 $l$ -adic cohomology 3:313  
 $L$ -function 3:314  
 $L$ -genus 3:314  
 $L$ -system 3:314  
 lacuna 3:316  
 lacunary power series 3:317  
 lacunary sequence 3:317  
 lacunary series 3:318  
 lacunary space 3:318  
 lacunary system 3:319  
 lacunary trigonometric series 3:319  
 Lagrange bracket 3:320  
 Lagrange equation 3:320  
 Lagrange equations (in mechanics) 3:321  
 Lagrange function 3:322  
 Lagrange interpolation formula 3:326  
 Lagrange method 3:326  
 Lagrange multipliers 3:327  
 Lagrange principle 3:327  
 Lagrange problem 3:328  
 Lagrange series 3:329  
 Lagrange spectrum 3:329  
 Lagrange stability 3:329  
 Lagrange theorem 3:329  
 Lagrangian 3:330  
 Lagrangian manifold 3:331  
 Laguerre equation 3:331  
 Laguerre formula 3:331  
 Laguerre functions 3:331  
 Laguerre polynomials 3:332

Laguerre transform 3:332  
 Lambert quadrangle 3:333  
 Lambert series 3:333  
 Lambert summation method 3:334  
 Lambert transform 3:334  
 Lamé coefficients 3:334  
 Lamé constants 3:335  
 Lamé curve 3:335  
 Lamé equation 3:335  
 Lamé function 3:336  
 Landau kinetic equation 3:336  
 Landau theorems 3:337  
 Langevin equation 3:338  
 Laplace-Beltrami equation 3:339  
 Laplace distribution 3:339  
 Laplace equation 3:340  
 Laplace equation, numerical methods 3:341  
 Laplace integral 3:342  
 Laplace method 3:343  
 Laplace operator 3:343  
 Laplace sequence 3:345  
 Laplace theorem 3:345  
 Laplace transform 3:346  
 Laplace transformation (in geometry) 3:348  
 Laplace vector 3:349  
 large-particle method 3:349  
 large sieve 3:351  
 Larmor radius 3:352  
 Lasker ring 3:352  
 Latin rectangle 3:353  
 Latin square 3:353  
 lattice 3:355



- lattice distribution 3:357
- lattice in a Lie group 3:358
- lattice of points 3:358
- lattice-ordered group 3:358
- lattice with complements 3:359
- Laurent series 3:359
- Lavrent'ev theorem 3:361
- law of inertia 3:362
- law of large numbers 3:362
- law of the excluded middle 3:365
- law of the iterated logarithm 3:365
- least common multiple 3:366
- least-favourable distribution 3:366
- least-number operator 3:367
- least squares, method of 3:367
- Lebedev transform 3:371
- Lebesgue constants 3:371
- Lebesgue criterion 3:372
- Lebesgue decomposition 3:373
- Lebesgue dimension 3:373
- Lebesgue function 3:373
- Lebesgue inequality 3:374
- Lebesgue integral 3:374
- Lebesgue measure 3:375
- Lebesgue number 3:376
- Lebesgue point 3:376
- Lebesgue set 3:376
- Lebesgue space 3:376
- Lebesgue spectrum 3:377
- Lebesgue-Stieltjes integral 3:377
- Lebesgue summation method 3:377
- Lebesgue theorem 3:378
- Leech lattice 3:378
- Lefschetz duality 3:379
- lefschetz formula 3:379
- Lefschetz number 3:380
- Lefschetz theorem 3:381
- Legendre condition 3:382
- Legendre equation 3:383
- Legendre functions 3:383
- Legendre manifold 3:383
- Legendre polynomials 3:383
- Legendre symbol 3:384
- Legendre theorem 3:385
- Legendre transform 3:385
- Leibniz criterion 3:386
- Leibniz formula 3:387
- Leibniz series 3:387
- lemniscate functions 3:387
- lemniscates 3:387
- length 3:388
- length-and-area principle 3:388
- length of a partially ordered set 3:389
- lens space 3:389
- Leray formula 3:389
- Leray spectral sequence 3:391
- letter 3:391
- level lines 3:391
- level set 3:392
- Lévi-Civita connection 3:392
- Lévi condition 3:393
- Lévi-Mal'tsev decomposition 3:393
- Lévi problem 3:394
- Lévy canonical representation 3:395
- Lévy-Cramér theorem 3:396
- Lévy inequality 3:397
- Lévy-Khinchin canonical representation 3:397
- Lévy metric 3:397
- Lévy-Prokhorov metric 3:398
- lexicographic order 3:399
- l'Hospital rule 3:400
- liar paradox 3:400
- Lie-admissible algebra 3:400
- Lie algebra 3:403
- Lie algebra, algebraic 3:407
- Lie algebra, exceptional 3:407
- Lie algebra, exponential 3:407
- Lie algebra, free 3:408
- Lie algebra, fully-solvable 3:408
- Lie algebra, graded 3:408
- Lie algebra, linear 3:411
- Lie algebra, local 3:411
- Lie algebra, nil 3:412
- Lie algebra, nilpotent 3:412
- Lie algebra of an algebraic group 3:413
- Lie algebra of an analytic group 3:414
- Lie algebra, reductive 3:415
- Lie algebra, semi-simple 3:416
- Lie algebra, solvable 3:419
- Lie algebra, supersolvable 3:420
- Lie algebras, variety of 3:420
- Lie bracket 3:421
- Lie derivative 3:421
- Lie differential 3:421

- Lie differentiation 3:421
- Lie group 3:422
- Lie group, Banach 3:426
- Lie group, compact 3:426
- Lie group, derived 3:427
- Lie group, exponential 3:427
- Lie group, fully-solvable 3:428
- Lie group, local 3:428
- Lie group, nilpotent 3:429
- Lie group,  $p$ -adic 3:430
- Lie group, semi-simple 3:430
- Lie group, solvable 3:431
- Lie group, supersolvable 3:432
- Lie-Kolchin theorem 3:432
- Lie  $p$ -algebra 3:433
- Lie quadric 3:434
- Lie ring 3:435
- Lie ternary system 3:435
- Lie theorem 3:435
- Lie transformation group 3:436
- Liénard-Chipart criterion 3:437
- Liénard equation 3:438
- likelihood equation 3:438
- likelihood-ratio test 3:438
- limit 3:439
- limit-absorption principle 3:443
- limit cone 3:444
- limit cycle 3:444
- limit elements 3:445
- limit of star-likeness 3:446
- limit point of a set 3:446
- limit point of a trajectory 3:447
- limit set 3:447
- limit set of a trajectory 3:447
- limit theorems 3:448
- limiting-amplitude principle 3:450
- Lindeberg-Feller theorem 3:451
- Lindelöf construction 3:451
- Lindelöf hypothesis 3:451
- Lindelöf principle 3:452
- Lindelöf space 3:452
- Lindelöf summation method 3:453
- Lindelöf theorem 3:453
- Lindemann theorem 3:454
- line (curve) 3:454
- linear algebra 3:457
- linear algebra 3:457
- linear algebra, numerical methods in 3:458
- linear algebraic equation 3:460
- linear algebraic group 3:462
- linear algebraic groups, arithmetic theory of 3:464
- linear angle of a dihedral angle 3:465
- linear boundary value problem 3:466
- linear boundary value problem, numerical methods 3:466
- linear classical group 3:468
- linear closure 3:469
- linear connection 3:469
- linear dependence 3:469
- linear differential equation in a Banach space 3:469
- linear differential operator 3:474
- linear elliptic partial differential equation and system 3:477
- linear equation 3:480
- linear estimator 3:481
- linear form 3:481
- linear form in logarithms 3:481
- linear function 3:482
- linear functional 3:482
- linear group 3:483
- linear hull 3:485
- linear hyperbolic partial differential equation and system 3:485
- linear hypothesis 3:488
- linear independence 3:488
- linear independence, measure of 3:489
- linear inequality 3:489
- linear integral equation 3:490
- linear interpolation 3:491
- linear operator 3:491
- linear ordinary differential equation 3:496
- linear ordinary differential equation of the second order 3:498
- linear ordinary differential equation with constant coefficients 3:500
- linear parabolic partial differential equation and system 3:501
- linear partial differential equation 3:503
- linear programming 3:503
- linear regression 3:505
- linear representation 3:505
- linear representation, invariant of a 3:506
- linear space 3:506
- linear subspace 3:506



- linear summation method 3:506
- linear system 3:506
- linear system of differential equations with
  - almost-periodic coefficients 3:507
- linear system of differential equations with
  - periodic coefficients 3:508
- linear topological space 3:511
- linear topology 3:511
- linear transformation 3:511
- linear variety 3:513
- linearization methods 3:513
- linearly-compact module 3:514
- linearly-disjoint extensions 3:515
- linearly-regular random process 3:515
- link 3:516
- linking coefficient 3:516
- Linnik discrete ergodic method 3:517
- Liouville equation 3:517
- Liouville function 3:517
- Liouville net 3:518
- Liouville normal form 3:518
- Liouville number 3:518
- Liouville-Ostrogradski formula 3:519
- Liouville surface 3:520
- Liouville theorems 3:520
- Lipschitz condition 3:521
- Lipschitz constant 3:522
- Lipschitz integral condition 3:522
- Lisp 3:522
- listing knot 3:523
- Littlewood problem 3:523
- lituus 3:523
- Lobachevskii criterion (for convergence) 3:524
- Lobachevskii function 3:524
- Lobachevskii geometry 3:524
- Lobachevskii method 3:527
- Lobachevskii space 3:528
- Lobatto quadrature formula 3:529
- local and residual properties 3:529
- local approximation of functions 3:530
- local cohomology 3:530
- local decomposition 3:531
- local differential geometry 3:531
- local dimension 3:532
- local field 3:532
- local homeomorphism 3:533
- local homology 3:533
- local limit theorems 3:533
- local linking 3:534
- local property 3:534
- local ring 3:535
- local structural stability 3:536
- local structure of trajectories 3:536
- local topological group 3:537
- local uniformization 3:538
- local uniformizing parameter 3:538
- local variations, method of 3:539
- locale 3:540
- locality principle 3:541
- localization in a commutative algebra 3:541
- localization in categories 3:541
- localization principle 3:542
- locally compact skew-field 3:543
- locally compact space 3:543
- locally connected continuum 3:544
- locally connected space 3:544
- locally convex lattice 3:544
- locally convex space 3:544
- locally convex topology 3:547
- locally finite algebra 3:547
- locally finite covering 3:547
- locally finite family of sets 3:548
- locally finite group 3:548
- locally finite semi-group 3:548
- locally flat imbedding 3:549
- locally free group 3:549
- locally free sheaf 3:550
- locally integrable function 3:550
- locally nilpotent algebra 3:550
- locally nilpotent group 3:550
- locally normal group 3:550
- locally path-connected space 3:551
- locally solvable algebra 3:551
- locally solvable group 3:551
- locally trivial fibre bundle 3:551
- logarithm 3:551
- logarithmic branch point 3:552
- logarithmic capacity 3:552
- logarithmic convergence criterion 3:552
- logarithmic derivative 3:552
- logarithmic function 3:552
- logarithmic normal distribution 3:553
- logarithmic paper 3:554
- logarithmic potential 3:554

logarithmic residue 3:555  
 logarithmic spiral 3:556  
 logarithmic summation method 3:557  
 logarithmically-subharmonic function 3:557  
 logical axiom 3:557  
 logical calculus 3:557  
 logical consequence 3:559  
 logical formula 3:559  
 logical function 3:560  
 logical law 3:560  
 logical matrix 3:560  
 logical operation 3:560  
 logicism 3:560  
 logico-mathematical calculus 3:561  
 logistic distribution 3:562  
 logistics 3:563  
 Lommel function 3:563  
 Lommel polynomial 3:563  
 Longman method 3:564  
 loop 3:564  
 loop, analytic 3:565  
 loop (in topology) 3:566  
 loop space 3:566  
 Lorentz force 3:566  
 Lorentz transformation 3:567  
 Lorenz attractor 3:568  
 loss function 3:569  
 Löwenheim-Skolem theorem 3:569  
 lower bound 3:569

lower bound of a family of topologies 3:569  
 lower limit 3:570  
 Löwner equation 3:570  
 Löwner method 3:570  
 loxodrome 3:571  
 Lüroth problem 3:572  
 Luxemburg norm 3:572  
 Luzin C-property 3:572  
 Luzin criterion 3:573  
 Luzin-Denjoy theorem 3:573  
 Luzin examples 3:573  
 Luzin hypothesis 3:574  
 Luzin  $N$ -property 3:574  
 Luzin-Privalov theorems 3:575  
 Luzin problem 3:575  
 Luzin separability principles 3:576  
 Luzin set 3:576  
 Luzin sieve 3:577  
 Luzin space 3:577  
 Luzin theorem 3:577  
 Lyapunov characteristic exponent 3:578  
 Lyapunov function 3:580  
 Lyapunov-Schmidt equation 3:581  
 Lyapunov stability 3:581  
 Lyapunov stability theory 3:584  
 Lyapunov stochastic function 3:584  
 Lyapunov surfaces and curves 3:585  
 Lyapunov theorem 3:586  
 Lyapunov transformation 3:587

## M

$m$ -dependent process 3:588  
 Macdonald function 3:588  
 Mach number 3:589  
 Mach principle 3:589  
 machine 3:589  
 machine-oriented language 3:592  
 Mackey-Borel structure 3:592  
 Mackey intertwining number theorem 3:592  
 Mackey topology 3:593  
 MacLaurin formula 3:593  
 MacLaurin series 3:593  
 magic square 3:593  
 magneto-hydrodynamics, mathematical problem  
     in 3:594

Mahalanobis distance 3:594  
 Mahler problem 3:595  
 majorant and minorant 3:595  
 majorization ordering 3:595  
 Mal'tsev algebra 3:597  
 Mal'tsev local theorems 3:599  
 Mal'tsev product 3:599  
 Mangoldt function 3:599  
 manifold 3:600  
 manifold of figures (lines, surfaces, spheres, ...) 3:603  
 Mann theorem 3:604  
 Mann-Whitney test 3:605  
 many-valued logic 3:605



- many-valued logic, functions of 3:609  
mapping 3:609  
mapping-cone construction 3:610  
mapping cylinder 3:611  
mapping method 3:611  
mapping, principal net of a 3:612  
mappings, classes of 3:612  
Marcinkiewicz space 3:613  
marginal distribution 3:614  
Markov chain 3:614  
Markov chain, class of positive states of a 3:616  
Markov chain, class of zero states of a 3:616  
Markov chain, decomposable 3:617  
Markov chain, ergodic 3:617  
Markov chain, generalized 3:618  
Markov chain, non-decomposable 3:618  
Markov chain, periodic 3:619  
Markov chain, recurrent 3:619  
Markov criterion 3:619  
Markov form 3:620  
Markov function system 3:620  
Markov inequality 3:620  
Markov moment 3:620  
Markov process 3:621  
Markov process, stationary 3:625  
Markov property 3:625  
Markov quadrature formula 3:626  
Markov spectrum 3:626  
Markov spectrum problem 3:626  
Martin boundary in potential theory 3:627  
Martin boundary in the theory of Markov processes 3:628  
martingale 3:629  
mass 3:631  
mass and co-mass 3:631  
mass operator 3:632  
mathematical analysis 3:632  
mathematical economics 3:635  
mathematical expectation 3:641  
mathematical induction 3:641  
mathematical linguistics 3:642  
mathematical logic 3:644  
mathematical model 3:647  
mathematical physics 3:648  
mathematical physics, equations of 3:650  
mathematical programming 3:655  
mathematical statistics 3:657  
mathematical symbols 3:660  
mathematical theory of computation 3:663  
mathematics 3:665  
Mathieu equation 3:668  
Mathieu functions 3:669  
Mathieu group 3:669  
matrix 3:670  
matrix algebra 3:673  
matrix differential equation 3:674  
matrix factorization method 3:675  
matrix game 3:675  
matrix group 3:676  
matrix of transition probabilities 3:676  
matrix ring 3:676  
matrix summation method 3:677  
matroid 3:677  
Matsushima criterion 3:679  
Maupertuis principle 3:679  
Maurer-Cartan form 3:680  
maximal and minimal extensions 3:680  
maximal and minimal operators 3:680  
maximal compact subgroup 3:681  
maximal correlation coefficient 3:681  
maximal ergodic theorem 3:681  
maximal ideal 3:682  
maximal invariant 3:682  
maximal spectral type 3:683  
maximal subgroup 3:683  
maximal term of a series 3:683  
maximal torus 3:683  
maximin 3:685  
maximin criterion 3:685  
maximin, numerical methods 3:685  
maximin principle 3:687  
maximization and minimization of functions 3:687  
maximum and minimum of a function 3:689  
maximum and minimum points 3:689  
maximum-entropy spectral estimator 3:689  
maximum-likelihood method 3:690  
maximum-modulus principle 3:691  
maximum principle 3:692  
Maxwell distribution 3:693  
Maxwell equations 3:693  
Mayer problem 3:695  
mean curvature 3:695  
mean-square approximation of a function 3:696  
measurable decomposition 3:696

- measurable flow 3:697
- measurable function 3:697
- measurable mapping 3:697
- measurable set 3:698
- measurable space 3:698
- measure 3:698
- measure in a topological vector space 3:704
- measure of irrationality 3:705
- measure-preserving transformation 3:705
- measure space 3:705
- mechanical quadrature, method of 3:706
- median 3:706
- median (in statistics) 3:706
- mediant 3:707
- Mehler-Fock transform 3:707
- Mehler quadrature formula 3:708
- Meier theorem 3:708
- Meijer transform 3:708
- Mellin transform 3:709
- memoryless channel 3:710
- Menelaus theorem 3:710
- Menger curve 3:710
- Men'shov example of a zero-series 3:710
- Men'shov-Rademacher theorem 3:711
- Mercer theorem 3:711
- Mergelyan theorem 3:711
- meromorphic function 3:712
- meromorphic mapping 3:714
- Mersenne number 3:715
- meta-Abelian group 3:715
- meta-language 3:716
- meta-logic 3:716
- meta-mathematics 3:716
- meta-theorem 3:716
- meta-theory 3:716
- metacyclic group 3:717
- meteorology, mathematical problems in 3:717
- method of boundary integration 3:719
- method of characteristics 3:719
- method of extensions and restrictions 3:721
- method of steepest descent (for integrals) 3:722
- method of undetermined coefficients 3:722
- metric 3:722
- metric connection 3:723
- metric dimension 3:724
- metric entropy 3:724
- metric isomorphism 3:725
- metric projection 3:726
- metric space 3:726
- metric tensor 3:731
- metric theory of functions 3:731
- metric theory of numbers 3:733
- metric transitivity 3:735
- metrizable space 3:737
- Meusnier theorem 3:738
- micro-bundle 3:738
- microlocal analysis 3:739
- Mikhaïlov criterion 3:740
- Milne method 3:741
- Milne problem 3:742
- Milnor sphere 3:743
- minimal discrepancy method 3:744
- minimal functional calculus 3:744
- minimal ideal 3:744
- minimal iteration method 3:745
- minimal model 3:746
- minimal normal subgroup 3:747
- minimal property 3:747
- minimal propositional calculus 3:747
- minimal set 3:747
- minimal simple group 3:749
- minimal sufficient statistic 3:749
- minimal surface 3:749
- minimax 3:753
- minimax estimator 3:753
- minimax principle 3:754
- minimax property 3:754
- minimax statistical procedure 3:754
- minimization methods for functions depending strongly on a few variables 3:755
- minimization of an area 3:758
- minimization of the labour of calculation 3:758
- minimizing sequence 3:760
- minimizing sequence (for an operator) 3:761
- minimum 3:761
- Minkowski geometry 3:761
- Minkowski hypothesis 3:761
- Minkowski inequality 3:761
- Minkowski problem 3:762
- Minkowski space 3:763
- Minkowski theorem 3:764
- minor 3:764
- minor of a graph 3:764
- minorant 3:765



- minute 3:765
- Mittag-Leffler function 3:765
- Mittag-Leffler star 3:765
- Mittag-Leffler summation method 3:765
- Mittag-Leffler theorem 3:766
- mixed and boundary value problems for hyperbolic equations and systems 3:767
- mixed and boundary value problems for parabolic equations and systems 3:770
- mixed autoregressive moving-average process 3:773
- mixed group 3:773
- mixed integral equation 3:773
- mixed problem 3:774
- mixed product 3:774
- mixed-type differential equation 3:774
- mixed-volume theory 3:777
- mixing 3:778
- Möbius function 3:779
- Möbius plane 3:779
- Möbius series 3:780
- Möbius strip 3:780
- modal logic 3:781
- modality 3:783
- mode 3:783
- model for calculations 3:783
- model (in logic) 3:784
- model, regular 3:784
- model theory 3:784
- modification 3:787
- modular curve 3:787
- modular form 3:788
- modular function 3:789
- modular group 3:792
- modular ideal 3:793
- modular lattice 3:793
- module 3:794
- modules, category of 3:797
- moduli of a Riemann surface 3:797
- moduli problem 3:798
- moduli theory 3:799
- modulus 3:800
- modulus of a family of curves 3:801
- modulus of an annulus 3:801
- modulus of an automorphism 3:801
- modulus of an elliptic integral 3:802
- modus ponens 3:802
- moment 3:802
- moment problem 3:803
- moments, method of 3:808
- moments, method of (in probability theory) 3:808
- Monge-Ampère equation 3:808
- Monge cone 3:811
- Monge equation 3:811
- monodromic function 3:811
- monodromy group 3:812
- monodromy matrix 3:812
- monodromy operator 3:812
- monodromy theorem 3:812
- monodromy transformation 3:813
- monogeneity set 3:814
- monogenic function 3:815
- monogenic semi-group 3:816
- monoid 3:817
- monoidal transformation 3:817
- monomial 3:818
- monomial matrix 3:818
- monomial representation 3:818
- monomial substitutions, group of 3:819
- monomorphism 3:819
- monospline 3:819
- monotone Boolean function 3:819
- monotone function 3:820
- monotone mapping 3:821
- monotone operator 3:821
- monotone sequence 3:821
- Monte-Carlo method 3:822
- Montel space 3:825
- Montel theorem 3:825
- Moore space 3:825
- Mordell conjecture 3:826
- Morera theorem 3:827
- Morita equivalence 3:827
- morphism 3:828
- Morse function 3:828
- Morse index 3:828
- Morse inequalities 3:829
- Morse lemma 3:830
- Morse-Smale system 3:831
- Morse surgery 3:832
- Morse theory 3:833
- most-powerful test 3:836
- motion 3:836
- motives, theory of 3:837
- Moufang loop 3:838

moulding surface 3:838  
 movable singular point 3:839  
 moving-average process 3:839  
 moving-frame method 3:840  
 multi-algebra 3:842  
 multi-criterion problem 3:842  
 multi-dimensional distribution 3:843  
 multi-dimensional knot 3:843  
 multi-dimensional statistical analysis 3:845  
 multi-dimensional variational problem 3:848  
 multi-extremum problem 3:849  
 multi-functor 3:850  
 multi-group approximation 3:851  
 multi-operator group 3:851  
 multi-pole potential 3:852  
 multi-sheeted region 3:853  
 multi-valued function 3:853  
 multi-valued mapping 3:853  
 multi-valued representation 3:854  
 multigraph 3:854  
 multiharmonic function 3:854  
 multilinear algebra 3:854  
 multilinear form 3:855  
 multilinear mapping 3:855  
 multimodal distribution 3:856  
 multinomial coefficient 3:856  
 multinomial distribution 3:856  
 multiple 3:857

multiple comparison 3:857  
 multiple-correlation coefficient 3:857  
 multiple integral 3:858  
 multiple point 3:859  
 multiple recursion 3:860  
 multiple sequence 3:860  
 multiple series 3:860  
 multiplication 3:860  
 multiplicative arithmetic function 3:861  
 multiplicative ergodic theorem 3:861  
 multiplicative group 3:862  
 multiplicative lattice 3:862  
 multiplicative semi-group 3:863  
 multiplicative system 3:863  
 multiplicity of a module 3:863  
 multiplicity of a singular point 3:864  
 multiplicity of a weight 3:864  
 multiplier group 3:865  
 multiplier theory 3:865  
 multipliers 3:865  
 multiply-connected domain 3:866  
 multivalent function 3:866  
 Mumford hypothesis 3:869  
 Müntz theorem 3:870  
 mutual kernels 3:871  
 mutually-prime numbers 3:871  
 mutually-singular measures 3:871

## N

$n$ -group 3:872  
 Nagel point 3:872  
 name 3:872  
 Napier number 3:873  
 Nash theorem (in game theory) 3:873  
 Nash theorems (in differential geometry) 3:873  
 natural coordinate frame 3:874  
 natural equation 3:874  
 natural logical deduction 3:874  
 natural number 3:875  
 natural parameter 3:875  
 natural sequence 3:875  
 naturally ordered groupoid 3:876  
 Navier-Stokes equations 3:876  
 near-ring 3:879

necessary and sufficient conditions 3:880  
 necessary sufficient statistic 3:880  
 negation 3:880  
 negative binomial distribution 3:880  
 negative correlation 3:881  
 negative curvature, surface of 3:881  
 negative exponential distribution 3:887  
 negative hypergeometric distribution 3:887  
 negative polynomial distribution 3:887  
 negative variation of a function 3:888  
 negative vector bundle 3:888  
 neighbourhood 3:888  
 Neil parabola 3:888  
 Nekrasov integral equation 3:888  
 Néron model 3:888



- Néron-Severi group 3:889  
 nerve of a family of sets 3:889  
 net 3:890  
 net (directed set) 3:891  
 net (in differential geometry) 3:891  
 net (in finite geometry) 3:892  
 net (of sets in a topological space) 3:892  
 network 3:893  
 network graph 3:894  
 network model 3:894  
 network planning 3:895  
 Neumann  $\bar{\partial}$ -problem 3:895  
 Neumann function 3:896  
 Neumann problem 3:896  
 Neumann series 3:896  
 neutral differential equation 3:898  
 neutron flow theory 3:898  
 Neuwirth knot 3:898  
 Nevanlinna-Pick problem 3:899  
 Nevanlinna theorems 3:900  
 Newton binomial 3:901  
 Newton-Cotes quadrature formula 3:901  
 Newton diagram 3:902  
 Newton interpolation formula 3:903  
 Newton laws of mechanics 3:903  
 Newton-Leibniz formula 3:904  
 Newton method 3:904  
 Newton number 3:905  
 Newton potential 3:905  
 Neyman method of confidence intervals 3:906  
 Neyman-Pearson lemma 3:907  
 Neyman structure 3:907  
 Nicomedes conchoid 3:908  
 Nikol'skiĭ space 3:908  
 nil algebra 3:910  
 nil flow 3:911  
 nil group 3:911  
 nil ideal 3:911  
 nil manifold 3:911  
 nil semi-group 3:911  
 nilpotent algebra 3:912  
 nilpotent element 3:912  
 nilpotent group 3:913  
 nilpotent ideal 3:913  
 nilpotent semi-group 3:914  
 nine-point circle 3:914  
 node 3:914  
 Noether-Enriques theorem 3:915  
 Noether problem 3:916  
 Noether theorem 3:916  
 Noetherian group 3:919  
 Noetherian induction 3:919  
 Noetherian integral equation 3:919  
 Noetherian module 3:920  
 Noetherian operator 3:920  
 Noetherian ring 3:921  
 Noetherian scheme 3:922  
 Noetherian space 3:922  
 noise immunity 3:922  
 nomography 3:922  
 non-Abelian cohomology 3:924  
 non-Abelian number field 3:926  
 non-Archimedean geometry 3:926  
 non-associative rings and algebras 3:927  
 non-atomic game 3:929  
 non-atomic measure 3:929  
 non-central 'chi-squared' distribution 3:930  
 non-classical theory of models 3:930  
 non-cooperative game 3:931  
 non-degenerate representation 3:932  
 non-Desarguesian geometry 3:932  
 non-differentiable function 3:932  
 non-Euclidean geometries 3:933  
 non-Euclidean space 3:936  
 non-Fredholm integral equation 3:936  
 non-holonomic systems 3:936  
 non-Hopf group 3:937  
 non-linear boundary value problem 3:937  
 non-linear boundary value problem, numerical methods 3:937  
 non-linear connection 3:940  
 non-linear differential equation 3:941  
 non-linear equation, numerical methods 3:941  
 non-linear functional 3:944  
 non-linear functional analysis 3:945  
 non-linear integral equation 3:945  
 non-linear operator 3:946  
 non-linear oscillations 3:948  
 non-linear partial differential equation 3:950  
 non-linear potential 3:954  
 non-linear programming 3:954  
 non-measurable set 3:955  
 non-orientable manifold 3:955  
 non-oscillation interval 3:956

non-parametric methods in statistics 3:956  
 non-parametric test 3:959  
 non-Pascalean geometry 3:959  
 non-predicative definition 3:960  
 non-residue 3:960  
 non-self-adjoint operator 3:960  
 non-singular boundary point 3:964  
 non-singular matrix 3:965  
 non-smoothable manifold 3:965  
 non-standard analysis 3:965  
 non-wandering point 3:966  
 norm 3:966  
 norm map 3:967  
 norm on a field 3:968  
 norm-residue symbol 3:969  
 normal 3:969  
 normal algorithm 3:970  
 normal analytic space 3:971  
 normal bundle 3:972  
 normal complex 3:972  
 normal convergence 3:972  
 normal curvature 3:973  
 normal derivative 3:973  
 normal distribution 3:973  
 normal dynamical system 3:975  
 normal epimorphism 3:975  
 normal equation 3:975  
 normal extension 3:975  
 normal family 3:975  
 normal form 3:977  
 normal fundamental system of solutions 3:983  
 normal matrix 3:984  
 normal monomorphism 3:984  
 normal number 3:984  
 normal operator 3:985  
 normal  $p$ -complement 3:985  
 normal plane 3:986  
 normal ring 3:986  
 normal scheme 3:986

normal section 3:987  
 normal series 3:987  
 normal sheaf 3:987  
 normal solvability 3:988  
 normal space 3:988  
 normal space (to a surface) 3:989  
 normal sub-semi-group 3:989  
 normal subgroup 3:989  
 normal zero-dimensional cycle 3:989  
 normalization principle 3:990  
 normalized system of elements 3:990  
 normalizer condition 3:990  
 normalizer 3:990  
 normally-imbedded subspace 3:990  
 normally-solvable operator 3:991  
 normed algebra 3:991  
 normed field 3:991  
 normed ring 3:991  
 normed space 3:991  
 nowhere-dense set 3:992  
 nuclear bilinear form 3:992  
 nuclear  $C^*$ -algebra 3:992  
 nuclear norm 3:993  
 nuclear operator 3:994  
 nuclear space 3:997  
 nucleolus of a game 3:1000  
 nuisance parameter 3:1000  
 null object of a category 3:1000  
 number 3:1001  
 number field 3:1004  
 number of divisors 3:1004  
 number-theoretic functions 3:1005  
 number theory 3:1005  
 number theory, probabilistic methods in 3:1006  
 numbers, representations of 3:1008  
 numerator 3:1009  
 Nusselt number 3:1009  
 Nyquist criterion 3:1009

## O

$O$ -direct union 3:1011  
 object, geometric 3:1011  
 object in a category 3:1011

object language 3:1011  
 objective function 3:1011  
 oblique derivative 3:1011



- obstruction 3:1012
- oceanology, mathematical problems in 3:1013
- octahedral space 3:1015
- octahedron 3:1015
- octant 3:1015
- odd function 3:1015
- odd number 3:1015
- Oka theorems 3:1015
- omega-completeness 3:1016
- omega-consistency 3:1016
- 'omega-squared' distribution 3:1016
- one-dimensional manifold 3:1016
- one-parameter semi-group 3:1017
- one-parameter subgroup 3:1017
- one-parameter transformation group 3:1018
- one-sheet hyperboloid 3:1018
- one-sided and two-sided surfaces 3:1018
- one-sided derivative 3:1019
- one-sided limit 3:1019
- one-to-one correspondence 3:1019
- open-closed set 3:1020
- open manifold 3:1020
- open mapping 3:1020
- open-mapping theorem 3:1020
- open set 3:1021
- operand 3:1021
- operational calculus 3:1021
- operations research 3:1023
- operator 3:1025
- operator ergodic theorem 3:1028
- operator group 3:1028
- operator homomorphism 3:1029
- operator-irreducible representation 3:1029
- operator ring 3:1029
- operator topology 3:1029
- optimal control 3:1030
- optimal control, mathematical theory of 3:1030
- optimal decoding 3:1033
- optimal guarantee strategy 3:1033
- optimal programming control 3:1034
- optimal quadrature formula 3:1036
- optimal singular regime 3:1037
- optimal sliding regime 3:1040
- optimal synthesis control 3:1042
- optimal trajectory 3:1046
- optimality principle 3:1046
- optimality, sufficient conditions for 3:1047
- optimization of a computational method 3:1048
- optimization of computational algorithms 3:1048
- optional random process 3:1050
- optional sigma-algebra 3:1050
- orbit 4:1
- orbit method 4:2
- orbit stability 4:4
- order 4:4
- order (on a set) 4:6
- order relation 4:7
- order statistic 4:7
- order topology 4:9
- order type 4:9
- orderable group 4:10
- ordered field 4:10
- ordered group 4:11
- ordered groupoid 4:11
- ordered ring 4:12
- ordered semi-group 4:13
- ordered set 4:14
- ordered sum 4:14
- ordinal number 4:15
- ordinate 4:16
- orientation 4:16
- Orlicz class 4:18
- Orlicz space 4:19
- Ornstein-Chacon ergodic theorem 4:20
- Ornstein-Uhlenbeck process 4:20
- Orr-Sommerfeld equation 4:22
- orthocentre 4:23
- orthogonal array 4:23
- orthogonal basis 4:23
- orthogonal double-sweep method 4:24
- orthogonal group 4:25
- orthogonal Latin squares 4:27
- orthogonal matrix 4:29
- orthogonal net 4:30
- orthogonal polynomials 4:30
- orthogonal polynomials on a complex domain 4:34
- orthogonal projector 4:35
- orthogonal series 4:35
- orthogonal system 4:38
- orthogonal trajectory 4:40
- orthogonal transformation 4:40
- orthogonality 4:40
- orthogonalization 4:41
- orthogonalization method 4:42

orthogonalization of a system of functions 4:42  
 orthomodular lattice 4:43  
 orthonormal system 4:43  
 oscillating differential equation 4:44  
 oscillating kernel 4:45  
 oscillating matrix 4:45  
 oscillating solution 4:46  
 oscillation of a function 4:46  
 oscillations, theory of 4:46  
 oscillator, harmonic 4:49  
 osculating circle 4:49  
 osculating paraboloid 4:50

osculating plane 4:50  
 osculating quadric 4:50  
 osculating sphere 4:50  
 osculation 4:51  
 Ostrogradski formula 4:51  
 Ostrogradski-Liouville formula 4:52  
 Ostrogradski method 4:52  
 outer measure 4:52  
 oval 4:53  
 over-convergence 4:53  
 overdetermined system 4:54  
 ovoid 4:54

## P

$\pi$ -separable group 4:56  
 $\pi$ -solvable group 4:56  
 $p$ -adic number 4:57  
 $p$ -divisible group 4:57  
 $p$ -group 4:58  
 packing 4:59  
 Padé approximation 4:59  
 Page theorem 4:62  
 Painlevé equation 4:62  
 Painlevé problem 4:63  
 Painlevé theorem 4:63  
 pairing 4:64  
 Paley-Wiener theorem 4:64  
 Papperitz equation 4:64  
 Pappus axiom 4:66  
 parabola 4:66  
 parabola method 4:66  
 parabolic coordinates 4:67  
 parabolic cylinder 4:67  
 parabolic cylinder function 4:67  
 parabolic-equation method 4:68  
 parabolic partial differential equation 4:69  
 parabolic partial differential equation, numerical methods 4:70  
 parabolic point 4:72  
 parabolic regression 4:73  
 parabolic spiral 4:73  
 parabolic subalgebra 4:73  
 parabolic subgroup 4:74  
 paraboloid 4:75  
 paraboloidal coordinates 4:75

paracompact space 4:75  
 paracompactness criteria 4:77  
 parallel displacement 4:77  
 parallel displacement 4:78  
 parallel field 4:79  
 parallel lines 4:80  
 parallel programming 4:80  
 parallel straight lines 4:81  
 parallel surfaces 4:82  
 parallelism, absolute 4:82  
 parallelism axiom 4:83  
 parallelizable manifold 4:83  
 parallelogram 4:83  
 parallelohedron 4:83  
 parallelopipedon 4:84  
 parallelotope 4:84  
 parameter-dependent integral 4:84  
 parameter-introduction method 4:85  
 parameter, method of variation of the 4:86  
 parametric equation 4:88  
 parametric integral-representation method 4:88  
 parametric programming 4:89  
 parametric representation method 4:90  
 parametric representation of a function 4:90  
 parametric representation of univalent functions 4:91  
 parametric resonance, mathematical theory of 4:92  
 parametrix method 4:93  
 Pareto distribution 4:94  
 Parseval equality 4:95  
 Parseval-Plancherel formula 4:96



- partial correlation coefficient 4:96
- partial derivative 4:96
- partial differential 4:97
- partial differential equations on a manifold 4:97
- partial geometry 4:98
- partial limit 4:99
- partial order 4:99
- partial problem of eigen values 4:99
- partial recursive function 4:100
- partial recursive operator 4:100
- partially ordered group 4:100
- partially ordered set 4:100
- particle method 4:103
- partition 4:104
- partition 4:104
- Pascal distribution 4:104
- Pascal geometry 4:105
- Pascal limaçon 4:106
- Pascal theorem 4:106
- Pascal triangle 4:107
- Pasch axiom 4:107
- path 4:108
- path-connected space 4:108
- path integral 4:109
- path space 4:109
- pattern recognition 4:109
- Pauli matrices 4:110
- paving 4:111
- Peano axioms 4:111
- Peano curve 4:112
- Peano derivative 4:113
- Peano theorem 4:113
- Pearson curves 4:113
- Pearson distribution 4:115
- Péclet number 4:115
- pedal curve 4:115
- Peirce arrow 4:115
- Peirce decomposition 4:115
- Pell equation 4:116
- penalty functions, method of 4:117
- pendulum equation 4:118
- pentaspherical coordinates 4:118
- percentile 4:119
- perfect compactification 4:119
- perfect field 4:119
- perfect irreducible mapping 4:120
- perfect mapping 4:120
- perfect measure 4:120
- perfect normal form 4:121
- perfect number 4:121
- perfect ring 4:122
- perfect set 4:122
- perfectly-normal space 4:123
- perimeter 4:123
- period mapping 4:123
- period of a function 4:124
- period of a group 4:125
- periodic function 4:125
- periodic group 4:126
- periodic point 4:126
- periodic semi-group 4:126
- periodic solution 4:127
- periodic trajectory 4:128
- periodogram 4:128
- peripherically-compact space 4:129
- permanent 4:129
- permutation 4:130
- permutation group 4:131
- permutation of a set 4:132
- permutation relationships 4:133
- permutation test 4:134
- permutator 4:134
- perpendicular 4:135
- perpendicular straight lines 4:135
- Perron-Frobenius theorem 4:135
- Perron integral 4:135
- Perron method 4:136
- Perron-Stieltjes integral 4:137
- Perron transformation 4:137
- Persian curve 4:138
- perspective 4:138
- perturbation of a linear system 4:139
- perturbation theory 4:139
- Peter-Weyl theorem 4:144
- Peterson-Codazzi equations 4:145
- Peterson correspondence 4:146
- Peterson surface 4:146
- Petri net 4:146
- Pettis integral 4:147
- Pfaffian 4:148
- Pfaffian equation 4:148
- Pfaffian form 4:149
- Pfaffian problem 4:150
- Pfaffian structure 4:152

- Pfaffian system 4:153  
 phase equilibrium diagram 4:153  
 phase integral, method of the 4:153  
 phase plane 4:153  
 phase space 4:153  
 phase trajectory 4:154  
 phase transition 4:155  
 phase velocity vector 4:155  
 Phragmén-Lindelöf theorem 4:155  
 PI-algebra 4:156  
 pi (number  $\pi$ ) 4:158  
 Picard group 4:159  
 Picard scheme 4:159  
 Picard theorem 4:160  
 Picard variety 4:161  
 Pick theorem 4:162  
 piecewise-linear topology 4:163  
 Pierpont variation 4:165  
 Pitman estimator 4:165  
 place of a field 4:166  
 Plancherel formula 4:166  
 Plancherel theorem 4:167  
 Planck constant 4:168  
 plane 4:168  
 plane real algebraic curve 4:169  
 plane trigonometry 4:171  
 planigon 4:172  
 plasticity, mathematical theory of 4:173  
 Plateau problem 4:177  
 Plateau problem, multi-dimensional 4:178  
 Platonic solids 4:182  
 player 4:182  
 Plessner theorem 4:182  
 PL/ I 4:183  
 Plücker coordinates 4:183  
 Plücker formulas 4:184  
 Plücker interpretation 4:185  
 pluriharmonic function 4:186  
 plurisubharmonic function 4:186  
 plurisuperharmonic function 4:188  
 Pochhammer equation 4:188  
 Pohlke-Schwarz theorem 4:189  
 Poincaré-Bendixson theory 4:189  
 Poincaré-Bertrand formula 4:190  
 Poincaré complex 4:191  
 Poincaré conjecture 4:191  
 Poincaré divisor 4:191  
 Poincaré duality 4:192  
 Poincaré-Dulac theorem 4:193  
 Poincaré equations 4:194  
 Poincaré group 4:195  
 Poincaré last theorem 4:195  
 Poincaré model 4:196  
 Poincaré problem 4:197  
 Poincaré return map 4:197  
 Poincaré return theorem 4:198  
 Poincaré space 4:199  
 Poincaré sphere 4:200  
 Poincaré theorem 4:200  
 Poincaré theorem in stability theory 4:201  
 point (decimal point, floating point) 4:201  
 point estimator 4:201  
 point in general position 4:202  
 point of cessation 4:202  
 point of inflection 4:202  
 point of rectification 4:203  
 pointed object 4:203  
 pointed space 4:203  
 pointwise convergence 4:203  
 pointwise convergence, topology of 4:203  
 pointwise remainder 4:203  
 Poiseuille flow 4:203  
 Poisson brackets 4:204  
 Poisson distribution 4:204  
 Poisson equation 4:205  
 Poisson equation, numerical methods 4:206  
 Poisson flow 4:208  
 Poisson formula 4:208  
 Poisson integral 4:208  
 Poisson process 4:210  
 Poisson stability 4:210  
 Poisson summation formula 4:211  
 Poisson summation method 4:211  
 Poisson theorem 4:211  
 Poisson transform 4:212  
 polar 4:212  
 polar coordinates 4:213  
 polar correspondence 4:214  
 polar decomposition 4:214  
 polar set 4:215  
 polar space 4:216  
 polarity 4:216  
 polarized algebraic variety 4:217  
 pole 4:218



- pole (of a function) 4:218
- poly-analytic function 4:219
- poly-harmonic function 4:219
- poly-nilpotent group 4:220
- poly-vector 4:220
- Pólya distribution 4:221
- Pólya theorem 4:221
- polycyclic group 4:222
- polydisc 4:223
- polygon 4:223
- polygon (over a monoid) 4:225
- polygonal number 4:226
- polyhedral angle 4:226
- polyhedral chain 4:227
- polyhedral complex 4:227
- polyhedral cycle 4:227
- polyhedral metric 4:227
- polyhedron 4:228
- polyhedron, abstract 4:230
- polyhedron group 4:232
- polynomial 4:232
- polynomial and exponential growth in groups and algebras 4:234
- polynomial function 4:236
- polynomial least deviating from zero 4:237
- polynomial of best approximation 4:237
- Pontryagin character 4:238
- Pontryagin class 4:239
- Pontryagin duality 4:240
- Pontryagin invariant 4:242
- Pontryagin maximum principle 4:242
- Pontryagin number 4:243
- Pontryagin space 4:244
- Pontryagin square 4:245
- Pontryagin surface 4:246
- porosity point 4:246
- portion 4:247
- positional game 4:247
- positive cone 4:248
- positive correlation 4:248
- positive-definite form 4:248
- positive-definite function 4:249
- positive-definite kernel 4:250
- positive-definite operator 4:250
- positive element 4:251
- positive functional 4:251
- positive operator 4:251
- positive propositional calculus 4:252
- positive sequence 4:253
- positive variation of a function 4:253
- positive vector bundle 4:253
- Post algebra 4:254
- Post canonical system 4:254
- Post class 4:255
- Post correspondence problem 4:255
- Post lattice 4:257
- Post machine 4:257
- Post normal system 4:257
- Post production system 4:257
- Postnikov square 4:257
- Postnikov system 4:258
- potential 4:260
- potential field 4:260
- potential net 4:260
- potential of a mass distribution 4:261
- potential operator 4:262
- potential theory 4:262
- potential theory, abstract 4:267
- potential theory, inverse problems in 4:271
- potential theory, mixed boundary value problems of 4:273
- potentials, method of 4:276
- power 4:277
- power function 4:277
- power function of a test 4:278
- power of a statistical test 4:278
- power residue 4:278
- power series 4:279
- Prandtl equation 4:282
- Prandtl number 4:282
- pre-base 4:282
- pre-compact space 4:282
- pre-Hilbert space 4:283
- pre-measure 4:283
- pre-norm 4:283
- pre-order 4:283
- pre-orderable group 4:283
- pre-sheaf 4:284
- predicate 4:284
- predicate calculus 4:284
- predicate symbol 4:286
- predicate variable 4:286
- predicativity 4:286
- predictable random process 4:286

- predictable sigma-algebra 4:286
- prenex formula 4:287
- presentation 4:287
- preservation of domain, principle of 4:287
- primary decomposition 4:288
- primary ideal 4:288
- primary representation 4:289
- primary ring 4:289
- prime element 4:289
- prime field 4:289
- prime ideal 4:289
- prime ideal 4:289
- prime number 4:290
- prime ring 4:291
- primitive class 4:291
- primitive function 4:291
- primitive group of permutations 4:291
- primitive ideal 4:292
- primitive polynomial 4:292
- primitive recursion 4:292
- primitive recursive function 4:293
- primitive ring 4:294
- primitive root 4:294
- principal analytic fibration 4:294
- principal character 4:295
- principal curvature 4:296
- principal direction 4:296
- principal factor 4:296
- principal fibre bundle 4:297
- principal fundamental solution 4:297
- principal  $G$ -object 4:298
- principal homogeneous space 4:298
- principal ideal 4:299
- principal ideal ring 4:300
- principal normal 4:300
- principal part of a differential operator 4:300
- principal series 4:301
- principal translation 4:301
- principal type, partial differential operator of 4:301
- principle of least reaction 4:302
- principle of the largest sure result 4:302
- priority method 4:303
- prism 4:304
- prismoid 4:304
- Privalov operators 4:304
- Privalov theorem 4:305
- privileged compact set 4:306
- pro- $p$ -group 4:306
- probability 4:307
- probability distribution 4:308
- probability graph paper 4:309
- probability integral 4:309
- probability measure 4:310
- probability of large deviations 4:311
- probability process 4:311
- probability space 4:312
- probability theory 4:312
- probable deviation 4:318
- problem-oriented language 4:318
- procedure 4:318
- processing of observations 4:319
- product integral 4:319
- product of a family of objects in a category 4:320
- productive set 4:320
- profinite group 4:321
- program 4:321
- program-optimizing transformations 4:322
- program scheme 4:322
- programming 4:323
- programming language 4:323
- progression 4:324
- project management and scheduling,  
    mathematical theory of 4:324
- projection 4:326
- projection methods 4:327
- projection spectrum 4:328
- projective algebra 4:329
- projective algebraic set 4:330
- projective connection 4:330
- projective coordinates 4:332
- projective covering 4:333
- projective deformation 4:333
- projective determination of a metric 4:333
- projective differential geometry 4:334
- projective geometry 4:335
- projective group 4:336
- projective limit 4:337
- projective metric 4:337
- projective module 4:338
- projective normal 4:339
- projective object of a category 4:339
- projective plane 4:340
- projective representation 4:341
- projective scheme 4:342



projective set 4:343  
 projective space 4:344  
 projective spectrum of a ring 4:345  
 projective straight line 4:345  
 projective transformation 4:346  
 projector 4:346  
 prolongation of solutions of differential equations 4:347  
 pronormal subgroup 4:348  
 proof 4:348  
 proof theory 4:348  
 proper cycle 4:350  
 proper morphism 4:351  
 proposition 4:352  
 propositional calculus 4:352  
 propositional calculus 4:352  
 propositional connective 4:353  
 propositional form 4:353  
 propositional formula 4:353  
 propositional function 4:354  
 propositional variable 4:354  
 proximate point 4:354  
 proximity 4:354  
 proximity space 4:354  
 proximity transformation 4:356  
 Prüfer surface 4:356  
 pseudo-arc 4:357  
 pseudo-basis 4:357  
 pseudo-Boolean algebra 4:357  
 pseudo-character 4:359  
 pseudo-compact space 4:359  
 pseudo-conformal mapping 4:359

pseudo-convex and pseudo-concave 4:359  
 pseudo-differential operator 4:362  
 pseudo-elliptic integral 4:366  
 pseudo-Euclidean space 4:366  
 pseudo-Galilean space 4:367  
 pseudo-group 4:367  
 pseudo-group structure 4:369  
 pseudo-manifold 4:370  
 pseudo-metric 4:371  
 pseudo-metric space 4:371  
 pseudo-norm 4:371  
 pseudo-open mapping 4:371  
 pseudo-periodic function 4:372  
 pseudo-quadratic form 4:372  
 pseudo-random numbers 4:372  
 pseudo-Riemannian geometry 4:372  
 pseudo-Riemannian space 4:373  
 pseudo-scalar 4:373  
 pseudo-scalar product 4:374  
 pseudo-sphere 4:374  
 pseudo-tensor 4:374  
 pseudo-vector 4:375  
 psi-function 4:375  
 Ptolemy's theorem 4:375  
 Puiseux series 4:375  
 pure subgroup 4:375  
 pure submodule 4:375  
 pursuit game 4:376  
 pyramid 4:376  
 Pythagoras theorem 4:377  
 Pythagorean numbers 4:377

## Q

quadrangle 4:378  
 quadrangle, complete 4:379  
 quadrant 4:379  
 quadratic deviation 4:379  
 quadratic differential 4:379  
 quadratic equation 4:380  
 quadratic error 4:381  
 quadratic field 4:381  
 quadratic form 4:382  
 quadratic forms, reduction of 4:386

quadratic irrationality 4:388  
 quadratic mean 4:389  
 quadratic programming 4:389  
 quadratic reciprocity law 4:389  
 quadratic residue 4:390  
 quadratic surface forms 4:390  
 quadratrix 4:390  
 quadrature 4:390  
 quadrature formula 4:390  
 quadrature formula of highest algebraic

- accuracy 4:392
- quadrature of the circle 4:393
- quadrature-sum method 4:393
- quadric 4:394
- quadrilateral 4:395
- qualitative theory of differential equations 4:395
- qualitative theory of differential equations  
in Banach spaces 4:400
- quantifier 4:403
- quantile 4:403
- quantity 4:404
- quantum communication channel 4:405
- quantum field theory 4:406
- quantum groups 4:410
- quantum probability 4:412
- quantum stochastic processes 4:414
- quartile 4:417
- quasi-Abelian function 4:417
- quasi-affine scheme 4:417
- quasi-analytic class 4:417
- quasi-averages, method of 4:419
- quasi-character 4:420
- quasi-classical approximation 4:420
- quasi-coherent sheaf 4:420
- quasi-compact space 4:421
- quasi-conformal mapping 4:421
- quasi-cyclic group 4:425
- quasi-dihedral group 4:425
- quasi-discrete spectrum 4:425
- quasi-elliptic space 4:426
- quasi-equivalent representations 4:427
- quasi-Euclidean space 4:427
- quasi-Frobenius ring 4:427
- quasi-geodesic line 4:428
- quasi-group 4:429
- quasi-hyperbolic space 4:431
- quasi-identity 4:432
- quasi-informational extension 4:432
- quasi-invariant measure 4:432
- quasi-linear equation 4:433
- quasi-linear hyperbolic equations and  
systems 4:433
- quasi-linearization 4:436
- quasi-norm 4:437
- quasi-normal space 4:437
- quasi-normed space 4:437
- quasi-periodic function 4:438
- quasi-periodic motion 4:438
- quasi-prime number 4:439
- quasi-projective scheme 4:439
- quasi-regular radical 4:440
- quasi-regular ring 4:440
- quasi-simple representation 4:440
- quasi-solution 4:441
- quasi-split group 4:442
- quasi-symplectic space 4:442
- quasi-uniform convergence 4:442
- quasi-variety 4:443
- quaternary form 4:443
- quaternary quadratic form 4:443
- quaternion 4:443
- quaternion group 4:444
- quaternionic structure 4:445
- queue 4:446
- queue input stream of calls 4:448
- queue, multi-channel with waiting 4:449
- queue with refusals 4:452
- queue with waiting and one service channel 4:453
- queueing theory 4:457
- quiver 4:458
- quotient category 4:460
- quotient group 4:460
- quotient mapping 4:460
- quotient object 4:461
- quotient representation 4:462
- quotient ring 4:462
- quotient space 4:462
- \*-regular ring 4:464
- Raabe criterion 4:464
- Radau quadrature formula 4:464
- Rademacher system 4:464
- radial boundary value 4:465
- radian 4:466

## R



- radiation conditions 4:466
- radiative transfer theory 4:467
- radical 4:468
- radical axis 4:468
- radical in a class of semi-groups 4:469
- radical of a group 4:469
- radical of an ideal 4:470
- radical of rings and algebras 4:470
- radius 4:472
- radius vector 4:473
- Radon integral 4:473
- Radon measure 4:473
- Radon-Nikodým theorem 4:473
- Radon transform 4:474
- Ramanujan function 4:474
- Ramanujan hypothesis 4:475
- Ramanujan sums 4:475
- ramified prime ideal 4:476
- Ramsey theorem 4:476
- random allocation 4:477
- random and pseudo-random numbers 4:478
- random coding 4:479
- random element 4:479
- random event 4:480
- random field 4:480
- random field, generalized 4:481
- random field, homogeneous 4:482
- random function 4:483
- random mapping 4:484
- random sequence 4:484
- random variable 4:484
- random variables, transformations of 4:485
- random walk 4:485
- randomization 4:488
- randomization test 4:488
- range of values of a function 4:488
- range (of variation of a sample) 4:489
- rank 4:489
- rank of a group 4:489
- rank of a Lie algebra 4:490
- rank of a Lie group 4:490
- rank of a module 4:490
- rank of a singular point 4:491
- rank of an algebraic group 4:491
- rank of an ordinary linear differential equation 4:491
- rank statistic 4:492
- rank sum test 4:492
- rank test 4:493
- rank vector 4:493
- Rao-Blackwell-Kolmogorov theorem 4:494
- Rao-Cramér inequality 4:495
- rate of convergence 4:496
- rational curve 4:496
- rational function 4:496
- rational homotopy theory 4:498
- rational mapping 4:498
- rational number 4:498
- rational representation 4:499
- rational singularity 4:501
- rational surface 4:502
- rational variety 4:502
- rationality theorems 4:503
- ravine function 4:504
- ray 4:504
- ray function 4:504
- Ray-Knight compactification 4:504
- ray method 4:504
- Rayleigh distribution 4:505
- Rayleigh equation 4:506
- reaction-diffusion equation 4:506
- real algebraic variety 4:508
- real-analytic space 4:511
- real function 4:511
- real norm 4:511
- real number 4:511
- realizability 4:515
- reciprocal equation 4:516
- reciprocity laws 4:516
- recognition problem 4:517
- rectangle 4:517
- rectangle rule 4:517
- rectifiable curve 4:518
- rectifying plane 4:518
- recurrence relation 4:518
- recurrent events 4:518
- recurrent formula 4:519
- recurrent function 4:519
- recurrent point 4:519
- recursion 4:520
- recursions of higher degrees 4:522
- recursive definition 4:522
- recursive equivalence type 4:523
- recursive estimation 4:523

- recursive function 4:523
- recursive game 4:524
- recursive model theory 4:524
- recursive operator 4:526
- recursive predicate 4:526
- recursive realizability 4:526
- recursive relation 4:527
- recursive sequence 4:527
- recursive set theory 4:527
- reduced norm 4:529
- reduced normal form 4:530
- reduced scheme 4:530
- reduced system of residues 4:530
- reducibility axiom 4:530
- reducible linear system 4:531
- reducible representation 4:531
- reducible Riemannian space 4:531
- reductio ad absurdum 4:531
- reductive group 4:532
- reductive space 4:532
- redundancy 4:533
- Rees semi-group of matrix type 4:533
- Refal 4:534
- reference system 4:535
- refinement 4:535
- reflection 4:536
- reflection group 4:537
- reflection of an object of a category 4:538
- reflection principle 4:538
- reflective subcategory 4:539
- reflector 4:539
- reflexive space 4:539
- reflexivity 4:540
- refutable formula 4:540
- regression 4:540
- regression analysis 4:541
- regression coefficient 4:543
- regression matrix 4:543
- regression spectrum 4:544
- regression surface 4:544
- regular automorphism 4:544
- regular boundary point 4:544
- regular element 4:545
- regular event 4:545
- regular extremal 4:546
- regular function 4:547
- regular ideal 4:547
- regular lattice 4:547
- regular linear system 4:547
- regular measure 4:548
- regular  $p$ -group 4:548
- regular polygons 4:548
- regular polyhedra 4:548
- regular prime number 4:550
- regular representation 4:550
- regular ring (in commutative algebra) 4:550
- regular ring(in the sense of von Neumann) 4:551
- regular scheme 4:553
- regular semi-group 4:553
- regular set function 4:554
- regular singular point 4:555
- regular space 4:555
- regular summation methods 4:556
- regular torus 4:556
- regularity criteria 4:556
- regularization 4:557
- regularization method 4:557
- regularization of sequences 4:559
- regulator of an algebraic number field 4:560
- Reidemeister torsion 4:560
- Reinhardt domain 4:561
- relation 4:561
- relative geometry 4:562
- relative homological algebra 4:562
- relative homology 4:562
- relative metric 4:563
- relative root system 4:563
- relative topology 4:563
- relatively-compact set 4:564
- relatively-open (-closed) set 4:564
- relativistic astrophysics, mathematical problems in 4:564
- relativistic dynamics 4:565
- relativistic hydrodynamics, mathematical problems in 4:565
- relativistic invariance 4:566
- relativistic thermodynamics, mathematical problems in 4:566
- relativity principle 4:567
- relativity theory 4:567
- relaxation method 4:570
- relaxation oscillation 4:571
- relay-contact scheme 4:572
- reliability and inspection of control systems 4:573



reliability theory 4:576  
 relief of an analytic function 4:578  
 remainder 4:578  
 remainder of a space 4:579  
 remainder of an integer 4:579  
 removable set 4:579  
 removable singular point 4:580  
 renewal theory 4:580  
 renormalization 4:581  
 Rényi test 4:582  
 repeated integral 4:583  
 repeated limit 4:584  
 repeated series 4:584  
 repelling set 4:585  
 replica 4:585  
 replica of an endomorphism 4:585  
 representable functor 4:586  
 representation function 4:586  
 representation of a compact group 4:587  
 representation of a compact group 4:587  
 representation of a group 4:588  
 representation of a Lie algebra 4:588  
 representation of a partially ordered set 4:590  
 representation of a semi-group 4:590  
 representation of a topological group 4:591  
 representation of an associative algebra 4:593  
 representation of an infinite group 4:596  
 representation of matrices, problem of 4:596  
 representation of the classical groups 4:596  
 representation of the symmetric groups 4:598  
 representation theory 4:600  
 representation with a highest weight vector 4:601  
 representative subspace 4:601  
 residually-finite group 4:602  
 residually-finite semi-group 4:602  
 residuated mapping 4:602  
 residue form 4:603  
 residue of an analytic function 4:604  
 resolution 4:607  
 resolution of singularities 4:607  
 resolution of the identity 4:608  
 resolvent 4:609  
 resolvent set 4:610  
 resonance 4:610  
 resonance terms 4:610  
 restricted predicate calculus 4:611  
 restricted quantifier 4:611

resultant 4:611  
 retarded potentials, method of 4:612  
 retract 4:614  
 retract of a topological space 4:614  
 retraction 4:615  
 Reynolds number 4:615  
 Rhombic net 4:615  
 rhombus 4:615  
 rib of a polyhedron 4:616  
 Ribaucour congruence 4:616  
 Ribaucour curve 4:616  
 Riccati equation 4:616  
 Ricci curvature 4:618  
 Ricci identity 4:618  
 Ricci tensor 4:619  
 Ricci theorem 4:619  
 Richard paradox 4:619  
 Richardson extrapolation 4:619  
 Rickart ring 4:620  
 Riemann-Christoffel tensor 4:621  
 Riemann derivative 4:621  
 Riemann differential equation 4:621  
 Riemann function 4:621  
 Riemann geometry 4:622  
 Riemann-Hilbert problem 4:625  
 Riemann-Hilbert problem(analytic functions)  
 4:626  
 Riemann-Hurwitz formula 4:626  
 Riemann hypotheses 4:627  
 Riemann hypothesis, generalized 4:627  
 Riemann integral 4:628  
 Riemann method 4:629  
 Riemann relation 4:630  
 Riemann-Roch theorem 4:630  
 Riemann-Schwarz principle 4:631  
 Riemann-Schwarz surface 4:632  
 Riemann sphere 4:632  
 Riemann-Stieltjes integral 4:633  
 Riemann summation method 4:633  
 Riemann surface 4:633  
 Riemann surfaces, classification of 4:638  
 Riemann surfaces, conformal classes of 4:639  
 Riemann tensor 4:641  
 Riemann theorem 4:642  
 Riemann theta-function 4:643  
 Riemann zeta-function 4:644  
 Riemannian connection 4:644

Riemannian coordinates 4:644  
 Riemannian curvature 4:644  
 Riemannian domain 4:645  
 Riemannian geometry 4:645  
 Riemannian geometry in the large 4:650  
 Riemannian manifold 4:653  
 Riemannian metric 4:653  
 Riemannian space 4:653  
 Riemannian space, generalized 4:653  
 Riemannian space, homogeneous 4:656  
 Riesz basis 4:657  
 Riesz convexity theorem 4:657  
 Riesz-Fischer theorem 4:658  
 Riesz inequality 4:658  
 Riesz interpolation formula 4:659  
 Riesz potential 4:659  
 Riesz product 4:660  
 Riesz space 4:660  
 Riesz summation method 4:662  
 Riesz system 4:663  
 Riesz theorem 4:663  
 Riesz theorem 4:664  
 rigged Hilbert space 4:666  
 rigged manifold 4:666  
 right group 4:667  
 right-ordered group 4:667  
 rigid analytic space 4:667  
 rigidity 4:668  
 ring 4:669  
 ring of polynomials 4:669  
 ring of representations 4:670  
 ring with divided powers 4:670  
 ring with division 4:671  
 ring with operators 4:671  
 ringed space 4:672  
 ringoid 4:672

rings and algebras 4:673  
 risk of a statistical procedure 4:675  
 Ritz method 4:676  
 Robin constant 4:677  
 Robin problem 4:678  
 robust statistics 4:679  
 Rodrigues formula 4:680  
 Rolle theorem 4:680  
 Roman numerals 4:680  
 Romberg method 4:681  
 root 4:682  
 root system 4:682  
 root vector 4:686  
 roses (curves) 4:686  
 rotation 4:687  
 rotation indicatrix 4:688  
 rotation method 4:688  
 rotation number 4:689  
 rotation of a vector field 4:689  
 rotation surface 4:690  
 rotation theorems 4:690  
 rotations diagram 4:691  
 Rouché theorem 4:692  
 rough system 4:692  
 roulette 4:693  
 rounding-off 4:693  
 routes to chaos 4:694  
 Routh-Hurwitz criterion 4:696  
 Routh theorem 4:697  
 row-finite summation method 4:697  
 ruled surface 4:698  
 Runge domain 4:699  
 Runge-Kutta method 4:700  
 Runge rule 4:701  
 Runge theorem 4:701  
 Russell paradox 4:702

## S

S-duality 4:703  
 Saccheri quadrangle 4:704  
 saddle 4:705  
 saddle at infinity 4:705  
 saddle-node 4:705  
 saddle point 4:706

saddle point in game theory 4:706  
 saddle point method 4:707  
 saddle surface 4:708  
 sample 4:708  
 sample average 4:708  
 sample block 4:708



- sample characteristic 4:708
- sample cluster 4:708
- sample function 4:708
- sample median 4:710
- sample method 4:710
- sample moment 4:711
- sample point 4:711
- sample quantile 4:711
- sample variance 4:711
- sampling space 4:711
- Sard theorem 4:712
- scalar 4:712
- scalar curvature 4:712
- scalar field 4:712
- scale parameter 4:712
- scanning method 4:713
- scattered space 4:713
- scattering matrix 4:713
- Schauder method 4:714
- Schauder theorem 4:715
- scheduling theory 4:715
- scheme 4:718
- Scherk surface 4:720
- Schläfli integral 4:721
- Schoenflies conjecture 4:721
- Schottky problem 4:721
- Schottky theorem 4:723
- Schreier system 4:723
- Schrödinger equation 4:724
- Schrödinger representation 4:724
- Schubert variety 4:725
- Schur index 4:725
- Schur lemma 4:726
- Schur multiplier 4:726
- Schur ring 4:727
- Schur theorems 4:727
- Schwarz alternating method 4:728
- Schwarz differential 4:729
- Schwarz equation 4:729
- Schwarz formula 4:729
- Schwarz function 4:729
- Schwarz integral 4:730
- Schwarz kernel 4:731
- Schwarz lemma 4:731
- Schwarz surface 4:732
- Schwarz symmetric derivative 4:732
- Schwarz symmetry theorem 4:733
- Schwarzian derivative 4:733
- Schwarzschild field 4:733
- Schwarzschild metric 4:733
- search problem (linear) 4:734
- secant 4:735
- secant method 4:735
- second 4:736
- second axiom of countability 4:736
- second boundary value problem 4:736
- second dual space 4:737
- second fundamental form 4:737
- second-order curve 4:737
- second variation 4:738
- section 4:739
- section of a mapping 4:739
- sectional curvature 4:739
- sector 4:739
- sector in the theory of ordinary differential equations 4:740
- segment 4:741
- Segre imbedding 4:742
- Seidel method 4:742
- Seifert fibration 4:743
- Seifert manifold 4:744
- Seifert matrix 4:744
- Selberg sieve 4:745
- selection theorems 4:745
- self-adjoint differential equation 4:747
- self-adjoint linear transformation 4:748
- self-adjoint operator 4:748
- self-injective ring 4:749
- self-intersection, point of 4:749
- self-perimeter 4:749
- self-tangency, point of 4:750
- semantics 4:750
- semi-algebraic set 4:750
- semi-bounded operator 4:751
- semi-chain module 4:751
- semi-chain ring 4:751
- semi-classical approximation 4:751
- semi-continuous decomposition 4:753
- semi-continuous function 4:753
- semi-continuous mapping 4:753
- semi-continuous summation method 4:754
- semi-cubic parabola 4:754
- semi-Dedekind lattice 4:755
- semi-definite form 4:755

- semi-direct product 4:755
- semi-elliptic space 4:755
- semi-Euclidean space 4:756
- semi-geodesic coordinates 4:756
- semi-group 4:757
- semi-group algebra 4:759
- semi-group of non-linear operators 4:759
- semi-group of operators 4:762
- semi-group with a finiteness condition 4:766
- semi-hereditary ring 4:767
- semi-hyperbolic space 4:768
- semi-invariant 4:768
- semi-invariant 4:769
- semi-lattice 4:769
- semi-linear mapping 4:770
- semi-Markov process 4:770
- semi-martingale 4:770
- semi-modular lattice 4:772
- semi-norm 4:772
- semi-ordered space 4:772
- semi-perfect ring 4:775
- semi-pseudo-Euclidean space 4:775
- semi-pseudo-Riemannian space 4:775
- semi-regular polyhedra 4:776
- semi-Riemannian space 4:777
- semi-ring 4:777
- semi-simple algebra 4:777
- semi-simple algebraic group 4:778
- semi-simple element 4:778
- semi-simple endomorphism 4:779
- semi-simple group 4:779
- semi-simple matrix 4:779
- semi-simple module 4:779
- semi-simple representation 4:779
- semi-simple ring 4:779
- semi-simplicial complex 4:780
- semi-symplectic space 4:780
- separability of sets 4:780
- separable algebra 4:780
- separable completion of a ring 4:781
- separable extension 4:781
- separable mapping 4:782
- separable process 4:782
- separable semi-group 4:783
- separable space 4:783
- separation axiom 4:783
- separation of variables, method of 4:783
- separatrix 4:784
- sequence 4:784
- sequence category 4:785
- sequence of series 4:785
- sequent calculus 4:786
- sequent (in logic) 4:786
- sequential analysis 4:787
- sequential approximation, method of 4:789
- sequential space 4:790
- sequentially-compact space 4:790
- serial correlation coefficient 4:791
- serial scheme 4:791
- serial subgroup 4:791
- series 4:791
- series of representations 4:796
- Serre fibration 4:797
- Serre subcategory 4:797
- sesquilinear form 4:797
- set 4:798
- set function 4:799
- set of type  $F_\sigma(G_\delta)$  4:799
- set theory 4:799
- sets, category of 4:800
- Shannon theorem 4:800
- Shapley value 4:801
- Shapley vector 4:801
- sharing 4:801
- sharp form 4:801
- sharp norm 4:802
- sheaf 4:803
- sheaf theory 4:803
- shear 4:807
- Sheffer stroke 4:807
- shell theory 4:807
- Sheppard corrections 4:808
- shift dynamical system 4:809
- shift operator 4:810
- shift parameter 4:810
- Shmidt group 4:810
- Shnirel'man method 4:811
- shock waves, mathematical theory of 4:811
- shooting method 4:815
- shortest line 4:816
- shot effect 4:816
- si-ci-spiral 4:816
- Siegel domain 4:816
- Siegel method 4:817



- Siegel theorem 4:818  
 Sierpiński curve 4:819  
 sieve method 4:819  
 sign test 4:820  
 signal extraction 4:820  
 signature 4:821  
 significance level 4:821  
 significance test 4:822  
 significant figure 4:823  
 signum 4:823  
 similar matrices 4:823  
 similar operators 4:823  
 similar sets 4:823  
 similar statistic 4:823  
 similar test 4:824  
 similarity 4:824  
 similarity region 4:825  
 similarity theory 4:825  
 simple algebra 4:826  
 simple arc 4:826  
 simple finite group 4:827  
 simple group 4:828  
 simple homotopy type 4:828  
 simple hypothesis 4:829  
 simple-iteration method 4:829  
 simple-layer potential 4:829  
 simple ratio 4:830  
 simple representation 4:831  
 simple ring 4:831  
 simple semi-group 4:831  
 simple set 4:832  
 simplex 4:832  
 simplex (abstract) 4:832  
 simplex method 4:833  
 simplex search 4:834  
 simplicial complex 4:834  
 simplicial mapping 4:836  
 simplicial object in a category 4:836  
 simplicial scheme 4:837  
 simplicial set 4:837  
 simplicial space 4:841  
 simply-connected domain 4:841  
 simply-connected group 4:842  
 simply-periodic function 4:842  
 Simpson formula 4:842  
 Simson straight line 4:842  
 Simula 4:843  
 sine 4:843  
 sine amplitude 4:844  
 sine-Gordon equation 4:844  
 sine, hyperbolic 4:846  
 sine theorem 4:846  
 singular distribution 4:846  
 singular exponents 4:846  
 singular function 4:848  
 singular homology 4:848  
 singular integral 4:849  
 singular integral equation 4:850  
 singular point 4:854  
 singular point, index of a 4:863  
 singular solution 4:863  
 singularities of differentiable mappings 4:864  
 singularity 4:867  
 sinusoid 4:868  
 sinusoidal spiral 4:868  
 site 4:868  
 skeleton of a category 4:869  
 skew-field 4:870  
 skew lines 4:870  
 skew product 4:871  
 skew-symmetric bilinear form 4:871  
 skew-symmetric matrix 4:871  
 skew-symmetric tensor 4:872  
 Skolem function 4:872  
 Skolem paradox 4:873  
 Slavic numerals 4:873  
 sliding vector 4:873  
 small category 4:873  
 small denominators 4:873  
 small image 4:875  
 small object 4:875  
 small parameter, method of the 4:875  
 Smirnov class 4:880  
 Smirnov domain 4:881  
 Smirnov test 4:881  
 smooth continuum 4:882  
 smooth function 4:882  
 smooth morphism 4:882  
 smooth point of a function 4:883  
 smooth scheme 4:883  
 smooth space 4:884  
 smoothness, modulus of 4:884  
 snake-like continuum 4:885  
 Snedecor distribution 4:885

- Snobol 4:885  
 Sobolev classes (of functions) 4:886  
 Sobolev generalized derivative 4:886  
 Sobolev space 4:886  
 socle 4:888  
 soft sheaf 4:888  
 software 4:888  
 Sokhotskiĭ formulas 4:891  
 Sokhotskiĭ theorem 4:892  
 solenoid 4:893  
 solenoidal field 4:893  
 solid angle 4:893  
 solid spherical function 4:894  
 soliton 4:894  
 solution in game theory 4:895  
 solv manifold 4:895  
 solv manifold, compact 4:896  
 solvable flow 4:896  
 solvable group 4:896  
 Sommerfeld integral 4:897  
 Sommerfeld radiation conditions 4:897  
 Sonin integral 4:897  
 sound rule 4:898  
 space 4:898  
 space forms 4:899  
 space of mappings, topological 4:901  
 space over an algebra 4:902  
 space-time 4:903  
 space with an indefinite metric 4:904  
 sparse matrix 4:906  
 Spearman coefficient of rank correlation 4:906  
 special automorphism 4:906  
 special flow 4:907  
 special functions 4:907  
 special linear group 4:908  
 specialization of a point 4:909  
 species 4:909  
 Specker sequence 4:910  
 spectral analysis 4:910  
 spectral analysis of a stationary stochastic process 4:912  
 spectral decomposition of a linear operator 4:912  
 spectral decomposition of a random function 4:913  
 spectral density 4:916  
 spectral density, estimator of the 4:916  
 spectral estimator, parametric 4:917  
 spectral function 4:917  
 spectral function, estimator of the 4:917  
 spectral function of a stationary stochastic process 4:918  
 spectral homology 4:918  
 spectral measure 4:919  
 spectral operator 4:919  
 spectral radius 4:919  
 spectral resolution 4:920  
 spectral semi-invariant 4:920  
 spectral sequence 4:921  
 spectral set 4:923  
 spectral synthesis 4:923  
 spectral theory 4:924  
 spectral theory of differential operators 4:927  
 spectral type 4:931  
 spectral window 4:931  
 spectrum of a  $C^*$ -algebra 4:932  
 spectrum of a dynamical system 4:932  
 spectrum of a matrix 4:933  
 spectrum of a ring 4:933  
 spectrum of an element 4:933  
 spectrum of an operator 4:934  
 spectrum of spaces 4:935  
 Sperner lemma 4:936  
 sphere 4:936  
 spheres, homotopy groups of the 4:938  
 spherical coordinates 4:940  
 spherical functions 4:941  
 spherical geometry 4:942  
 spherical harmonics 4:944  
 spherical harmonics, method of 4:944  
 spherical indicatrix 4:946  
 spherical map 4:946  
 spherical trigonometry 4:948  
 spin 4:949  
 spinor 4:949  
 spinor group 4:950  
 spinor representation 4:950  
 spinor structure 4:951  
 spirals 4:952  
 spline 4:952  
 spline approximation 4:953  
 spline interpolation 4:955  
 split group 4:955  
 split sequence 4:956  
 splittable group 4:956  
 splitting field of a polynomial 4:956



- sporadic simple group 4:956
- spray 4:957
- spread (in intuitionistic logic) 4:958
- squarability 4:959
- square 4:959
- square-root method 4:959
- stability 4:960
- stability, absolute 4:960
- stability criterion 4:962
- stability for a part of the variables 4:964
- stability in game theory 4:965
- stability in the presence of persistently acting perturbations 4:966
- stability of a computational algorithm 4:966
- stability of a computational process 4:967
- stability of an elastic system 4:967
- stability of characteristic exponents 4:969
- stability of difference schemes 4:970
- stability region 4:972
- stability theorems 4:972
- stability theorems (in algebraic K-theory) 4:972
- stability theory 4:973
- stability theory (in logic) 4:974
- stabilizer 4:976
- stable and unstable theories 4:976
- stable distribution 4:977
- stable homotopy group 4:978
- stable rank 4:978
- standard construction 4:979
- standard deviation 4:979
- standard program 4:979
- standard simplex 4:980
- standardization and unification, mathematical problems in 4:980
- Stanton number 4:981
- star body 4:981
- star-like domain 4:981
- star-like function 4:982
- star of a function element 4:982
- statement in programming 4:983
- statics 4:983
- stationary distribution 4:984
- stationary phase, method of the 4:984
- stationary stochastic process 4:985
- stationary subgroup 4:988
- statistical acceptance control 4:988
- statistical analysis of stochastic processes 4:990
- statistical decision theory 4:990
- statistical ensemble 4:991
- statistical ergodic theorem 4:993
- statistical estimation 4:993
- statistical estimator 4:995
- statistical estimator 4:1000
- statistical experiments, method of 4:1000
- statistical game 4:1002
- statistical hypotheses, verification of 4:1002
- statistical hypothesis 4:1004
- statistical mechanics, mathematical problems in 4:1005
- statistical modelling 4:1008
- statistical physics, mathematical problems in 4:1009
- statistical problems in the theory of stochastic processes 4:1011
- statistical quality control 4:1015
- statistical sum 4:1016
- statistical test 4:1017
- statistics 4:1018
- Steenrod algebra 4:1018
- Steenrod duality 4:1018
- Steenrod-Eilenberg axioms 4:1019
- Steenrod operation 4:1020
- Steenrod problem 4:1020
- Steenrod reduced power 4:1020
- Steenrod square 4:1021
- steepest descent, method of 4:1022
- Stefan-Boltzmann law 4:1023
- Stefan condition 4:1023
- Stefan problem 4:1023
- Stefan problem, inverse 4:1025
- Steffensen interpolation formula 4:1025
- Stein manifold 4:1026
- Stein space 4:1026
- Steiner curve 4:1027
- Steiner point 4:1028
- Steiner system 4:1028
- Steinitz theorem 4:1030
- Steklov function 4:1031
- Steklov problems 4:1031
- stellar astronomy, mathematical problems of 4:1032
- Stepanov almost-periodic functions 4:1033
- stepwise semantic system 4:1033
- steradian 4:1035
- stereographic projection 4:1035

- stereohedron 4:1035
- Stiefel manifold 4:1036
- Stiefel number 4:1037
- Stiefel-Whitney class 4:1037
- Stieltjes integral 4:1038
- Stieltjes transform 4:1039
- stiff differential system 4:1039
- Stirling formula 4:1044
- Stirling interpolation formula 4:1044
- stochastic approximation 5:1
- stochastic basis 5:2
- stochastic boundedness 5:2
- stochastic continuity 5:2
- stochastic convergence 5:2
- stochastic dependence 5:2
- stochastic differential 5:3
- stochastic differential equation 5:4
- stochastic equivalence 5:5
- stochastic game 5:5
- stochastic geometry 5:6
- stochastic indistinguishability 5:7
- stochastic integral 5:7
- stochastic interval 5:8
- stochastic matrix 5:9
- stochastic numerical algorithm 5:10
- stochastic point process 5:10
- stochastic point process with limited memory 5:12
- stochastic process 5:13
- stochastic process, compatible 5:16
- stochastic process, differentiable 5:16
- stochastic process, generalized 5:16
- stochastic process, renewable 5:17
- stochastic process with independent increments 5:17
- stochastic process with stationary increments 5:18
- stochastic processes, filtering of 5:19
- stochastic processes, interpolation of 5:21
- stochastic processes, prediction of 5:22
- stochastic programming 5:23
- stochastic sequence 5:24
- Stokes formula 5:24
- Stokes phenomenon 5:24
- Stokes theorem 5:25
- Stone-Čech compactification 5:25
- Stone lattice 5:25
- Stone space 5:26
- Stone-Weierstrass theorem 5:26
- stopping time 5:27
- Störmer method 5:27
- straight line 5:28
- strange attractor 5:28
- strategy (in game theory) 5:29
- stratification 5:29
- stratified sample 5:30
- Stratonovich integral 5:30
- stress tensor 5:32
- strict implication calculus 5:32
- strip 5:33
- strip (generalized) 5:33
- strip method (analytic functions) 5:33
- strip method (integral equations) 5:34
- strong derivative 5:34
- strong differentiation of an indefinite integral 5:34
- strong ergodicity 5:35
- strong extremum 5:35
- strong homology 5:35
- strong integral 5:36
- strong law of large numbers 5:36
- strong relative minimum 5:38
- strong solution 5:38
- strong topology 5:39
- strongly-continuous semi-group 5:39
- strophoid 5:40
- Strouhal number 5:40
- structural isomorphism 5:40
- structural linguistics 5:40
- structure 5:41
- structure constant 5:43
- structure space 5:43
- Struve function 5:43
- Student distribution 5:44
- Student test 5:45
- Studentized range 5:46
- Sturm curves 5:46
- Sturm-Liouville equation 5:47
- Sturm-Liouville operator 5:48
- Sturm-Liouville problem 5:50
- Sturm-Liouville problem, inverse 5:53
- Sturm theorem 5:56
- subalgebra lattice 5:56
- subcategory 5:57
- subdifferential 5:58
- subdirect product 5:58
- subdivision 5:58



- subformulation property 5:59
- subgroup 5:59
- subgroup, index of a 5:60
- subgroup series 5:60
- subgroup system 5:61
- subharmonic function 5:61
- sublattice 5:64
- submanifold 5:64
- submatrix 5:65
- submersion 5:65
- submodule 5:65
- subnormal series 5:66
- subnormal subgroup 5:66
- subobject 5:66
- subordination principle 5:66
- subparabolic function 5:67
- subprojective space 5:68
- subrepresentation of a representation 5:68
- substitution rule 5:69
- subtangent and subnormal 5:69
- subtraction 5:69
- subvariety, involutive 5:69
- sufficient statistic 5:70
- sum function 5:71
- summability field 5:72
- summability multipliers 5:72
- summability, strong 5:72
- summable function 5:73
- summation 5:73
- summation methods 5:73
- summation of divergent series 5:75
- summation of Fourier series 5:76
- super-group 5:76
- super-manifold 5:77
- super-space 5:77
- superalgebra 5:78
- superefficient estimator 5:79
- supergraph 5:79
- superharmonic function 5:80
- superparabolic function 5:80
- superposition of functions 5:80
- supersolvable group 5:80
- support function 5:80
- support of a function 5:80
- support of a generalized function 5:81
- support of a measure 5:81
- support of a module 5:81
- supporting hyperplane 5:81
- surface 5:82
- surface function 5:82
- surface integral 5:82
- surface of screw motion 5:84
- surface of the second order 5:84
- surface potential 5:86
- surgery 5:86
- surjection 5:86
- surreal numbers 5:87
- Suslin condition 5:88
- Suslin criterion 5:88
- Suslin hypothesis 5:88
- Suslin problem 5:89
- Suslin theorem 5:89
- suspension 5:90
- Suzuki 2-group 5:90
- Suzuki group 5:90
- Suzuki sporadic group 5:91
- swerve of a curve 5:91
- Sylow basis 5:91
- Sylow subgroup 5:91
- Sylow theorems 5:92
- symbol of an operator 5:92
- symbolic dynamics 5:94
- symmetric algebra 5:96
- symmetric channel 5:96
- symmetric derivative 5:97
- symmetric derived number 5:97
- symmetric difference of order  $n$  5:97
- symmetric difference of sets 5:98
- symmetric domain 5:98
- symmetric function 5:99
- symmetric group 5:99
- symmetric matrix 5:100
- symmetric operator 5:101
- symmetric polynomial 5:101
- symmetric space 5:102
- symmetric tensor 5:103
- symmetrization 5:103
- symmetrization method 5:105
- symmetrization (of tensors) 5:105
- symmetry 5:106
- symmetry (of a relation) 5:107
- symmetry on a set 5:107
- symmetry principle 5:108
- symmetry test 5:108

symplectic connection 5:109  
 symplectic group 5:109  
 symplectic homogeneous space 5:110  
 symplectic manifold 5:111  
 symplectic space 5:111  
 symplectic structure 5:112  
 syntactic language 5:112  
 syntactic structure 5:113  
 syntactic theorem 5:115  
 syntax 5:115

synthesis problems 5:115  
 synthetic differential geometry 5:119  
 system (in a category) 5:120  
 system of closed classes 5:120  
 system of common representatives 5:120  
 system of different representatives 5:120  
 system of subvarieties 5:121  
 system programming 5:124  
 syzygy 5:125

## T

$t$ -distribution 5:126  
 $T^2$ -distribution 5:126  
 $T$ -ideal 5:126  
 $T_1$ -space 5:127  
 tactical configuration 5:127  
 Tamagawa measure 5:128  
 Tamagawa number 5:128  
 tame imbedding 5:129  
 tangency 5:129  
 tangent 5:129  
 tangent amplitude 5:130  
 tangent bundle 5:130  
 tangent cone 5:131  
 tangent, curve of the 5:131  
 tangent flow 5:132  
 tangent formula 5:132  
 tangent, hyperbolic 5:132  
 tangent line 5:132  
 tangent plane 5:133  
 tangent sheaf 5:133  
 tangent vector 5:133  
 tangential coordinates 5:134  
 tangential transformation 5:135  
 Tarski problem 5:135  
 Tate algebra 5:135  
 Tate conjectures 5:136  
 Tate curve 5:137  
 Tate module 5:137  
 Tauberian theorems 5:138  
 tautology 5:139  
 Taylor formula 5:139  
 Taylor polynomial 5:140  
 Taylor series 5:140

Teichmüller space 5:141  
 telegraph equation 5:141  
 tensor algebra 5:142  
 tensor analysis 5:142  
 tensor bundle 5:144  
 tensor calculus 5:144  
 tensor density 5:144  
 tensor on a vector space 5:145  
 tensor product 5:146  
 term 5:149  
 ternary field 5:149  
 tertiary ideal 5:150  
 test statistics 5:150  
 testing 5:150  
 tests 5:150  
 tetracyclic coordinates 5:153  
 tetrahedral coordinates 5:154  
 tetrahedral space 5:154  
 tetrahedron 5:154  
 theorem 5:154  
 theoretical programming 5:155  
 theory, formal 5:157  
 theory of surfaces 5:158  
 thermal-conductance equation 5:159  
 thermodynamic potential 5:159  
 thermodynamical limit 5:160  
 thermodynamics, mathematical problems in 5:160  
 theta-function 5:161  
 theta-series 5:163  
 thin set 5:164  
 thinness of a set 5:164  
 third boundary value problem 5:165  
 Thom catastrophes 5:165



- Thom class 5:166  
 Thom isomorphism 5:167  
 Thom space 5:167  
 Thom spectrum 5:168  
 Thompson subgroup 5:168  
 thread 5:168  
 three-body problem 5:168  
 three-dimensional manifold 5:170  
 three-series theorem 5:171  
 'three-sigma' rule 5:171  
 Thue method 5:171  
 Thue semi-system 5:172  
 Thue-Siegel-Roth theorem 5:172  
 Thue system 5:172  
 tie 5:173  
 tight and taut immersions 5:173  
 tight measure 5:177  
 Tikhonov cube 5:177  
 Tikhonov product 5:178  
 Tikhonov space 5:178  
 Tikhonov theorem 5:178  
 time-optimal control problem 5:178  
 time series 5:179  
 Titchmarsh problem 5:180  
 Tits building 5:180  
 Tits bundle 5:181  
 Tits system 5:181  
 Todd class 5:182  
 Toeplitz form, indefinite 5:182  
 Toeplitz matrix 5:182  
 tolerance 5:183  
 tolerance intervals 5:183  
 tomography 5:184  
 Tonelli plane variation 5:186  
 Tonelli theorem 5:187  
 topological algebra 5:187  
 topological dynamical system 5:188  
 topological dynamics 5:189  
 topological entropy 5:191  
 topological equivalence 5:192  
 topological field 5:192  
 topological group 5:192  
 topological invariant 5:194  
 topological module 5:195  
 topological product 5:195  
 topological ring 5:196  
 topological semi-group 5:196  
 topological space 5:198  
 topological structure (topology) 5:201  
 topological structures 5:202  
 topological tensor product 5:209  
 topological transitivity 5:210  
 topological vector space 5:211  
 topologized category 5:216  
 topology 5:216  
 topology of compact convergence 5:221  
 topology of imbeddings 5:221  
 topology of manifolds 5:223  
 topology of uniform convergence 5:225  
 topos 5:225  
 Torelli theorems 5:226  
 toroidal coordinates 5:227  
 toroidal harmonics 5:227  
 torsion 5:228  
 torsion form 5:230  
 torsion-free module 5:230  
 torsion submodule 5:230  
 torsion tensor 5:231  
 torus 5:231  
 torus knot 5:232  
 total derivative 5:232  
 total increment 5:232  
 total set 5:232  
 total space 5:233  
 total variation of a function 5:233  
 totally-additive function 5:233  
 totally-bounded set 5:233  
 totally-bounded space 5:233  
 totally-disconnected space 5:233  
 totally-geodesic manifold 5:234  
 totally-imperfect space 5:234  
 totally-irreducible set 5:234  
 totally-normal space 5:235  
 totally ordered group 5:235  
 totally ordered set 5:236  
 totally well-ordered set 5:236  
 tournament 5:236  
 tower of fields 5:237  
 trace 5:237  
 trace of a square matrix 5:238  
 trace on a  $C^*$ -algebra 5:238  
 tractrix 5:238  
 trajectory 5:239  
 transcendancy, measure of 5:239

- transcendental branch point 5:240
- transcendental curve 5:240
- transcendental extension 5:240
- transcendental function 5:241
- transcendental number 5:241
- transfer function 5:242
- transference theorem in Diophantine approximation 5:243
- transfinite diameter 5:243
- transfinite induction 5:245
- transfinite number 5:245
- transfinite recursion 5:245
- transfinite sequence 5:246
- transformation 5:246
- transformation group 5:246
- transformation semi-group 5:246
- transgression 5:247
- transition function 5:247
- transition-operator semi-group 5:248
- transition probabilities 5:249
- transition with prohibitions 5:250
- transitive group 5:250
- transitivity 5:252
- translation 5:252
- translation-invariant metric 5:252
- translation of programs 5:252
- translation surface 5:253
- translations of semi-groups 5:253
- translativity of a summation method 5:254
- transmission, condition of 5:254
- transmission rate of a channel 5:255
- transport equations, numerical methods 5:255
- transport net 5:258
- transport problem 5:258
- transposed equations 5:259
- transposed matrix 5:259
- transvection 5:260
- transversal elliptic operator 5:260
- transversal mapping 5:260
- transversal system 5:261
- transversality 5:262
- transversality condition 5:262
- trapezium 5:264
- trapezium formula 5:264
- travelling-tube method 5:264
- travelling-wave method 5:265
- tree 5:265
- Trefftz method 5:266
- triads 5:267
- triangle 5:267
- triangle, defect of a 5:268
- triangular array 5:268
- triangular element 5:268
- triangular group 5:268
- triangular matrix 5:268
- triangular number 5:268
- triangular summation method 5:268
- triangulation 5:269
- Tricomi equation 5:269
- Tricomi problem 5:270
- trigonalizable element 5:271
- trigonometric functions 5:272
- trigonometric interpolation 5:273
- trigonometric polynomial 5:274
- trigonometric series 5:274
- trigonometric sum 5:276
- trigonometric sums, method of 5:277
- trigonometric system 5:278
- trigonometry 5:279
- triorthogonal system of surfaces 5:279
- triple 5:279
- trisection of an angle 5:281
- trivector 5:281
- trochoid 5:282
- Trotter product formula 5:283
- trough 5:283
- truncated distribution 5:283
- truth table 5:284
- truth-table reducibility 5:284
- truth value 5:285
- Tsirelson space 5:285
- tube domain 5:286
- tubular neighbourhood 5:286
- tuple 5:286
- turbulence, mathematical problems in 5:286
- turbulent system 5:289
- Turing machine 5:290
- twins 5:291
- two-body problem 5:292
- two-constants theorem 5:292
- two-dimensional annulus 5:293
- two-dimensional cell 5:293
- two-dimensional knot 5:293
- two-dimensional manifold 5:294



two-dimensional manifold of bounded curvature  
5:297  
two-dimensional problems in fracture mechanics  
5:298  
two-liquid plasma model 5:300  
two-person zero-sum game 5:301  
two-point tensor 5:302  
two-sheet hyperboloid 5:302

two-sided estimate 5:302  
two-sided surface 5:303  
two-term congruence 5:303  
two-term equation 5:304  
two-valued logic 5:304  
types, theory of 5:304  
typically-real function 5:305

## U

ultra-barrelled space 5:307  
ultra-bornological space 5:307  
ultrafilter 5:307  
ultraspherical polynomials 5:309  
umbilical point 5:309  
umbral calculus 5:309  
unary algebra 5:311  
unbiased estimator 5:311  
unbiased test 5:314  
unbounded operator 5:314  
uncertainty principle 5:315  
unconditional convergence 5:315  
unconditional summability 5:316  
uncountable set 5:316  
undecidability 5:316  
underdetermined system 5:317  
undetermined coefficients, method of 5:317  
unicursal curve 5:319  
unified field theories 5:319  
uniform algebra 5:319  
uniform approximation 5:320  
uniform boundedness 5:320  
uniform continuity 5:321  
uniform convergence 5:321  
uniform distribution 5:322  
uniform space 5:323  
uniform stability 5:326  
uniform subgroup 5:326  
uniform topology 5:327  
uniformization 5:327  
uniformizing element 5:329  
uniformly-convergent series 5:329  
uniformly most-powerful test 5:331  
unimodal distribution 5:331  
unimodular element 5:332

unimodular group 5:332  
unimodular lattice 5:332  
unimodular matrix 5:333  
unimodular transformation 5:333  
union of sets 5:333  
unipotent element 5:333  
unipotent group 5:334  
unipotent matrix 5:334  
uniqueness properties of analytic functions 5:334  
uniqueness set 5:336  
unirational variety 5:337  
uniserial ring 5:337  
unit 5:337  
unit divisor 5:337  
unit representation 5:337  
unit vector 5:337  
unitarily-equivalent operators 5:338  
unitarily-equivalent representations 5:338  
unitary group 5:338  
unitary matrix 5:339  
unitary module 5:339  
unitary operator 5:339  
unitary representation 5:340  
unitary space 5:343  
unitary transformation 5:343  
univalence conditions 5:343  
univalence radius 5:344  
univalent function 5:345  
universal algebra 5:348  
universal algorithm 5:350  
universal behaviour in dynamical systems 5:350  
universal covering 5:352  
universal enveloping algebra 5:352  
universal function 5:352  
universal normal algorithm 5:353

universal problems 5:353  
 universal property 5:354  
 universal quantifier 5:354  
 universal series 5:354  
 universal set 5:354  
 universal space 5:355  
 universe 5:356  
 unramified character 5:356  
 unramified ideal 5:356  
 unsolvability 5:356  
 upper and lower bounds 5:357

upper-and-lower-functions method 5:358  
 upper and lower limits 5:359  
 upper bound of a family of topologies 5:360  
 urn model 5:360  
 Urysohn-Brouwer lemma 5:361  
 Urysohn equation 5:361  
 Urysohn lemma 5:362  
 Urysohn metrization theorem 5:362  
 Urysohn space 5:362  
 utility theory 5:362

## V

vague topology 5:364  
 valuation 5:364  
 value-distribution theory 5:366  
 van der Pol equation 5:369  
 van der Waerden test 5:370  
 van der Waerden theorem 5:370  
 Vandermonde determinant 5:370  
 vanishing cycle 5:371  
 variable-directions method 5:372  
 variable-grid method 5:372  
 variation 5:373  
 variation of a function 5:374  
 variation of a functional 5:375  
 variation of a mapping 5:376  
 variation of a set 5:376  
 variation of a univalent function 5:377  
 variation of constants 5:378  
 variation of Hodge structure 5:378  
 variation-parametric method 5:379  
 variational calculus 5:380  
 variational calculus in the large 5:384  
 variational calculus, numerical methods of 5:385  
 variational equations 5:389  
 variational numerical methods 5:391  
 variational principles (in complex function theory) 5:393  
 variational principles of classical mechanics 5:394  
 variational problem 5:398  
 variational series 5:399  
 variety in a category 5:399  
 variety of groups 5:399  
 variety of rings 5:401

variety of semi-groups 5:401  
 variety of universal algebras 5:402  
 Varignon theorem 5:403  
 vector 5:403  
 vector algebra 5:404  
 vector analysis 5:407  
 vector axiomatics 5:408  
 vector bundle 5:408  
 vector bundle, algebraic 5:410  
 vector bundle, analytic 5:411  
 vector calculus 5:412  
 vector field 5:413  
 vector field on a manifold 5:413  
 vector field, source of a 5:414  
 vector function 5:414  
 vector functions, algebra of 5:415  
 vector group 5:415  
 vector lattice 5:415  
 vector measure 5:415  
 vector product 5:416  
 vector ring 5:417  
 vector space 5:417  
 vector tube 5:419  
 Vekua method 5:420  
 Venn diagram 5:420  
 verbal congruence 5:420  
 verbal product 5:421  
 verbal subgroup 5:421  
 verification 5:421  
 Veronese mapping 5:421  
 versor 5:422  
 vertor 5:422



Viète theorem 5:422  
 Vietoris homology 5:422  
 Vinogradov estimates 5:423  
 Vinogradov-Goldbach theorem 5:424  
 Vinogradov hypotheses 5:424  
 Vinogradov integral 5:424  
 Vinogradov method 5:424  
 Vinogradov theorem about the average 5:426  
 Virasoro algebra 5:427  
 virial decomposition 5:428  
 virial theorem 5:429  
 virtual displacements, principle of 5:429  
 virtually-asymptotic net 5:430  
 viscosity 5:430  
 viscosity solutions 5:430  
 Vitali theorem 5:431  
 Vitali variation 5:432

Viviani curve 5:433  
 Vladimirov method 5:433  
 Vladimirov variational principle 5:434  
 Vlasov kinetic equation 5:434  
 Volterra equation 5:435  
 Volterra kernel 5:437  
 Volterra operator 5:437  
 Volterra series 5:437  
 volume 5:438  
 volume form 5:439  
 von Neumann algebra 5:440  
 von Neumann ergodic theorem 5:442  
 Voronoï lattice types 5:443  
 Voronoï summation method 5:444  
 vortical ring 5:444  
 Voss net 5:444  
 Voss surface 5:445

## W

W-distribution 5:446  
 Wald identity 5:446  
 Wall group 5:446  
 Wall invariant 5:447  
 Wallis formula 5:448  
 Wallman compactification 5:448  
 Walsh system 5:448  
 wandering point 5:449  
 wandering set 5:449  
 Ward theorem 5:450  
 Waring problem 5:450  
 Watson lemma 5:452  
 Watson transform 5:452  
 wave equation 5:453  
 wave front 5:453  
 wave vector 5:455  
 wavelet analysis 5:455  
 waves 5:456  
 weak convergence of probability measures 5:457  
 weak derivative 5:457  
 weak extremum 5:457  
 weak homology 5:458  
 weak relative minimum 5:458  
 weak singularity 5:459  
 weak solution 5:459  
 weak topology 5:459

weakly infinite-dimensional space 5:460  
 weakly-wandering set 5:460  
 web 5:460  
 web differentiation 5:460  
 web of spheres 5:461  
 Weber equation 5:461  
 Weber function 5:461  
 webs, geometry of 5:462  
 Wedderburn-Artin theorem 5:463  
 Wedderburn-Mal'tsev theorem 5:463  
 wedge (in a vector space) 5:463  
 Weibull distribution 5:464  
 Weierstrass  $\sigma$ -function 5:464  
 Weierstrass  $\zeta$ -function 5:464  
 Weierstrass conditions (for a variational extremum)  
 5:464  
 Weierstrass coordinates 5:465  
 Weierstrass criterion 5:465  
 Weierstrass criterion (for uniform convergence)  
 5:466  
 Weierstrass  $\wp$  function 5:466  
 Weierstrass elliptic functions 5:467  
 Weierstrass-Erdmann corner conditions 5:469  
 Weierstrass formula 5:470  
 Weierstrass  $\mu$  function 5:470  
 Weierstrass point 5:470

Weierstrass ring 5:470  
 Weierstrass theorem 5:470  
 weight 5:474  
 weight function 5:475  
 weight of a representation of a Lie algebra 5:475  
 weight of a topological space 5:476  
 weight space 5:476  
 weighted average 5:476  
 weighted space 5:476  
 Weil-Châtelet group 5:477  
 Weil cohomology 5:478  
 Weil domain 5:479  
 Weingarten derivational formulas 5:479  
 Weingarten surface 5:480  
 well-founded relation 5:480  
 well-ordered set 5:480  
 well-posed problem 5:481  
 Weyl algebra 5:481  
 Weyl almost-periodic functions 5:484  
 Weyl connection 5:485  
 Weyl criterion 5:485  
 Weyl group 5:485  
 Weyl method 5:487  
 Weyl problem 5:488  
 Weyl sum 5:488  
 white noise 5:488  
 white noise analysis 5:489  
 Whitehead group 5:493  
 Whitehead homomorphism 5:494  
 Whitehead multiplication 5:494  
 Whitehead product 5:495  
 Whitehead torsion 5:495  
 Whitney class 5:496  
 Whitney extension theorem 5:496  
 Whittaker equation 5:497

Whittaker functions 5:497  
 Whittaker transform 5:497  
 Wick product 5:498  
 width 5:500  
 Wiener chaos decomposition 5:503  
 Wiener-Hopf equation 5:504  
 Wiener-Hopf method 5:505  
 Wiener integral 5:506  
 Wiener measure 5:507  
 Wiener process 5:507  
 Wiener Tauberian theorem 5:509  
 Wilcoxon test 5:510  
 wild imbedding 5:510  
 wild knot 5:510  
 wild sphere 5:511  
 Wilson polynomials 5:511  
 Wilson theorem 5:512  
 winding number 5:512  
 wing theory 5:513  
 Wishart distribution 5:515  
 witch of Agnesi 5:515  
 Witt algebra 5:515  
 Witt decomposition 5:516  
 Witt ring 5:517  
 Witt theorem 5:518  
 Witt vector 5:519  
 WKB method 5:521  
 Wolfowitz inequality 5:522  
 word 5:522  
 world function 5:523  
 world line 5:523  
 wreath product 5:523  
 writhing number 5:525  
 Wronskian 5:525  
 wurf 5:526

## Y

Y-diffeomorphism 5:527  
 Y-system 5:527  
 Yang-Baxter equation 5:528  
 Yang-Mills field 5:529  
 Yates correction 5:531  
 Yosida representation theorem 5:531

Young criterion 5:532  
 Young diagram 5:533  
 Young subgroup 5:533  
 Young symmetrizer 5:533  
 Young tableau 5:533



**Z**

$z$ -distribution 5:535  
Zariski tangent space 5:535  
Zariski theorem 5:535  
Zariski topology 5:536  
Zassenhaus formula 5:536  
Zassenhaus group 5:537  
Zeno paradox 5:537  
Zermelo axiom 5:537  
Zermelo theorem 5:537  
zero 5:537  
zero-dimensional mapping 5:538  
zero-dimensional space 5:538

zero divisor 5:539  
zero-one law 5:539  
zero system 5:540  
zeta-function 5:541  
Zhegalkin algebra 5:549  
Zhukovskii function 5:549  
Zhukovskii theorem 5:550  
zonal spherical functions 5:550  
zone of normal attraction 5:550  
zonohedron 5:551  
Zorn lemma 5:551  
Zygmund class of functions 5:551

# 俄 文 索 引

## А

- абак 1:3  
Абелев дифференциал 1:10  
Абелев интеграл 1:14  
Абелева группа 1:12  
Абелева категория 1:8  
Абелева схема 1:15  
Абелева функция 1:11  
Абелево многообразие 1:16  
Абеля дифференциальное уравнение 1:3  
Абеля задача 1:6  
Абеля интегральное уравнение 1:5  
Абеля метод суммирования 1:7  
Абеля неравенство 1:5  
Абеля преобразование 1:8  
Абеля признак 1:3  
Абеля теорема 1:7  
Абеля - Гончарова проблема 1:4  
Абеля - Пуассона метод суммирования 1:6  
абнормальная подгруппа 1:17  
абсолют 1:17  
абсолютная величина 1:21  
абсолютная геометрия 1:19  
абсолютная непрерывность 1:18  
абсолютная погрешность 1:19  
абсолютная суммируемость 1:20  
абсолютно беспристрастная последовательность 1:24  
абсолютно интегрируемая функция 1:23  
абсолютно плоское кольцо 1:23  
абсолютно сходящийся несобственный интеграл 1:21  
абсолютно сходящийся ряд 1:22  
абсолютное значение на теле 3:968  
абсолютное топологическое свойство 1:21  
абсолютный момент 1:20  
абсолютный ретракт нормального пространства 1:20  
абстракция актуальной бесконечности 1:27  
абстракция математическая 1:26  
абстракция отождествления 1:27  
абстракция потенциальной осуществимости 1:27  
абсцисса 1:17  
автоковариация 1:255  
автоколебания 1:253  
автокорреллограмма 1:253  
автокорреляция 1:253  
автомат 1:272  
автомат вероятностный 1:278  
автомат, конечный 1:275  
автомата поведение 1:274  
автоматизация программирования 1:270  
автоматический перевод 1:271  
автоматического управления теория 1:264  
автоматов алгебраическая теория 1:255  
автоматов гомоморфизм 1:259  
автоматов композиции 1:257  
автоматов минимизация 1:263  
автоматов полные системы 1:256  
автоматов способы задания 1:259  
автоматов теория 1:263  
автоматов эквивалентность 1:258  
автоморфизм 1:281  
автоморфная форма 1:278  
автоморфная функция 1:279  
автонимия 1:283  
автономная система 1:281  
авторегрессионный процесс 1:255  
авторегрессия 1:255  
Адамара вариационная формула 2:801  
Адамара матрица 2:799  
Адамара теорема 2:800  
Адамса метод 1:32  
аддитивная арифметическая функция 1:34  
аддитивная группа 1:35  
аддитивная категория 1:34  
аддитивная проблема делителей 1:35  
аддитивная равномерная структура 1:39  
аддитивная теория идеалов 1:38  
аддитивная теория чисел 1:36  
аддитивная функция 1:35  
аддитивное отношение 1:38



- аддитивность 1:39
- аддитивные проблемы 1:37
- аддиционная теорема 1:34
- адель 1:39
- адиабатический инвариант 1:40
- адиабатическое течение 1:40
- адическая топология 1:41
- $l$ -адические когомологии 3:313
- $p$ -адическое число 4:57
- адсорбция 1:48
- азартная игра 2:630
- аксиом схема 1:287
- аксиома 1:286
- аксиоматизируемый класс 1:293
- аксиоматическая теория множеств 1:289
- аксиоматический метод 1:287
- аксонометрия 1:293
- Алгамс 1:68
- алгебра 1:68
- алгебра логики 1:72
- алгебра мер 1:75
- алгебра множеств 1:76
- алгебра с ассоциативными степенями 1:77
- алгебра с делением 2:269
- алгебра с инволюцией 3:178
- алгебра функций 1:71
- $C^*$ -алгебра 1:453
- $PI$ -алгебра 4:156
- алгебраическая алгебра 1:77
- алгебраическая геометрия 1:87
- алгебраическая геометрия абстрактная 1:24
- алгебраическая группа 1:91
- алгебраическая группа преобразований 1:91
- алгебраическая иррациональность 1:92
- алгебраическая кривая 1:78
- алгебраическая независимость 1:92
- алгебраическая операция 1:100
- алгебраическая поверхность 1:102
- алгебраическая размерность 1:82
- алгебраическая решетка 1:95
- алгебраическая система 1:105
- алгебраическая теория чисел 1:97
- алгебраическая  $K$ -теория 1:93
- алгебраическая топология 1:113
- алгебраическая точка ветвления 1:77
- алгебраическая функция 1:84
- алгебраически замкнутое поле 1:117
- алгебраический многочлен наилучшего приближения 1:101
- алгебраический тор 1:115
- алгебраический цикл 1:80
- алгебраически - логарифмическая особая точка 1:95
- алгебраических многообразий арифметика 1:115
- алгебраических систем квазимногообразие 1:111
- алгебраических систем класс 1:110
- алгебраических систем многообразие 1:111
- алгебраического многообразия автоморфизм 1:116
- алгебраическое дополнение 1:638
- алгебраическое замыкание 1:78
- алгебраическое многообразие 1:116
- алгебраическое пространство 1:101
- алгебраическое уравнение 1:82
- алгебраическое число 1:95
- алгебраической независимости мера 1:92
- алгебраической системы автоморфизм 1:109
- алгебры основная теорема 1:71
- Алгол 1:117
- Алгол - 68 1:118
- алгоритм 1:119
- алгоритм в алфавите 1:124
- алгоритм локальный 1:124
- алгоритма изображение 1:126
- алгоритма сложность вычислений 1:122
- алгоритма сложность описания 1:121
- алгоритмическая проблема 1:130
- алгоритмическая сводимость 1:133
- алгоритмическая теория информации 1:126
- алгоритмическая теория множеств 1:133
- алгоритмический язык 1:128
- алгоритмов сочетания 1:133
- алгоритмов теория 1:135
- алгоритмов эквивалентность 1:134
- Александера двойственность 1:65
- Александера инварианты 1:66
- Александрова бикompактное расширение 1:64
- Александрова - Чеха гомологии и когомологии 1:64
- алеф - нуль 1:65
- алефы,  $\aleph$  1:65
- аликвотная дробь 1:137
- алфавит 1:144
- Альбанезе многообразие 1:63
- альбедный метод 1:64
- альтернанса точки 1:145
- альтернатива 1:145

альтернативные кольца и алгебры 1:145  
 альтернион 1:147  
 альтернирование 1:145  
 альтернирующие узлы и зацепления 1:144  
 Альфа 1:68  
 Альфана пучок 2:805  
 амальгама 1:148  
 амальгама групп 1:148  
 амплитуда эллиптического интеграла 1:150  
 аналитическая геометрия 1:161; 1:162  
 аналитическая группа 1:162  
 аналитическая емкость 1:150  
 аналитическая кривая 1:151  
 аналитическая модель языка 1:165  
 аналитическая плоскость 1:171  
 аналитическая поверхность 1:177  
 аналитическая теория дифференциальных уравнений 1:178  
 аналитическая теория чисел 1:166  
 аналитическая функция 1:152  
 аналитическая функция абстрактная 1:25  
 аналитический вектор 1:180  
 аналитический дифференциал 1:152  
 аналитический ландшафт 1:163  
 аналитический образ 1:163  
 аналитический оператор 1:171  
 аналитический полиэдр 1:171  
 аналитический пучок 1:174  
 аналитический функционал 1:161  
 аналитическое выражение 1:152  
 аналитическое дополнение 1:150  
 аналитическое кольцо 1:172  
 аналитическое многообразие 1:164  
 аналитическое множество 1:172  
 аналитическое отображение 1:165  
 аналитическое представление 1:172  
 аналитическое продолжение 1:150  
 аналитическое пространство 1:174  
 аналагматическая геометрия 1:150  
 ангармоническое отношение 2:284  
 Ангера функция 1:181  
 Андронова - Витта теорема 1:181  
 анизотропная группа 1:183  
 анизотропное ядро 1:183  
 аннулятор 1:184  
 антагонистическая игра 5:301  
 антиголоморфная функция 1:185

антидвижение 1:185  
 антидискретная топология 1:185  
 антидискретное пространство 1:185  
 антиизоморфизм колец 1:185  
 антиизоморфизм частично упорядоченных множеств 1:185  
 антикоммутативная алгебра 1:185  
 антиконформное отображение 1:185  
 антилогарифм 1:186  
 антиномия, парадокс 1:186  
 антипараллелограмм 1:185  
 антипараллельные прямые 1:185  
 антиподы 1:188  
 антипризма 1:186  
 антисимметричный тензор 1:186  
 антитонное отображение 1:188  
 антье 3:114  
 Аньези локон 5:515  
 аperiodический автоморфизм 1:188  
 Аполлония задача 1:188  
 Аполлония теорема 1:188  
 аполярные сети 1:188  
 апостериорная вероятность 1:2  
 апостериорное распределение 1:1  
 апофема 1:189  
 Аппеля многочлены 1:189  
 Аппеля преобразование 1:191  
 Аппеля уравнения 1:189  
 аппликата 1:191  
 аппроксимативная дифференцируемость 1:192  
 аппроксимативная компактность 1:191  
 аппроксимативная непрерывность 1:192  
 аппроксимативная производная 1:192  
 аппроксимативно компактное множество 1:193  
 аппроксимативный предел 1:193  
 аппроксимация 1:194  
 аппроксимация дифференциального оператора разностным 1:197  
 аппроксимация дифференциального уравнения разностным 1:196  
 аппроксимация дифференциальной краевой задачи разностной 1:195  
 аппроксимация периодическими преобразованиями 1:194  
 априорная вероятность 1:2  
 априорное распределение 1:2  
 Арабские цифры 1:217  
 арбитражная схема 1:217



- аргумент 1:225  
 аргумента принцип 1:225  
 ареа - функция 1:224  
 арифметизация 1:233  
 арифметика 1:226  
 арифметика формальная 1:229  
 арифметическая группа 1:231  
 арифметическая прогрессия 1:232  
 арифметическая пропорция 1:232  
 арифметическая функция 1:230  
 арифметический континуум 1:228  
 арифметический корень 1:232  
 арифметический род 1:231  
 арифметический ряд 1:232  
 арифметический треугольник 1:233  
 арифметическое пространство 1:233  
 арифметическое распределение 1:228  
 арифметическое среднее 1:232  
 арксинуса закон 1:220  
 арксинуса распределение 1:220  
 аркфункция 1:218  
 Артинов модуль 1:235  
 Артинова группа 1:234  
 Артиново кольцо 1:235  
 Архимеда аксиома 1:218  
 Архимеда тела 1:218  
 Архимедов класс 1:218  
 Архимедова группа 1:219  
 Архимедова полугруппа 1:219  
 Архимедова спираль 1:219  
 Архимедово кольцо 1:219  
 Арцела вариация 1:235  
 Арцела - Асколи теорема 1:235  
 асимметрии коэффициент 1:244  
 асимметричное многообразие 1:244  
 асимметрия распределения 1:245  
 асимптота 1:245  
 асимптотика арифметических функций 1:251  
 асимптотическая линия 1:247  
 асимптотическая плотность 1:245  
 асимптотическая последовательность 1:249  
 асимптотическая пренебрегаемость 1:248  
 асимптотическая производная 1:245  
 асимптотическая сеть 1:248  
 асимптотическая точка 1:248  
 асимптотическая формула 1:247  
 асимптотически несмещенная оценка 1:250  
 асимптотически несмещенный критерий 1:251  
 асимптотически устойчивое решение 1:250  
 асимптотически эффективная оценка 1:250  
 асимптотический базис 1:245  
 асимптотический предел 1:247  
 асимптотический ряд 1:249  
 асимптотический степенной ряд 1:248  
 асимптотическое выражение 1:247  
 асимптотическое значение 1:249  
 асимптотическое направление 1:245  
 асимптотическое представление 1:249  
 асимптотическое равенство 1:246  
 асимптотическое разложение 1:246  
 ассоциативное исчисление 1:236  
 ассоциативность 1:239  
 ассоциативные кольца и алгебры 1:237  
 ассоциатор 1:239  
 ассоциированная функция 1:236  
 астроида 1:239  
 астрономии математические задачи 1:240  
 астрономии математические задачи 1:240  
 астрофизики математические задачи 1:241  
 атом 1:251  
 атомарное кольцо 1:251  
 атомическое распределение 1:251  
 атомная решетка 1:251  
 аффикс комплексного числа 1:61  
 аффинитет 1:61  
 аффинная геометрия 1:56  
 аффинная группа 1:56  
 аффинная дифференциальная геометрия 1:54  
 аффинная кривизна 1:54  
 аффинная минимальная поверхность 1:56  
 аффинная нормаль 1:57  
 аффинная оболочка 1:56  
 аффинная связность 1:52  
 аффинная система координат 1:54  
 аффинная сфера 1:59  
 аффинная схема 1:57  
 аффинная унимодулярная группа 1:60  
 аффинное алгебраическое множество 1:51  
 аффинное кручение 1:59  
 аффинное многообразие 1:60  
 аффинное преобразование 1:59  
 аффинное пространство 1:58  
 аффинное псевдорасстояние 1:57  
 аффинное расстояние 1:56

аффинный морфизм 1:56  
аффинный параметр 1:57  
аффинный репер 1:54  
аффинный тензор 1:59

аффиноид 1:61  
ациклический элемент 1:32  
ацикличный континуум 1:32  
аэродинамики математические задачи 1:48

## Б

база 1:312  
базис 1:314  
базисное множество 1:314  
базисный коммутатор 1:314  
Банаха индикатриса 1:302  
Банаха - Мазура функционал 1:303  
Банаха - Штейнхауза теорема 1:308  
Банахов модуль 1:304  
Банахова алгебра 1:299  
Банахова решетка 1:302  
Банахово аналитическое пространство 1:301  
Банахово пространство 1:304  
Барбье теорема 1:310  
бар - индукция 1:309  
барицентрические координаты 1:311  
барицентрическое подразделение 1:312  
Бартлетта критерий 1:311  
барьер 1:310  
башня полей 5:237  
бегущей волны метод 5:265  
Беенке - Штейна теорема 1:321  
безгранично делимое распределение 3:59  
безгранично делимых распределений разложение 3:61  
Безиковича почти периодические функции 1:340  
Безу кольцо 1:350  
Безу теорема 1:350  
безусловная суммируемость 5:316  
безусловная сходимость 5:315  
Бейеса формула 1:319  
Бейесовская оценка 1:321  
Бейесовская решающая функция 1:321  
Бейесовский подход 1:319  
Бейесовский подход эмпирический 1:320  
Бейтмена метод 1:318  
Бейтмена функция 1:318  
Беллмана уравнение 1:322  
Беллмана - Харриса процесс 1:323  
белого шума анализ 5:489  
белый шум 5:488  
Бельтрами интерпретация 1:323

Бельтрами координаты 1:323  
Бельтрами метод 1:324  
Бельтрами уравнение 1:323  
Бельтрами - Эннепера теорема 1:323  
бемольная норма 2:497  
бемольная форма 2:496  
Бендиксона критерий 1:324  
Бендиксона преобразование 1:324  
Бендиксона сфера 1:324  
Бергмана - Вейля представление 1:326  
Бергмана ядренная функция 1:325  
Беренса - Фишера проблема 1:322  
Бёркиля интеграл 1:449  
Бёрнсайда проблема 1:451  
Бернулли автоморфизм 1:327  
Бернулли блуждание 1:331  
Бернулли интеграл 1:328  
Бернулли испытания 1:333  
Бернулли лемниската 1:328  
Бернулли метод 1:328  
Бернулли многочлены 1:330  
Бернулли распределение 1:327  
Бернулли схема 1:332  
Бернулли теорема 1:332  
Бернулли уравнение 1:328  
Бернулли числа 1:329  
Бернштейна интерполяционный процесс 1:335  
Бернштейна метод 1:335  
Бернштейна многочлены 1:337  
Бернштейна неравенство 1:334  
Бернштейна теорема 1:338  
Бернштейна - Рогозинского метод суммирования 1:337  
Бертини теоремы 1:339  
Бертрана кривые 1:339  
Бертрана парадокс 1:339  
Бертрана постулат 1:340  
Бертрана признак 1:339  
бескоалиционная игра 3:931  
бесконечная десятичная дробь 3:51  
бесконечная игра 3:56



- бесконечная индукция 3:57
- бесконечно большая функция 3:61
- бесконечно малая функция 3:62
- бесконечно малое изгибание 3:66
- бесконечно малых исчисление 3:62
- бесконечно удаленные элементы 3:58
- бесконечного порядка уравнение 2:374
- бесконечное произведение 3:57
- бесконечномерное представление 3:51
- бесконечномерное пространство 3:55
- бесконечносвязная область 3:58
- бесконечности аксиома 3:68
- бесконечность 3:67
- Бесселев потенциал 1:344
- Бесселева система 1:344
- Бесселя интерполяционная формула 1:343
- Бесселя неравенство 1:343
- Бесселя уравнение 1:340
- Бесселя функции 1:342
- бета - распределение 1:349
- бета - функция 1:349
- Бетти группа 1:350
- Бетти число 1:350
- Бианки конгруэнция 1:350
- Бианки поверхность 1:351
- Бианки преобразование 1:351
- Бианки тождество 1:351
- Бибербаха гипотеза 1:354
- Бибербаха многочлены 1:356
- Бибербаха - Эйленберга функции 1:355
- бивектор 1:372
- бивекторное пространство 1:373
- бигармоническая функция 1:358
- биголоморфное отображение 1:359
- биекция 1:359
- бикатегория 1:352
- биквадратное уравнение 1:368
- бикомпакт,  $T_2$  1:687
- бикомпактно открытая топология 1:678
- бикомпактное отображение 1:678
- бикомпактное пространство 1:679
- бикомпактное расширение 1:682
- бикомпактность 1:685
- бикомплекс 1:353
- билинейная интегральная форма 1:361
- билинейная форма 1:360
- билинейное отображение 1:361
- билинейный дифференциал 1:359
- билинейный функционал 1:361
- биматричная игра 1:362
- бимодальное распределение 1:362
- бимодуль 1:362
- биморфизм 1:362
- бинарная  $p$ -адическая группа 1:363
- бинарная квадратичная форма 1:364
- бинарная форма 1:363
- бинарно лиева алгебра 1:363
- бинарное отношение 1:364
- Бином 1:365
- биномиальное распределение 1:366
- биномиальные коэффициенты 1:365
- биномиальный ряд 1:366
- бинормаль 1:367
- биортогональная система 1:367
- бипланарное пространство 1:367
- биполярные координаты 1:367
- бирациональная геометрия 1:368
- бирациональное отображение 1:369
- бирациональное преобразование 1:369
- бирациональный морфизм 1:369
- Биркгофа эргодическая теорема 1:370
- Биркгофа - Витта теорема 1:370
- бисвязное пространство 1:353
- биссекторная плоскость 1:371
- биссектриса 1:371
- бит 1:371
- бифакторное отображение 1:356
- бифунктор 1:356
- бифуркация 1:357
- бихарактеристика 1:352
- Бицадзе уравнение 1:372
- бициклическая полугруппа 1:353
- бицилиндрика 1:354
- бицилиндрическая область 1:353
- бицилиндрические координаты 1:353
- близкое преобразование 4:356
- близнецы 5:291
- близости пространство 4:354
- близость 4:354
- блок - схема 1:375
- Блотто игры 1:377
- Блоха константа 1:375
- блуждающая точка 5:449
- блуждающее множество 5:449

- блуждающей трубки метод 5:264  
 Бляшке произведение 1:374  
 Бляшке теорема выбора 1:375  
 Бляшке - Вейля формула 1:375  
 Боголюбова неравенство 1:380  
 Боголюбова теорема 1:381  
 Боголюбова цепочка уравнений 1:379  
 Бозе - Эйнштейна статистика 1:408  
 Бокса интеграл 1:384  
 Больца задача 1:387  
 Больцано - Вейерштрасса принцип выбора 1:388  
 Больцано - Вейерштрасса теорема 1:388  
 Больцмана линеаризованное уравнение 1:386  
 Больцмана распределение 1:384  
 Больцмана статистика 1:387  
 Больцмана  $H$  - теорема 1:386  
 Больцмана уравнение 1:385  
 больших отклонений вероятности 4:311  
 больших чисел закон 3:362  
 больших чисел усиленный закон 5:36  
 большое решето 3:351  
 Боля почти периодические функции 1:382  
 Бонне сеть 1:389  
 Бонне теорема 1:389  
 Боннезена неравенство 1:389  
 Бора компакт 1:383  
 Бора почти периодические функции 1:383  
 Бора - Фавара неравенство 1:384  
 бордизм 1:401  
 Борелевская система множеств 1:407  
 Борелевская функция 1:403  
 Борелевский изоморфизм 1:404  
 Борелевских множеств критерий 1:405  
 Борелевское множество 1:405  
 Борелевское поле множеств 1:403  
 Борелевское поле событий 1:403  
 Бореля мера 1:404  
 Бореля метод суммирования 1:406  
 Бореля подгруппа 1:406  
 Бореля преобразование 1:407  
 Бореля теорема о неподвижной точке 1:403  
 Бореля усиленный закон больших чисел 1:405  
 Бореля - Кантелли лемма 1:403  
 Бореля - Лебега теорема 1:404  
 Борсука проблема 1:407  
 Ботта теорема периодичности 1:408  
 Бохнера интеграл 1:377  
 Бохнера почти периодические функции 1:377  
 Бохнера - Мартинелли представление 1:378  
 бочечное пространство 1:310  
 Брандта полугруппа 1:443  
 Брауэра группа 1:443  
 Брауэра решетка 1:446  
 Брауэра теорема 1:446  
 Брауэра - Севери многообразие 1:444  
 брахистохрона 1:431  
 брианшона теорема 1:445  
 Брио - Буке уравнение 1:445  
 Броуновского движения процесс 1:447  
 Бруна решето 1:447  
 Бруна теорема 1:448  
 Брунна - Минковского теорема 1:448  
 Брюа разложение 1:447  
 Бубнова - Галеркина метод 1:448  
 буква 3:391  
 Булева алгебра 1:390  
 Булева функция 1:392  
 Булево кольцо 1:398  
 Булево уравнение 1:392  
 булевозначная модель 1:398  
 Булевых функций метрическая теория 1:392  
 Булевых функций минимизация 1:394  
 Булевых функций нормальные формы 1:397  
 Буняковского неравенство 1:449  
 Бурже функция 1:431  
 Бута лемниската 1:399  
 бушующая система 5:289  
 Бьерлинга задача 1:373  
 Бэра классы 1:296  
 Бэра множество 1:296  
 Бэра пространство 1:296  
 Бэра свойство 1:296  
 Бэра теорема 1:297  
 Бэра умножение 1:295  
 Бэрри - Эссеена неравенство 1:338  
 Бюдана - Фурье теорема 1:448  
 Бюрмана - Лагранжа ряд 1:450  
 Бюффона задача 1:448



## В

- Валье - Пуссена метод суммирования 2:14  
 Валье - Пуссена многоточечная задача 2:12  
 Валье - Пуссена признак 2:11  
 Валье - Пуссена производная 2:12  
 Валье - Пуссена сингулярный интеграл 2:13  
 Валье - Пуссена сумма 2:13  
 Валье - Пуссена теорема 2:14  
 Валиса формула 5:448  
 валны 5:456  
 Вальда тождество 5:446  
 ван дер Вардена критерий 5:370  
 ван дер Вердена теорема 5:370  
 ван дер Поля уравнение 5:369  
 Вандермонда определитель 5:370  
 Варда теорема 5:450  
 вариации коэффициент 1:635  
 вариации среднего значения теорема 1:284  
 вариационная задача 5:398  
 вариационное исчисление 5:380  
 вариационное исчисление в целом 5:384  
 вариационное исчисление, численные методы 5:385  
 вариационно - параметрический метод 5:379  
 вариационные принципы 5:393  
 вариационные принципы классической механики 5:394  
 вариационные численные методы 5:391  
 вариационный ряд 5:399  
 вариация 5:373  
 вариация множества 5:376  
 вариация однолистной функции 5:377  
 вариация отображения 5:376  
 вариация функции 5:374  
 вариация функционала 5:375  
 Варинга проблема 5:450  
 Вариньона теорема 5:403  
 Ватсона лемма 5:452  
 Ватсона преобразование 5:452  
 введения параметра метод 4:85  
 Вебера уравнение 5:461  
 Вебера функция 5:461  
 Веддерберна - Артина теорема 5:463  
 Веддерберна - Мальцева теорема 5:463  
 веер 2:450  
 Вейбулла распределение 5:464  
 Вейерштрасса кольцо 5:470  
 Вейерштрасса координаты 5:465  
 Вейерштрасса критерий (минимальности поверхности) 5:465  
 Вейерштрасса признак (разнотонной сходимости) 5:466  
 Вейерштрасса теорема 5:470  
 Вейерштрасса точка 5:470  
 Вейерштрасса условия экстремума 5:464  
 Вейерштрасса формула 5:470  
 Вейерштрасса  $g$ -функция 5:466  
 Вейерштрасса  $p$ -функция 5:470  
 Вейерштрасса  $\zeta$ -функция 5:464  
 Вейерштрасса  $\sigma$ -функция 5:464  
 Вейерштрасса эллиптические функции 5:467  
 Вейерштрасса - Стоуна теорема 5:26  
 Вейерштрасса - Эрмана угловые условия 5:469  
 Вейля алгебра 5:481  
 Вейля группа 5:485  
 Вейля когомологии 5:478  
 Вейля критерий 5:485  
 Вейля метод 5:487  
 Вейля область 5:479  
 Вейля почти периодические функции 5:484  
 Вейля проблема 5:488  
 Вейля связность 5:485  
 Вейля сумма 5:488  
 Вейля - Шатле группа 5:477  
 Вейнгартена дериационные формулы 5:479  
 Вейнгартена поверхность 5:480  
 вектор 5:403  
 векторная алгебра 5:404  
 векторная группа 5:415  
 векторная решетка 5:415  
 векторная мера 5:415  
 векторная трубка 5:419  
 векторное алгебраическое расслоение 5:410  
 векторное аналитическое расслоение 5:411  
 векторное исчисление 5:412  
 векторное кольцо 5:417  
 векторное поле 5:413  
 векторное поле на многообразии 5:413  
 векторное произведение 5:416  
 векторное пространство 5:417  
 векторное расслоение 5:408

- векторно - точечная аксиоматика 5:408
- векторный анализ 5:407
- вектор - функций алгебра 5:415
- вектор - функция, векторная функция 5:414
- Векуа метод 5:420
- величина 4:404
- Венна диаграмма 5:420
- вербальная конгруэнция 5:420
- вербальная подгруппа 5:421
- вербальное произведение 5:421
- верзор 5:422
- верификация 5:421
- Веронезе отображение 5:421
- вероятное отклонение 4:318
- вероятностей теория 4:312
- вероятностная бумага 4:309
- вероятностная мера 4:310
- вероятностное пространство 4:312
- вероятностный процесс 4:311
- вероятность 4:307
- вертор 5:422
- верхний и нижний пределы 5:359
- верхних и нижних функций метод 5:358
- верхняя грань семейства топологий 5:360
- верхняя и нижняя грани 5:357
- вес 5:474
- вес представления алгебры Ли 5:475
- вес топологического пространства 5:476
- весовое пространство 5:476
- веталение решений 1:436
- ветвления индекс 1:434
- ветвления точка 1:435; 1:437
- ветвь аналитической функции 1:435
- ветвящийся процесс 1:438
- ветвящийся процесс с диффузией 1:441
- ветвящийся процесс с зависимостью от возраста 1:439
- ветвящийся процесс с иммиграцией 1:442
- ветвящийся процесс с конечным числом типов частиц 1:440
- ветвящийся процесс с случайной средой 1:441
- ветвящихся процессов регулярность 1:443
- вещественное аналитическое пространство 4:511
- вещественное нормирование 4:511
- взаимно однозначное соответствие 3:1019
- взаимно простые числа 3:871
- взаимно сингулярные меры 3:871
- взаимности законы 4:516
- взаимные ядра 3:871
- взаимодействия представление 3:127
- взвешенное среднее 5:476
- Вивiani кривая 5:433
- вид 4:909
- Виета теорема 5:422
- Вилкоксона критерий 5:510
- Вильсона теорема 5:512
- Винера интеграл 5:506
- Вивiani кривая 5:433
- Вилсона многочлены 5:511
- Винера мера 5:507
- Винера Тауберова теорема 5:509
- Винера - Хопфа метод 5:505
- Винера - Хопфа уравнение 5:504
- Винеровский процесс 5:507
- Виноградова гипотезы 5:424
- Виноградова интеграл 5:424
- Виноградова метод 5:424
- Виноградова оценки 5:423
- Виноградова теорема о среднем 5:426
- Виноградова - Гольдбаха теорема 5:424
- винтовая линия 2:848
- винтовое исчисление 2:848
- Вирасоро алгебра 5:427
- вириала теорема 5:429
- вириальное разложение 5:428
- виртуально - асимптотическая сеть 5:430
- Витали вариация 5:432
- Витали теорема 5:431
- Витта алгебра 5:515
- Витта вектор 5:519
- Витта кольцо 5:517
- Витта разложение 5:516
- Витта теорема 5:518
- вихревое кольцо 5:444
- вихрь 1:906
- ВКБ - метод 5:521
- включение методов суммирования 3:30
- включения и исключения принцип 3:29
- Владимирова вариационный принцип 5:434
- Владимирова метод 5:433
- Власова кинетическое уравнение 5:434
- влияния область 2:277
- вложение категорий 3:14
- вложение кольца 3:14
- вложение полугруппы 3:15



- вложение функциональных пространств 3:14  
 вложения теоремы 3:15  
 вмерзженности интеграл 2:578  
 внешнее произведение 2:432  
 внешних форм метод 2:432  
 внешняя алгебра 2:430  
 внешняя и внутренняя краевые задачи 2:431  
 внешняя мера 4:52  
 внешняя нормаль 2:432  
 внешняя форма 2:432  
 внутреннее отображение 3:128  
 внутренние волны 3:132  
 внутренний автоморфизм 3:83  
 внутренний дифференциальный оператор 3:128  
 внутренних вариаций метод 3:132  
 внутренность 3:127  
 внутренность множества 3:129  
 внутренняя геометрия 3:128  
 внутренняя граница 3:131  
 внутренняя метрика 3:131  
 внутренняя точка множества 3:129  
 вогнутая функция 1:730  
 вогнутый и выпуклый операторы 1:730  
 водородоподобный атом 2:939  
 возврата ребро 2:319  
 возврата точка 1:914  
 возвратная последовательность 4:527  
 возвратное уравнение 4:516  
 возможных перемещений принцип 5:429  
 возмущение линейной системы 4:139  
 возмущений теория 4:139  
 возраста теория 3:898  
 возрастающая последовательность 3:32  
 возрастающая функция 3:32  
 волновое уравнение 5:453  
 волновой вектор 5:455  
 волны 5:456  
 Вольтерра оператор 5:437  
 Вольтерра уравнение 5:435  
 Вольтерра ядро 5:437  
 Вольфовица неравенство 5:522  
 Вороного метод суммирования 5:444  
 Вороного типы решеток 5:443  
 восстановления теория 4:580  
 вписанная ломаная 3:85  
 вписанные и описанные фигуры 3:84  
 вписанный угол 3:85  
 вполне аддитивная функция 5:233  
 вполне геодезическое многообразие 5:234  
 вполне дистрибутивная структура 1:701  
 вполне замкнутое отображение 2:585  
 вполне интегрируемое дифференциальное уравнение 1:701  
 вполне непрерывный оператор 1:701  
 вполне неприводимое множество 5:234  
 вполне несвязное пространство 5:233  
 вполне несовершенное пространство 5:234  
 вполне нормальное пространство 5:235  
 вполне ограниченное множество 5:233  
 вполне ограниченное пространство 5:233  
 вполне приводимая матричная группа 1:702  
 вполне приводимое множество 1:703  
 вполне приводимый модуль 1:703  
 вполне простая полугруппа 1:704  
 вполне регулярная полугруппа 1:703  
 вполне регулярное пространство 1:703  
 вполне упорядоченное множество 5:236  
 вполне характеристическая конгруэнция 2:584  
 вполне характеристическая подгруппа 2:584  
 вращение 4:687  
 вращение векторного поля 4:689  
 вращений индикатриса 4:688  
 вращений метод 4:688  
 вращения поверхность 4:690  
 вращения теоремы 4:690  
 вращения число 4:689  
 временной ряд 5:179  
 Вронскиан 5:525  
 всеобщности кваитор 5:354  
 всюду плотное множество 2:408  
 вторая аксиома счетности 4:736  
 вторая вариация 4:738  
 вторая квадратичная форма 4:737  
 вторая краевая задача 4:736  
 второе сопряженное пространство 4:737  
 вурф 5:526  
 вхождение 3:13  
 выбора аксиома 1:286  
 выбора теоремы 4:745  
 выборка 4:708  
 выборочная гроздь 4:708  
 выборочная квантиль 4:711  
 выборочная медиана 4:710  
 выборочная дисперсия (рассеивание) 4:711  
 выборочная точка 4:711

выборочная функция 4:708  
 выборочная характеристика 4:708  
 выборочное пространство 4:711  
 выборочное среднее 4:708  
 выборочный блок 4:708  
 выборочный метод 4:710  
 выборочный момент 4:711  
 вывод логический 2:50  
 вывода дерево 2:51  
 вывода правило 2:51  
 выводимое правило 2:22 ; 2:49  
 выводимость 2:49  
 выделение сигнала 4:820  
 выигрыша функция 2:620  
 выметания метод 1:298  
 вынуждения метод 2:506  
 вынужденные колебания 2:505  
 выпуклая игра 1:845  
 выпуклая метрика 1:846  
 выпуклая область 1:842  
 выпуклая оболочка 1:845  
 выпуклая поверхность 1:849  
 выпуклая подгруппа 1:849  
 выпуклая последовательность 1:847  
 выпуклая функция 1:842  
 выпуклая функция (действительного переменного) 1:843  
 выпуклое множество 1:847  
 выпуклое подмножество 1:849  
 выпуклое программирование 1:847  
 выпуклое тело 1:841  
 выпуклости радиус 1:853  
 выпуклость 1:852  
 выпуклость логарифмическая 1:853  
 выпуклый анализ 1:841  
 выпуклый конус 1:842  
 выпуклый многогранник 1:846  
 выпуклый многоугольник 1:846

выпуклый оператор 1:846  
 выпуклый функционал 1:844  
 выпуклых множеств пространство 1:849  
 выпуклых множеств пространство (линейное) 1:849  
 вырождения вероятность 2:37  
 вырожденная гипергеометрическая функция 1:746 ; 2:34  
 вырожденная игра 2:34  
 вырожденная матрица 2:36  
 вырожденная серия представлений 2:37  
 вырожденное гиперболическое уравнение 2:34  
 вырожденное гипергеометрическое уравнение 1:746  
 вырожденное интегральное уравнение 2:34  
 вырожденное параболическое уравнение 2:36  
 вырожденное положение равновесия 2:33  
 вырожденное распределение 2:33  
 вырожденное уравнение с частными производными 2:36  
 вырожденное эллиптическое уравнение 2:33  
 вырожденное ядро 2:35  
 вырожденных ядер метод 2:35  
 высказываний исчисление 4:352  
 высота в Диофантовой геометрии 2:846  
 высота в элементарной геометрии 2:847  
 Высота идеала 2:847  
 вычет 4:579  
 вычет аналитической функции 4:604  
 вычет - форма 4:603  
 вычисляемая функция 1:724  
 вычисляемое действительное число 1:726  
 вычисляемый инвариант 1:725  
 вычислительная математика 1:727  
 вычислительная машина абстрактная 1:729  
 вычислительный алгоритм 1:726  
 вычитание 5:69  
 Вьеториса гомологии 5:422  
 вялый пучок 2:494

## Г

газовой динамики уравнения 2:641  
 газовой динамики численные методы 2:644  
 газовых струй теория 2:648  
 Галеркина метод 2:621  
 Галилеева система координат 2:622  
 Галилеево пространство 2:622  
 Галилея преобразование 2:622

Галилея принцип относительности 2:622  
 Галилея спираль 2:622  
 Галуа группа 2:626  
 Галуа дифференциальная группа 2:625  
 Галуа когомологии 2:623  
 Галуа поле 2:625  
 Галуа расширение 2:625



- Галуа соответствие 2:625  
 Галуа теории обратная задача 2:628  
 Галуа теория 2:626  
 Галуа теория колец 2:629  
 Галуа теория, обратная задача 2:628  
 Галуа топологическая группа 2:629  
 Гальтона - Ватсона процесс 2:630  
 Гальфанда представление 2:664  
 Гамильтона оператор 2:808  
 Гамильтона уравнения 2:805  
 Гамильтона функция 2:805  
 Гамильтона - Остроградского принцип 2:808  
 Гамильтона - Якоби теория 2:806  
 Гамильтонова группа 2:806  
 Гамильтонова система 2:809  
 Гамильтонова система линейная 2:810  
 гамма - корреляция 2:637  
 гамма - распределение 2:638  
 гамма - функция 2:639  
 Гаммерштейна уравнение 2:813  
 Ганкеля функции 2:816  
 гармонизируемая динамическая система 2:836  
 гармонизируемый случайный процесс 2:836  
 гармоника 2:835  
 гармоническая емкость 2:826  
 гармоническая мажоранта 2:831  
 гармоническая мера 2:831  
 гармоническая форма 2:827  
 гармоническая функция 2:828  
 гармоническая четверка 2:833  
 гармонические координаты 2:826  
 гармонический анализ 2:822  
 гармонический анализ абстрактный 2:822  
 гармонический многочлен 2:833  
 гармонический ряд 2:833  
 гармонического баланса метод 2:826  
 гармоническое колебание 2:835  
 гармоническое пространство 2:834  
 гармоническое среднее 2:831  
 гармонической меры принцип 2:832  
 Гарнака интеграл 2:838  
 Гарнака неравенство (двойное) 2:837  
 Гарнака теорема 2:838  
 Гартогса область 2:839  
 Гартогса теорема 2:839  
 Гартогса - Лорана ряд 2:839  
 Гато вариация 2:650  
 Гато градиент 2:650  
 Гато дифференциал 2:649  
 Гато производная 2:649  
 Гаусса вариационная задача 2:661  
 Гаусса закон 2:654  
 Гаусса закон взаимности 2:658  
 Гаусса интерполяционная формула 2:653  
 Гаусса квадратурная формула 2:658  
 Гаусса метод 2:656  
 Гаусса преобразование 2:661  
 Гаусса признак 2:652  
 Гаусса принцип 2:657  
 Гаусса разложение 2:652  
 Гаусса сумма 2:659  
 Гаусса теорема 2:660  
 Гаусса - Бонне теорема 2:651  
 Гаусса - Лапласа распределение 2:654  
 Гаусса - Манина связность 2:654  
 Гауссова кривизна 2:662  
 Гауссова полугруппа 2:659  
 Гауссово число 2:657  
 Гауссовский процесс 2:663  
 Гегенбауэра многочлены 2:664  
 Гегенбауэра преобразование 2:664  
 Гёделя интерпретация 2:736  
 Гёделя теорема о неполноте 2:736  
 Гёделя теорема о полноте 2:734  
 Гейзенберга представление 2:847  
 Гейне - Бореля теорема 2:847  
 Гейтинга формальная система 2:861  
 гексаэдр 2:861  
 геликоид 2:849  
 Геллерстедта задача 2:665  
 Гельдера методы суммирования 2:889  
 Гельдера неравенство 2:887  
 Гельдера условие 2:887  
 Гельдерова пространство 2:888  
 Гельмгольца уравнение 2:850  
 Гельфанда представление 2:664  
 генеральная совокупность 2:665  
 генетическая алгебра 2:695  
 Гензелево кольцо 2:851  
 Гензеля лемма 2:851  
 Генцена формальная система 2:696  
 геодезии математические задачи 2:706  
 геодезическая кривизна 2:701  
 геодезическая линия 2:702

- геодезическая область 2:705  
 геодезическая окружность 2:700  
 геодезическая сеть 2:705  
 геодезические координаты 2:700  
 геодезический поток 2:701  
 геодезический треугольник 2:705  
 геодезических геометрия 2:702  
 геодезических гипотеза 2:702  
 геодезическое кручение 2:705  
 геодезическое многообразие 2:704  
 геодезическое отображение 2:704  
 геодезическое расстояние 2:701  
 геодезиологии математические задачи 2:699  
 геометрическая прогрессия 2:713  
 геометрические вероятности 2:713  
 геометрические построения 2:708  
 геометрический комплекс 2:708  
 геометрический род 2:710  
 геометрических объектов теория 2:710  
 геометрическое кольцо 2:714  
 геометрическое место точек 2:710  
 геометрическое приближение 2:707  
 геометрическое распределение 2:709  
 геометрическое среднее 2:710  
 геометрия 2:715  
 геометрия в целом 2:717  
 геометрия чисел 2:721  
 геометродинамика 2:714  
 геотермики математические задачи 2:727  
 геофизики математические задачи 2:725  
 Герглота формула 2:852  
 Герона треугольник 2:859  
 Герона формула 2:859  
 Герца принцип 2:859  
 Гессиан, Гессиана, алгебраической кривой 2:860  
 Гессиан функции 2:860  
 гетероклиническая точка 2:860  
 Гиббса распределение 2:728  
 Гиббса статистический ансамбль 2:730  
 Гиббса явление 2:729  
 гидродинамики математические задачи 2:936  
 гидродинамическое приближение 2:935  
 Гильберта геометрия 2:866  
 Гильберта инвариантный интеграл 2:867  
 Гильберта многочлен 2:868  
 Гильберта неравенство 2:866  
 Гильберта преобразование 2:882  
 Гильберта сингулярный интеграл 2:871  
 Гильберта система аксиом 2:878  
 Гильберта схема 2:868  
 Гильберта многочлен 2:868  
 Гильберта теорема 2:879  
 Гильберта теория интегральных уравнений 2:881  
 Гильберта ядро 2:868  
 Гильберта - Камке проблема 2:868  
 Гильберта - Шмидта интегральный оператор 2:869  
 Гильберта - Шмидта норма 2:870  
 Гильберта - Шмидта оператор 2:870  
 Гильберта - Шмидта ряд 2:870  
 Гильберта - Эйлера проблема 2:866  
 Гильбертов кирпич 2:865  
 Гильбертова алгебра 2:865  
 Гильбертово пространство 2:871  
 Гильбертово пространство с индефинитной метрикой 2:876  
 гипербола 2:941  
 гиперболическая геометрия 2:942  
 гиперболическая метрика 2:942  
 гиперболическая спираль 2:950  
 гиперболическая точка 2:949  
 гиперболическая тригонометрия 2:950  
 гиперболические функции 2:941  
 гиперболический параболоид 2:944  
 гиперболический цилиндр 2:941  
 гиперболического типа уравнение 2:944  
 гиперболического типа уравнение, численные методы решения 2:945  
 гиперболическое множество 2:949  
 гиперболической метрики принцип 2:943  
 гиперболоид 2:951  
 гипергеометрическая функция 2:956  
 гипергеометрический ряд 2:958  
 гипергеометрическое распределение 2:955  
 гипергеометрическое уравнение 2:955  
 гипергомологий функтор 2:960  
 гиперграф 2:959  
 гиперкомплексного переменного функция 2:951  
 гиперкомплексное число 2:952  
 гиперплоскость 2:960  
 гиперповерхность 2:961  
 гиперпространство 2:960  
 гиперфункция 2:953  
 гиперцентр 2:951  
 гиперцикл 2:953



- гиперэллиптическая кривая 2:940  
 гиперэллиптический интеграл 2:940  
 гипотенуза 2:962  
 гипоциклоида 2:961  
 гистограмма 2:883  
 Гишара конгруэнция 2:792  
 главная кривизна 4:296  
 главная нормаль 4:300  
 главная трансляция 4:301  
 главная часть дифференциального оператора 4:300  
 главного типа оператор с частными производными 4:301  
 главное аналитическое расслоение 4:294  
 главное направление 4:296  
 главное однородное пространство 4:298  
 главное расслоение 4:297  
 главное фундаментальное решение 4:297  
 главный идеал 4:299  
 главный  $G$  - объект 4:298  
 главный ряд 4:301  
 главный фактор 4:296  
 главный характер 4:295  
 главных идеалов кольцо 4:300  
 гладкая схема 4:883  
 гладкая точка функции 4:883  
 гладкая функция 4:882  
 гладкий континуум 4:882  
 гладкий морфизм 4:882  
 гладкое пространство 4:884  
 гладкости модуль 4:884  
 глобальная структура траекторий 2:731  
 глобально симметрическое Риманово пространство 2:732  
 глобальное поле 2:731  
 глубина модуля 2:49  
 годограф 2:886  
 годографа преобразование 2:886  
 голоморф группы 2:889  
 голоморфная форма 2:889  
 голоморфная функция 2:890  
 голоморфно выпуклое комплексное пространство 2:891  
 голоморфное отображение 2:890  
 голоморфности область 2:276  
 голоморфности оболочка 2:889  
 голономии группа 2:892  
 голономная система 2:891  
 Голубева - Привалова теорема 2:739  
 Гольдбаха проблема 2:737  
 Гольдбаха - Варинга проблема 2:738  
 гомеоморфизм 2:892  
 гомеоморфизмов группа 2:894  
 гомоклиническая точка 2:895  
 гомологии база 2:907  
 гомологии группа 2:908  
 гомологии динамической системы 2:910  
 гомологии комплекса 2:910  
 гомологии полиэдра 2:911  
 гомологии с компактными носителями 2:916  
 гомологии теория 2:912  
 гомологическая алгебра 2:902  
 гомологическая классификация колец 2:904  
 гомологическая последовательность 2:912  
 гомологическая размерность 2:904  
 гомологическая размерность пространства 2:906  
 гомологические умножения 2:912  
 гомологический функтор 2:907  
 гомологическое многообразие 2:909  
 гомологическое опоясывание 2:904  
 гомология 2:907  
 гомоморфизм 2:916  
 гомоскедастичность 2:917  
 гомотетия 2:917  
 гомотопно тривиальное отображение 2:917  
 гомотопическая группа 2:918  
 гомотопический тип 2:922  
 гомотопический тип топологизированной категории 2:926  
 гомотопия 2:917  
 гониометрия 2:739  
 Гоша код 2:740  
 Гординга неравенство 2:641  
 горения теория 1:667  
 Горенштейна кольцо 2:740  
 горизонтальное распределение 2:931  
 Горловой эллипс 2:741  
 Горнера схема 2:931  
 гравитация 2:765  
 градиент 2:742  
 градиентная динамическая система 2:743  
 градиентное поле 2:744  
 градиентное преобразование 2:650 ; 2:744  
 градиентный метод 2:744  
 градуированная алгебра 2:742  
 градуированный модуль 2:742  
 градус 2:38

Грама матрица 2:745  
 Грама определитель 2:745  
 Грама - Шарлье ряд 2:744  
 грамматика автоматная 2:746; 2:751  
 грамматика бесконтекстная 2:746  
 грамматика доминационная 2:749  
 грамматика категориальная 2:746  
 грамматика линейная 2:751  
 грамматика порождающая 2:750  
 грамматика составляющих 2:748  
 грамматика трансформационная 2:752  
 грамматика формальная 2:750  
 граница 1:409  
 граничные задачи теории аналитических функций 1:427  
 граничные свойства аналитических функций 1:415  
 граничные элементы 3:445  
 граничных вариаций метод 1:429  
 грань 2:445  
 Грассмана многообразие 2:764  
 граф 2:752  
 граф двудольный 2:754  
 граф ориентированный 2:760  
 граф плоский 2:761  
 граф случайный 2:762  
 граф экстремальный 2:757  
 графа автоморфизм 2:754  
 графа обход 2:755  
 графа раскраска 2:755  
 графа связность 2:756  
 графа укладка 2:758  
 график отображения 2:760  
 графическое равенство 2:764  
 графов гомеоморфизм 2:758  
 графов изоморфизм 2:758  
 графов теория 2:763  
 графов числовые характеристики 2:759  
 Грегори формула 2:777  
 Грётша принцип 2:780  
 Грётша теоремы 2:781

Грина линии 2:777  
 Грина отношения эквивалентности 2:770  
 Грина пространство 2:777  
 Грина формулы 2:770  
 Грина функция 2:772  
 Гронуолла метод суммирования 2:778  
 Гротендика группа 2:779  
 Гротендика категория 2:779  
 Гротендика топология 2:780  
 Гротендика функтор 2:779  
 грубая система 4:692  
 груды и полугруды 2:844  
 групп категория 1:506  
 групп многообразие 5:399  
 группа 2:781  
 группа без кручения 2:791  
 группа с однозначным извлечением корня 2:790  
 группа с условием конечности 2:790  
 группа с условием максимальности 2:790  
 группа с условием минимальности 2:790  
 группа типа  $p^\infty$  2:788  
 $n$ -группа 3:872  
 $p$ -группа 4:58  
 групповая алгебра 2:784  
 групповая алгебра (локально бикомпактной группы) 2:785  
 групповая скорость 2:789  
 групповая схема 2:788  
 групповое исчисление 2:785  
 групповой объект 2:787  
 группоид 2:791  
 Гука закон 2:927  
 Гурвица критерий 2:934  
 Гурвица теорема 2:934  
 Гурвица формула 2:934  
 Гурса задача 2:741  
 Гурса конгруэнция 2:741  
 Гюйгенса принцип 2:935

## Д

д'Аламбера оператор 2:5  
 д'Аламбера признак 2:4  
 д'Аламбера принцип 2:6  
 д'Аламбера уравнение 2:4  
 д'Аламбера формула 2:4

д'Аламбера - Лагранжа принцип 2:5  
 д'Аламбера - Эйлера условия 2:4  
 Данделена шары 2:6  
 Данжуа интеграл 2:43  
 Данжуа теорема о производных числах 2:44



Данжуа - Лузина теорема 2:43  
 Даниеля интеграл 2:7  
 Дантово пространство 2:7  
 Дарбу вектор 2:11  
 Дарбу инварианты сети 2:8  
 Дарбу квадрака 2:8  
 Дарбу поверхности 2:10  
 Дарбу сумма 2:9  
 Дарбу тензор 2:10  
 Дарбу теорема 2:11  
 Дарбу трехгранник 2:11  
 Дарбу уравнение 2:8  
 Дарвина - Фаулера метод 2:11  
 дверное пространство 2:279  
 движение 3:836  
 движений группа 2:788  
 двоеточие 1:660  
 двоичная единица 1:365  
 двоичная система счисления 1:362  
 двоичный дисконтинуум 2:303  
 двойная плоскость 2:283  
 двойная последовательность 2:284  
 двойная точка 2:284  
 двойного отрицания закон 2:282  
 двойного слоя потенциал 2:280  
 двойное отношение 1:890  
 двойной интеграл 2:280  
 двойной модуль 2:282  
 двойной предел 2:281  
 двойной ряд 2:285  
 двойные и дуальные числа 2:279  
 двойственная категория 2:289  
 двойственности принцип 2:299  
 двойственность 2:291  
 S - двойственность 4:703  
 двойственные функции 2:290  
 двойственный базис 2:289  
 двоякокруговая область 2:276  
 двоякопериодическая функция 2:283  
 двугранный угол 2:177  
 двухжидкостная модель плазмы 5:300  
 двузначная логика 5:304  
 двумерная клетка 5:293  
 двумерное кольцо 5:293  
 двумерное многообразие 5:294  
 двумерное многообразие ограниченной кривизны 5:297  
 двумерные задачи в механике разрушения 5:298

двумерный узел 5:293  
 двуполостный гиперболоид 5:302  
 двустороннее Борелевское множество класса  $\alpha$  1:405  
 двусторонняя оценка 5:302  
 двусторонняя поверхность 5:303  
 двуугольник 2:177  
 двух констант теорема 5:292  
 двух тел задача 5:292  
 двухточечный тензор 5:302  
 двучленное сравнение 5:303  
 двучленное уравнение 5:304  
 Дебаевская длина 2:16  
 девиатор 2:68  
 девяти точек окружность 3:914  
 Дедекинда дзета - функция 2:22  
 Дедекинда признак 2:21  
 Дедекинда теорема 2:22  
 Дедекиндова решетка 2:21  
 Дедекиндово кольцо 2:21  
 Дедекиндово сечение 2:21  
 дедукции теорема 2:22  
 Дезарга предложение 2:56  
 Дезаргова геометрия 2:56  
 дезориентирующий путь 2:64  
 действие 1:31  
 действие группы на многообразии 1:32  
 действительная функция 4:511  
 действительное алгебраическое многообразие 4:508  
 действительное число 4:511  
 Декарта теорема 2:58  
 Декартов квадрат 1:488  
 Декартов лист 2:505  
 Декартов овал 2:57  
 Декартова прямоугольная система координат 1:488  
 Декартово произведение 1:488  
 Декартово разложение 1:488  
 Декартовы координаты 1:488  
 декодирование 2:19  
 дележ 4:801  
 деление 2:268  
 деления круга многочлен 1:925  
 $p$  - делимая группа 4:57  
 делимости признак 2:267  
 делимость в кольце 2:267  
 делителей проблемы 2:273  
 делителей число 3:1004  
 делитель 2:269

- делитель единицы 5:337  
 делитель нуля 5:539  
 дельта амплитуды 2:40  
 дельта - функции метод 2:40  
 дельта - функция 2:40  
 Демулена поверхность 2:41  
 Демулена теорема 2:41  
 Демулена четырехугольник 2:41  
 Дена лемма 2:39  
 дендрит 2:41  
 денотат 2:44  
 денумерант 2:49  
 де Рама кручение 2:16  
 дерево 5:265  
 дескриптивная теория множеств 2:59  
 десятичная дробь 2:18  
 десятичная система счисления 2:18  
 десятичное приближение действительного числа 2:17  
 детерминантное многообразие 2:66  
 дефект 2:23  
 дефект треугольника 5:268  
 дефектное значение 2:23  
 дефектное подпространство 2:23  
 дефинизирующий оператор 2:24  
 дефинитное ядро 2:25  
 деформаций тензор 2:32  
 деформационный ретракт 2:32  
 деформация 2:25  
 дециль 2:17  
 Джекобсона кольцо 3:222  
 Джекобсона радикал 3:222  
 Джексона неравенство 3:209  
 Джексона сингулярный интеграл 3:210  
 Джексона теорема 3:210  
 Дженкинса теорема 3:223  
 Джини средняя разность 2:730  
 дзета - функция 5:541  
 диагонализированная алгебраическая группа 2:70  
 диагональ 2:68  
 диагональная группа 2:68  
 диагональная матрица 2:68  
 диагональная подгруппа 2:70  
 диагональная цепная дробь 2:68  
 диагонально клеточный оператор 1:377  
 диагональное кольцо 2:70  
 диагональное произведение 2:70  
 диагональный оператор 2:68  
 диагональный процесс 2:69  
 диаграмма 2:71  
 диаграммная приводимость 2:73  
 диада 2:303  
 диадический бикомпакт 2:303  
 диадическое пространство 2:304  
 диаметр 2:73  
 дивергенция 2:265  
 дивизор 2:269  
 дивизориальный идеал 2:275  
 дизная норма 4:802  
 дизная форма 4:801  
 дизъюнктивная нормальная форма 2:242  
 дизъюнктивная сумма 2:243  
 дизъюнктивное дополнение 2:242  
 дизъюнктивное семейство множеств 2:242  
 дизъюнктивные представления 2:243  
 дизъюнктивные элементы 2:242  
 дизъюнкция 2:242  
 дикая сфера 5:511  
 дикий узел 5:510  
 дикое вложение 5:510  
 Диксона группа 2:74  
 Диксона инвариант 2:74  
 дилатация 2:177  
 динамика 2:312  
 динамика сорбции 2:314  
 динамическая игра 2:304  
 динамическая система 2:309  
 динамические задачи теории упругости 2:304  
 динамическое программирование 2:307  
 Дини признак 2:188  
 Дини теорема 2:189  
 Дини - Липшица признак 2:188  
 Дионстра та квадратриса 2:189  
 Диофантов анализ 2:189  
 Диофантов предикат 2:201  
 Диофантова геометрия 2:198  
 Диофантово множество 2:201  
 Диофантовы приближения 2:191  
 Диофантовы проблемы аддитивного типа 2:201  
 Диофантовы уравнения 2:195  
 Диофантовых приближений метрическая теория 2:189  
 Диофантовых приближений проблемы эффективизации 2:190  
 Диофантовых уравнений проблема разрешимости 2:197  
 Дирака дельта - функция 2:202



## 910 俄文索引

- Дирака матрицы 2:204  
 Дирака спинор 2:204  
 Дирака уравнение 2:202  
 директриса 2:208  
 Дирихле вариационная задача 2:220  
 Дирихле задача 2:215  
 Дирихле интеграл 2:211  
 Дирихле признак 2:210  
 Дирихле принцип 2:214  
 Дирихле принцип (ящиков) 2:208  
 Дирихле разрывный множитель 2:210  
 Дирихле распределение 2:210  
 Дирихле ряд 2:217; 2:219  
 Дирихле теорема 2:219  
 Дирихле формула 2:210  
 Дирихле функция 2:210  
 Дирихле  $L$ -функция 2:212  
 Дирихле характер 2:208  
 Дирихле ядро 2:211  
 диск в топологии 2:221  
 дискрепанс 2:223  
 дискрепанс аппроксимации 2:224  
 дискретная группа преобразований 2:226  
 дискретная мера 2:228  
 дискретная подгруппа 2:230  
 дискретная серия представлений 2:229  
 дискретная топология 2:233  
 дискретного нормирования кольцо 2:234  
 дискретное нормирование 2:228  
 дискретное программирование 2:228  
 дискретное пространство 2:230  
 дискретное пространство-время 2:230  
 дискретное распределение 2:225  
 дискретное семейство множеств 2:226  
 дискретные системы в статистической механике 2:233  
 дискретный анализ 2:224  
 дискриминант 2:236  
 дискриминантная кривая 2:240  
 дискриминантная функция 2:241  
 дискриминантный анализ 2:238  
 дискриминантный информант 2:241  
 дискриминантный тензор 2:242  
 дисперсии точка 2:248  
 дисперсионное отношение 2:249  
 дисперсионное соотношение 2:249  
 дисперсионное уравнение 2:247  
 дисперсионный анализ 2:244  
 дисперсионный метод 2:248  
 дисперсия 2:243  
 дисперсное пространство 2:249  
 диссипативная система 2:251  
 диссипативная функция 2:249  
 диссипативный оператор 2:250  
 дистальная динамическая система 2:251  
 дистрибутивная квазигруппа 2:264  
 дистрибутивная решетка 2:263  
 дистрибутивность 2:264  
 дифракции математическая теория 2:172  
 диффеоморфизм 2:75  
 $Y$ -диффеоморфизм 5:527  
 дифференциал 2:92  
 дифференциал на Римановой поверхности 2:163  
 дифференциалов модуль 2:51  
 дифференциальная алгебра 2:95  
 дифференциальная геометрия 2:152  
 дифференциальная геометрия многообразий 2:157  
 дифференциальная группа 2:160  
 дифференциальная окрестность 2:163  
 дифференциальная топология 2:169  
 дифференциальная форма 2:143  
 дифференциальная энтропия 2:105  
 дифференциальное включение 2:160  
 дифференциальное исчисление 2:99  
 дифференциальное исчисление на аналитических пространствах 2:104  
 дифференциальное кольцо 2:169  
 дифференциальное неравенство 2:161  
 дифференциальное поле 2:143  
 дифференциальное уравнение абстрактное 2:105  
 дифференциальное уравнение в полных дифференциалах 2:132  
 дифференциальное уравнение обыкновенное 2:106  
 дифференциальное уравнение обыкновенное; приближенные методы решения 2:135  
 дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом 2:138  
 дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом 2:139  
 дифференциально-геометрическая структура 2:151  
 дифференциальное уравнение с частными производными 2:111  
 дифференциальное уравнение с частными производными, вариационные методы решения 2:130  
 дифференциальное уравнение с частными производными,

- задача с данными на характеристиках 2:118
- дифференциальное уравнение с частными производными,  
задача с косой (наклонной) производной 2:126
- дифференциальное уравнение с частными производными,  
задача с разрывными коэффициентами 2:119
- дифференциальное уравнение с частными производными,  
задача с разрывными начальными (краевыми) условиями 2:120
- дифференциальное уравнение с частными производными,  
задача со свободными границами 2:122
- дифференциальное уравнение с частными производными,  
метод уравнений Фишера - Рисса, метод Пиконе 2:121
- дифференциальное уравнение с частными производными,  
методы комплексного переменного 2:114
- дифференциальное уравнение с частными производными,  
функциональные методы решения 2:123
- дифференциальное уравнение с частными производными  
второго порядка 2:129
- дифференциальное уравнение с частными производными  
первого порядка 2:127
- дифференциальное уравнение с частными производными  
с особенностями в коэффициентах 2:131
- дифференциально - разностное уравнение 2:105
- дифференциально - функциональное уравнение 2:147
- дифференциальные игры 2:147
- дифференциальные уравнения: система бесконечного порядка 2:133
- дифференциальные уравнения с малым параметром при производных 2:141
- дифференциальные уравнения на торе 2:134
- дифференциальный бином 2:98
- дифференциальный инвариант 2:162
- дифференциальный комитант 2:105
- дифференциальный оператор 2:165
- дифференциальный оператор модуля 2:167
- дифференциальный параметр 2:168
- дифференцирование 2:170
- дифференцирование в силу системы 2:170
- дифференцирование кольца 2:49
- дифференцирование отображения 2:171
- дифференцирование по сети 5:460
- дифференцирование численное 2:170
- дифференцируемая функция 2:90
- дифференцируемое многообразие 2:90
- дифференцируемости класс 1:597
- дифференцируемость решений дифференциальных уравнений 2:89
- дифференцируемый вектор 2:92
- диффузии уравнение 2:174
- диффузионное приближение 2:174
- диффузионные методы 2:175
- диффузионный процесс 2:175
- дихотомия 2:73
- диэдра группа 2:177
- длина 3:388
- длина частично упорядоченного множества 3:389
- длины и площади принцип 3:388
- доверительная вероятность 1:741
- доверительная граница 1:740
- доверительное множество 1:741
- доверительное оценивание 1:740
- доверительный интервал 1:741
- доверительный уровень 1:741
- додекаэдр 2:275
- додекаэдра пространство 2:275
- доказательств теория 4:348
- доказательство 4:348
- доминанта 2:277
- доминирование 2:277
- Доплера эффект 2:279
- дополнение 1:690
- дополнительная серия 1:690
- допустимое правило 4:898
- достаточная статистика 5:70
- достаточное множество функционалов 1:699
- достижимая граничная точка 1:252
- достижимая дуга границы 1:252
- достижимая подгруппа 1:252
- достоверное событие 1:540
- достоверность 1:540
- доупорядочиваемая группа 4:283
- древовидное многообразие 2:41
- дрейфовые уравнения 2:287
- дробная доля 2:547
- дробная конгруэнция 2:544
- дробная размерность 2:542
- дробная степень 2:547
- дробное интегрирование и дифференцирование 2:544
- дробно - линейная функция 2:545
- дробно - линейное отображение 2:545
- дробно - рациональная функция 2:548
- дробный идеал 2:544
- дробных шагов метод 2:548
- дробовой эффект 4:816



дробь 2:543  
 дружественные числа 1:149  
 дуальная алгебра 2:289  
 дуальная пара 2:290  
 дублет 2:287  
 дубль Римановой поверхности 2:282  
 дуга 1:218  
 дуга без контакта 1:218  
 Дугласа задача 2:287  
 Дурфинга уравнение 2:300

Евклида алгоритм 2:394  
 Евклида теорема о простых числах 2:395  
 Евклидова геометрия 2:395  
 Евклидова связность 2:394  
 Евклидово кольцо 2:395  
 Евклидово поле 2:395  
 Евклидово пространство 2:395  
 Егорова система поверхностей 2:321  
 Егорова теорема 2:322  
 единица 5:337

Жане теорема 3:222  
 Жегалкина алгебра 5:549  
 жезл 3:523  
 желоб 5:283  
 Жергонна точка 2:727  
 жесткая дифференциальная система 4:1039  
 жесткое аналитическое пространство 4:667  
 жесткость 4:668  
 Жиро условия 2:730  
 Жордана кривая 3:229  
 Жордана лемма 3:231  
 Жордана мера 3:232

зависящий от параметров интеграл 4:84  
 замена базы 1:313  
 замкнутая геодезическая 1:608  
 замкнутая категория 1:607  
 замкнутая подсхема 1:611  
 замкнутая система элементов, замкнутая система функ-

Дынкина диаграмма 2:314  
 дуэль 2:300  
 Дьедонне модуль 2:75  
 Дюамеля интеграл 2:301  
 Дюбуа - Реймона лемма 2:288  
 Дюбуа - Реймона признак 2:288  
 Дюбуа - Реймона теорема 2:288  
 Дюпена индикатриса 2:302  
 Дюпена теорема 2:302  
 Дюпена циклида 2:301

## Е

единичное представление 5:337  
 единичный вектор 5:337  
 единственности множество 5:336  
 единственности свойства аналитических функции 5:334  
 единые теории поля 5:319  
 емкостный потенциал 1:468  
 емкость 1:466  
 Ермакова признак 2:386  
 естественно упорядоченный группоид 3:876  
 естественный логический вывод 3:874

## Ж

Жордана признак 3:229  
 Жордана разложение 3:229  
 Жордана теорема 3:232  
 Жордана - Гёльдера теорема 3:230  
 Жорданова дуга 3:228  
 Жорданова матрица 3:231  
 Жорданова нормальная форма 3:232  
 Жуковского теорема 5:550  
 Жуковского функция 5:549  
 Жулия множество 3:233  
 Журдена принцип 3:233  
 Жюлиа теорема 3:234

## З

ций 1:611  
 замкнутая формула 1:608  
 замкнутое многообразие 1:610  
 замкнутое множество 1:611  
 замкнутое отображение 1:610  
 $H$ -замкнутое пространство 2:793

замкнутый график (теорема о замкнутом графике)  
1:609  
замкнутый оператор 1:610  
замкнутых классов система 5:120  
замыкание вычислительного алгоритма 1:613  
замыкание множества 1:613  
замыкания отношение 1:613  
замыкания условие 1:612  
запаздывающих потенциалов метод 4:612  
запятая 4:201  
Зариского касательное пространство 5:535  
Зариского теорема 5:535  
Зариского топология 5:536  
заряд 1:564  
заузленная сфера 3:279  
зацепления коэффициент 3:516  
звезда элемента функции 4:982  
звездное тело 4:981  
звездной астрономии математические задачи 4:1032  
звздообразная область 4:981  
звздообразная функция 4:982  
звздообразности граница 3:446  
Зейделя метод 4:742

Ивасава разложение 3:208  
Иверсена теорема 3:207  
игр теория 2:634  
игра на выживание 2:630  
игра на графе 2:631  
игра на единичном квадрате 2:631  
игра с выбором момента времени 2:630  
игра с иерархической структурой 2:632  
игровая ситуация 2:632  
игрок 4:182  
идеал 3:1  
Т-идеал 5:126  
идеальная точка 3:4  
идеальное число 3:3  
идеальный ряд 3:4  
идель 3:4  
идемпотент 3:5  
идемпотентов полугруппа 3:5  
Иенсена неравенство 3:225  
Иенсена формула 3:224  
иерархия 2:862

Зейферта матрица 4:744  
Зейферта многообразие 4:744  
Зейферта расслоение 4:743  
Зенона парадокс 5:537  
Зигеля метод 4:817  
Зигеля область 4:816  
Зигеля теорема 4:818  
Зигмунда класс функций 5:551  
змеевидный континуум 4:885  
знаки математические 3:660  
знаков критерий 4:820  
знакопеременная группа 1:144  
знакопеременяющийся ряд 1:144  
знаменатель 2:44  
значащая цифра 4:823  
значимости критерий 4:822  
значимости уровень 4:821  
золотое сечение 2:738  
Зоммерфельда интеграл 4:897  
Зоммерфельда условия излучения 4:897  
зональные сферические функции 5:550  
зоноэды 5:551

## И

избыток треугольника 2:414  
избыточность 4:533  
извивание кривой 5:91  
изгибание 2:30  
изгибание на главном основании 2:31  
излома точка 1:445  
излучения условия 4:466  
измельчение 4:535  
измеримая функция 3:697  
измеримое множество 3:698  
измеримое отображение 3:697  
измеримое пространство 3:698  
измеримое разбиение 3:696  
измеримый поток 3:697  
изображений метод 3:611  
изогения 3:186  
изогональная траектория 3:187  
изогоны и изоэды 3:187  
изоклина 3:185  
изолированная особая точка 3:187  
изолированная подгруппа 3:188



- изолированная точка 3:187
- изоль 3:187
- изометрический оператор 3:192
- изометрическое отображение 3:192
- изометрическое погружение 3:188
- изометричные поверхности 3:193
- изоморфизм 3:193
- изоморфизма проблема 3:193
- изооптическая кривая 3:185
- изопериметрическая задача 3:198
- изопериметрическое неравенство 3:194
- изопериметрическое неравенство классическое 3:197
- изотермическая поверхность 3:199
- изотермическая сеть 3:199
- изотермические координаты 3:198
- изотонное отображение 3:199
- изотопия 3:199 ; 3:200
- изотропии группа 3:201
- изотропии представление 3:201
- изотропная конгруэнция 3:201
- изотропный вектор 3:201
- икосаэдр 3:1
- икосаэдра пространство 3:1
- иммунное множество 3:21
- импликативная нормальная форма 3:22
- импликативное пропозициональное исчисление 3:22
- импликация 3:22
- импримитивная группа 3:25
- имя 3:872
- инвариант 3:157
- Argf - инвариант 1:225
- инвариантная мера 3:160
- инвариантная метрика 3:162
- инвариантная подгруппа 3:165
- инвариантная статистика 3:165
- инвариантное вложение 3:159
- инвариантное интегрирование 3:160
- инвариантное множество 3:164
- инвариантное подмножество 3:165
- инвариантное подпространство 3:166
- инвариантное подпространство представления 3:166
- инвариантное среднее 3:158
- инвариантности принцип 3:156
- инвариантность статистической процедуры 3:156
- инвариантный дифференциальный оператор 3:159
- инвариантный критерий 3:166
- инвариантный объект 3:163
- инвариантов теория 3:166
- инверсия 3:172
- инверсия в комбинаторике 3:172
- инверсная полугруппа 3:175
- инволютивное подразообразие 5:69
- инволютивное распределение 3:180
- инволюционная система 3:179
- инволюция 3:177
- индекс 3:38
- индекс оператора 3:43
- индекса формулы 3:39
- индефинитная метрика 3:35
- индивидуальная константа 3:44
- индивидуальная переменная 3:44
- индивидуальная эргодическая теорема 3:44
- индуктивная размерность 3:47
- индуктивное определение 3:47
- индуктивный предел 3:47
- индукции аксиома 3:46
- индуцированное представление 3:45
- индуцированное расслоение 3:44
- инертное простое число 3:50
- инерциальная система отсчёта 3:50
- инерции закон 3:362
- инициальное множество 3:82
- интеграл 3:87
- интеграл вероятности 4:309
- интеграл дифференциального уравнения 3:111
- интеграл по траекториям 3:113
- A - интеграл 1:1
- интегралы в инволюции 3:122
- интегральная воронка 3:104
- интегральная геометрия 3:104
- интегральная кривая 3:93
- интегральная поверхность 3:120
- интегральная показательная функция 3:103
- интегральная сумма 3:120
- интегральное исчисление 3:89
- интегральное многообразие 3:110
- интегральное представление аналитической функции 3:116
- интегральное преобразование 3:120
- интегральное уравнение 3:94
- интегральное уравнение с симметричным ядром 3:99
- интегральное уравнение типа свертки 3:96
- интегральное уравнение, численные методы решения 3:101

- интегральной разделенности условие 3:119
- интегральный автоморфизм 3:89
- интегральный гиперболический косинус 3:108
- интегральный гиперболический синус 3:109
- интегральный инвариант 3:109
- интегральный косинус 3:93
- интегральный логарифм 3:110
- интегральный оператор 3:112
- интегральный синус 3:119
- интегральных преобразований метод 3:122
- интегральных соотношений метод 3:115
- интегрирование 3:123
- интегрирование дифференциальных уравнений в замкнутой форме 3:124
- интегрирование на многообразии 3:125
- интегрирование по частям 3:123
- интегрирование подстановкой 3:124
- интегрирование численное 3:124
- интегрируемая система 3:86
- интегрируемая функция 3:86
- интегрируемое представление 3:86
- интегрирующий множитель 3:123
- интегро - дифференциальное уравнение 3:126
- интервал 3:149
- интервал и сегмент 3:150
- интервал сходимости 1:837
- интервальная оценка 3:151
- интервальный анализ 3:150
- интерквантильная широта 3:127
- интерполирование 3:133
- интерполирование в вычислительной математике 3:137
- интерполирование операторов 3:140
- интерполяционная формула 3:135
- интерполяционный процесс 3:143
- интерполяционный сплайн 3:144
- интерпретация 3:145
- интуиционизм 3:151
- интуиционистская логика 3:155
- интуиционистское арифметическое исчисление 3:155
- интуиционистское исчисление высказываний 3:155
- интуиционистское исчисление предикатов 3:155
- инфинитезимальная связность 3:65
- инфинитезимальная структура 3:66
- инфинитезимальный оператор 3:66
- информант 3:69
- информации количество 3:72
- информации передача 3:78
- информации скорость передачи 3:81
- информации теория 3:77
- информационная матрица 3:74
- информационное множество 3:75
- информационное расстояние 3:72
- информационный коэффициент корреляции 3:72
- информация 3:70
- инфрабочечное пространство 3:81
- инициальное множество 3:82
- инцидентности коэффициент 3:28
- инцидентности система 3:29
- инцидентность 3:28
- инъективный модуль 3:82
- инъективный объект 3:83
- инъекция 3:82
- Иоакимсталя поверхность 3:226
- иррациональное число 3:180
- иррациональности мера 3:705
- иррегулярная граничная точка 3:183
- иррегулярная особая точка 3:184
- иррегулярное простое число 3:183
- иррегулярность 3:185
- искажения теоремы 2:252
- исключения теория 2:339
- исключенного третьего закон 3:365
- исключительное аналитическое множество 2:411
- исключительное значение 2:413
- исключительное подмногообразие 2:412
- испытание 5:150
- исследование операций 3:1023
- истинностная таблица 5:284
- истинностное значение 5:285
- истинный цикл 4:350
- источник векторного поля 5:414
- источник сообщений 3:76
- исчезающий цикл 5:371
- исчерпание области 2:416
- исчерпывания метод 2:416
- исчисление 1:455
- $\lambda$ -исчисление 3:310
- итерационные методы 3:204
- итерационный алгоритм 3:203
- итерация 3:202
- итерированное ядро 3:202
- Ито процесс 3:207
- Ито формула 3:206



Йетса поправка 5:531

Йорданова алгебра 3:227

## К

Кавагути пространство 3:248

Кавальери принцип 1:527

Казимира элемент 1:498

кактоид 1:455

Какутани теорема 3:247

калибр 1:457

кальдерона - Зигмунда оператор 1:457

камера 1:543

канал без памяти 3:710

канал Гауссовский 2:661

канал многосторонний 1:545

канал с конечной памятью 1:543

канал с конечным числом состояний 1:544

канал с обратной связью 1:544

канал связи 1:669

канал связи квантовый 4:405

канал симметричный 5:96

канала пропускная способность 5:255

каналовая поверхность 1:459

каноническая корреляция 1:460

каноническая кривая 1:460

канонические коэффициенты корреляции 1:460

канонические разрезы 1:462

канонический класс 1:460

каноническое множество 1:462

каноническое погружение 1:461

каноническое произведение 1:461

Кантора аксиома 1:462

Кантора парадокс 1:464

Кантора теорема 1:465

Канторов дисконтинуум 1:463

Канторова кривая 1:463

Канторовича процесс 3:247

Канторово многообразие 1:463

Канторово множество 1:464

каша 3:248

Каратеодори класс 1:468

Каратеодори мера 1:470

Каратеодори область 1:469

Каратеодори теорема 1:470

Каратеодори - Фейера задача 1:469

Кардано формула 1:471

кардинальное число 1:474

кардиоида 1:475

Карлемана граничная задача 1:476

Карлемана неравенство 1:478

Карлемана теорема 1:477

Карлемана ядро 1:476

Карлесона множество 1:478

Карлесона теорема 1:478

Карлсона метод 1:479

Карлсона неравенство 1:478

Карнапа правило 1:479

Карно теорема 1:479

Карсона преобразование 1:480

карта 1:565

Картана лемма 1:480

Картана матрица 1:480

Картана метод внешних форм 1:481

Картана подалгебра 1:484

Картана подгруппа 1:485

Картана разложение 1:480

Картана теорема 1:486

Картана - Вейля базис 1:487

Картера подгруппа 1:487

картографии математические задачи 1:493

картографическая проекция 1:489

касание 5:129

касательная 5:132

касательная плоскость 5:133

касательное преобразование 5:135

касательное расслоение 5:130

касательный конус 5:131

касательный поток 5:132

касательный пучок 5:133

касательных индикатриса 3:44

каскад 1:497

каскадный метод 1:497

касп 1:915

Кассини овал 1:498

Каталана поверхность 1:499

категоричная система аксиом 1:499

категоричность в мощности  $\kappa$  1:499

категория 1:500

категория множества 1:506

категория с инволюцией 1:506

категория (в смысле Люстерника - Шнирельмана) 1:505  
 катеноид 1:507  
 катет 1:507  
 каустика 1:526  
 Кац - Муди алгебра 3:242  
 качественная теория дифференциальных уравнений 4:395;  
 4:400  
 квадрант 4:379  
 квадрат 4:959  
 квадратическая иррациональность 4:388  
 квадратичная ошибка 4:381  
 квадратичная форма 4:382  
 квадратичное отклонение 4:379  
 квадратичное поле 4:381  
 квадратичное программирование 4:389  
 квадратичное среднее 4:389  
 квадратичные формы поверхности 2:612; 4:390  
 квадратичный вычет 4:390  
 квадратичный дифференциал 4:379  
 квадратичный закон взаимности 4:389  
 квадратичных форм приведение 4:386  
 квадратного корня метод 4:959  
 квадратное уравнение 4:380  
 квадратура 4:390  
 квадратура круга 4:393  
 квадратурная формула 4:390  
 квадратурных сумм метод 4:393  
 квадрата 4:394  
 квадратуемость 4:959  
 квазиабелева функция 4:417  
 квазианалитический класс 4:417  
 квазиаффинная схема 4:417  
 квазигеодезическая линия 4:428  
 квазигиперболическое пространство 4:431  
 квазигруппа 4:429  
 квазидискретный спектр 4:425  
 квазидиэдральная группа 4:425  
 квазиевклидово пространство 4:427  
 квазиинвариантная мера 4:432  
 квазиинформационное расширение 4:432  
 квазиклассическое приближение 4:420; 4:751  
 квазикогерентный пучок 4:420  
 квазикompактное пространство 4:421  
 квазиконформное отображение 4:421  
 квазилинеаризация 4:436  
 квазилинейное уравнение 4:433

квазилинейные гиперболические уравнения и системы  
 4:433  
 квазимногообразие 4:443  
 квазинорма 4:437  
 квазинормальное пространство 4:437  
 квазинормированное пространство 4:437  
 квазипериодическая функция 4:438  
 квазипериодическое движение 4:438  
 квазипроективная схема 4:439  
 квазипростое представление 4:440  
 квазипростое число 4:439  
 квазиравномерная сходимость 4:442  
 квазиразложимая группа 4:442  
 квазирегулярное кольцо 4:440  
 квазирегулярный радикал 4:440  
 квазирешение 4:441  
 квазисимплектическое пространство 4:442  
 квазисредних метод 4:419  
 квазитожество 4:432  
 квазифробениусово кольцо 4:427  
 квазихарактер 4:420  
 квазициклическая группа 4:425  
 квазиэквивалентные представления 4:427  
 квазиэллиптическое пространство 4:426  
 квантиль 4:403  
 квантовая вероятность 4:412  
 квантовая теория поля 4:406  
 квантовые группы 4:410  
 квантовые случайные процессы 4:414  
 квантор 4:403  
 квартиль 4:417  
 кватернарная квадратичная форма 4:443  
 кватернарная форма 4:443  
 кватернион 4:443  
 кватернионная структура 4:445  
 кватернионов группа 4:444  
 Кёбе теорема 3:281  
 Кёбе функция 3:280  
 Келдыша теорема 3:250  
 Келдыша - Лаврентьева пример 3:249  
 Келдыша - Лаврентьева теорема 3:250  
 Келлога теорема 3:251  
 Келлога - Эванса теорема 3:251  
 Кельвина преобразование 3:252  
 Кельвина функции 3:251  
 Кендалла коэффициент ранговой корреляции 3:253  
 Кёнига теорема 3:288



- Кеплера уравнение 3:253  
 Кервера инвариант 3:256  
 Кервера - Милнора инвариант 3:257  
 керифункция 3:253  
 Керра метрика 3:256  
 кибернетика 1:917  
 Киллинга вектор 3:260  
 Киллинга форма 3:259  
 кинетическое уравнение 3:260  
 Кирхгофа метод 3:263  
 Кирхгофа формула 3:261  
 китайская теорема об остатках 1:584  
 класс 1:594  
 классифицирующее пространство 1:603  
 классическая группа 1:600  
 классически полупростое кольцо 1:603  
 классические комбинаторные задачи 1:598  
 классические ортогональные многочлены 1:602  
 классической небесной механики математические задачи 1:597  
 класс 1:594  
 классов дивизоров группа 2:272  
 классов исчисление 1:456  
 Клебша условие 1:604  
 Клейна интерпретация 3:265  
 Клейна координаты 3:264  
 Клейна поверхность 3:265  
 Клейна пространство 3:265  
 Клейна - Гордона уравнение 3:264  
 Клейнова группа 3:266  
 Клеро уравнение 1:593  
 клеточное отображение 1:532  
 клеточное пространство 1:532  
 клеточное разбиение, CW-комплекс 1:916  
 клеточный комплекс 1:531  
 клин 5:463  
 Клини - Мостовского классификация 3:263  
 Клиффорда алгебра 1:605  
 Клиффорда параллель 1:606  
 Клиффорда теорема 1:607  
 Клиффордова полугруппа 1:606  
 клон 1:607  
 клотоида 1:614  
 Кнастера континуум 3:268  
 Кнезера теорема 3:268  
 Кнезера - Титса гипотеза 3:269  
 Кнопша метод суммирования 3:269  
 коалгебра 1:617  
 коалиционная игра 1:621  
 коалиция 1:621  
 кобазис 1:618  
 Кобол 1:621  
 кобордизм 1:622  
 $h$ -кобордизм 2:793  
 ковариант 1:875  
 ковариантная производная 1:876  
 ковариантное дифференцирование 1:876  
 ковариантный вектор 1:878  
 ковариантный дифференциал 1:876  
 ковариантный тензор 1:878  
 ковариационная матрица 1:874  
 ковариационный анализ 1:874  
 ковариация 1:874  
 ковариация числа решений 1:875  
 когерентное кольцо 1:641  
 когерентные состояния 1:642  
 когерентные числа 1:641  
 когерентный алгебраический пучок 1:640  
 когерентный аналитический пучок 1:640  
 когерентный пучок 1:641  
 когомологии 1:643  
 когомологии алгебр 1:646  
 когомологии алгебр Ли 1:651  
 когомологии Банаховых алгебр 1:649  
 когомологии групп 1:649  
 когомологии комплекса 1:646  
 когомологий группа 1:645  
 когомологий кольцо 1:657  
 когомологическая операция 1:653  
 когомологическая последовательность 1:657  
 когомологическая размерность 1:642  
 когомологический функтор 1:645  
 когомологическое многообразие 1:646  
 когомоторическая группа 1:657  
 код 1:628  
 код с исправлением арифметических ошибок 1:628  
 код с исправлением выпадений и вставок 1:629  
 код с исправлением ошибок 2:387  
 Кодайры размерность 3:279  
 Кодайры теорема 3:280  
 кодирование алфавитное 1:630  
 кодирование и декодирование 1:631  
 коевклидово пространство 1:618  
 Козюля комплекс 3:291

- Кокстера группа 1:883  
 колебание функции 4:46  
 колебаний теория 4:46  
 колеблющееся решение 4:46  
 колец многообразие 5:401  
 коллинеарные векторы 1:658  
 коллинеация 1:658  
 коллокации метод 1:659  
 Колмогорова аксиома 3:282  
 Колмогорова двойственность 3:282  
 Колмогорова интеграл 3:286  
 Колмогорова критерий 3:287  
 Колмогорова неравенство 3:284  
 Колмогорова пространство 3:287  
 Колмогорова уравнение 3:284  
 Колмогорова - Селиверстова теорема 3:286  
 Колмогорова - Смирнова критерий 3:286  
 Колмогорова - Чепмена уравнение 3:282  
 колоколообразная игра 1:322  
 кольца и алгебры 4:673  
 кольцевая граница 1:410  
 кольцевая область 1:185  
 кольцо 4:669  
 $\lambda$ -кольцо 3:312  
 кольцо с делением 4:671  
 кольцо свободных идеалов 2:568  
 кольцоид 4:672  
 комбинаторика 1:667  
 комбинаторная геометрия 1:665; 1:666  
 комбинаторная логика 1:667  
 комбинаторная математика 1:666  
 комбинаторная топология 1:666  
 комбинаторный анализ 1:661  
 комитант 1:668  
 коммутант группы 1:676  
 коммутативная алгебра 1:671  
 коммутативная Банахова алгебра 1:673  
 коммутативная группа 1:675  
 коммутативная групповая схема 1:675  
 коммутативное кольцо 1:676  
 коммутативность 1:676  
 коммутатор 1:676  
 коммутационных и антикоммутационных соотношений  
     представление 1:670  
 компакт 1:686  
 компактная группа 1:677  
 компактное множество 1:679  
 компактное пространство 1:682  
 компактной сходимости топология 5:221  
 компактности принцип 1:686  
 компактность 1:685  
 компактный оператор 1:679  
 компактный элемент решетки 1:678  
 компланарные векторы 1:619  
 комплекс 1:706  
 комплекс гомологической алгебры 1:710  
 комплекс прямых 1:715  
 комплексификация алгебры Ли 1:718  
 комплексификация векторного пространства 1:718  
 комплексификация группы Ли 1:718  
 комплексная структура 1:716  
 комплексного интегрирования метод 1:711  
 комплексное многообразие 1:713  
 комплексное пространство 1:715  
 комплексное число 1:713  
 комплексный тор 1:717  
 композит 1:724  
 композиционный ряд 1:723  
 композиция 1:723  
 компонента 1:721  
 компонента вектора 1:721  
 конгруэнтность 1:764  
 конгруэнция 1:763  
 конгруэнция прямых 1:765  
 конгруэнц - подгруппа 1:766  
 конгруэнц - проблема 1:766  
 конденсации точка 1:731  
 кондуктор характера 1:737  
 кондуктор целого замыкания 1:738  
 конечная группа 2:478  
 конечная групповая схема 2:480  
 конечная математика 2:481  
 конечная разность 2:472  
 конечная Риманова поверхность 2:481  
 конечно кратное отображение 2:481  
 конечно определенная группа 2:483  
 конечно порожденная группа 2:482  
 конечное поле 2:477  
 конечной группы представление 2:479  
 конечнократное отображение 2:481  
 конечномерная ассоциативная алгебра 2:476  
 конечномерное представление 2:477  
 конечности теоремы 2:483  
 конечнострочный метод суммирования 4:697



- конечных приращений формула 2:481  
 конечных разностей исчисление 2:472  
 коника 1:767  
 коническая конструкция 3:610  
 коническая поверхность 1:769  
 коническая сеть 1:769  
 конические сечения 1:768  
 коннекс 1:780  
 коноид 1:781  
 конормаль 1:781  
 константа 1:783  
 конструктивная квантовая теория поля 1:792  
 конструктивная логика 1:787  
 конструктивная математика 1:788  
 конструктивная семантика 1:795  
 конструктивная теория функций 1:797  
 конструктивная функция действительного переменного 1:787  
 конструктивного подбора принцип 1:795  
 конструктивное действительное число 1:794  
 конструктивное исчисление высказываний 1:792  
 конструктивное метрическое пространство 1:790  
 конструктивное по Гёделю множество 2:735  
 конструктивное подмножество 1:784  
 конструктивный анализ 1:785  
 конструктивный объект 1:792  
 конструктивных моделей теория 1:792; 4:524  
 контактная структура 1:801  
 контактная схема 1:800  
 контактное преобразование 1:802  
 контактные задачи теории теплопроводности 1:799  
 контактные задачи теории упругости 1:797  
 контингенция 1:803  
 континуальный интеграл 4:109  
 континуум 1:819  
 континуума мощность 1:819  
 континуум - гипотеза 1:819  
 Конторовича - Лебедева преобразование 3:288  
 контравариантный вектор 1:826  
 контравариантный тензор 1:825  
 контрагredientное представление 1:824  
 контрагredientный автоморфизм 1:824  
 контрапозиции закон 1:825  
 контраст 1:825  
 контурного интегрирования метод 1:820; 3:719  
 конус 1:738  
 конуса условие 1:740  
 конфигурация 1:741  
 конфлюэнтный анализ 1:745  
 конфокальные кривые 1:748  
 конформная геометрия 1:751  
 конформная связность 1:748  
 конформная структура 1:758  
 конформно - геодезическая сеть 1:751  
 конформно - дифференциальная геометрия 1:750  
 конформно - Евклидово пространство 1:750  
 конформно - инвариантная метрика 1:759  
 конформное отображение 1:753  
 конформное преобразование 1:759  
 конформное пространство 1:758  
 конформный радиус 1:757  
 конформных отображений граничные свойства 1:757  
 Кон - Фоссена преобразование 1:642  
 конхоида 1:731  
 концентрации функция 1:730  
 конъюнктивная нормальная форма 1:774  
 конъюнкция 1:774  
 кооперативная игра 1:855  
 координаты 1:857  
 коприсоединенное представление 1:620  
 копроизведение 1:858  
 ко -  $H$  - пространство 1:619  
 копсевдогалилеево пространство 1:620  
 копсевдоевклидово пространство 1:619  
 коприсоединенное представление 1:620  
 коразмерность 1:630  
 корасслоение 1:638  
 корень 4:682  
 Корна неравенство 3:289  
 корневая система 4:682  
 корневой вектор 4:686  
 Корниша - Фишера разложение 1:859  
 Корню спираль 1:859  
 корректная - задача 5:481  
 коррелограмма 1:865  
 корреляции коэффициент 1:861  
 корреляционная матрица 1:864  
 корреляционная функция 1:861; 1:862  
 корреляционное отношение 1:864  
 корреляция 1:860; 1:863  
 Кортвега - де Фриса уравнение 3:289  
 кортеж 5:286  
 кос теория 1:431  
 косая производная 3:1011

косеканс 1:866  
 косинус 1:867  
 косинус амплитуды 1:867  
 косинус гиперболический 1:867  
 косинусов теорема 1:867  
 косинус - преобразование Фурье 2:528  
 космологическая постоянная 1:868  
 космологические модели 1:868  
 косое произведение 4:871  
 кососимметрическая билинейная форма 4:871  
 кососимметрическая матрица 4:871  
 кососимметрический тензор 4:872  
 котангенс 1:870  
 Котельникова интерпретация 3:292  
 Котеса формулы 1:870  
 кохлеоида 1:628  
 кощель 1:627  
 коцикл 1:628  
 Коши задача 1:519  
 Коши задача, численные методы решения для обыкновенного дифференциального уравнения 1:522  
 Коши интеграл 1:512  
 Коши интегральная теорема 1:516  
 Коши критерий 1:508  
 Коши матрица 1:518  
 Коши неравенство 1:512  
 Коши оператор 1:518  
 Коши последовательность 1:525  
 Коши признак 1:510  
 Коши распределение 1:510  
 Коши теорема 1:525  
 Коши фильтр 1:511  
 Коши характеристическая задача 1:507  
 Коши ядро 1:517  
 Коши - Адамара теорема 1:511  
 Коши - Ковалевской теорема 1:517  
 Коши - Римана условия 1:524  
 Коэна - Маколея кольцо 1:639  
 коэрцитивная краевая задача 1:636  
 коэрцитивности неравенство 1:637  
 коэффициент 1:634  
 коэффициентов проблема 1:635  
 коядро 1:658  
 Кравчука многочлены 3:292  
 краевая задача, методы комплексного переменного 1:418  
 краевая задача, численные методы решения для уравне -

ний с частными производными 1:421  
 краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения 1:423  
 краевая задача для уравнения с частными производными 1:424  
 краевая задача для эллиптического уравнения 1:419  
 краевая задача теории потенциала 1:426  
 краевые условия 1:409  
 край многообразия 1:414  
 Крамера правило 1:885  
 Крамера теорема 1:885  
 Крамера - Мизеса критерий 1:885  
 кратная последовательность 3:860  
 кратная точка 3:859  
 кратно круговая область 4:561  
 кратногармоническая функция 3:854  
 кратное 3:857  
 кратность веса 3:864  
 кратность модуля 3:863  
 кратность особой точки 3:864  
 кратный интеграл 3:858  
 кратный ряд 3:860  
 кратчайшая линия 4:816  
 креативное множество 1:886  
 Крейново пространство 3:293  
 Кремоново преобразование 1:887  
 Кремоны группа 1:886  
 кривая 1:912  
 кривизна 1:907  
 кривизны линий сеть 1:912  
 кривизны линия 1:911  
 кривизны преобразование 1:912  
 кривизны тензор 1:912  
 кривизны форма 1:911  
 криволинейный интеграл 1:913  
 Крипке модели 3:297  
 криптография 1:891  
 криптология 1:893  
 кристаллографическая группа 1:898  
 кристаллография математическая 1:900  
 Кристоффеля символ 1:588  
 Кристоффеля числа 1:587  
 Кристоффеля - Дарбу формула 1:586  
 Кристоффеля - Шварца формула 1:587  
 критерий идеал 1:888  
 критическая область 1:889  
 критическая точка 1:888



критическая функция 1:888  
 критический идеал 4:476  
 критический уровень 1:888  
 критическое значение 1:889  
 Кронекера метод 3:299  
 Кронекера символ 3:300  
 Кронекера теорема 3:300  
 Кронекера формула 3:298  
 Кронекера - Капелли теорема 3:298  
 Кронекерово произведение 3:300  
 круг 2:220  
 круг кривизны 1:591  
 круг сходимости 2:221  
 круга проблема 1:591  
 круговая симметризация 1:593  
 круговое поле 1:924  
 круговое преобразование 1:592  
 круговое расширение 1:923  
 круговой метод 1:590  
 круговые точки 1:592  
 Крулля кольцо 3:301  
 Крулля - Ремака - Шмидта теорема 3:301  
 крупных частиц метод 3:349  
 кручение 5:228  
 кручения подмодуль 5:230  
 кручения тензор 5:231  
 кручения форма 5:230  
 крыла теория 5:513  
 Крылова - Боголюбова метод усреднения 3:302  
 куб 1:903  
 кубатурная формула 1:901  
 кубика 1:903  
 кубическая гиперповерхность 1:905  
 кубическая парабола 1:906

кубическая форма 1:904  
 кубический вычет 1:906  
 кубическое уравнение 1:904  
 кубовидный континуум 1:903  
 кузена проблемы 1:872  
 Куммера гипотеза 3:304  
 Куммера поверхность 3:304  
 Куммера преобразование 3:305  
 Куммера признак 3:303  
 Куммера расширение 3:303  
 Куммера теорема 3:304  
 Курант 1:871  
 Куранта теорема 1:872  
 Куранта - Фридрихса - Леви условие 1:871  
 Куратовского график 3:308  
 Куратовского полиэдр 3:307 ; 3:308  
 Куратовского - Кнастера веер 3:307  
 кусочно линейная топология 4:163  
 Кутта - Мерсона метод 3:308  
 Кэлера метрика 3:247  
 Кэлера форма 3:245  
 Кэлера многообразие 3:245  
 Кэли алгебра 1:527  
 Кэли поверхность 1:530  
 Кэли преобразование 1:530  
 Кэли таблица 1:530  
 Кэли форма 1:528  
 Кэли число 1:530  
 Кэли - Дарбу уравнение 1:527  
 Кэли - Диксона алгебра 1:527  
 Кэли - Клейна параметры 1:529  
 Кэмпбелла - Хаусдорфа формула 1:458  
 Кюннета формула 3:305

## Л

Лаврентьева теорема 3:361  
 Лагерра многочлены 3:332  
 Лагерра преобразование 3:332  
 Лагерра уравнение 3:331  
 Лагерра формула 3:331  
 Лагерра функции 3:331  
 Лагранжа задача 3:328  
 Лагранжа интерполяционная формула 3:326  
 Лагранжа метод 3:326  
 Лагранжа множители 3:327

Лагранжа принцип 3:327  
 Лагранжа ряд 3:329  
 Лагранжа скобки 3:320  
 Лагранжа спектр 3:329  
 Лагранжа теорема 3:329  
 Лагранжа уравнение 3:320  
 Лагранжа уравнения механики 3:321  
 Лагранжа функция 3:322  
 Лагранжево многообразие 3:331  
 Лагранжиан 3:330

- лакуна 3:316
- лакунарная последовательность 3:317
- лакунарная система 3:319
- лакунарное пространство 3:318
- лакунарный ряд 3:318
- лакунарный степенной ряд 3:317
- лакунарный тригонометрический ряд 3:319
- Ламберта метод суммирования 3:334
- Ламберта преобразование 3:334
- Ламберта ряд 3:333
- Ламберта четырехугольник 3:333
- Ламе коэффициенты 3:334
- Ламе кривая 3:335
- Ламе постоянные 3:335
- Ламе уравнение 3:335
- Ламе функция 3:336
- Ландау кинетическое уравнение 3:336
- Ландау теоремы 3:337
- Ландевина уравнение 3:338
- ландшафт аналитической функции 4:578
- Лапласа вектор 3:349
- Лапласа интеграл 3:342
- Лапласа метод 3:343
- Лапласа оператор 3:343
- Лапласа последовательность 3:345
- Лапласа преобразование 3:346
- Лапласа преобразование (в геометрии) 3:348
- Лапласа распределение 3:339
- Лапласа теорема 3:345
- Лапласа уравнение 3:340
- Лапласа уравнение, численные методы решения 3:341
- Лапласа - Бельтрами уравнение 3:339
- Ларморовский радиус 3:352
- Ласкера кольцо 3:352
- Латинский квадрат 3:353
- Латинский прямоугольник 3:353
- Лебега интеграл 3:374
- Лебега константы 3:371
- Лебега мера 3:375
- Лебега метод суммирования 3:377
- Лебега множество 3:376
- Лебега неравенство 3:374
- Лебега признак 3:372
- Лебега пространство 3:376
- Лебега разложение 3:373
- Лебега размерность 3:373
- Лебега теорема 3:378
- Лебега точка 3:376
- Лебега функции 3:373
- Лебега число 3:376
- Лебега - Стильеса интеграл 3:377
- Лебеговский спектр 3:377
- Лебедева преобразование 3:371
- Лёвенгейма - Сколема теорема 3:569
- Леви каноническое представление 3:395
- Леви метрика 3:397
- Леви неравенство 3:397
- Леви проблема 3:394
- Леви условие 3:393
- Леви - Крамера теорема 3:396
- Леви - Мальцева разложение 3:393
- Леви - Прохорова метрика 3:398
- Леви - Хинчина каноническое представление 3:397
- Леви - Чивита связность 3:392
- Лёвнера метод 3:570
- Лёвнера уравнение 3:570
- Лежандра многочлены 3:383
- Лежандра преобразование 3:385
- Лежандра символ 3:384
- Лежандра теорема 3:385
- Лежандра уравнение 3:383
- Лежандра условие 3:382
- Лежандра функции 3:383
- Лежандрово многообразие 3:383
- Лейбница признак 3:386
- Лейбница ряд 3:387
- Лейбница формула 3:387
- лексикографический порядок 3:399
- лемнискатные функции 3:387
- лемнискаты 3:387
- Лере спектральная последовательность 3:391
- Лере формула 3:389
- Лефшеца двойственность 3:379
- Лефшеца теорема 3:381
- Лефшеца формула 3:379
- Лефшеца число 3:380
- лжеца парадокс 3:400
- Ли  $p$ -адическая группа 3:430
- Ли алгебр многообразие 3:420
- Ли алгебра 3:403
- Ли  $p$ -алгебра 3:433
- Ли алгебра алгебраической группы 3:413
- Ли алгебра аналитической группы 3:414
- Ли алгебраическая алгебра 3:407



- Ли Банахова группа 3:426
- Ли вполне разрешимая алгебра 3:420
- Ли вполне разрешимая группа 3:432
- Ли градуированная алгебра 3:408
- Ли группа 3:422
- Ли группа преобразований 3:436
- Ли дифференциал 3:421
- Ли дифференцирование 3:421
- Ли допустимая алгебра 3:400
- Ли квадрака 3:434
- Ли кольцо 3:435
- Ли компактная группа 3:426
- Ли линейная алгебра 3:411
- Ли локальная алгебра 3:411
- Ли локальная группа 3:428
- Ли нильалгебра 3:412
- Ли нильпотентная алгебра 3:412
- Ли нильпотентная группа 3:429
- Ли особая алгебра 3:407
- Ли полупростая алгебра 3:416
- Ли полупростая группа 3:430
- Ли производная 3:421
- Ли производная группа 3:427
- Ли разрешимая алгебра 3:419
- Ли разрешимая группа 3:431
- Ли редукируемая алгебра 3:415
- Ли свободная алгебра 3:408
- Ли скобка 3:421
- Ли теорема 3:435
- Ли тройная система 3:435
- Ли экспоненциальная алгебра 3:407
- Ли экспоненциальная группа 3:427
- Ли - Колчина теорема 3:432
- Линдберга - Феллера теорема 3:451
- Линделёфа гипотеза 3:451
- Линделёфа конструкция 3:451
- Линделёфа метод суммирования 3:453
- Линделёфа принцип 3:452
- Линделёфа пространство 3:452
- Линделёфа теорема 3:453
- Линдемана теорема 3:454
- линеаризации методы 3:513
- линейная алгебра 3:457
- линейная алгебра, численные методы 3:458
- линейная алгебраическая группа 3:462
- линейная гипотеза 3:488
- линейная группа 3:483
- линейная зависимость 3:469
- линейная интерполяция 3:491
- линейная классическая группа 3:468
- линейная краевая задача 3:466
- линейная краевая задача, численные методы решения 3:466
- линейная независимость 3:488
- линейная оболочка 3:485
- линейная оценка 3:481
- линейная регрессия 3:505
- линейная связность 3:469
- линейная система 3:506
- линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами 3:508
- линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами 3:507
- линейная топология 3:511
- линейная форма 3:481
- линейная форма от логарифмов 3:481
- линейная функция 3:482
- линейно компактный модуль 3:514
- линейно разделенные расширения 3:515
- линейно регулярный случайный процесс 3:515
- линейно связное пространство 4:108
- линейно упорядоченная группа 5:235
- линейно упорядоченное множество 5:236
- линейного представления инвариант 3:506
- линейное алгебраическое уравнение 3:460
- линейное гиперболическое уравнение и система 3:485
- линейное дифференциальное уравнение в Банаховом пространстве 3:469
- линейное дифференциальное уравнение второго порядка 3:498
- линейное дифференциальное уравнение обыкновенное 3:496
- линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами 3:500
- линейное дифференциальное уравнение с частными производными 3:503
- линейное замыкание 3:469
- линейное интегральное уравнение 3:490
- линейное многообразие 3:513
- линейное неравенство 3:489
- линейное параболическое уравнение и система 3:501
- линейное подпространство 3:506
- линейное представление 3:505
- линейное преобразование 3:511

- линейное программирование 3:503
- линейное пространство 3:506
- линейное топологическое пространство 3:511
- линейное уравнение 3:480
- линейное эллиптическое уравнение и система 3:477
- линейной независимости мера 3:489
- линейный дифференциальный оператор 3:474
- линейный метод суммирования 3:506
- линейный оператор 3:491
- линейный угол 3:465
- линейный функционал 3:482
- линейных алгебраических групп арифметическая теория 3:464
- линейчатая поверхность 4:698
- линзовое пространство 3:389
- линия 3:454
- линия второго порядка 4:737
- Линника дискретный эргодический метод 3:517
- Липшица константа 3:522
- Липшица условие 3:521
- Липшица условие интегральное 3:522
- Лисп 3:522
- листинга узел 3:523
- Литлвуда проблема 3:523
- Лиувилля нормальная форма 3:518
- Лиувилля поверхность 3:520
- Лиувилля сеть 3:518
- Лиувилля теорема 3:520
- Лиувилля уравнение 3:517
- Лиувилля функция 3:517
- Лиувилля число 3:518
- Лиувилля - Остроградского формула 3:519
- Лобатто квадратурная формула 3:529
- Лобачевского геометрия 3:524
- Лобачевского метод 3:527
- Лобачевского признак 3:524
- Лобачевского пространство 3:528
- Лобачевского функция 3:524
- логарифм 3:551
- логарифмическая бумага 3:554
- логарифмическая емкость 3:552
- логарифмическая производная 3:552
- логарифмическая спираль 3:556
- логарифмическая точка ветвления 3:552
- логарифмическая функция 3:552
- логарифмически нормальное распределение 3:553
- логарифмически субгармоническая функция 3:557
- логарифмический вычет 3:555
- логарифмический метод суммирования 3:557
- логарифмический потенциал 3:554
- логарифмический признак сходимости 3:552
- логико - математические исчисления 3:561
- логистика 3:563
- логистическое распределение 3:562
- логицизм 3:560
- логическая аксиома 3:557
- логическая матрица 3:560
- логическая операция 3:560
- логическая формула 3:559
- логическая функция 3:560
- логические исчисления 3:557
- логический закон 3:560
- логическое следствие 3:559
- локализации принцип 3:542
- локализация в коммутативной алгебре 3:541
- локализация в категориях 3:541
- локальная грубость 3:536
- локальная дифференциальная геометрия 3:531
- локальная размерность 3:532
- локальная структура траекторий 3:536
- локальная топологическая группа 3:537
- локальная униформизация 3:538
- локально бикompактное пространство 3:543
- локально выпуклая решетка 3:544
- локально выпуклая топология 3:547
- локально выпуклое пространство 3:544
- локально интегрируемая функция 3:550
- локально компактное тело 3:543
- локально конечная алгебра 3:547
- локально конечная группа 3:548
- локально конечная полугруппа 3:548
- локально конечное покрытие 3:547
- локально конечное семейство множеств 3:548
- локально линейно связное - пространство 3:551
- локально нильпотентная алгебра 3:550
- локально нильпотентная группа 3:550
- локально нормальная группа 3:550
- локально плоское вложение 3:549
- локально разрешимая алгебра 3:551
- локально разрешимая группа 3:551
- локально свободная группа 3:549
- локально свободный пучок 3:550
- локально связное пространство 3:544
- локально связный континуум 3:544



локально тривиальное расслоение 3:551  
 локальное зацепление 3:534  
 локальное кольцо 3:535  
 локальное поле 3:532  
 локальное приближение функций 3:530  
 локальное разбиение 3:531  
 локальное свойство 3:534  
 локальности принцип 3:541  
 локальные гомологии 3:533  
 локальные и резидуальные свойства 3:529  
 локальные когомологии 3:530  
 локальные предельные теоремы 3:533  
 локальный гомеоморфизм 3:533  
 локальный униформирующий параметр 3:538  
 локальных вариаций метод 3:539  
 локация 3:540  
 локсодрома 3:571  
 Ломмеля многочлен 3:563  
 Ломмеля функция 3:563  
 Лонгмана метод 3:564  
 Лопиталя правило 3:400  
 Лорана ряд 3:359  
 Лоренца аттрактор 3:568  
 Лоренца преобразование 3:567  
 Лоренца сила 3:566  
 Лузина гипотеза 3:574  
 Лузина критерий 3:573

Лузина множество 3:576  
 Лузина примеры 3:573  
 Лузина принципы отделимости 3:576  
 Лузина проблема 3:575  
 Лузина пространство 3:577  
 Лузина решето 3:577  
 Лузина  $C$ -свойство 3:572  
 Лузина  $N$ -свойство 3:574  
 Лузина теорема 3:577  
 Лузина - Данжуа теорема 3:573  
 Лузина - Привалова теоремы 3:575  
 лупа 3:564  
 лупа аналитическая 3:565  
 лучевая функция 4:504  
 лучевой метод 4:504  
 Льенара уравнение 3:438  
 Льенара - Шипара критерий 3:437  
 Люксембурга норма 3:572  
 Люрота проблема 3:572  
 Ляпунова поверхности и кривые 3:585  
 Ляпунова преобразование 3:587  
 Ляпунова стохастическая функция 3:584  
 Ляпунова теорема 3:586  
 Ляпунова теория устойчивости 3:584  
 Ляпунова функция 3:580  
 Ляпунова характеристический показатель 3:578  
 Ляпунова - Шмидта уравнение 3:581

## М

магический квадрат 3:593  
 магнитной гидродинамики математические задачи 3:594  
 мажоранта и миноранта 3:595  
 мажорирования упорядочивание 3:595  
 Майера задача 3:695  
 Макдональда функция 3:588  
 Макки Борелевская структура 3:592  
 Макки топология 3:593  
 Маклорена ряд 3:593  
 Маклорена формула 3:593  
 Максвелла распределение 3:693  
 Максвелла уравнения 3:693  
 максимальная компактная подгруппа 3:681  
 максимальная подгруппа 3:683  
 максимальная эргодическая теорема 3:681  
 максимального правдоподобия метод 3:690  
 максимальное и минимальное расширения 3:680

максимальный и минимальный операторы 3:680  
 максимальный идеал 3:682  
 максимальный инвариант 3:682  
 максимальный коэффициент корреляции 3:681  
 максимальный спектральный тип 3:683  
 максимальный тор 3:683  
 максимальный член ряда 3:683  
 максимизация и минимизация функций 3:687  
 максимин 3:685  
 максимин, численные метод 3:685  
 максимина принцип 3:687  
 максиминный критерий 3:685  
 максимум и минимум функции 3:689  
 максимума и минимума точки 3:689  
 максимума модуля принцип 3:691  
 максимума принцип 3:692  
 малая категория 4:873

- Малера проблема 3:595  
 малого параметра метод 4:875  
 малые знаменатели 4:873  
 малый образ 4:875  
 малый объект 4:875  
 Мальцева алгебра 3:597  
 Мальцева локальные теоремы 3:599  
 Мальцевское произведение 3:599  
 Мамфорда гипотеза 3:869  
 Мангольдта функция 3:599  
 Манна теорема 3:604  
 Манна - Уитни критерий 3:605  
 маргинальное распределение или частное распределение 3:614  
 Маркова квадрату 3:626  
 Маркова критерий 3:619  
 Маркова неравенство 3:620  
 Маркова проблема спектра 3:626  
 Маркова система функций 3:620  
 Маркова спектр 3:626  
 Маркова форма 3:620  
 Маркова цепи нулевой класс состояний 3:616  
 Маркова цепи положительный класс состояний 3:616  
 Маркова цепь 3:614  
 Маркова цепь возвратная 3:619  
 Маркова цепь неразложимая 3:618  
 Маркова цепь периодическая 3:619  
 Маркова цепь разложимая 3:617  
 Маркова цепь сложная 3:618  
 Маркова цепь эргодическая 3:617  
 Марковский момент 3:620  
 Марковский процесс 3:621  
 Марковский стационарный процесс 3:625  
 Марковское свойство 3:625  
 Мартина граница в теории марковских процессов 3:628  
 Мартина граница в теории потенциала 3:627  
 мартингал 3:629  
 Марцинкевича пространство 3:613  
 масса 3:631  
 масса и комасса 3:631  
 массовая проблема 2:19  
 массового обслуживания система 4:446; 4:448; 4:449; 4:452; 4:453  
 массового обслуживания теория 4:457  
 массовый оператор 3:632  
 масштабный параметр 4:712  
 математика 3:665  
 математическая индукция 3:641  
 математическая лингвистика 3:642  
 математическая логика 3:644  
 математическая модель 3:647  
 математическая статистика 3:657  
 математическая теория вычисления 3:663  
 математическая физика 3:648  
 математическая экономика 3:635  
 математический анализ 3:632  
 математическое обеспечение 4:888  
 математическое ожидание 3:641  
 математическое программирование 3:655  
 математической физики уравнения 3:650  
 матриц алгебра 3:673  
 матриц кольцо 3:676  
 матрица 3:670  
 матрицант 2:614  
 матричная группа 3:676  
 матричная игра 3:675  
 матричное дифференциальное уравнение 3:674  
 матричной факторизации метод 3:675  
 матричный метод суммирования 3:677  
 матроид 3:677  
 Матье группа 3:669  
 Матье уравнение 3:668  
 Матье функции 3:669  
 Маурера - Каргана форма 3:680  
 Маха принцип 3:589  
 Маха число 3:589  
 Махаланобиса расстояние 3:594  
 Маусимы критерий 3:679  
 машина 3:589  
 машинно - ориентированный язык 3:592  
 маятника колебаний уравнение 4:118  
 мгновенное состояние 3:85  
 Мёбиуса лист 3:780  
 Мёбиуса плоскость 3:779  
 Мёбиуса ряд 3:780  
 Мёбиуса функция 3:779  
 медиана 3:706  
 медианта 3:707  
 Мейера преобразование 3:708  
 Мейера теорема 3:708  
 Мелера квадратурная формула 3:708  
 Мелера - Фока преобразование 3:707  
 Меллина преобразование 3:709  
 Менгера кривая 3:710



- Менелая теорема 3:710  
 Мёнье теорема 3:738  
 Меньшова пример нуль - ряда 3:710  
 Меньшова - Радемахера теорема 3:711  
 мера 3:698  
 мера в топологическом векторном пространстве 3:704  
 Мергеляна теорема 3:711  
 мероморфная функция 3:712  
 мероморфное отображение 3:714  
 Мерсенна число 3:715  
 Мерсера теорема 3:711  
 метабелева группа 3:715  
 металогика 3:716  
 метаматематика 3:716  
 метатеорема 3:716  
 метатеория 3:716  
 метациклическая группа 3:717  
 метаязык 3:716  
 метеорологии математические задачи 3:717  
 метод скорейшего спуска 3:722  
 метризуемое пространство 3:737  
 метрика 3:722  
 метрическая проекция 3:726  
 метрическая размерность 3:724  
 метрическая связность 3:723  
 метрическая теория динамических систем 2:312  
 метрическая теория функций 3:731  
 метрическая теория чисел 3:733  
 метрическая транзитивность 3:735  
 метрический изоморфизм 3:725  
 метрический тензор 3:731  
 метрическое пространство 3:726  
 механических квадратур метод 3:706  
 мешающий параметр 3:1000  
 микрорасслоение 3:738  
 Милна метод 3:741  
 Милна проблема 3:742  
 Милнора сфера 3:743  
 минимакс 3:753  
 минимакса принцип 3:754  
 минимаксная оценка 3:753  
 минимаксное свойство 3:754  
 минимаксность статистической процедуры 3:754  
 минимальная достаточная статистика 3:749  
 минимальная модель 3:746  
 минимальная нормальная подгруппа 3:747  
 минимальная поверхность 3:749  
 минимальная простая группа 3:749  
 минимальное множество 3:747  
 минимальное пропозициональное исчисление 3:747  
 минимальное свойство 3:747  
 минимальное функциональное исчисление 3:744  
 минимальный идеал 3:744  
 минимальных итераций метод 3:745  
 минимальных невязок метод 3:744  
 минимизация вычислительной работы 3:758  
 минимизация площади 3:758  
 минимизирующая последовательность 3:760; 3:761  
 минимум 3:761  
 Минковского геометрия 3:761  
 Минковского гипотеза 3:761  
 Минковского неравенство 3:761  
 Минковского проблема 3:762  
 Минковского пространство 3:763  
 Минковского теорема 3:764  
 минор 3:764  
 минор графа 3:764  
 миноранта 3:765  
 минута 3:765  
 мировая линия 5:523  
 мировая функция 5:523  
 Миттаг - Леффлера звезда 3:765  
 Миттаг - Леффлера метод суммирования 3:765  
 Миттаг - Леффлера теорема 3:766  
 Миттаг - Леффлера функция 3:765  
 Михайлова критерий 3:740  
 мнимая единица 3:13  
 мнимое число 3:13  
 многогранная метрика 4:227  
 многогранник 4:228  
 многогранника группа 4:232  
 многогранный угол 4:226  
 многогрупповое приближение 3:851  
 многозначная логика 3:605  
 многозначная функция 3:853  
 многозначное отображение 3:853  
 многозначное представление 3:854  
 многозначной логики функции 3:609  
 многократная рекурсия 3:860  
 многокритериальная задача 3:842  
 многолистная область 3:853  
 многолистная функция 3:866  
 многомерная вариационная задача 3:848  
 многомерная геометрия 2:863

- многомерное распределение 3:843  
 многомерный статистический анализ 3:845  
 многомерный узел 3:843  
 многоместный функтор 3:850  
 многообразие 3:600  
 многообразие категорий 5:399  
 многосвязная область 3:866  
 многоугольник 4:223  
 многоугольное число 4:226  
 многочлен 4:232  
 многочленов кольцо 4:669  
 многоэкстремальная задача 3:849  
 множеств категория 4:800  
 множеств теория 4:799  
 множественное сравнение 3:857  
 множественный коэффициент корреляции 3:857  
 множество 4:798  
 множество типа  $F_\sigma(G_\delta)$  4:799  
 $\checkmark$ -множество 1:2  
 $C\checkmark$ -множество 1:455  
 множителей теория 3:865  
 мода 3:783  
 модальная логика 3:781  
 модальность 3:783  
 моделей теория 3:784  
 модель 3:784  
 модель вычислительная 3:783  
 модификация 3:787  
 модулей категория 3:797  
 модулей проблема 3:798  
 модулей теория 3:799  
 модули римановой поверхности 3:797  
 модуль 3:794; 3:800  
 $D$ -модуль 2:1  
 модуль автоморфизма 3:801  
 модуль без кручения 5:230  
 модуль кольца 3:801  
 модуль семейства кривых 3:801  
 модуль эллиптического интеграла 3:802  
 модулярная группа 3:792  
 модулярная кривая 3:787  
 модулярная решетка 3:793  
 модулярная форма 3:788  
 модулярная функция 3:789  
 модулярный идеал 3:793  
 модус поненс 3:802  
 момент 3:802  
 моментов метод 3:808  
 моментов проблема 3:803  
 Монжа конус 3:811  
 Монжа уравнение 3:811  
 Монжа - Ампера уравнение 3:808  
 моногенная полугруппа 3:816  
 моногенная функция 3:815  
 моногенности множество 3:814  
 монодромии группа 3:812  
 монодромии матрица 3:812  
 монодромии оператор 3:812  
 монодромии преобразование 3:813  
 монодромии теорема 3:812  
 монодромная функция 3:811  
 моноид 3:817  
 моноидальное преобразование 3:817  
 мономиальная группа подстановок 3:819  
 мономиальная матрица 3:818  
 мономиальное представление 3:818  
 мономорфизм 3:819  
 моносплайн 3:819  
 монотонная Булева функция 3:819  
 монотонная последовательность 3:821  
 монотонная функция 3:820  
 монотонное отображение 3:821  
 монотонный оператор 3:821  
 Монте - Карло метод 3:822  
 Монтеля пространство 3:825  
 Монтеля теорема 3:825  
 Мопертюи принцип 3:679  
 Морделла гипотеза 3:826  
 Мореры теорема 3:827  
 Мориты эквивалентность 3:827  
 Морса индекс 3:828  
 Морса лемма 3:830  
 Морса неравенства 3:829  
 Морса перестройка 3:832  
 Морса теория 3:833  
 Морса функция 3:828  
 Морса - Смейла система 3:831  
 морфизм 3:828  
 мотивов теория 3:837  
 мощности критерия функция 4:278  
 мощностная характеристика 1:471  
 мощность 1:475  
 мощность статистического критерия 4:278  
 Муавра формула 2:15



Муавра - Лапласа теорема 2:15  
 мультиалгебра 3:842  
 мультиграф 3:854  
 мультимодальное распределение 3:856  
 мультиоператорная группа 3:851  
 мультипликативная арифметическая функция 3:861  
 мультипликативная группа 3:862  
 мультипликативная полугруппа 3:863  
 мультипликативная решетка 3:862  
 мультипликативная система 3:863

мультипликативная эргодическая теорема 3:861  
 мультипликативный интеграл 4:319  
 мультипликатор группы 3:865  
 мультипликаторы 3:865  
 мультиполя потенциал 3:852  
 Мура пространство 3:825  
 Муфанг лупа 3:838  
 Мюнца теорема 3:870  
 мягкий пучок 4:888

## Н

наблюдений обработка 4:319  
 Навье - Стокса уравнения 3:876  
 Нагеля точка 3:872  
 нагруженное интегральное уравнение 3:773  
 надграфик 5:79  
 надежности теория 4:576  
 надежность и контроль управляющих систем 4:573  
 надстройка 5:90  
 наиболее мощный критерий 3:836  
 наибольшего гарантированного результата принцип 4:302  
 наибольший общий делитель 2:769  
 наивысшей алгебраической степени точности квадратурная формула 4:392  
 наилучшая квадратурная формула 1:348  
 наилучшего приближения многочлен 4:237  
 наилучшего приближения элемент 2:334  
 наилучшее полное приближение 1:347  
 наилучшее приближение 1:345  
 наилучшее приближение в среднем 1:346  
 наилучший линейный метод 1:347  
 наилучших приближений последовательность 1:346  
 наименее благоприятное распределение 3:366  
 наименее уклоняющийся от нуля многочлен 4:237  
 наименьшего числа оператор 3:367  
 наименьшее общее кратное 3:366  
 наименьших квадратов метод 3:367  
 наименьших реакций принцип 4:302  
 наискорейшего спуска метод 4:1022  
 Найквиста критерий 3:1009  
 наклонная 3:29  
 накопление погрешности 1:29  
 накопления точка 1:31  
 накрывающая гомотопия 1:881  
 накрывающая поверхность 1:882

накрытие 1:879  
 наложения область 1:880  
 направление 2:206  
 направлений поле 2:207  
 направленное множество 2:206  
 направленность 2:691  
 направляющих функционалов метод 2:206  
 напряжений тензор 5:32  
 нарост пространства 4:579  
 наследственно неразложимый континуум 2:852  
 натуральное уравнение 3:874  
 натуральное число 3:875  
 натуральный параметр 3:875  
 натуральный репер 3:874  
 натуральный ряд 3:875  
 «Начала» Евклида 2:338  
 начальные условия 3:81  
 начертательная геометрия 2:58  
 неабелево числовое поле 3:926  
 неабелевы когомологии 3:924  
 неархимедова геометрия 3:926  
 неассоциативные кольца и алгебры 3:927  
 неатомическая игра 3:929  
 неатомическая мера 3:929  
 неблуждающая точка 3:966  
 небольшой волны анализ 5:455  
 Неванлинны теоремы 3:900  
 Неванлинны - Пика проблема 3:899  
 невозможное событие 3:25  
 невырожденное представление 3:932  
 невычет 3:960  
 неголономные системы 3:936  
 недезаргова геометрия 3:932  
 неделимых метод 3:44

- недифференцируемая функция 3:932  
недоопределенная система 5:317  
неевклидово пространство 3:936  
неевклидовы геометрии 3:933  
независимость 3:35  
независимость системы аксиом 3:37  
независимые измеримые разбиения 3:38  
независимые меры 3:38  
независимых функций система 3:37  
неизмеримое множество 3:955  
Нейвирта узел 3:898  
Нейля парабола 3:888  
Неймана алгебра 5:440  
Неймана задача 3:896  
Неймана метод доверительных интервалов 3:906  
Неймана ряд 3:896  
Неймана структура 3:907  
Неймана теорема эргодическая 5:442  
Неймана функции 3:896  
Неймана - Пирсона лемма 3:907  
нейтрального типа уравнение 3:898  
неклассическая теория моделей 3:930  
некорректные задачи 3:6  
некорректные задачи теория функций комплексного переменного 3:11  
Некрасова интегральное уравнение 3:888  
нелинейная краевая задача 3:937  
нелинейная краевая задача, численные методы решения 3:937  
нелинейная связность 3:940  
нелинейное дифференциальное уравнение 3:941  
нелинейное интегральное уравнение 3:945  
нелинейное программирование 3:954  
нелинейное уравнение, численные методы решения 3:941  
нелинейное уравнение с частными производными 3:950  
нелинейные колебания 3:948  
нелинейный оператор 3:946  
нелинейный потенциал 3:954  
нелинейный функционал 3:944  
нелинейный функциональный анализ 3:945  
необходимая достаточная статистика 3:880  
необходимые и достаточные условия 3:880  
неограниченный оператор 5:314  
неопределенное уравнение 3:38  
неопределенностей раскрытие 3:34  
неопределенности принцип 5:315  
неопределенный интеграл 3:34  
неопределенных коэффициентов метод 3:722 ; 5:317  
неориентируемое многообразие 3:955  
неособая граничная точка 3:964  
неособенная матрица 3:965  
неосцилляции промежутков 3:956  
непараметрические методы статистики 3:956  
непараметрический критерий 3:959  
непаскалева геометрия 3:959  
Неперово число 3:873  
неподвижная особая точка 2:494  
неподвижная точка 2:492  
неполная бета - функция 3:30  
неполная гамма - функция 3:31  
Неправильности коэффициенты 3:185  
непредикативное определение 3:960  
непрерывная группа 1:814  
непрерывная решетка 1:815  
непрерывная серия представлений 1:818  
непрерывная функция 1:812  
непрерывное множество 1:819  
непрерывное отображение 1:816  
непрерывное представление 1:818  
непрерывное разбиение 1:810  
непрерывное распределение 1:811  
непрерывное сечение 1:818  
непрерывности аксиома 1:807  
непрерывности модуль 1:808  
непрерывности теорема 1:808  
непрерывность 1:807  
непрерывные аналоги итерационных методов 1:809  
непрерывный оператор 1:817  
непрерывный поток 1:811  
непрерывный функтор 1:814  
непрерывный функционал 1:813  
непрерывных функций пространство 1:814  
неприводимая матричная группа 3:181  
неприводимое аналитическое пространство 3:181  
неприводимое многообразие 3:183  
неприводимое отображение 3:181  
неприводимое представление 3:182  
неприводимое топологическое пространство 3:183  
неприводимый континуум 3:181  
неприводимый многочлен 3:182  
неприводимый модуль 3:182  
непротиворечивость 1:781  
неравенство 3:49  
неразветвленный идеал 5:356



- неразветвленный характер 5:356  
 неразложимое представление 3:33  
 неразложимое распределение 3:33  
 неразложимый континуум 3:33  
 неразрешимости степень 2:38  
 неразрешимость 5:316; 5:356  
 неразрывности уравнение 1:808  
 нерв семейства множеств 3:889  
 Нерона модель 3:888  
 Нерона - Севери группа 3:889  
 несамосопряженный оператор 3:960  
 негладжаемое многообразие 3:965  
 несмешанный идеал 2:376  
 несмещенная оценка 5:311  
 несмещенный критерий 5:314  
 несобственное распределение 3:26  
 несобственный интеграл 3:26  
 несовместимость 3:32  
 несоизмеримые величины 3:30  
 нестандартный анализ 3:965  
 несущественное отображение 3:50  
 несчетное множество 5:316  
 Нётер проблема 3:916  
 Нётер теорема 3:916  
 Нётера - Энрикеса теорема 3:915  
 Нётеров модуль 3:920  
 Нётеров оператор 3:920  
 Нётерова группа 3:919  
 Нётерова индукция 3:919  
 Нётерова схема 3:922  
 Нётерово интегральное уравнение 3:919  
 Нётерово кольцо 3:921  
 Нётерово пространство 3:922  
 неформальный аксиоматический метод 3:68  
 нефредгольмово интегральное уравнение 3:936  
 нехопфова группа 3:937  
 нецентральное 'хн - квадрат' распределение 3:930  
 нечетная функция 3:1015  
 нечетное число 3:1015  
 неэффективная статистика 3:48  
 неявная функция 3:22  
 неявная функция в алгебраической геометрии 3:24  
 неявный оператор 3:25  
 нигде не плотное множество 3:992  
 нижний предел 3:570  
 нижняя грань 3:569  
 нижняя грань семейства топологий 3:569  
 Никольского пространство 3:908  
 никомеда конхоида 3:908  
 нильалгебра 3:910  
 нильгруппа 3:911  
 нильидеал 3:911  
 нильмногообразие 3:911  
 нильполугруппа 3:911  
 нильпотентная алгебра 3:912  
 нильпотентная группа 3:913  
 нильпотентная полугруппа 3:914  
 нильпотентный идеал 3:913  
 нильпотентный элемент 3:912  
 нильпоток 3:911  
 нить 5:168  
 номография 3:922  
 норма 3:966  
 нормализатор 3:990  
 нормализаторное условие 3:990  
 нормаль 3:969  
 нормальная динамическая система 3:975  
 нормальная кривизна 3:973  
 нормальная матрица 3:984  
 нормальная плоскость 3:986  
 нормальная подполугруппа 3:989  
 нормальная производная 3:973  
 нормальная разрешимость 3:988  
 нормальная схема 3:986  
 нормальная сходимость 3:972  
 нормальная форма 3:977  
 нормальная фундаментальная система решений 3:983  
 нормально разрешимый оператор 3:991  
 нормально расположенное подпространство 3:990  
 нормального притяжения зона 5:550  
 нормальное аналитическое пространство 3:971  
 нормальное  $p$  - дополнение 3:985  
 нормальное кольцо 3:986  
 нормальное пространство 3:988; 3:989  
 нормальное распределение 3:973  
 нормальное расслоение 3:972  
 нормальное расширение 3:975  
 нормальное семейство 3:975  
 нормальное сечение 3:987  
 нормальное уравнение 3:975  
 нормальное число 3:984  
 нормальной кривизны эллипс 2:341  
 нормальный алгоритм 3:970  
 нормальный делитель 3:989

нормальный комплекс 3:972  
 нормальный мономорфизм 3:984  
 нормальный нульмерный цикл 3:989  
 нормальный оператор 3:985  
 нормальный пучок 3:987  
 нормальный ряд 3:987  
 нормальный эпиморфизм 3:975  
 норменное отображение 3:967  
 нормирование 5:364  
 нормирования принцип 3:990  
 нормированная алгебра 3:991  
 нормированная система элементов 3:990  
 нормированное кольцо 3:991  
 нормированное поле 3:991  
 нормированное пространство 3:991  
 носитель меры 5:81  
 носитель модуля 5:81  
 носитель функции 5:80  
 нулевой объект категории 3:1000  
 нуль 5:537

нуль - единица закон 5:539  
 нульмерное отображение 5:538  
 нульмерное пространство 5:538  
 нуль - система 5:540  
 нумерация 2:366  
 нумерически выразимый предикат 2:365  
 нумерованная модель 2:366  
 Нуссельта число 3:1009  
 Ньютона бином 3:901  
 Ньютона диаграмма 3:902  
 Ньютона законы механики 3:903  
 Ньютона интерполяционная формула 3:903  
 Ньютона метод 3:904  
 Ньютона число 3:905  
 Ньютона - Котеса квадратурная формула 3:901  
 Ньютона - Лейбница формула 3:904  
 Ньютонов потенциал 3:905  
 Нэша теорема 3:873  
 Нэша теоремы 3:873

## О

обвертывающий ряд 2:370  
 обильное векторное расслоение 1:149  
 обильный пучок 1:149  
 область 2:275  
 область значений функции 4:488  
 область определения 2:276  
 область целостности 3:94  
 обложение 5:475  
 обобщенная аналитическая функция 2:674  
 обобщенная группа 2:691  
 обобщенная производная 2:679  
 обобщенная функция 2:683  
 обобщенно нильпотентная группа 2:691  
 обобщенно разрешимая группа 2:692  
 обобщенного сдвига операторы 2:680  
 обобщенное решение 2:691  
 обобщенной функции носитель 5:81  
 обобщенной функции производная 2:688  
 обобщенные почти периодические функции 2:673  
 обобщенные теории когомологий 2:676  
 обобщенных функций произведение 2:688  
 обобщенных функций пространство 2:689  
 оболочек теория 4:807  
 образ морфизма 3:12

образующий объект категории 2:693  
 образующий элемент категорий 2:694  
 обратимый модуль 3:176  
 обратимый пучок 3:177  
 обратимый элемент 3:176  
 обратная матрица 3:171  
 обратная теорема 1:841  
 обратная функция 3:169  
 обратно параболическое уравнение 3:171  
 обратное отображение 3:170  
 обратные гиперболические функции 3:169  
 обратные тригонометрические функции 3:171  
 обращение матрицы 3:173  
 обращение ряда 3:174  
 обращение эллиптического интеграла 3:175  
 обрыва цепей условие 1:542  
 общая алгебра 2:666  
 общая топология 2:670  
 общая точка 2:694  
 общего положения точка 4:202  
 общее множество 2:695  
 общее положение 2:667  
 общее решение 2:669  
 общезначимость 2:672



- общерекурсивная функция 2:669  
 общерекурсивный оператор 2:669  
 общий интеграл 2:666  
 общих представителей система 5:120  
 объединение 5:333  
 объект геометрический 3:1011  
 объект категории 3:1011  
 объем трехмерного тела 5:438  
 объема форма 5:439  
 объемности аксиома 1:286  
 объемный потенциал 4:261  
 овал 4:53  
 овоид 4:54  
 овражная функция 4:504  
 овражных функций метод минимизации 3:755  
 огибающая 2:369  
 ограниченно компактное множество 1:430  
 ограниченного вида функция 2:589  
 ограниченно - детерминированная функция 2:482  
 ограниченное множество 1:430  
 ограниченной вариации функция 2:590  
 ограниченный квантор 4:611  
 ограниченный оператор 1:430  
 однолистная функция 5:345  
 однолистности радиус 5:344  
 однолистности условия 5:343  
 одномерное многообразие 3:1016  
 однопараметрическая группа преобразований 3:1018  
 однопараметрическая подгруппа 3:1017  
 однопараметрическая полугруппа 3:1017  
 однопериодическая функция 4:842  
 однополостный гиперболоид 3:1018  
 однородная ограниченная область 2:895  
 однородная функция 2:898  
 однородное комплексное многообразие 2:896  
 однородное пространство 2:899  
 однородное пространство алгебраической группы 2:901  
 однородные координаты 2:898  
 однородный выпуклый конус 2:897  
 однородный оператор 2:898  
 однородное кольцо 5:337  
 односвязная группа 4:842  
 односвязная область 4:841  
 односторонние и двусторонние поверхности 3:1018  
 односторонний предел 3:1019  
 односторонняя производная 3:1019  
 одночлен 3:818  
 Ока теоремы 3:1015  
 окаймление пространства 1:401  
 окаймления метод 1:400  
 океанологии математические задачи 3:1013  
 окольцованное пространство 4:672  
 окрестность 3:888  
 округление 4:693  
 округления точка 5:309  
 окружность 1:590  
 октант 3:1015  
 октаэдр 3:1015  
 октаэдра пространство 3:1015  
 'омега - квадрат' распределение 3:1016  
 омега - непротиворечивость 3:1016  
 омега - полнота 3:1016  
 операнд 3:1021  
 оператор 3:1025  
 оператор в программировании 4:983  
 оператора кольцо 3:1029  
 операторная группа 3:1028  
 операторная топология 3:1029  
 операторная эргодическая теорема 3:1028  
 операторно неприводимое представление 3:1029  
 операторное кольцо 4:671  
 операторный гомоморфизм 3:1029  
 операционное исчисление 3:1021  
 $\wedge$  - операция 1:1  
 $\delta$  -  $\sigma$  - операция 2:1  
 оперение 2:454  
 опорная гиперплоскость 5:81  
 опорная функция 5:80  
 определенный интеграл 2:25  
 определитель 2:65  
 определяющая система окрестностей 2:25  
 определяющее уравнение 2:24  
 определяющие соотношения 2:24  
 опровержимая формула 4:540  
 оптимальная гарантирующая стратегия 3:1033  
 оптимальная квадратура 3:1036  
 оптимальная траектория 3:1046  
 оптимального быстрогодействия задача 5:178  
 оптимального управления математическая теория 3:1030  
 оптимальное декодирование 3:1033  
 оптимальное управление 3:1030  
 оптимальное управление позиционное 3:1042  
 оптимальное управление программное 3:1034  
 оптимальности достаточные условия 3:1047

- оптимальности принципы 3:1046  
 оптимальный режим особый 3:1037  
 оптимальный режим скользящий 3:1040  
 оптимизация вычислительного метода 3:1048  
 оптимизация вычислительных алгоритмов 3:1048  
 опциональная  $\sigma$ -алгебра 3:1050  
 опциональный случайный процесс 3:1050  
 орбит метод 4:2  
 орбита 4:1  
 орбитальная устойчивость 4:4  
 ордината 4:16  
 ориентация 4:16  
 орисфера 2:933  
 орицикл 2:932  
 орициклический поток 2:932  
 Орлича класс 4:18  
 Орлича пространство 4:19  
 Орнштейна - Чекона эргодическая теорема 4:20  
 Орнштейна - Уленбека процесс 4:20  
 Орра - Зоммерфельда уравнение 4:22  
 ортогонализации метод 4:42  
 ортогонализация 4:41  
 ортогонализация системы функций 4:42  
 ортогональная группа 4:25  
 ортогональная матрица 4:29  
 ортогональная сеть 4:30  
 ортогональная система 4:38  
 ортогональная таблица 4:23  
 ортогональная траектория 4:40  
 ортогональное преобразование 4:40  
 ортогональной прогонки метод 4:24  
 ортогональность 4:40  
 ортогональные латинские квадраты 4:27  
 ортогональные многочлены 4:30  
 ортогональные многочлены в комплексной области 4:34  
 ортогональный базис 4:23  
 ортогональный проектор 4:35  
 ортогональный ряд 4:35  
 ортомодулярная решетка 4:43  
 ортонормированная система 4:43  
 ортоцентр 4:23  
 освещения задача 3:12  
 осевой вектор 1:286  
 оснащенное Гильбертово пространство 4:666  
 оснащенное многообразие 4:666  
 основание изгиба 1:313  
 основания геометрии 2:523  
 основного типа алгебраическая поверхность 2:672  
 особая точка 4:854  
 особенности дифференцируемых отображений 4:864  
 особенность 4:867  
 особое решение 4:863  
 особой точки индекс 4:863  
 особые показатели 4:846  
 остановки время 5:27  
 остаточный член  
 Остроградского метод 4:52  
 Остроградского формула 4:51  
 Остроградского - Лиувилля формула 4:52  
 осциллятор гармонический 4:49  
 осцилляционная матрица 4:45  
 осцилляционное дифференциальное уравнение 4:44  
 осцилляционное ядро 4:45  
 $\pi$ -отделимая группа 4:56  
 отделимое пополнение кольца 4:781  
 отделимости аксиома 4:783  
 отделимость множеств 4:780  
 откоса линия 1:912  
 открытое многообразие 3:1020  
 открытое множество 3:1021  
 открытое отображение 3:1020  
 открыто - замкнутое множество 3:1020  
 открытый промежуток 3:151  
 относительная гомологическая алгебра 4:562  
 относительная метрика 4:563  
 относительная система корней 4:563  
 относительная топология 4:563  
 относительно бикомпактное множество 4:564  
 относительно открытое (замкнутое) множество 4:564  
 относительности принцип 4:567  
 относительности теория 4:567  
 относительные гомологии 4:562  
 отношение 4:561  
 отношения правдоподобия критерий 3:438  
 отображение 3:609  
 отображение периодов 4:123  
 отображений классы 3:612  
 отображения главная сеть 3:612  
 отражение 4:536  
 отражений группа 4:537  
 отражения принцип 4:538  
 отрезок 3:151  
 отрицание 3:880  
 отрицательная вариация функции 3:888



отрицательная корреляция 3:881  
 отрицательное биномиальное распределение 3:880  
 отрицательное гипергеометрическое распределение 3:887  
 отрицательное показательное распределение 3:887  
 отрицательное полиномиальное распределение 3:887  
 отрицательное расслоение 3:888

отрицательной кривизны поверхность 3:881  
 отсчета система 4:535  
 оценка статистическая 4:995  
 ошибок теория 2:390  
 ошибочного декодирования вероятность 2:386

## П

Паде аппроксимация 4:59  
 Паппа аксиома 4:66  
 Папперица уравнение 4:64  
 парабол метод 4:66  
 парабола 4:66  
 параболическая подалгебра 4:73  
 параболическая подгруппа 4:74  
 параболическая регрессия 4:73  
 параболическая спираль 4:73  
 параболическая точка 4:72  
 параболические координаты 4:67  
 параболический цилиндр 4:67  
 параболического типа уравнение 4:69  
 параболического типа уравнение, численные методы решения 4:70  
 параболического уравнения метод 4:68  
 параболического цилиндра функции 4:67  
 параболоид 4:75  
 параболоидальные координаты 4:75  
 паракompактное пространство 4:75  
 паракompактности критерии 4:77  
 параллелепипед 4:84  
 параллелизм абсолютный 4:82  
 параллелизуемое многообразие 4:83  
 параллелограмм 4:83  
 параллелотоп 4:84  
 параллелоздр 4:83  
 параллельное перенесение 4:77  
 параллельное поле 4:79  
 параллельности аксиома 4:83  
 параллельные линии 4:80  
 параллельные поверхности 4:82  
 параллельные прямые 4:81  
 параллельный перенос 4:78  
 параметра вариации метод 4:86  
 параметрика метод 4:93  
 параметрических интегральных представлений метод 4:88  
 параметрических представлений метод 4:90

параметрического резонанса математическая теория 4:92  
 параметрическое представление 4:91  
 параметрическое представление функции 4:90  
 параметрическое программирование 4:89  
 параметрическое уравнение 4:88  
 Парето распределение 4:94  
 парикмахера парадокс 1:310  
 паркетирование 4:111  
 Парсеваля равенство 4:95  
 Парсеваля - Планшереля формула 4:96  
 Паскалева геометрия 4:105  
 Паскаля распределение 4:104  
 Паскаля теорема 4:106  
 Паскаля треугольник 4:107  
 Паскаля улитка 4:106  
 Паули матрицы 4:110  
 Паша аксиома 4:107  
 Пеано аксиомы 4:111  
 Пеано кривая 4:112  
 Пеано производная 4:113  
 Пеано теорема 4:113  
 Пейджа теорема 4:62  
 Пекле число 4:115  
 Пелля уравнение 4:116  
 Пенлеве проблема 4:63  
 Пенлеве теорема 4:63  
 Пенлеве уравнение 4:62  
 пентасферические координаты 4:118  
 первая аксиома счетности 2:488  
 первая вариация 2:490  
 первая квадратичная форма 2:489  
 первая краевая задача 2:488  
 первичное кольцо 4:291  
 первичный идеал 4:289  
 первообразная 4:291  
 первообразный корень 4:294  
 первый интеграл 2:490  
 перевала метод 4:707

перегиба точка 4:202  
 перегородка 4:104  
 передаточная функция 5:242  
 переменных направлений метод 5:372  
 перемешивание 3:778  
 перенормировка 4:581  
 переноса излучения теория 4:467  
 переноса поверхность 5:253  
 переноса сеть 5:258  
 переноса теорема 5:243  
 переноса уравнения, численные методы решения 5:255  
 переопределенная система 4:54  
 пересечение множеств 3:147  
 пересечений теория 3:147  
 пересечения гомология 3:146  
 пересечения индекс 3:146; 3:147  
 перестановка 4:130  
 перестановок критерий 4:134  
 перестановочности соотношения 4:133  
 перестановочные операторы 1:676  
 перестройка 5:86  
 переход с запрещениями 5:250  
 переходная функция 5:247  
 переходные вероятности 5:249  
 переходных вероятностей матрица 3:676  
 переходных операторов полугруппа 5:248  
 перечисления оператор 2:368  
 перечисления проблема 2:368  
 перечисления теория 2:368  
 перечислимое множество 2:365  
 периметр 4:123  
 период группы 4:125  
 период функции 4:124  
 периодическая группа 4:126  
 периодическая полугруппа 4:126  
 периодическая точка 4:126  
 периодическая траектория 4:128  
 периодическая функция 4:125  
 периодическое решение 4:127  
 периодограмма 4:128  
 перистое пространство 2:454  
 периферически бикомпактное пространство 4:129  
 перманент 4:129  
 пермутатор 4:134  
 перпендикуляр 4:135  
 перпендикулярные прямые 4:135  
 Перрона интеграл 4:135

Перрона метод 4:136  
 Перрона преобразование 4:137  
 Перрона - Стильтеса интеграл 4:137  
 Перрона - Фробениуса теорема 4:135  
 Персея кривая 4:138  
 перспектива 4:138  
 перцентиль 4:119  
 петель пространство 3:566  
 Петера - Вейля теорема 4:144  
 Петерсона поверхность 4:146  
 Петерсона соответствие 4:146  
 Петерсона - Кодаци уравнения 4:145  
 петля 3:566  
 Петри сеть 4:146  
 Петтиса интеграл 4:147  
 пи 4:158  
 Пика теорема 4:162  
 Пикара группа 4:159  
 Пикара многообразие 4:161  
 Пикара схема 4:159  
 Пикара теорема 4:160  
 пирамида 4:376  
 Пирса стрелка 4:115  
 Пирсовское разложение 4:115  
 Пирсона кривые 4:113  
 Пирсона распределение 4:115  
 Питмена оценка 4:165  
 Пифагора теорема 4:377  
 Пифагоровы числа 4:377  
 ПЛ/І 4:183  
 планигон 4:172  
 планирование эксперимента 2:64  
 Планка постоянная 4:168  
 Планшереля теорема 4:167  
 Планшереля формула 4:166  
 пластичности математическая теория 4:173  
 Плато задача 4:177  
 Плато многомерная задача 4:178  
 Платона тела 4:182  
 Плеснера теорема 4:182  
 плоская действительная алгебраическая кривая 4:169  
 плоская задача теории упругости 2:331  
 плоская тригонометрия 4:171  
 плоский модуль 2:497  
 плоский морфизм 2:497  
 плоскость 4:168  
 плотная мера 5:177



- плотное множество 2:44  
 плотности матрица 2:45  
 плотности точка 2:48  
 плотностная гипотеза 2:44  
 плотностные теоремы 2:48  
 плотностный метод 2:46  
 плотность вероятности 2:46  
 плотность множества 2:48  
 плотность последовательности 2:47  
 плотность топологического пространства 2:48  
 площадей метод 1:224  
 площадей принцип 1:224  
 площадь 1:221  
 Плюккера интерпретация 4:185  
 Плюккера формулы 4:184  
 Плюккерovy координаты 4:183  
 плюригармоническая функция 4:186  
 плюрисубгармоническая функция 4:186  
 плюрисупергармоническая функция 4:188  
 поверхностей теория 5:158  
 поверхностная функция 1:223; 5:82  
 поверхностный интеграл 5:82  
 поверхностный потенциал 5:86  
 поверхность 5:82  
 поверхность второго порядка 5:84  
 К3 - поверхность 3:241  
 поворотов диаграмма 4:691  
 повторного логарифма закон 3:365  
 повторный интеграл 4:583  
 повторный предел 4:584  
 повторный ряд 4:584  
 поглощающее состояние 1:24  
 поглощения законы 1:24  
 погони линия 1:912  
 пограничного слоя теория 1:412  
 пограничный слой 1:411  
 погрешность 2:387  
 погружающая операция 3:21  
 погружение 3:20  
 погружение многообразия 3:20  
 погруженных многообразий геометрия 2:718  
 подвижная особая точка 3:839  
 подвижного репера метод 3:840  
 подвижных сеток метод 5:372  
 подгрупп ряд 5:60  
 подгрупп система 5:61  
 подгруппа 5:59  
 подгруппы индекса 5:60  
 подера 4:115  
 подкасательная и поднормаль 5:69  
 подкатегория 5:57  
 подматрица 5:65  
 подмногообразие 5:64  
 подмодуль 5:65  
 подобие 4:824  
 подобия теория 4:825  
 подобная область 4:825  
 подобная статистика 4:823  
 подобные матрицы 4:823  
 подобные множества 4:823  
 подобные операторы 4:823  
 подобный критерий 4:824  
 подобъект 5:66  
 подпредставление представления 5:68  
 подпрямое произведение 5:58  
 подразделение 5:58  
 подрешетка 5:64  
 подстановка множества 4:132  
 подстановки правило 5:69  
 подстановок группа 4:131  
 подформульности свойство 5:59  
 подходящая дробь 1:841  
 подчинения принцип 5:66  
 позитивная последовательность 4:253  
 позитивное пропозициональное исчисление 4:252  
 позиционная игра 4:247  
 поиска проблема (линейная) 4:734  
 Пойа распределение 4:221  
 Пойа теорема 4:221  
 показательная функция 2:418  
 показательное распределение 2:417  
 покоординатного спуска метод 1:856  
 покрывающий элемент 1:881  
 покрытие 1:881  
 покрытия и упаковки 1:879  
 покрытия теоремы 1:882  
 поле 2:467  
 поле разложения многочлена 4:956  
 полезности теория 5:362  
 полей классов теория 1:595  
 полианалитическая функция 4:219  
 поливектор 4:220  
 полигармоническая функция 4:219  
 полигон (над моноидом) 4:225

- поликруг 4:223
- полилинейная алгебра 3:854
- полилинейная форма 3:855
- полилинейное отображение 3:855
- полилильпотентная группа 4:220
- полиномиальная функция 4:236
- полиномиальное распределение 3:856
- полиномиальный коэффициент 3:856
- полициклическая группа 4:222
- полиэдр 4:230
- полиэдральная цепь 4:227
- полиэдральный комплекс 4:227
- полиэдральный цикл 4:227
- полная аналитическая функция 1:691
- полная вариация 1:701
- полная группа 2:268
- полная Дедекиндова решетка 1:693
- полная кривизна 1:693
- полная линейная группа 2:667
- полная мера 1:695
- полная неустойчивость 1:694
- полная подкатегория 2:584
- полная проблема собственных значений 1:696
- полная производная 5:232
- полная решетка 1:695
- полная система 1:699
- полная система вычетов 1:700
- полная система функций 1:700
- полного накопления точка 1:691
- полное алгебраическое многообразие 1:691
- полное изменение функции 5:233
- полное метрическое пространство 1:695
- полное множество 1:698
- полное приращение 5:232
- полное пространство 1:699
- полное равномерное пространство 1:701
- полное Риманово пространство 1:698
- полное топологическое пространство 1:701
- полной вероятности формула 1:696
- полнота (в математической логике) 1:704
- полнота (в топологии) 1:705
- полный дифференциал 1:694
- полный интеграл 1:694
- полный оператор 1:695
- половинного деления метод 2:74
- положительная вариация функции 4:253
- положительная корреляция 4:248
- положительно определенная форма 4:248
- положительно определенная функция 4:249
- положительно определенное ядро 4:250
- положительно определенный оператор 4:250
- положительное расслоение 4:253
- положительный конус 4:248
- положительный оператор 4:251
- положительный функционал 4:251
- положительный элемент 4:251
- полос метод 5:33; 5:34
- полоса 5:33
- полу-Туэ система 5:172
- полуалгебраическое множество 4:750
- полугеодезические координаты 4:756
- полугиперболическое пространство 4:768
- полугрупп многообразия 5:401
- полугруппа 4:757
- полугруппа нелинейных операторов 4:759
- полугруппа операторов 4:762
- полугруппа с условием конечности 4:766
- полугрупповая алгебра 4:759
- полудедекиндова решетка 4:755; 4:772
- полуюевклидово пространство 4:756
- полуинвариант 4:768
- полукольцо 4:777
- полукубическая парабола 4:754
- полулинейное отображение 4:770
- полумарковский процесс 4:770
- полумартингал 2:804
- полунаследственное кольцо 4:767
- полунепрерывная функция 4:753
- полунепрерывное отображение 4:753
- полунепрерывное разбиение 4:753
- полунепрерывный метод суммирования 4:754
- полунорма 4:772
- полуограниченный оператор 4:751
- полуопределенная форма 4:755
- полуплоскость 2:804
- полуправильные многогранники 4:776
- полупростая алгебра 4:777
- полупростая алгебраическая группа 4:778
- полупростая группа 4:779
- полупростая матрица 4:779
- полупростое кольцо 4:779
- полупростое представление 4:779
- полупростой модуль 4:779
- полупростой элемент 4:778



- полупростой эндоморфизм 4:779  
 полупрямая 2:804  
 полупрямое произведение 4:755  
 полупсевдоевклидово пространство 4:775  
 полупсевдориманово пространство 4:775  
 полурешетка 4:769  
 полуриманово пространство 4:777  
 полусимплектическое пространство 4:780  
 полусимплициальный комплекс 4:780  
 полусовершенное кольцо 4:775  
 полуторалинейная форма 4:797  
 полуупорядоченное пространство 4:772  
 полуценное кольцо 4:751  
 полуценной модуль 4:751  
 полуэллиптическое пространство 4:755  
 Польке - Шварца теорема 4:189  
 полюс 4:218  
 полюс функции 4:218  
 поля оператор 2:468  
 поляра 4:212  
 поляризованное алгебраическое многообразие 4:217  
 поляритет 4:216  
 полярное множество 4:215  
 полярное пространство 4:216  
 полярное разложение 4:214  
 полярное соответствие 4:214  
 полярные координаты 4:213  
 помехоустойчивость 3:922  
 Понтрягина двойственность 4:240  
 Понтрягина инвариант 4:242  
 Понтрягина квадрат 4:245  
 Понтрягина класс 4:239  
 Понтрягина поверхности 4:246  
 Понтрягина принцип максимума 4:242  
 Понтрягина пространство 4:244  
 Понтрягина характер 4:238  
 Понтрягина число 4:243  
 поперечник 5:500  
 пополнение 1:705  
 пополнение (равномерного пространства) 1:706  
 пополнение (равномерного пространства  $X$ ) 1:706  
 пополнение сечениями 1:705  
 пополнения метод 1:706  
 пористости точка 4:246  
 порция 4:247  
 порядка соотношение 4:7  
 порядковая статистика 4:7  
 порядковая топология 4:9  
 порядковое число 4:15  
 порядковый тип 4:9  
 порядок 4:4; 4:6  
 последования отображение 4:197  
 последовательностей категория 4:785  
 последовательность 4:784  
 последовательный анализ 4:787  
 последовательных приближений метод 4:789  
 Поста алгебра 4:254  
 Поста каноническая система 4:254  
 Поста класс 4:255  
 Поста машина 4:257  
 Поста нормальная система 4:257  
 Поста решетка 4:257  
 Поста система продуктов 4:257  
 Поста соответствия задача 4:255  
 Постникова квадрат 4:257  
 Постникова система 4:258  
 постоянной кривизны пространство 1:783  
 постоянной ширины кривая 1:784  
 постоянной ширины тело 1:784  
 потенциал 4:260  
 потенциала теории обратные задачи 4:271  
 потенциала теория 4:262  
 потенциала теория абстрактная 4:267  
 потенциала теория абстрактная 4:267  
 потенциала теория, смешанные краевые задачи 4:273  
 потенциалов метод 4:276  
 потенциальная сеть 4:260  
 потенциальное поле 4:260  
 потенциальный оператор 4:262  
 потеря функция 3:569  
 поток 4:958  
 поток в сети 2:499  
 поток векторного поля 2:500  
 поток, динамическая система с непрерывным временем 2:499  
 поточечная сходимость 4:203  
 поточечной сходимости топология 4:203  
 Похгаммера уравнение 4:188  
 почти всюду 1:138  
 почти комплексная структура 1:137  
 почти период 1:138  
 почти периодическая функция 1:139  
 почти периодическая функция аналитическая 1:138  
 почти периодическая функция на группе 1:141

- почти приводимая линейная система 1:142  
 почти простое число 1:142  
 почти симплектическая структура 1:143  
 почти кольцо 3:879  
 пояс 3:516  
 правая группа 4:667  
 правдоподобия уравнение 3:438  
 правильная интерпретация 3:784  
 правильная линейная система 4:547  
 правильные многогранники 4:548  
 правильные многоугольники 4:548  
 правоупорядоченная группа 4:667  
 Прандтля уравнение 4:282  
 Прандтля число 4:282  
 превосходное кольцо 2:411  
 предбаза 4:282  
 предваренная формула 4:287  
 предгильбертово пространство 4:283  
 предел 3:439  
 предельная точка множества 3:446  
 предельная точка траектории 3:447  
 предельного поглощения принцип 3:443  
 предельное множество 1:614; 3:447  
 предельной амплитуды принцип 3:450  
 предельные теоремы 3:448  
 предельный конус 3:444  
 предельный цикл 3:444  
 предикат 4:284  
 предикативность 4:286  
 предикатная переменная 4:286  
 предикатный символ 4:286  
 предикатов исчисление 4:284  
 предкомпактное пространство 4:282  
 предложение 4:352  
 предмера 4:283  
 предметная область 2:277  
 предметный язык 3:1011  
 преднорма 4:283  
 предпорядок 4:283  
 предпучок 4:284  
 предсказуемая  $\sigma$ -алгебра 4:286  
 предсказуемый случайный процесс 4:286  
 представимости матриц проблема 4:596  
 представимый функтор 4:586  
 представление 4:287  
 представление алгебры Ли 4:588  
 представление ассоциативной алгебры 4:593  
 представление бесконечной группы 4:596  
 представление бикompактной группы 4:587  
 представление группы 4:588  
 представление компактной группы 4:587  
 представление полугруппы 4:590  
 представление симметрической группы 4:598  
 представление со старшим вектором 4:601  
 представление топологической группы 4:591  
 представление частично упорядоченного множества 4:590  
 представлений кольцо 4:670  
 представлений теория 4:600  
 представления классических групп 4:596  
 представляющая функция 4:586  
 прекращения точка 4:202  
 преобразование 5:246  
 преобразование с сохранением меры 3:705  
 преобразований группа 5:246  
 преобразований полугруппа 5:246  
 препятствие 3:1012  
 преследования игра 4:376  
 приближение в среднем 1:195  
 приближение функций 1:199  
 приближение функций комплексного переменного 1:210  
 приближение функций линейные методы приближения 1:207  
 приближение функций многих действительных переменных 1:213  
 приближение функций, прямые и обратные теоремы 1:202  
 приближение функций, экстремальные задачи на классах функций 1:204  
 приближения порядок 1:215  
 приближения теория 1:215  
 приближения функций мера 1:210  
 Привалова операторы 4:304  
 Привалова теорема 4:305  
 приведение к абсурду 4:531  
 приведенная система вычетов 4:530  
 приведенная схема 4:530  
 привилегированный компакт 4:306  
 приводимая линейная система 4:531  
 приводимое представление 4:531  
 приводимое Риманово пространство 4:531  
 призма 4:304  
 призматок 4:304  
 прикосновения точка 4:354  
 примарное кольцо 4:289  
 примарное представление 4:289



- примарное разложение 4:288  
 примарный идеал 4:288  
 примитивная группа подстановок 4:291  
 примитивная рекурсия 4:292  
 примитивно рекурсивная функция 4:293  
 примитивное кольцо 4:294  
 примитивный идеал 4:292  
 примитивный класс 4:291  
 примитивный многочлен 4:292  
 приоритета метод 4:303  
 присоединенная группа 1:45  
 присоединенная поверхность 1:47  
 присоединенное представление 1:46  
 пристрелки метод 4:815  
 притяжения область устойчивого распределения 1:252  
 проблемно - ориентированный язык 4:318  
 прогонки метод 2:286  
 программ оптимизирующие преобразования 4:322  
 программа 4:321  
 программирование 4:323  
 программирование параллельное 4:80  
 программирование теоретическое 5:155  
 программирования язык 4:323  
 программы схема 4:322  
 прогрессия 4:324  
 про -  $p$  - группа 4:306  
 продолжаемость решений дифференциальных уравнений 4:347  
 продолжений и охватов метод 3:721  
 продолжения по параметру метод 1:803 ; 1:804  
 продолжения теоремы 2:428  
 продолжения теоремы в аналитической геометрии 2:429  
 продуктивное множество 4:320  
 проективная алгебра 4:329  
 проективная геометрия 4:335  
 проективная группа 4:336  
 проективная дифференциальная геометрия 4:334  
 проективная метрика 4:337  
 проективная нормаль 4:339  
 проективная плоскость 4:340  
 проективная прямая 4:345  
 проективная связность 4:330  
 проективная схема 4:342  
 проективное алгебраическое множество 4:330  
 проективное изгибание 4:333  
 проективное мероопределение 4:333  
 проективное множество 4:343  
 проективное накрытие 4:333  
 проективное представление 4:341  
 проективное преобразование 4:346  
 проективное пространство 4:344  
 проективные координаты 4:332  
 проективный модуль 4:338  
 проективный объект категории 4:339  
 проективный предел 4:337  
 проективный спектр кольца 4:345  
 проектор, проекционный оператор 4:346  
 проекционные методы 4:327  
 проекционный спектр 4:328  
 проекция 4:326  
 произведение семейства объектов категории 4:320  
 производная 2:52  
 производная категория 2:53  
 производное множество 2:56  
 производное правило 2:56  
 производное число Дини 2:188  
 производный автоморфизм 2:53  
 производный функтор 2:55  
 производящая функция 2:693  
 производящий оператор полугруппы 2:693  
 произвольных постоянных вариация 5:378  
 проконечная группа 4:321  
 промежуточная логика 3:130  
 промежуточный Якобиан 3:129  
 пронормальная подгруппа 4:348  
 пропозициональная переменная 4:354  
 пропозициональная связка 4:353  
 пропозициональная форма 4:353  
 пропозициональная формула 4:353  
 пропозициональная функция 4:354  
 пропозициональное исчисление 4:352  
 простая алгебра 4:826  
 простая гипотеза 4:829  
 простая группа 4:828  
 простая дуга 4:826  
 простая конечная группа 4:827  
 простая полугруппа 4:831  
 простейший поток 2:335  
 простого слоя потенциал 4:829  
 простое кольцо 4:831  
 простое множество 4:832  
 простое отношение 4:830  
 простое поле 4:289  
 простое представление 4:831

простое число 4:290  
 простой гомотопический тип 4:828  
 простой идеал 4:289  
 простой интервал 2:335  
 простой итерации метод 4:829  
 простой элемент 4:289  
 пространственные формы 4:899  
 пространство 4:898  
 $H$ -пространство 2:795  
 $K$ -пространство 3:238  
 $T_1$ -пространство 5:127  
 пространство над алгеброй 4:902  
 пространство отображений топологическое 4:901  
 пространство с индефинитной метрикой 4:904  
 пространство с мерой 3:705  
 пространство - время 4:903  
 противоположная теорема 1:825  
 противоречивый класс 3:32  
 противоречие 1:824  
 противоречия закон 1:824  
 процедура 4:318  
 Прюфера поверхность 4:356  
 прямая 5:28  
 прямая сумма 2:206  
 прямое произведение 2:205  
 $O$ -прямое объединение 3:1011  
 прямой пересчет 2:204  
 прямоугольник 4:517  
 прямоугольников формула 4:517  
 прямых метод 2:204  
 псевдобаза 4:357  
 псевдобулева алгебра 4:357  
 псевдовектор 4:375  
 псевдовыпуклость и псевдovoгнутость 4:359  
 псевдогалилеево пространство 4:367  
 псевдогруппа 4:367  
 псевдогрупповая структура 4:369  
 псевдодифференциальный оператор 4:362  
 псевдодуга 4:357  
 псевдоевклидово пространство 4:366  
 псевдоквадратичная форма 4:372  
 псевдокомпактное пространство 4:359  
 псевдоконформное отображение 4:359  
 псевдометрика 4:371  
 псевдометрическое пространство 4:371  
 псевдомногообразие 4:370  
 псевдонормирование 4:371

псевдооткрытое отображение 4:371  
 псевдопериодическая функция 4:372  
 псевдориманова геометрия 4:372  
 псевдориманово пространство 4:373  
 псевдоскаляр 4:373  
 псевдоскалярное произведение 4:374  
 псевдослучайные числа 4:372  
 псевдосфера 4:374  
 псевдотензор 4:374  
 псевдохарактер 4:359  
 псевдоэллиптический интеграл 4:366  
 пси - функция 4:375  
 Птолемея теорема 4:375  
 Пуанкаре гипотеза 4:191  
 Пуанкаре группа 4:195  
 Пуанкаре двойственность 4:192  
 Пуанкаре дивизор 4:191  
 Пуанкаре задача 4:197  
 Пуанкаре интерпретация 4:196  
 Пуанкаре комплекс 4:191  
 Пуанкаре пространство 4:199  
 Пуанкаре сфера 4:200  
 Пуанкаре теорема 4:200; 4:201  
 Пуанкаре теорема возвращения 4:198  
 Пуанкаре теорема последняя 4:195  
 Пуанкаре уравнения 4:194  
 Пуанкаре - Бендиксона теория 4:189  
 Пуанкаре - Бертрана формула 4:190  
 Пуассона интеграл 4:208  
 Пуассона метод суммирования 4:211  
 Пуассона преобразование 4:212  
 Пуассона распределение 4:204  
 Пуассона скобки 4:204  
 Пуассона теорема 4:211  
 Пуассона уравнение 4:205  
 Пуассона уравнение, численные методы решения 4:206  
 Пуассона формула 4:208  
 Пуассона формула суммирования 4:211  
 Пуассоновский поток 4:208  
 Пуассоновский процесс 4:210  
 пульверизация 4:957  
 пунктированное пространство 4:203  
 пунктированный объект 4:203  
 пунктиформный нарост 4:203  
 пустое множество 2:357  
 пустых ящиков критерий 2:357  
 путей пространство 4:109



путь 4:108  
 пучков теория 4:803  
 пучок 4:803  
 Пфаффа проблема 4:150  
 Пфаффа система 4:153  
 Пфаффа структура 4:152  
 Пфаффа уравнение 4:148

Пфаффа форма 4:149  
 Пфаффиан 4:148  
 Пьерпонта вариация 4:165  
 Пэли - Винера теорема 4:64  
 Пюизё ряд 4:375  
 пятый постулат 2:468

## Р

Раабе признак 4:464  
 равенства аксиомы 2:373  
 равновеликие и равноставленные фигуры 2:372  
 равновесия положение 2:376  
 равновесия соотношение 2:377  
 равномерная алгебра 5:319  
 равномерная непрерывность 5:321  
 равномерная ограниченность 5:320  
 равномерная подгруппа 5:326  
 равномерная сходимости 5:321  
 равномерная топология 5:327  
 равномерная устойчивость 5:326  
 равномерно наиболее мощный критерий 5:331  
 равномерно сходящийся ряд 5:329  
 равномерное приближение 5:320  
 равномерное пространство 5:323  
 равномерное распределение 5:322  
 равномерной сходимости топология 5:225  
 равносильность 2:378  
 равносильные методы суммирования 2:378  
 равностепенная непрерывность 2:376  
 равносходящиеся ряды 2:376  
 Радемахера система 4:464  
 радиальное граничное значение 4:465  
 радиан 4:466  
 радикал 4:468  
 радикал в классе полугрупп 4:469  
 радикал группы 4:469  
 радикал идеала 4:470  
 радикалы колец и алгебр 4:470  
 радикальная ось 4:468  
 радиус 4:472  
 радиус - вектор 4:473  
 Радона квадратурная формула 4:464  
 Радона интеграл 4:473  
 Радона мера 4:473  
 Радона преобразование 4:474

Радона - Никодима теорема 4:473  
 разбавление ряда 2:177  
 разбиение 2:19  
 развертка 2:409  
 развертывающаяся поверхность 2:67  
 разделения переменных метод 4:783  
 разделительная дизъюнкция 2:415  
 различающая коцепь 2:76  
 различающий элемент в  $K$ -теории 2:77  
 различных представителей система 5:120  
 разложение единицы 4:608  
 разложимая группа 4:955  
 размах (выборки) 4:489  
 размерностей анализ 2:186  
 размерности аддитивные свойства 2:182  
 размерности теория 2:184  
 размерности функция 2:183  
 размерностный инвариант 2:183  
 размерностный многочлен 2:184  
 размерность 2:178  
 размещение 1:234  
 разностная вариационная схема 2:81  
 разностная схема 2:80  
 разностное множество 2:89  
 разностное уравнение 2:77  
 разностные методы 2:79  
 разностный оператор 2:79  
 разностных схем теория 2:85  
 разность множеств 2:79  
 разреженная матрица 4:906  
 разреженное множество 2:470  
 разреженность множества 5:164  
 разрез 1:915  
 разреза множество 1:915  
 разрешение особенностей 4:607  
 разрешения проблема 4:517  
 разрешимая группа 4:896

- разрешимая формула 2:17  
 $\pi$ -разрешимая группа 4:56  
 разрешимое многообразие 4:896  
 разрешимое множество 2:17  
 разрешимый поток 4:896  
 разрешимый предикат 2:17  
 разрушения математические задачи 2:549  
 разрыва точка 2:221  
 разрывная вариационная задача 2:222  
 разрывная функция 2:222  
 разрывный множитель 2:222  
 Рама когомологии 2:15  
 Рама теорема 2:16  
 Рамануджана гипотеза 4:475  
 Рамануджана суммы 4:475  
 Рамануджана функция 4:474  
 Рамсея теорема 4:476  
 ранг 4:489  
 ранг алгебраической группы 4:491  
 ранг алгебры Ли 4:490  
 ранг группы 4:489  
 ранг группы Ли 4:490  
 ранг линейного обыкновенного дифференциального уравнения 4:491  
 ранг модуля 4:490  
 ранг особой точки 4:491  
 рангов вектор 4:493  
 ранговая статистика 4:492  
 ранговый критерий 4:493  
 рандомизации критерий 4:488  
 рандомизация 4:488  
 Рао - Блэкуэлла - Колмогорова теорема 4:494  
 Рао - Крамера неравенство 4:495  
 расделение 4:104  
 раскроя задача 1:915  
 распада разрыва метод 2:20  
 расписаний теория 4:715  
 распознавание образов 4:109  
 распределение 2:253  
 распределение вероятностей 4:308  
 распределение дробных долей 2:255  
 распределение дробных долей многомерное 2:255  
 распределение простых чисел 2:256  
 распределение степенных вычетов и невычетов 2:256  
 $F$ -распределение 2:444  
 $t$ -распределение 5:126  
 $T^2$ -распределение 5:126  
 $W$ -распределение 5:446  
 $z$ -распределение 5:535  
 распределений полное семейство 2:262  
 распределений сходимость 2:262  
 распределений тип 2:262  
 распределения закон 2:254  
 распределения значений теория 5:366  
 распределения функция 2:253  
 рассеивания эллипсоид 2:247  
 Рассела парадокс 4:702  
 рассеяния матрица 4:713  
 расслоение 2:465; 2:466  
 $G$ -расслоение 2:618  
 расслоения пространство 5:233  
 расслоенная выборка 5:30  
 расслоенное произведение 2:465  
 Расслоенное пространство 4:713  
 растягивающее отображение 2:417  
 расходящаяся последовательность 2:266  
 расходящийся интеграл 2:266  
 расходящийся ряд 2:266  
 расширение алгебры Ли 2:423  
 расширение ассоциативной алгебры 2:425  
 расширение группы 2:422  
 расширение дифференциального поля 2:420  
 расширение модуля 2:424  
 расширение оператора 2:425  
 расширение полугруппы 2:424  
 расширение поля 2:422  
 расширение топологического пространства 2:425  
 расширения области принцип 2:428  
 расширенная комплексная плоскость 2:420  
 расширяющееся отображение 2:177  
 Расщепления метод 2:234  
 расщепляемая группа 4:956  
 расщепляющаяся последовательность 4:956  
 Рауса теорема 4:697  
 Рауса - Гурвица критерий 4:696  
 рациональная кривая 4:496  
 рациональная особенность 4:501  
 рациональная поверхность 4:502  
 рациональная функция 4:496  
 рациональное многообразие 4:502  
 рациональное отображение 4:498  
 рациональное представление 4:499  
 рациональное число 4:498  
 рациональности теоремы 4:503



- реакция - диффузии уравнение 4:506  
 реализуемость 4:515  
 ребро многогранника 4:616  
 регрессии коэффициент 4:543  
 регрессии матрица 4:543  
 регрессии поверхность 4:544  
 регрессии спектр 4:544  
 Регрессионный анализ 4:541  
 регрессия 4:540  
 $H^\infty$  - регулирования теория 2:794  
 регуляризации метод 4:557  
 регуляризация 4:557  
 регуляризация последовательностей 4:559  
 регулярная граничная точка 4:544  
 регулярная  $p$ -группа 4:548  
 регулярная мера 4:548  
 регулярная особая точка 4:555  
 регулярная полугруппа 4:553  
 регулярная решетка 4:547  
 регулярная схема 4:553  
 регулярная функция 4:547  
 регулярная функция множества 4:554  
 регулярная экстремаль 4:546  
 регулярное кольцо 4:550  
 \* - регулярное кольцо 4:464  
 регулярное кольцо (в смысле Неймана) 4:551  
 регулярное представление 4:550  
 регулярное простое число 4:550  
 регулярное пространство 4:555  
 регулярное событие 4:545  
 регулярности признаки 4:556  
 регулярные методы суммирования 4:556  
 регулярный автоморфизм 4:544  
 регулярный идеал 4:547  
 регулярный тор 4:556  
 регулярный элемент 4:545  
 регулятор поля алгебраических чисел 4:560  
 редуктивная группа 4:532  
 редуктивное пространство 4:532  
 резидуальное отображение 4:602  
 резная поверхность 3:838  
 резольвента 4:607; 4:609  
 резольвентное множество 4:610  
 резонанс 4:610  
 резонансные члены 4:610  
 результат 4:611  
 Рейдемейстера кручение 4:560  
 Рейнольдса число 4:615  
 рекуррентная точка 4:519  
 рекуррентная формула 4:519  
 рекуррентная функция 4:519  
 рекуррентное соотношение 4:518  
 рекуррентные события 4:518  
 рекурсивная игра 4:524  
 рекурсивная реализуемость 4:526  
 рекурсивная теория множеств 4:527  
 рекурсивная функция 4:523  
 рекурсивное определение 4:522  
 рекурсивное отношение 4:527  
 рекурсивное оценивание 4:523  
 рекурсивной эквивалентности тип 4:523  
 рекурсивный оператор 4:526  
 рекурсивный предикат 4:526  
 рекурсии высших ступеней 4:522  
 рекурсия 4:520  
 релаксации метод 4:570  
 релаксационное колебание 4:571  
 релейно - контактная схема 4:572  
 релятивистская динамика 4:565  
 релятивистская инвариантность 4:566  
 релятивистской астрофизики математические задачи 4:564  
 релятивистской гидродинамики математические задачи 4:565  
 релятивистской термодинамики математические задачи 4:566  
 релятивная геометрия 4:562  
 Реньи критерий 4:582  
 репер 2:550  
 реплика 4:585  
 репрезентативное подпространство 4:601  
 ретракт 4:614  
 ретракт топологического пространства 4:614  
 ретракция 4:615  
 Рефал 4:534  
 рефлексивное пространство 4:539  
 рефлексивность 4:540  
 рефлексивная подкатегория 4:539  
 рефлектор 4:539  
 рефлектор объекта категории 4:538  
 решающая функция 2:19  
 решение в теории игр 4:895  
 решетка метод 4:819  
 решетка 3:355

- решетка в группе Ли 3:358  
 решетка подалгебр 5:56  
 решетка с дополнениями 3:359  
 решетчатое распределение 3:357  
 Рибокура конгруэнция 4:616  
 Рибокура кривая 4:616  
 Риккартово кольцо 4:620  
 Риккати уравнение 4:616  
 Римана геометрия 4:622  
 Римана гипотезы 4:627  
 Римана дзета - функция 4:644  
 Римана дифференциальное уравнение 4:621  
 Римана интеграл 4:628  
 Римана метод 4:629  
 Римана метод суммирования 4:633  
 Римана обобщенная гипотеза 4:627  
 Римана производная 4:621  
 Римана соотношение 4:630  
 Римана сфера 4:632  
 Римана тензор 4:641  
 Римана теорема 4:642  
 Римана тета - функция 4:643  
 Римана функция 4:621  
 Римана - Гильберта задача 4:625; 4:626  
 Римана - Гурвица формула 4:626  
 Римана - Кристоффеля тензор 4:621  
 Римана - Роха теорема 4:630  
 Римана - Стильеса интеграл 4:633  
 Римана - Шварца поверхность 4:632  
 Римана - Шварца принцип 4:631  
 Риманова геометрия 4:645  
 Риманова геометрия в целом 4:650  
 Риманова кривизна 4:644  
 Риманова метрика 4:653  
 Риманова область 4:645  
 Риманова поверхность 4:633  
 Риманова связность 4:644  
 Риманово многообразие 4:653  
 Риманово пространство 4:653  
 Риманово пространство обобщенное 4:653  
 Риманово пространство однородное 4:656  
 Римановы координаты 4:644  
 Римановых поверхностей классификация 4:638  
 Римановых поверхностей конформные классы 4:639  
 Римские цифры 4:680  
 риск статистической процедуры 4:675  
 Рисовская полугруппа матричного типа 4:533  
 Рисса базис 4:657  
 Рисса интерполяционная формула 4:659  
 Рисса метод суммирования 4:662  
 Рисса неравенство 4:658  
 Рисса потенциал 4:659  
 Рисса произведение 4:660  
 Рисса пространство 4:660  
 Рисса система 4:663  
 Рисса теорема 4:663  
 Рисса теорема выпуклости 4:657  
 Рисса - Фишера теорема 4:658  
 Риссов теорема 4:664  
 Ритца метод 4:676  
 Ричардсона экстраполяция 4:619  
 Риччи кривизна 4:618  
 Риччи тензор 4:619  
 Риччи теорема 4:619  
 Риччи тождество 4:618  
 Ришара парадокс 4:619  
 робастная статистика 4:679  
 Робена задача 4:678  
 Робена ностоянная 4:677  
 род алгебраической функции 2:699  
 род кривой 2:698  
 род поверхности 2:698  
 род целой функций 2:699  
 род элемента арифметической группы 2:699  
 $L$ -род 3:314  
 Родрига формула 4:680  
 рождения и гибели процесс 1:371  
 рождения операторы 1:886  
 розы 4:686  
 Ролля теорема 4:680  
 ромб 4:615  
 Ромберга метод 4:681  
 Ромбическая сеть 4:615  
 роста индикатриса 2:791  
 росток 2:727  
 рулетта 4:693  
 Рунге область 4:699  
 Рунге правило 4:701  
 Рунге теорема 4:701  
 Рунге - Кутта метод 4:700  
 ручек теория 2:814  
 ручное вложение 5:129  
 Руше теорема 4:692  
 Рэлея распределение 4:505



Рэля уравнение 4:506

ряд 4:791

ряд Вальтерры 5:437

## С

Саккери четырехугольник 4:704

салонная игра 2:287

самоинъективное кольцо 4:749

самопересечения точка 4:749

самопериметр 4:749

самоприкосновения точка 4:750

самосопряженное дифференциальное уравнение 4:747

самосопряженное линейное преобразование 4:748

самосопряженный оператор 4:748

Сарда теорема 4:712

сбалансированное кольцо 1:297

сбалансированный модуль 1:297

свертка 1:854; 2:503

свертка тензора 1:823

свертки преобразование 1:855

сверхразрешимая группа 5:80

сверхрелаксации метод 2:960

сверхсходимость 4:53

сверхэффективная оценка 5:79

свободная Абелева группа 2:564

свободная алгебра 2:564

свободная алгебра над кольцом 2:564

свободная алгебраическая система 2:565

свободная ассоциативная алгебра 2:566

свободная Булева алгебра 2:566

свободная группа 2:567

свободная переменная 2:571

свободная полугруппа 2:570

свободная резольвента 2:570

свободная решетка 2:569

свободно становящаяся последовательность 2:571

свободное гармоническое колебание 2:567

свободное множество 2:571

свободное объединение 2:566

свободное произведение 2:569

свободное произведение групп 2:569

свободный вектор 2:571

свободный группоид 2:567

свободный модуль 2:569

сводимости аксиома 4:530

связанная переменная 1:409

связанный вектор 1:409

связка 1:449; 3:890

связка полугрупп 1:309

связная компонента единицы 1:774

связная сумма 1:775

связное множество 1:775

связное пространство 1:775

связности на многообразии 1:778

связности объект 1:778

связности форма 1:777

связности число 1:778

связность 1:775; 1:780

сгущения точка 1:731

сдвиг 4:807

сдвига оператор 4:810

сдвига параметр 4:810

сдвиги полугрупп 5:253

сдвигов динамическая система 4:809

сегмент 4:741

Сегре вложение 4:742

седло 4:705

седло в бесконечности 4:705

седловая поверхность 4:708

седловая точка 4:706

седловая точка (в теории игр) 4:706

седло - узел 4:705

секанс 4:735

секвенциально компактное пространство 4:790

секвенциальное пространство 4:790

секвенций исчисление 4:786

секвенция 4:786

сектор 4:739

сектор в теории обыкновенных дифференциальных уравнений 4:740

секунда 4:736

секущих метод 4:735

секционная кривизна 4:739

Сельберга решетот 4:745

семантика 4:750

семиинвариант 4:769

семимартингал 4:770

сепарабельная алгебра 4:780

сепарабельное отображение 4:782

- сепарабельное пространство 4:783
- сепарабельное расширение 4:781
- сепарабельный процесс 4:782
- сепаративная полугруппа 4:783
- сепаратриса 4:784
- сериальный коэффициент корреляции 4:791
- серии представлений 4:796
- серий подгруппа 4:791
- серий схема 4:785; 4:791; 5:268
- Серпиньского кривая 4:819
- серра подкатегория 4:797
- серра расслоение 4:797
- сетевая модель 3:894
- сетевое планирование 3:895
- сетевой график 3:894
- сеток метод 2:778
- сеть 3:891; 3:892; 3:893; 5:460
- сеть сфер 5:461
- сеть топологического пространства 3:892
- сечение 4:739
- сечение отображения 4:739
- сжатие 1:821
- сжатие алгебры Ли 1:822
- сжатий полугруппа 1:823
- сжимающий оператор 1:823
- сжимающих отображений принцип 1:820
- сигнатура 4:821
- сигнум 4:823
- сизигия 5:125
- Силова базис 5:91
- Силова подгруппа 5:91
- Силова теоремы 5:92
- сильная гомология 5:35
- сильная производная 5:34
- сильная топология 5:39
- сильно непрерывная полугруппа 5:39
- сильное дифференцирование 5:34
- сильное решение 5:38
- сильный интеграл 5:36
- сильный относительный минимум 5:38
- сильный экстремум 5:35
- символ норменного вычета 3:969
- символ оператора 5:92
- символическая динамика 5:94
- симметризации метод 5:105
- симметризация 5:103
- симметрии критерий 5:108
- симметрии принцип 5:108
- симметрика на множестве 5:107
- симметрирование 5:105
- симметрическая алгебра 5:96
- симметрическая группа 5:99
- симметрическая матрица 5:100
- симметрическая область 5:98
- симметрическая производная 5:97
- симметрическая разность 5:98
- симметрическая разность порядка  $n$  5:97
- симметрическая функция 5:99
- симметрический многочлен 5:101
- симметрический оператор 5:101
- симметрический тензор 5:103
- симметрическое производное число 5:97
- симметрическое пространство 5:102
- симметричная алгебра 5:96
- симметричное представление 3:179
- симметричность 5:107
- симметричный оператор 5:101
- симметрия 5:106
- симплекс 4:832
- симплексный метод 4:833
- симплексный поиск 4:834
- симплектическая группа 5:109
- симплектическая связность 5:109
- симплектическая структура 5:112
- симплектическое многообразие 5:111
- симплектическое пространство 5:111
- симплектическое пространство однородное 5:110
- симплициальная схема 4:834; 4:837
- симплициальное множество 4:837
- симплициальное отображение 4:836
- симплициальное пространство 4:841
- симплициальный объект 4:836
- Симпсона формула 4:482
- Симсона прямая 4:842
- Симула 4:843
- сингулярная функция 4:848
- сингулярное интегральное уравнение 4:850
- сингулярное распределение 4:846
- сингулярные гомологии 4:848
- сингулярный интеграл 4:849
- синтаксис 5:115
- синтаксическая структура 5:113
- синтаксическая теорема 5:115
- синтаксический язык 5:112



- синтеза задачи 5:115  
 синтетическая дифференциальная геометрия 5:119  
 синус 4:843  
 синус амплитуды 4:844  
 синус гиперболический 4:846  
 синус Гордона уравнение 4:844  
 синусов теорема 4:846  
 синусоида 4:868  
 синусоидальная спираль 4:868  
 синус - преобразование Фурье 2:538  
 A - система 1:2  
 K - система 3:238  
 L - система 3:314  
 Y - система 5:527  
 систем подмногообразий 5:121  
 системное программирование 5:124  
 скаляр 4:712  
 скалярная кривизна 4:712  
 скалярное поле 4:712  
 скалярное произведение 3:84  
 сканирования метод 4:713  
 скачков функция 3:234  
 скачкообразный процесс 3:235  
 скелет категории 4:869  
 склеивание 2:733  
 склеивания метод 2:734  
 склеивания теоремы 2:734  
 сколема парадокс 4:873  
 сколема функция 4:872  
 скольжений группа 2:787  
 скользящего среднего процесс 3:839  
 скользящий вектор 4:873  
 скрещенное произведение 1:889  
 скрещенные модули 1:891  
 скрещенный гомоморфизм 1:890  
 скрещивающиеся прямые 4:870  
 слабая гомология 5:458  
 слабая особенность 5:459  
 слабая производная 5:457  
 слабая сходимости вероятностной меры 5:457  
 слабая топология 5:459  
 слабо бесконечномерное пространство 5:460  
 слабо блуждающее множество 5:460  
 слабое решение 5:459  
 слабый относительный минимум 5:458  
 слабый экстремум 5:457  
 Славянские цифры 4:873  
 след 5:237 ; 5:238  
 след на  $C^*$ -алгебре 5:238  
 слово 5:522  
 слоение 2:503  
 сложение 1:33  
 сложение множеств 1:33  
 сложная гипотеза 1:723  
 сложная система 1:716  
 сложная функция 1:721  
 сложности теория 1:719  
 случайная величина 4:484  
 случайная последовательность 4:484  
 случайная функция 4:483  
 случайное блуждание 4:485  
 случайное кодирование 4:479  
 случайное отображение 4:484  
 случайное поле 4:480  
 случайное поле обобщенное 4:481  
 случайное поле однородное 4:482  
 случайное событие 4:480  
 случайные и псевдослучайные числа 4:478  
 случайные размещения 4:477  
 случайный процесс 5:13  
 случайный процесс дифференцируемый 5:16  
 случайный процесс обновляющий 5:17  
 случайный процесс обобщенный 5:16  
 случайный процесс с независимыми приращениями 5:17  
 случайный процесс со стационарными приращениями 5:18  
 случайный процесс согласованный 5:16  
 случайный точечный процесс 5:10  
 случайный точечный процесс с ограниченным последствием 5:12  
 случайный элемент 4:479  
 случайных величин преобразование 4:485  
 случайных процессов интерполяция 5:21  
 случайных процессов прогнозирование 5:22  
 случайных процессов фильтрация 5:19  
 смежный класс 1:867  
 смешанная группа 3:773  
 смешанная задача 3:774  
 смешанная и краевая задачи для гиперболических уравнений и систем 3:367  
 смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем 3:770  
 смешанного типа уравнение 3:774  
 смешанное произведение 3:774  
 смешанный процесс авторегрессии скользящего среднего

- 3:773
- смешанных объемов теория 3:777
- смещенная оценка 1:351
- Смирнова класс 4:880
- Смирнова критерий 4:881
- Смирнова область 4:881
- Снедекора распределение 4:885
- Снобол 4:885
- Соболева класс функций 4:886
- Соболева обобщенная производная 4:886
- Соболева пространство 4:886
- собственная функция 2:322
- собственное значение 2:322
- собственные значения дифференциальных операторов 2:323
- собственные значения интегральных операторов, численные методы нахождения 2:325
- собственные колебания 2:322
- собственный вектор 2:327
- собственный морфизм 4:351
- совершенная группа 1:694
- совершенная мера 4:120
- совершенная нормальная форма 4:121
- совершенно нормальное пространство 4:123
- совершенное бикомпактное расширение 4:119
- совершенное кольцо 4:122
- совершенное множество 4:122
- совершенное неприводимое отображение 4:120
- совершенное отображение 4:120
- совершенное поле 4:119
- совершенное число 4:121
- совместное распределение 3:227
- совместность методов суммирования 1:689
- совпадение 5:173
- согласия критерий 2:739
- согласованные распределения 1:689
- содержание 1:802
- соединение 3:226
- соизмеримые и несоизмеримые величины 1:668
- сокращенная нормальная форма 4:530
- солвмногобразие 4:895
- соленоид 4:893
- соленоидальное поле 4:893
- солитон 4:894
- Сонина интеграл 4:897
- сообщений квантование 3:75
- сообщений скорость создания 3:75
- сообщений точность воспроизведения 3:73
- соответствие 1:865
- соответствие границ при конформном отображении 1:410
- соответствия границ принцип 1:409
- соприкасающаяся квадрака 4:50
- соприкасающаяся окружность 4:49
- соприкасающаяся плоскость 4:50
- соприкасающаяся сфера 4:50
- соприкасающийся параболоид 4:50
- соприкосновение 4:51
- сопряженная матрица 1:45
- сопряженная сеть 1:773
- сопряженная функция 1:770
- сопряженное дифференциальное уравнение 1:42
- сопряженное линейное преобразование 1:45
- сопряженное пространство 1:47
- сопряженные гармонические функции 1:772
- сопряженные изотермические координаты 1:773
- сопряженные направления 1:770
- сопряженные связности 1:42
- сопряженный класс функций 1:769
- сопряженный модуль 1:45
- сопряженный оператор 1:46
- сопряженный тригонометрический ряд 1:773
- сопряженный функтор 1:44
- сопряженный элемент 1:770
- сопряженных градиентов метод 1:771
- составной идеал 1:723
- состоятельная оценка 1:782
- состоятельный критерий 1:782
- софокусные кривые 1:748
- Сохоцкого теорема 4:892
- Сохоцкого формулы 4:891
- сохранения области принцип 4:287
- сочетание 1:661
- спаривание 4:64
- спектр  $C^*$ -алгебры 4:932
- спектр (в категории) 5:120
- спектр динамической системы 4:932
- спектр кольца 4:933
- спектр матрицы 4:933
- спектр оператора 4:934
- спектр пространств 4:935
- спектр элемента 4:933
- спектральная мера 4:919
- спектральная оценка максимальной энтропии 3:689
- спектральная оценка параметрическая 4:917



- спектральная плотность 4:916  
 спектральная последовательность 4:921  
 спектральная теория 4:924  
 спектральная теория дифференциальных операторов 4:927  
 спектральная функция 4:917; 4:920  
 спектральная функция стационарного случайного процесса 4:918  
 спектральное множество 4:923  
 спектральное окно 4:931  
 спектральное разложение случайной функции 4:913  
 спектральное разложение линейного оператора 4:912  
 спектральной плотности оценка 4:916  
 спектральной функции оценка 4:917  
 спектральные гомологии 4:918  
 спектральный анализ 4:910  
 спектральный анализ стационарных случайных процессов 4:912  
 спектральный оператор 4:919  
 спектральный радиус 4:919  
 спектральный семиинвариант 4:920  
 спектральный синтез 4:923  
 спектральный тип 4:931  
 специализация точки 4:909  
 специальная линейная группа 4:908  
 специальные функции 4:907  
 специальный автоморфизм 4:906  
 специальный поток 4:907  
 спин 4:949  
 спинор 4:949  
 спинорная группа 4:950  
 спинорная структура 4:951  
 спинорное представление 4:950  
 спирали 4:952  
 si-ci-спираль 4:816  
 Спирмена коэффициент ранговой корреляции 4:906  
 сплайн 4:952  
 сплайн - аппроксимация 4:953  
 сплайн - интерполяция 4:955  
 сплетающий оператор 3:149  
 сплетение 5:523  
 сплетения число 3:149  
 спорадическая простая группа 4:956  
 спрямления точка 4:203  
 спрямляемая кривая 4:518  
 спрямляющая плоскость 4:518  
 спуска метод 2:58  
 сравнение 1:760  
 сравнение от нескольких переменных 1:767  
 сравнение по двойному модулю ( $p_1, f(x)$ ) 1:764  
 сравнение по простому модулю 1:764  
 сравнение топологий 1:687  
 сравнения признак сходимости 1:687  
 сравнения теорема 1:688  
 сравнения теоремы 1:689  
 сравнения уравнение 1:762  
 сравнения функция 1:687  
 среднее 1:283  
 среднее движение 1:284  
 среднеквадратическое приближение функции 3:696  
 средних арифметических метод суммирования 1:233  
 средняя кривизна 3:695  
 стабилизатор 4:976  
 стабильная гомотопическая группа 4:978  
 стабильности теоремы (в алгебраической K-теории) 4:972  
 стабильные и нестабильные теории 4:976  
 стабильный ранг 4:978  
 стандартизации и унификации математические задачи 4:980  
 стандартная конструкция 4:979  
 стандартная программа 4:979  
 стандартное отклонение 4:979  
 стандартный симплекс 4:980  
 статика 4:983  
 статистика 4:1018  
 статистика, лежащая в основе критерия 5:150  
 статистическая гипотеза 4:1004  
 статистическая игра 4:1002  
 статистическая оценка 4:1000  
 статистическая сумма 4:1016  
 статистическая эргодическая теорема 4:993  
 статистические задачи теории случайных процессов 4:1011  
 статистический анализ случайных процессов 4:990  
 статистический ансамбль 4:991  
 статистический контроль качества 4:1015  
 статистический критерий 4:1017  
 статистический приемочный контроль 4:988  
 статистических гипотез проверка 4:1002  
 статистических испытаний метод 4:1000  
 статистических решений теория 4:990  
 статистическое моделирование 4:1008  
 статистическое оценивание 4:993  
 статистической механики математические задачи 4:1005  
 статистической физики математические задачи 4:1009

- стационарная подгруппа 4:988
- стационарное распределение 4:984
- стационарной фазы метод 4:984
- стационарный случайный процесс 4:985
- Стеклова проблемы 4:1031
- Стеклова функция 4:1031
- Степанова почти периодические функции 4:1033
- степенная функция 4:277
- степенной вычет 4:278
- степенной ряд 4:279
- степень 4:277
- степень отображения 2:38
- степень точки 2:38
- стерадиан 4:1035
- стереографическая проекция 4:1035
- стереоэдр 4:1035
- Стефана задача 4:1023
- Стефана обратная задача 4:1025
- Стефана условие 4:1023
- Стефана - Больцмана закон 4:1023
- Стеффенсена интерполяционная формула 4:1025
- Стилтьеса интеграл 4:1038
- Стилтьеса преобразование 4:1039
- Стинрода алгебра 4:1018
- Стинрода двойственность 4:1018
- Стинрода задача 4:1020
- Стинрода квадрат 4:1021
- Стинрода операция 4:1020
- Стинрода приведенная степень 4:1020
- Стинрода - Эйленберга аксиомы 4:1019
- Стирлинга интерполяционная формула 4:1044
- Стирлинга формула 4:1044
- Стокса теорема 5:25
- Стокса формула 5:24
- Стокса явление 5:24
- Стоуна пространство 5:26
- Стоуна решетка 5:25
- Стоуна - Чеха бикompактное расширение 5:25
- стохастическая аппроксимация 5:1
- стохастическая геометрия 5:6
- стохастическая зависимость 5:2
- стохастическая игра 5:5
- стохастическая матрица 5:9
- стохастическая непрерывность 5:2
- стохастическая неразличимость 5:7
- стохастическая ограниченность 5:2
- стохастическая последовательность 5:24
- стохастическая сходимость 5:2
- стохастическая эквивалентность 5:5
- стохастический базис 5:2
- стохастический вычислительный алгоритм 5:10
- стохастический дифференциал 5:3
- стохастический интеграл 5:7
- стохастический интервал 5:8
- стохастическое дифференциальное уравнение 5:4
- стохастическое программирование 5:23
- странный аттрактор 5:28
- стратегия в теории игр 5:29
- стратификация 5:29
- стратоновича интеграл 5:30
- строгая эргодичность 5:35
- строгой импликации исчисление 5:32
- строфоида 5:40
- Струве функция 5:43
- структура 5:41
- $(B, \varphi)$ -структура 1:295
- $G$ -структура 2:619
- структурная константа 5:43
- структурная лингвистика 5:40
- структурно упорядоченная группа 3:358
- структурное пространство 5:43
- структурный изоморфизм 5:40
- струхаля число 5:40
- струя 3:226
- ступенчатая семантическая система 4:1033
- Стьюдента критерий 5:45
- Стьюдента распределение 5:44
- Стьюдентизированный размах 5:46
- Стэнтона число 4:981
- субгармоническая функция 5:61
- субдифференциал 5:58
- субмерсия 5:65
- субнормальная подгруппа 5:66
- субнормальный ряд 5:66
- субпараболическая функция 5:67
- субпроективное пространство 5:68
- Судзуки группа 5:90
- Судзуки 2-группа 5:90
- Судзуки спорадическая группа 5:91
- суждение 1:236
- сужение представления 1:822
- сумматорная функция 5:71
- суммирование 5:73
- суммирование расходящихся рядов 5:75



суммирование рядов Фурье 5:76  
 суммирования методы 5:73  
 суммируемая функция 5:73  
 суммируемости множители 5:72  
 суммируемости поле 5:72  
 суммируемость сильная 5:72  
 суммы рангов критерий 4:492  
 супералгебра 5:78  
 супергармоническая функция 5:80  
 супергруппа 5:76  
 супермногообразие 5:77  
 суперпараболическая функция 5:80  
 суперпозиция функций 5:80  
 суперпространство 5:77  
 Суслина гипотеза 5:88  
 Суслина критерий 5:88  
 Суслина проблема 5:89  
 Суслина теорема 5:89  
 Суслина условие 5:88  
 существенно неразрешимая теория 2:392  
 существенно особая точка 2:392  
 существенное отображение 2:391  
 существования квантор 2:417  
 сфер гомотопические группы 4:938  
 сфера 4:936  
 сферическая гармоника 4:944  
 сферическая геометрия 4:942  
 сферическая индикатриса 4:946  
 сферическая тригонометрия 4:948  
 сферические координаты 4:940

табличная сводимость 5:284  
 тавтология 5:139  
 Тайхмюллера пространство 5:141  
 тактическая конфигурация 5:127  
 тамагавы мера 5:128  
 тамагавы число 5:128  
 тангенс 5:129  
 тангенс амплитуды 5:130  
 тангенс гиперболический 5:132  
 тангенсов формула 5:132  
 тангенсоида 5:131  
 тангенциальные координаты 5:134  
 тангенциальный вектор 5:133  
 Тарского проблема 5:135

сферические функции 4:941  
 сферических гармоник метод 4:944  
 сферическое отображение 4:946  
 схема 4:718  
 схема из функциональных элементов 2:71  
 схемная вязкость 2:84  
 сходимости множители 1:837  
 сходимости скорость 4:496  
 сходимости ускорение 1:28  
 сходимость 1:837  
 сходимость в среднем порядка  $p$  1:837  
 сходимость дискретная 1:835  
 сходимость мер 1:837  
 сходимость по вариации 1:837  
 сходимость по вероятности 1:836  
 сходимость по мере 1:836  
 сходимость по норме 1:836  
 сходимость по распределению 1:836  
 сходимость почти всюду 1:835  
 сходимость почти наверное 1:835  
 сходимость с вероятностью единица 1:841  
 счетноаддитивная функция множеств 1:871  
 счетное множество 1:870  
 счетнокомпактное пространство 1:871  
 счетномерное пространство 1:871  
 счетнонормированное пространство 1:871  
 счисление 3:1008  
 сюрдействительное число 5:87  
 сюръекция 5:86

## Т

Тауберовы теоремы 5:138  
 Тейлора многочлен 5:140  
 Тейлора ряд 5:140  
 Тейлора формула 5:139  
 Тейта алгебра 5:135  
 Тейта гипотезы 5:136  
 Тейта кривая 5:137  
 Тейта модуль 5:137  
 телеграфное уравнение 5:141  
 телесный угол 4:893  
 тело 4:870  
 теневой анализ 5:309  
 тензор на векторном пространстве 5:145  
 тензорная алгебра 5:142

- тензорная плотность 5:144  
тензорное исчисление 5:144  
тензорное произведение 5:146  
тензорное расслоение 5:144  
тензорный анализ 5:142  
теорема 5:154  
теоретико-числовая функция 3:1005  
теория формальная 5:157  
К-теория 3:239  
Тёплица матрица 5:182  
Тёплицева форма индефинитная 5:182  
теплопроводности уравнение 5:159  
терм 5:149  
термодинамики математические задачи 5:160  
термодинамический потенциал 5:159  
термодинамический предельный переход 5:160  
тернарное поле 5:149  
терциарный идеал 5:150  
тест 5:150  
тесное и напряжённое погружения 5:173  
тета-ряд 5:163  
тета-функция 5:161  
тетрациклические координаты 5:153  
тетраэдр 5:154  
тетраэдра пространство 5:154  
тетраэдральные координаты 5:154  
типично вещественная функция 5:305  
типов теория 5:304  
Титса здание 5:180  
Титса расслоение 5:181  
Титса система 5:181  
Титчмарша проблема 5:180  
Тихонова теорема 5:178  
Тихоновский куб 5:177  
Тихоновское произведение 5:178  
Тихоновское пространство 5:178  
тканей геометрия 5:462  
Тодда класс 5:182  
тождества проблема 3:6  
тождественная истинность 3:6  
толерантность 5:183  
толерантный интервал 5:183  
Тома изоморфизм 5:167  
Тома катастрофы 5:165  
Тома класс 5:166  
Тома пространство 5:167  
Тома спектр 5:168  
томография 5:184  
Томпсона подгруппа 5:168  
Тонелли плоская вариация 5:186  
Тонелли теорема 5:187  
тонкая топология 2:471  
тонкий пучок 2:470  
тонкое множество 5:164  
топологизированная категория 5:216  
топологическая алгебра 5:187  
топологическая группа 5:192  
топологическая динамика 5:189  
топологическая динамическая система 5:188  
топологическая полугруппа 5:196  
топологическая структура 5:201  
топологическая транзитивность 5:210  
топологическая эквивалентность 5:192  
топологическая энтропия 5:191  
топологические структуры 5:202  
топологический инвариант 5:194  
топологический модуль 5:195  
топологическое векторное пространство 5:211  
топологическое кольцо 5:196  
топологическое поле 5:192  
топологическое произведение 5:195  
топологическое пространство 5:198  
топологическое тензорное произведение 5:209  
топология 5:216  
топология вложений 5:221  
топология многообразий 5:223  
топос 5:225  
тор 5:231  
Торелли теорема 5:226  
торический узел 5:232  
тороидальная гармоника 5:227  
тороидальные координаты 5:227  
тотальное множество 5:232  
точечная оценка 4:201  
точечная решетка 3:358  
точка поля 4:166  
точная последовательность 2:411  
точное представление 2:450  
точный функтор 2:410; 2:449  
точный эндоморфизм 2:410; 2:449  
траектория 5:239  
трактриса 5:238  
транзитивная группа 5:250  
транзитивность 5:252



- трансекция 5:260  
 трансверсальная система 5:261  
 трансверсально эллиптический оператор 5:260  
 трансверсальное отображение 5:260  
 трансверсальности условие 5:262  
 трансверсальность 5:262  
 трангрессия 5:247  
 транслятивность метода суммирования 5:254  
 трансляционная инвариант метрика 5:252  
 трансляция 5:252  
 трансляция программ 5:252  
 трансмиссии условие 5:254  
 транспонированная матрица 5:259  
 транспонированные уравнения 5:259  
 транспортная задача 5:258  
 трансфинитная индукция 5:245  
 трансфинитная последовательность 5:246  
 трансфинитная рекурсия 5:245  
 трансфинитное число 5:245  
 трансфинитный диаметр 5:243  
 трансцендентная кривая 5:240  
 трансцендентная точка ветвления 5:240  
 трансцендентная функция 5:241  
 трансцендентное расширение 5:240  
 трансцендентное число 5:241  
 трансцендентности мера 5:239  
 трапеций формула 5:264  
 трапеция 5:264  
 третья краевая задача 5:165  
 треугольная алгебра Ли 3:428  
 треугольная группа 5:268  
 треугольная группа Ли 3:428  
 треугольная матрица 5:268  
 треугольник 5:267  
 треугольное число 5:268  
 треугольный метод суммирования 5:268  
 треугольный элемент 5:268; 5:271  
 Треффца метод 5:266  
 трех рядов теорема 5:171  
 'трех сигм' правило 5:171  
 трех тел задача 5:168  
 трехмерное многообразие 5:170  
 триада 5:267  
 триангуляция 5:269  
 тривектор 5:281  
 тригонометрическая система 5:278  
 тригонометрическая сумма 5:276  
 тригонометрические функции 5:272  
 тригонометрический полином 5:274  
 тригонометрический ряд 5:274  
 тригонометрических сумм метод 5:277  
 тригонометрическое интерполирование 5:273  
 тригонометрия 5:279  
 Трикоми задача 5:270  
 Трикоми уравнение 5:269  
 триортогональная система поверхностей 5:279  
 трисекция угла 5:281  
 тройка 5:279  
 трохоида 5:282  
 трубчатая область 5:286  
 трубчатая окрестность 5:286  
 тупиковая дизъюнктивная нормальная форма 2:16  
 турбулентности математические задачи 5:286  
 турнир 5:236  
 Туэ метод 5:171  
 Туэ система 5:172  
 Туэ - Зигеля - Рота теорема  
 Тьюринга машина 5:290  
 тяготения теория 2:767  
 тяжелого шарика метод 2:845

## У

- Уайтхеда гомоморфизм 5:494  
 Уайтхеда группа 5:493  
 Уайтхеда кручение 5:495  
 Уайтхеда произведение 5:495  
 Уайтхеда умножение 5:494  
 убедительное отношение 5:480  
 убывающее пространство 3:260  
 убывающая последовательность 2:21  
 убывающая функция 2:20  
 угловое граничное значение 1:183  
 угол 1:181  
 ударных волн математическая теория 4:811  
 удвоение куба 2:302  
 узкое исчисление предикатов 4:611  
 узлов и зацеплений группы 3:271  
 узлов и зацеплений диаграммы 3:269  
 узлов и зацеплений квадратичные формы 3:278  
 узлов кобордизм 1:626

- узлов таблица 3:272
- узлов теория 3:273
- узловая точка 3:914
- Уитни класс 5:496
- Уитни теорема о продолжений 5:496
- Уиттекера преобразование 5:497
- Уиттекера уравнение 5:497
- Уиттекера функции 5:497
- Уишарта распределение 5:515
- уклонение приближающей функции 2:67
- ультраборнологическое пространство 5:307
- ультрабочечное пространство 5:307
- ультрасферические многочлены 5:309
- ультрафильтр 5:307
- умножение 3:860
- унарная алгебра, уноид 5:311
- универсальная алгебра 5:348
- универсальная обертывающая алгебра 5:352
- универсальная функция 5:352
- универсальное множество 5:354
- универсальное покрытие 5:352
- универсальное поведение в динамических системах 5:350
- универсальное пространство 5:355
- универсальное свойство 5:354
- универсальные проблемы 5:353
- универсальный алгоритм 5:350
- универсальный нормальный алгоритм 5:353
- универсальный ряд 5:354
- универсальных алгебр многообразие 5:402
- универсум 5:356
- уникурсальная кривая 5:319
- униmodalное распределение 5:331
- униmodулярная группа 5:332
- униmodулярная матрица 5:333
- униmodулярная решетка 5:332
- униmodулярное преобразование 5:333
- униmodулярный элемент 5:332
- унипотентная группа 5:334
- унипотентная матрица 5:334
- унипотентный элемент 5:332; 5:333
- унирациональное многообразие 5:337
- унитарная группа 5:338
- унитарная матрица 5:339
- унитарно эквивалентные операторы 5:338
- унитарно эквивалентные представления 5:338
- унитарное представление 5:340
- унитарное преобразование 5:343
- унитарное пространство 5:343
- унитарный модуль 5:339
- унитарный оператор 5:339
- униформизация 5:327
- униформизирующий элемент 5:329
- уничтожения операторы 1:183
- Уолла группа 5:446
- Уолла инвариант 5:447
- Уолмена бикомпактное расширение 5:448
- Уолша система 5:448
- упаковка 4:59
- уплотняющий оператор 1:731
- уплошения точка 2:498
- упорядоченная группа 4:11
- упорядоченная полугруппа 4:13
- упорядоченная сумма 4:14
- упорядоченное кольцо 4:12
- упорядоченное множество 4:14
- упорядоченное поле 4:10
- упорядоченный группоид 4:11
- упорядочиваемая группа 4:10
- управляемый случайный процесс 1:828
- управляющая система 1:827
- управляющая функция 1:826
- упругости математическая теория 2:329
- уравнение 2:374
- уравнение в вариациях 5:389
- уравнение в контингенциях 1:803
- уравновешенное множество 1:297
- урновая схема 5:360
- уровня линия 3:391
- уровня множество 3:392
- Урысона лемма 5:362
- Урысона метризация теорема 5:362
- Урысона пространство 5:362
- Урысона уравнение 5:361
- Урысона - Брауэра лемма 5:361
- усеченное распределение 5:283
- условная вероятность 1:734
- условная плотность 1:732
- условная сходимости 1:732
- условная устойчивость 1:735
- условно периодическая функция 1:737
- условно периодическое движение 1:737
- условно полная решетка 1:737
- условное математическое ожидание 1:734
- условное распределение 1:732



условный экстремум 1:733  
 усреднение 1:285  
 установления метод 1:47  
 устойчивое распределение 4:977  
 устойчивости критерии 4:962  
 устойчивости область 4:972  
 устойчивости теоремы 4:972  
 устойчивости теория 4:973  
 устойчивости теория (в логике) 4:974  
 устойчивость 4:960  
 устойчивость абсолютная 4:960  
 устойчивость в теории игр 4:965  
 устойчивость вычислительного алгоритма 4:966

устойчивость вычислительного процесса 4:967  
 устойчивость по Лагранжу 3:329  
 устойчивость по Ляпунову 3:581  
 устойчивость по Пуассону 4:210  
 устойчивость по части переменных 4:964  
 устойчивость при постоянно действующих возмущениях 4:966  
 устойчивость разностных схем 4:970  
 устойчивость упругих систем 4:967  
 устойчивость характеристических показателей 4:969  
 устранение особенностей 1:459  
 устранимая особая точка 4:580  
 устранимое множество 4:579

## Ф

Фабера многочлены 2:444  
 Фабера - Шаудера система 2:445  
 Фабри теорема 2:445  
 Фавара задача 2:453  
 Фавара мера 2:453  
 Фавара неравенство 2:453  
 Фавара теорема 2:453  
 Фаддеева уравнение 2:449  
 фазовая плоскость 4:153  
 фазовая траектория 4:154  
 фазового равновесия диаграмма 4:153  
 фазовое пространство 4:153  
 фазовой скорости вектор 4:155  
 фазовый переход 4:155  
 фазовых интегралов метод 4:153  
 фактор 2:445  
 факторгруппа 4:460  
 факториал 2:447  
 факториальное кольцо 2:447  
 факторизационная теорема 2:448  
 факторизационные тождества 2:448  
 факторизация 2:447  
 факторкатегория 4:460  
 факторкольцо 4:462  
 факторное отображение 4:460  
 факторный анализ 2:446  
 факторобъект 4:461  
 факторпредставление 2:447; 4:462  
 факторпространство 4:462  
 Фано многообразие 2:451  
 Фано поверхность 2:450

Фано постулат 2:450  
 Фано схема 2:450  
 Фаньяно задача 2:449  
 Фарей ряд 2:451  
 Фату дуга 2:451  
 Фату теорема 2:452  
 Федоровская группа 2:455  
 Фейера метод суммирования 2:456  
 Фейера полином 2:455  
 Фейера сингулярный интеграл 2:455  
 Фейера сумма 2:455  
 Фейнмана интеграл 2:462  
 Фейнмана мера 2:463  
 Феллеровский процесс 2:456  
 Ферма малая теорема 2:460  
 Ферма принцип 2:460  
 Ферма спираль 2:460  
 Ферма теорема 2:457; 2:461  
 Ферми координаты 2:461  
 Ферми - Дирака статистика 2:461  
 Феррари метод 2:462  
 Фибоначчи метод 2:464  
 Фибоначчи числа 2:464  
 фигур многообразие 3:603  
 фигура 2:469  
 фидуциальное распределение 2:466  
 фильтр 2:469  
 фильтрованная алгебра 2:469  
 фильтрованный модуль 2:470  
 финальный объект 2:470  
 финитизм 2:484

- финитная задача 2:471  
 финитная общезначимость 2:471  
 финитная функция 2:591  
 финитно аппроксимируемая группа 4:602  
 финитно аппроксимируемая полугруппа 4:602  
 Финслерова геометрия 2:485  
 Финслерова метрика 2:486  
 Финслерово пространство 2:487  
 Финслерово пространство обобщенное 2:487  
 Фиттинга подгруппа 2:492  
 Фишера информационное количество 2:490  
 Фишера  $F$ -распределение 2:491  
 Фишера  $z$ -распределение 2:491  
 флаг 2:494  
 флаговая структура 2:495  
 флаговое пространство 2:495  
 Флоке теория 2:498  
 Флоке - Ляпунова теорема 2:498  
 Фока пространство 2:501  
 фокальная сеть конгруэнции 2:501  
 Фоккера - Планка уравнение 2:503  
 фокус 2:502; 2:503  
 форма 2:508  
 форма алгебраической группы 2:508  
 форма алгебраической структуры 2:509  
 формализации метод 2:521  
 формализм 2:520  
 формализованный язык 2:521  
 формальная группа 2:510  
 формальная производная 2:510  
 формальная система 2:520  
 формальное произведение тригонометрических рядов 2:519  
 формальный математический анализ 2:517  
 формальный степенной ряд 2:518  
 формальный язык 2:512  
 формальный язык и автоматы 2:513  
 формальный язык, представимый машиной 2:513  
 формальных систем эквивалентность 2:520  
 формула 2:522  
 Фортран 2:522  
 Фосса поверхность 5:445  
 Фосса сеть 5:444  
 Фрагмена - Линделёфа теорема 4:155  
 фракталы 2:542  
 Франклина система 2:551  
 Фраттини подгруппа 2:552  
 Фредгольма альтернатива 2:555  
 Фредгольма теоремы 2:563  
 Фредгольма уравнение 2:555  
 Фредгольма уравнение, численные методы решения 2:559  
 Фредгольма ядро 2:562  
 Фредгольмов оператор 2:562  
 Фрезера диаграмма 2:552  
 Фрейденталя бикompактное расширение 2:574  
 Френе трехгранник 2:572  
 Френе формулы 2:571  
 Френеля интегралы 2:573  
 Фреше вариация 2:554  
 Фреше дифференциал 2:553  
 Фреше поверхность 2:554  
 Фреше производная 2:553  
 Фреше пространство 2:553  
 Фридрикса неравенство 2:574  
 Фробениуса автоморфизм 2:575  
 Фробениуса теорема 2:576; 2:577  
 Фробениуса формула 2:576  
 Фробениуса эндоморфизм 2:575  
 Фробениусова алгебра 2:575  
 Фроммера метод 2:577  
 фронт волновой 5:453  
 Фруда число 2:578  
 Фубини интерпретация 2:579  
 Фубини теорема 2:580  
 Фубини форма 2:579  
 Фубини - Штуди метрика 2:580  
 Фукса уравнение 2:580  
 Фукова группа 2:582  
 фундаментальная группа 2:613  
 фундаментальная область 2:612  
 фундаментальная последовательность 2:615  
 фундаментальная система решений 2:616  
 фундаментальное решение 2:615  
 фундаментальный группоид 2:614  
 фундаментальный класс 2:611  
 фундаментальный коцикл 2:612  
 фундаментальный цикл 2:612  
 функтор 2:610  
 $K$ -функтор 3:237  
 функторный морфизм 2:611  
 функций действительного переменного теория 2:608  
 функций комплексного переменного теория 2:606  
 функций теория 2:592  
 функционал 2:592



функционал от Марковского процесса 2:604  
 функциональная отделимость 2:605  
 функциональная производная 2:598  
 функциональная система 2:606  
 функциональное исчисление 2:596  
 функциональное отношение 2:605  
 функциональное уравнение 2:598  
 функциональное уравнение, метод решения 2:601  
 функциональный анализ 2:592  
 функциональный определитель 2:598  
 функция 2:585  
 функция множеств 4:799  
 $L$ -функция 3:314  
 $\psi$ -функция 4:375  
 Фурье интеграл 2:528  
 Фурье интегральный оператор 2:529

Фурье коэффициенты 2:528  
 Фурье коэффициенты почти периодической функции 2:528  
 Фурье метод 2:532  
 Фурье показатели почти периодической функции 2:528  
 Фурье преобразование 2:539  
 Фурье преобразование дискретное 2:541  
 Фурье преобразование обобщенной функции 2:541  
 Фурье ряд 2:533  
 Фурье ряд (по ортогональным многочленам) 2:537  
 Фурье ряд почти периодической функции 2:538  
 Фурье число 2:533  
 Фурье - Бесселя интеграл 2:527  
 Фурье - Бесселя ряд 2:527  
 Фурье - Стильеса преобразование 2:539  
 Фурье - Стильеса ряд 2:539

## X

Хаага теорема 2:796  
 Хаара мера 2:797  
 Хаара система 2:798  
 Хаара условие 2:796  
 Хадвиера гипотеза 2:802  
 Хана разложение 2:803  
 Хана - Банаха теорема 2:803  
 Ханта - Стейна теорема 2:934  
 хаос 1:546  
 характер ассоциативной алгебры 1:553  
 характер группы 1:551  
 характер конечномерного представления полупростой алгебры Ли 1:551  
 характер полугруппы 1:553  
 характер представления ассоциативной алгебры 1:552  
 характер представления группы 1:552  
 характер  $C^*$ -алгебры 1:551  
 характеризационные теоремы 1:564  
 характеристик метод 3:719  
 характеристика 1:554  
 характеристика поля 1:562  
 характеристическая поверхность 1:564  
 характеристическая подгруппа 1:563  
 характеристическая полоса 1:563  
 характеристическая функция 1:560; 1:561  
 характеристический класс 1:556  
 характеристический многочлен 1:563  
 характеристический показатель 1:560

характеристический функционал 1:561  
 характеристическое многообразие 1:562  
 характеристическое отображение 1:562  
 характеристическое уравнение 1:559  
 характеристическое число 1:562  
 характеров группа 1:550  
 характеров формула 1:549  
 Харди вариация 2:821  
 Харди классы 2:816  
 Харди неравенство 2:818  
 Харди преобразование 2:821  
 Харди признак 2:818  
 Харди теорема 2:820  
 Харди - Литлвуда признак 2:819  
 Харди - Литлвуда проблема 2:819  
 Харди - Литлвуда теорема 2:820  
 Хассе инвариант 2:840  
 Хассе принцип 2:841  
 Хаусдорфа аксиома 2:841  
 Хаусдорфа мера 2:842  
 Хаусдорфа метод суммирования 2:843  
 Хаусдорфа операция 2:843  
 Хаусдорфа размерность 2:841  
 Хаусдорфа - Юнга неравенства 2:844  
 Хаусдорфова метрика 2:843  
 Хаусдорфово пространство 2:843  
 Хегора диаграмма 2:846  
 Хегора разбиение 2:845

Хелли теорема 2:850  
 Хеллингера интеграл 2:849  
 Хеллингера расстояние 2:849  
 Хефлигера структура 2:802  
 'хи - квадрат' критерий 1:584  
 'хи - квадрат' распределение 1:583  
 Хилла уравнение 2:882  
 Хинчина интеграл 3:258  
 Хинчина неравенство 3:258  
 Хинчина теорема 3:258  
 Ходжа гипотеза 2:884  
 Ходжа многообразие 2:886  
 Ходжа структура 2:884

Ходжа теорема 2:885  
 Холлова подгруппа 2:804  
 Хопфа алгебра 2:927  
 Хопфа инвариант 2:929  
 Хопфа расслоение 2:928  
 Хопфа - Ринова теорема 2:930  
 Хопфова группа 2:929  
 хорд метод 1:585  
 хорда 1:585  
 Хотеллинга критерий 2:933  
 Хотеллинга  $T^2$ -распределение 2:933  
 Хьюитта расширение 2:861

## Ц

Цассенхауза группа 5:537  
 Цассенхауза формула 5:536  
 целая рациональная функция 2:363  
 целая точка 3:114  
 целая функция 2:361  
 целевая функция 3:1011  
 целое 3:85  
 целое расширение кольца 3:104  
 целочисленное программирование 3:85  
 целый идеал 3:109  
 целый объект категорий 3:111  
 целых точек распределение 3:115  
 центр 1:537; 1:538  
 центр группы 1:539  
 центр и фокуса проблема 1:539  
 центр кольца 1:539  
 центр частично упорядоченного множества 1:539  
 центра и фокуса проблема 1:539  
 централизатор 1:537  
 центральная алгебра 1:532  
 центральная предельная теорема 1:534  
 центральная простая алгебра 1:537  
 центральное произведение группы 1:537  
 центральные показатели 1:532  
 центральный ряд группы 1:537  
 центрированное семейство множеств 1:539  
 центроаффинная геометрия 1:540  
 центроаффинное пространство 1:540  
 центро - фокус 1:540

цепная дробь 1:805  
 цепная линия 1:507  
 цепная рекуррентность 1:542  
 цепное кольцо 1:543  
 цепной модуль 1:542  
 цепь 1:542  
 Цермело аксиома 5:537  
 Цермело теорема 5:537  
 цикл 1:922  
 циклическая группа 1:922  
 циклическая полугруппа 1:923  
 циклические координаты 1:922  
 циклический модуль 1:922  
 циклоида 1:923  
 циклоидальная кривая 1:923  
 цилиндр 1:926  
 цилиндрическая конструкция 1:931; 3:611  
 цилиндрическая мера 1:931  
 цилиндрическая поверхность 1:931  
 цилиндрические координаты 1:926  
 цилиндрические функции 1:926  
 цилиндрическое множество 1:931  
 цилиндроид 1:932  
 Цирелсона пространство 4:903  
 циркуляция 1:593  
 циссоида 1:593  
 цифры 1:589  
 цоколь 4:888  
 Цорна лемма 5:551



## Ч

Чаплыгина метод 1:547  
 Чаплыгина теорема 1:548  
 частиц метод 4:103  
 частичная геометрия 4:98  
 частичная проблема собственных значений 4:99  
 частично рекурсивная функция 4:100  
 частично рекурсивный оператор 4:100  
 частично упорядоченная группа 4:100  
 частично упорядоченное множество 4:100  
 частичного притяжения область 1:253  
 частичный порядок 4:99  
 частичный предел 4:99  
 частная производная 4:96  
 частный дифференциал 4:97  
 частный коэффициент корреляции 4:96  
 частных кольцо 2:548  
 частотная теорема 2:572  
 Чебышева квадратурная формула 1:573  
 Чебышева метод 1:571  
 Чебышева многочлены 1:572  
 Чебышева неравенство 1:568  
 Чебышева постоянная 1:567  
 Чебышева система 1:575  
 Чебышева теорема 1:575; 1:576  
 Чебышева теоремы 1:576  
 Чебышева уравнение 1:567  
 Чебышева функции 1:568  
 Чебышевская сеть 1:572  
 Чебышевская точка 1:572  
 Чебышевский альтернанс 1:566  
 Чебышевский итерационный метод 1:569  
 Чебышевский радиус 1:574  
 Чебышевский центр 1:566  
 Чебышевское множество 1:574

Чебышевское приближение 1:566  
 Чевы теорема 1:541  
 Чезаро кривая 1:540  
 Чезаро методы суммирования 1:541  
 Чешмена - Энского метод 1:548  
 Чёрча  $\lambda$ -абстракция 1:589  
 Чёрча тезис 1:589  
 Четаева принцип 1:581  
 Четаева теоремы 1:581  
 Четаева уравнения 1:580  
 Четаева функция 1:581  
 четная функция 2:407  
 четное число 2:407  
 четырех красок задача 2:526  
 четырехвершинник 4:379  
 четырехмерное многообразие 2:526  
 четырехсторонник 4:395  
 четырехугольник 4:378  
 Чеха когомологии 1:531  
 Чжоу кольцо 1:585  
 Чжоу многообразие 1:586  
 Чжоу теорема 1:586  
 Чжэня класс 1:577  
 Чжэня характер 1:577  
 Чжэня число 1:579  
 чисел теория 3:1005  
 чисел теория, вероятностная 3:1006  
 числитель 3:1009  
 число 3:1001  
 $e$  (число) 2:316  
 числовое поле 3:1004  
 чистая подгруппа 4:375  
 чистый подмодуль 4:375

## Ш

Шаля теорема 1:566  
 шапка 1:466  
 шар 1:299  
 Шарлье многочлены 1:564  
 Шарлье распределение 1:564  
 шаровая функция 4:894  
 Шаудера метод 4:714

Шаудера теорема 4:715  
 Шварца альтернирующий метод 4:728  
 Шварца дифференциал 4:729  
 Шварца дифференциальный параметр 4:733  
 Шварца интеграл 4:730  
 Шварца лемма 4:731  
 Шварца поверхность 4:732

Шварца симметрическая производная 4:732  
 Шварца теорема симметрии 4:733  
 Шварца уравнение 4:729  
 Шварца формула 4:729  
 Шварца функция 4:729  
 Шварца ядро 4:731  
 Шварцшильда метрика 4:733  
 Шварцшильда поле 4:733  
 Шевалле группа 1:582  
 Шеннона теорема 4:800  
 Шёнфлиса гипотеза 4:721  
 Шепли вектор 4:801  
 Шепарда поправки 4:808  
 Шерка поверхность 4:720  
 Шеффера штрих 4:807  
 широкая топология 5:364  
 Шлефли интеграл 4:721  
 Шмидта группа 4:810  
 Шнирельмана метод 4:811  
 Шоке симплекс 1:585  
 Шотки проблем 4:721  
 Шоттки теорема 4:723  
 Шпеккерова последовательность 4:910  
 Шпернера лемма 4:936  
 Шрёдингера представление 4:724  
 Шрёдингера уравнение 4:724

Шрейера система 4:723  
 Штейна многообразие 4:1026  
 Штейна пространство 4:1026  
 Штейнера кривая 4:1027  
 Штейнера система 4:1028  
 Штейнера точка 4:1028  
 Штейница теорема 4:1030  
 Штёрмера метод 5:27  
 Штифеля многообразие 4:1036  
 Штифеля число 4:1037  
 Штифеля - Уитни класс 4:1037  
 штрафных функций метод 4:117  
 Штурма кривые 5:46  
 Штурма теорема 5:56  
 Штурма - Лиувилля задача 5:50  
 Штурма - Лиувилля обратная задача 5:53  
 Штурма - Лиувилля оператор 5:48  
 Штурма - Лиувилля уравнение 5:47  
 Шуберта многообразие 4:725  
 шум аддитивный 1:35  
 Шура индекс 4:725  
 Шура кольца 4:727  
 Шура лемма 4:726  
 Шура мультипликатор 4:726  
 Шура теоремы 4:727

## Э

Эберлейна компакт 2:316  
 Эвбулида парадокс 2:394  
 Эверетта интерполяционная формула 2:407  
 эвольвента (плоской кривой) 2:410  
 эволюта 2:408  
 эволюта плоской кривой 2:408  
 эволюционное уравнение 2:409  
 эволюционный оператор 2:409  
 Эджворта ряд 2:319  
 эйконала уравнение 2:327  
 Эйленберга - Маклейна пространство 2:328  
 Эйлера критерий 2:397  
 Эйлера метод 2:402  
 Эйлера метод суммирования 2:405  
 Эйлера многочлены 2:404  
 Эйлера подстановка 2:405  
 Эйлера постоянная 2:397  
 Эйлера преобразование 2:406

Эйлера произведение 2:404  
 Эйлера прямая 2:405  
 Эйлера ряд 2:404  
 Эйлера теорема 2:406  
 Эйлера тождество 2:400  
 Эйлера уравнение 2:397  
 Эйлера формула 2:399  
 Эйлера формулы 2:399  
 Эйлера функция 2:400  
 Эйлера - Лагранжа уравнение 2:401  
 Эйлера - Маклорена формула 2:401  
 Эйлера - Фурье формулы 2:400  
 Эйлеров класс 2:397  
 Эйлерова характеристика 2:396  
 Эйлеровы интегралы 2:401  
 Эйлеровы углы 2:396  
 Эйлеровы числа 2:403  
 Эйнштейна правило 2:328



- Эйнштейна уравнения 2:328  
 Эйнштейна - Смолуховского уравнение 2:328  
 Эйри уравнение 1:61  
 Эйри функции 1:61  
 Эйткена схема 1:63  
 эквиаффинная геометрия 2:375  
 эквиаффинная плоскость 2:376  
 эквиаффинная связность 2:375  
 эквивалентность 2:377  
 эквивалентность категорий 2:378  
 эквивалентные представления 2:378  
 эквивалентные преобразования 2:379  
 эквивариантная оценка 2:381  
 эквивариантные когомологии 2:380  
 эквидистанта 2:376  
 эконометрия 2:317  
 эксперименты с автоматами 1:258  
 экспонента группы 2:417  
 экспоненциальная топология 2:419  
 экспоненциальная функция 2:419  
 экспоненциального типа функция 2:591  
 экспоненциальное отображение 2:419  
 экстраполяция 2:432  
 экстремалей поле 2:434  
 экстремалей семейство 2:442  
 экстремаль 2:433  
 экстремальная длина 2:435  
 экстремальная задача 2:437  
 экстремально несвязное пространство 2:443  
 экстремальной метрики метод 2:436  
 экстремальные задачи, численные методы решения 2:437  
 экстремальные свойства полиномов 2:441  
 экстремальные свойства функций 2:441  
 экстремум 2:443  
 эксцентриситет 2:317  
 эксцесса коэффициент 2:414  
 эксцессивная функция 2:414  
 элемент аналитической функции 1:160  
 элементарная Абелева группа 2:334  
 элементарная арифметика 2:334  
 элементарная система аксиом 2:334  
 элементарная теория 2:337  
 элементарная теория чисел 2:335  
 элементарное событие 2:334  
 элементарные делители 2:334  
 элементарные функции 2:335  
 эллипс 2:341  
 эллипсоид 2:342  
 эллипсоидальная гармоника 2:343  
 эллипсоидальные координаты 2:342  
 эллиптическая геометрия 2:348  
 эллиптическая кривая 2:344  
 эллиптическая поверхность 2:354  
 эллиптическая точка 2:354  
 эллиптическая функция 2:346  
 эллиптические координаты 2:343  
 эллиптический интеграл 2:348  
 эллиптический оператор 2:350  
 эллиптический параболоид 2:351  
 эллиптический цилиндр 2:346  
 эллиптического типа уравнение 2:352  
 эллиптического типа уравнение, численные метод решения 2:352  
 Эмдена уравнение 2:356  
 эмпирическое распределение 2:356  
 Энгелев элемент 2:360  
 Энгелева алгебра 2:360  
 Энгелева группа 2:360  
 Энгеля теорема 2:361  
 эндоморфизм 2:357  
 эндоморфизмов кольцо 2:358  
 эндоморфизмов полугруппа 2:358  
 энергетический метод 2:359  
 энергетическое неравенство 2:359  
 энергии интеграл 2:359  
 энергия мер 2:359  
 Эннепера поверхность 2:361  
 энтропийная теория динамических систем 2:364  
 энтропия 2:363  
 энтропия измеримого разбиения 2:364  
 энтропия метрическая 3:724  
 $\epsilon$ -энтропия 2:315  
 эпидемии процесс 2:371  
 Эпименида парадокс 2:372  
 эпиморфизм 2:372  
 эпициклоида 2:371  
 Эратосфена решето 2:381  
 эргодическая теорема 2:382  
 эргодическая теория 2:382  
 эргодическая теория некоммутативная 2:384  
 эргодическое множество 2:382  
 эргодичность 2:385  
 Эрдеша задача 2:382  
 Эрланга распределение 2:385

Эрлангенская программа 2:385  
 Эрмита интерполяционная формула 2:853  
 Эрмита многочлены 2:854  
 Эрмита преобразование 2:855  
 Эрмита проблема 2:855  
 Эрмита тождество 2:853  
 Эрмита уравнение 2:852  
 Эрмита функции 2:853  
 Эрмитов оператор 2:858  
 Эрмитова матрица 2:857  
 Эрмитова метрика 2:858  
 Эрмитова связность 2:855

Эрмитова структура 2:858  
 Эрмитова форма 2:856  
 Эрмитово симметрическое пространство 2:859  
 Эрмитово ядро 2:857  
 этальная топология 2:393  
 этальные когомологии 2:393  
 этальный морфизм 2:393  
 эффективная оценка 2:321  
 эффективность асимптотическая критерия 2:320  
 эффективность статистической процедуры 2:320  
 эффективный критерий 2:321

## Ю

Юнга диаграмма 5:533  
 Юнга подгруппа 5:533  
 Юнга признак 5:532

Юнга симметризатор 5:533  
 Юнга таблица 5:533  
 Юнга теорема 3:236

## Я

ядерная  $C^*$ -алгебра 3:992  
 ядерная билинейная форма 3:992  
 ядерная конгруэнция 3:253  
 ядерная норма 3:993  
 ядерная пара 3:256  
 ядерное пространство 3:997  
 ядерный оператор 3:994  
 ядро в теории игр 1:858  
 $k$ -ядро игры 3:254  
 $n$ -ядро игры 3:1000  
 ядро интегрального оператора 3:255  
 ядро комплексной последовательности 3:254  
 ядро линейного оператора 3:254  
 ядро лупы 3:254  
 ядро метода суммирования 3:255  
 ядро множества 3:255  
 ядро морфизма категории 3:254

ядро полугруппы 3:255  
 Якоби матрица 3:216  
 Якоби метод 3:216  
 Якоби многообразие, Якобиан 3:220  
 Якоби многочлены 3:217  
 Якоби поле 3:221  
 Якоби преобразование 3:219  
 Якоби принцип 3:219  
 Якоби проблема обращения 3:215  
 Якоби символ 3:219  
 Якоби скобки 3:210  
 Якоби уравнение 3:214  
 Якоби условие 3:211  
 Якоби эллиптические функции 3:212  
 Якобиан 3:221  
 Янга - Миллса поле 5:529  
 Ячейка 1:531



## 编 后 记

由原苏联科学院院士、通讯院士和苏联数学各领域的权威学者执笔撰写的《数学百科全书》(Математическая энциклопедия, 1977—1986)及其英译增补版(Encyclopaedia of mathematics, 1988—1994)是当今世界上的一部最新、最全面、水平最高的大型数学工具书,对于我国广大科学工作者(特别是数学工作者)、工程技术人员、教师和学生都有重要参考价值。1989年7月15日中国数学会第五届常务理事会第六次会议在中国科学院数学所召开,理事长王元院士主持会议,讨论决定支持与指导科学出版社翻译出版这部巨著,并将其列为中国数学会的最重要的工作之一;随后立即成立了编译委员会,负责组织领导工作;科学出版社成立了《数学百科全书》编辑组,承担具体的编辑工作,从此开始了为期十年的艰苦跋涉。至今,全书五卷的编译工作已经全部完成,并已从1994年起陆续出版。

本书篇幅巨大,内容广泛深入,涉及到现代数学的几乎一切领域,阐述了各个分支学科的历史背景、发展现状、最新成果,包括其中的具体问题和方法,定义和使用了几万个名词术语(其中有一些是近年来新出现的),编译工作是十分艰巨和繁重的。十年来,在编译委员会的领导和组织下,200多位学者、专家参加了本书的编译工作,其中既有年长的数学家,也有中青年数学工作者。他们不辞劳苦,勇承重担,不计报酬多寡,克服重重困难,终于使本书中文版得以成功问世。

本书是国家新闻出版署重点图书规划项目之一,并得到国家自然科学基金(数学天元基金)和中国科学院科学出版基金联合资助。这保证了本书的顺利出版。

在这部巨著即将出齐之际,自然会使人想到老一辈数学家对这项工作的亲切关怀和热情鼓励。苏步青教授为本书题写书名。陈省身教授为中文版作序并来社指导工作,他还多次来信予以鼓励。陈省身教授在一次大会上讲:“科学出版社翻译出版的《数学百科全书》,共五大卷,每卷约千页。中国能够出版这样的巨著,即使是翻译,也是一项可喜的成就。这是一部十分完备的百科全书,值得赞扬的。”<sup>①</sup>程民德教授在生病住院期间还坚持校阅有关学科的译稿。本书尚未出齐,程先生已不幸去世。程民德先生为科学出版社主编的一套优秀的研究生教材——《现代数学基础丛书》,出版了40多种,并已重印。对于老一辈数学家对数学出版所给予的大力支持和所寄予的厚望,后人当永志不忘。

本书前几卷出版后,受到许多数学家和读者的好评。武汉大学齐民友教授来信

---

<sup>①</sup> 陈省身,中国的数学——几件数学新闻和对中国数学的一些看法,自然科学进展,7(1997),2,129—135。

说：“看到第一卷后，大家赞不绝口，都说科学出版社为中国数学界做了一件大好事。”尽管如此，我们清楚地知道，由于本书编译工作难度极大，特别是由于编辑力量不足，编辑人员水平有限，科学出版社又正处于转型时期，本书中文版在科学内容、文字表达、名词术语的规范和统一等等方面，都存在许多差错和不足之处。这是我们对读者深感抱歉的。我们诚恳地欢迎热心的读者能够批评、指正，以期在重印时认真修订。

本书未设数学家条目。编译之初，曾计划增补 600 篇数学家小传，但是由于时间和人力的原因，这一工作未能完成。对此有兴趣的读者可参阅近年国内出版的有关著作。<sup>①</sup>

数学是中华民族擅长的学科。中国古代数学有过辉煌的成就，长期处于世界领先地位，只是到了明朝以后才逐渐停滞并远远地落后了。近 100 多年以来，经过几代人的不懈努力，我国数学取得了重大进步，在某些领域涌现出了一批世界第一流的数学家。现在，众多的数学工作者正在为振兴我国的数学事业而奋斗，以使中国数学在 21 世纪能够率先赶上世界先进水平，使中国成为一个数学大国。科学出版社在 80 年代编译出版了日本的《岩波数学辞典》(第二版)(《数学百科辞典》，1984)，现在又编译出版了苏联的《数学百科全书》；我们热切地企盼着在下一个世纪能够出版我国自己编纂的、具有世界水平的《数学大辞典》或者《数学百科全书》。

科学出版社《数学百科全书》编辑组

张鸿林 杜小杨 夏墨英

1999 年 12 月

---

<sup>①</sup> 例如，可参阅：吴文俊主编，世界著名数学家传记(上、下册)，科学出版社，1995；梁宗巨主编，数学家传略辞典，山东教育出版社，1989。